4/11/2022 Μάθημα 12ο ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Παραδείγματα

(3) Η εκθετική συνάρτηση $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in (0,+\infty)$ έχει ολόμορφη επέκταση σε όλο το $\mathbb{C}$ η οποία κληρονομεί τις βασικές της ιδιότητες.

Έστω ορίζουμε $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $f(x+iy) = e^x \cdot e^{iy} =$
$= e^x(\cos y + i \sin y)$
για $z = x+iy \in \mathbb{C}$ $(x,y \in \mathbb{R})$. Η f έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $f'(z) = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

β) $f(z+w) = f(z) f(w)$ $\forall$ $z,w \in \mathbb{C}$

γ) $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$

δ) Η f δεν είναι ρητή συνάρτηση

Αποδ. α) $f = u + iv$, όπου $u(x,y) = e^x \cos y$ και $v(x,y) = e^x \sin y$
Οι u,v είναι C^∞-διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2$
Τότε έχουμε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = u(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -v(x,y)$ και $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y = v(x,y)$

$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y = u(x,y)$ $\forall$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Όπως βλέπουμε ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = u, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -v\right)$

Η f είναι λοιπόν διαφορίσιμη (ως προς $\mathbb{R}$) στο $\mathbb{R}^2$ αφού $u,v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ και οι u,v ικανοποιούν τις εξ. C-R

Άρα $\exists$ η f' και $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) =$

$= u(z) + iv(z) = f(z)$

β) Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z = a+ib$ και $w = c+id$

Τότε $f(z+w) = e^{a+c} e^{i(b+d)} = e^a e^c \cdot e^{ib} e^{id} =$

$= (e^a e^{ib})(e^c e^{id}) =$

$= e^{a+ib} e^{c+id} = e^z e^w$

γ) Αν $z = x+iy \in \mathbb{C}$ τότε $f(z) = e^x e^{iy}$ και άρα:

$$|f(z)| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot 1 = e^x > 0 \Rightarrow f(z) \neq 0$$

δ) Αν $f = \frac{p}{q}$ ήταν ρητή συνάρτηση ($p, q \in \mathbb{C}[z]$ = πολυώνυμα του z με μιγαδικούς συντελεστές)

τότε η f θα είχε όριο καθώς το $z \to \infty$ με $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Ασκ. 2 [Αν $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $q(z) = b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0$

τότε για $|z|$ αρκετά μεγάλο, έχω ότι:

$$\frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0} = \frac{a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z a_n} + \dots + a_1 \frac{1}{z^{n-1} a_n} + \frac{a_0}{z^n a_n}\right)}{b_m z^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{z b_m} + \dots + b_1 \frac{1}{z^{m-1} b_m} + \frac{b_0}{z^m b_m}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n z^n}{b_m z^m} g(z) \text{ με } \lim_{z\to\infty} g(z) = \frac{1}{1} = 1$$

- Αν $\underline{\underline{n > m}}$ τότε $\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n}{b_m} z^{\overset{>0}{n-m}} g(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \infty$

- Αν $\underline{\underline{n < m}}$ τότε $\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{g(z)}{z^{m-n}} \xrightarrow[z\to\infty]{m-n>0} 0$

- Αν $\underline{\underline{n = m}}$ τότε $\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n}{b_n} g(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \frac{a_n}{b_n}$

Άρα $\exists$ στο $\tilde{\mathbb{C}}$ το $\lim_{z\to\infty} \frac{p(z)}{q(z)}$

Όμως η f, όπως ορίστηκε, δεν έχει όριο καθώς το $z \to \infty$ ($\nexists \lim_{z\to\infty} f(z)$) Πράγματι αν $z_n = 2\pi i n$, $n \in \mathbb{N}$ τότε:

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad (\text{γιατί } |z_n| = 2n\pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty)$$

και $f(z_n) = e^{2\pi i n} = \cos 2n\pi + i\sin(2n\pi) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Αν όμως $w_n = 2\pi i n + i\pi$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $w_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

και $f(w_n) = \underbrace{e^{2\pi i n}}_{1} \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -1 \longrightarrow -1 \neq 1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{z\to\infty} f(z)$, άτοπο γιατί υποθέσαμε $f = \frac{p}{q}$ (ρητή)

! Η f λέγεται <u>εκθετική συνάρτηση</u> και συμβολίζεται με e^z, δηλ. θέτουμε <u>$f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$</u>

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $u: \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λέγεται αρμονική, αν είναι της κλάσης C^2 ($\exists$ οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς) και ισχύει για την u, η εξίσωση Laplace ↓⊛

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη (Ω ανοικτό) Αποδεικνύεται από το Θεώρημα του Cauchy ότι και η f' είναι ολόμορφη στο Ω. Άρα η f' έχει μιγαδ. παραγώγους κάθε τάξης, δηλ. $\exists$ οι $f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$ και (άρα) είναι συνεχείς συναρτήσεις. Από αυτό έπεται ότι οι u, v είναι C^∞- διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2$.

Πράγματι, $f'(z) = \frac{df}{dx}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z) =$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (1) \Rightarrow$$

u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς στο Ω αφού f' συνεχής $\Rightarrow$
$\Rightarrow u, v \in C^1(\Omega)$

⊛ δηλ. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ στο Ω

Επειδή f'' συνεχής και ισχύει $f''(z) = \frac{\partial f'}{\partial x}(z) =$

$= \frac{1}{i}\frac{\partial f'}{\partial y}(z)$ (2)

Από τις (1), (2) έχω ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

είναι συνεχής στο Ω.

Άρα $u \in C^2(\Omega)$. Το ίδιο και για την v.
Επαγωγικά δείχνουμε ότι $u, v \in C^n(\Omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, είναι ολόμορφη στο ανοιχτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τότε οι u και v είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Αποδ. Οι u, v είναι C^2 στο Ω από την προηγ. παρατήρηση.
Επίσης από τις εξισώσεις C-R έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ και}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Αλλά u, v είναι $C^2(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ (*)

Προσθέτοντας έπεται ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \overset{(*)}{=} 0$

Άρα ~~οr~~ είναι αρμονική. Ανάλογα αποδ. ότι η ~~xx~~ v είναι αρμονική.

Παραδείγματα: 1) Η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ και η $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ είναι αρ

Πράγματι αν $z = x + iy$ τότε $z^3 = (x+iy)^3 =$
$= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$
$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

Εφόσον η συνάρτηση $z \xmapsto{f} z^3$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}\, f = u$, $\mathrm{Im}\, f = v$ έπεται ότι οι u, v είναι αρμονικές στο $\mathbb{C}$.
Επίσης οι συναρτήσεις $e^x \cos y$ και $e^x \sin y$ είναι αρμονικές ως πραγματικό και φανταστικό μέρος της εκθετικής συνάρτησης.

② Αν η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη στο ανοιχτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τότε

α) Οι $u^2 - v^2$, uv, $u^3 - 3uv^2$ και $3u^2v - v^3$ είναι αρμονικές στο Ω αφού οι συναρτήσεις $f^2 = (u+iv)^2 = (u^2 - v^2) + 2iuv$ είναι ολόμορφη και η $f^3 = (u+iv)^3 = (u^3 - 3uv^2) + i(3u^2v - v^3)$ είναι επίσης ολόμορφη.

Αν επιπλέον $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ τότε οι $\dfrac{u}{u^2+v^2}$ και $\dfrac{v}{u^2+v^2}$ είναι αρμονικές στο Ω.

(Ιδιαιτέρως οι $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ και $v(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ είναι αρμονικές στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\bar{f}}{|f|^2} = \dfrac{u - iv}{u^2+v^2}$ και βέβαια η $\dfrac{1}{f}$ είναι ολόμορφη στο Ω.

β) Επειδή η $e^f = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$ είναι ολόμορφη στο στο Ω έπεται ότι οι $e^u \cos v$ και $e^u \sin v$ είναι αρμονικές στο Ω. (ως πραγμ. και φανταστικό μέρος ολόμορφης)

(3) Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος κάθε μιγαδικού πολυωνύμου (ιδιαίτερα κάθε μιγαδικού μονωνύμου z^n, $n\geq 1$) είναι αρμονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$. Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για μιγαδικές ρητές συναρτήσεις.

Ορισμός Δύο (αρμονικές) συναρτήσεις u, v ορισμένες σε ένα ανοιχτό $\Omega\subseteq\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ λέγονται αρμονικές συζυγείς αν η $f=u+iv$ είναι ολόμορφη στο Ω.

Τότε η v ονομάζεται αρμονική συζυγής της u.
Τα προηγούμενα παραδείγματα μας δίνουν παραδ. ζευγών αρμονικών συζυγών συναρτήσεων.

π.χ. οι $e^x\cos y$ και $e^x\sin y$ όπως και οι $\frac{x}{x^2+y^2}$ και $-\frac{y}{x^2+y^2}$ είναι ζεύγη αρμονικών συζυγών συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι αν οι u και v είναι αρμονικές συζυγείς, τότε και οι $-v, u$ είναι αρμονικές συζυγείς. (η $f=u+iv$ είναι ολόμορφη άρα και η $if=-v+iu$ είναι ολόμορφη)

Όμως οι v ~~και~~ και u δεν είναι κατ' ανάγκη αρμονικές συζυγείς. (παίζει ρόλο η σειρά των u,v)

Παρατήρηση: Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ τόπος και $u:\Omega\to\mathbb{R}$ αρμονική συνάρτηση. Τότε η συζυγής αρμονική της u (αν $\exists$) είναι μοναδική ως προς μια πραγματική προσθετική σταθερά.

Πράγματι, αν οι συναρτήσεις v και v_1 είναι αρμονικές συζυγείς της u, δηλ. οι συναρτήσεις $f=u+iv$ και $g=u+iv_1$ είναι ολόμορφες στον τόπο Ω

αυτό το περίεργο σχήμα είναι ∂

Θ.δ.ο $(f-g)'=0$ στο $\underline{\Omega}$.

Έχω ότι $f' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} \overset{C-R}{=} \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ και

$$g' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} \overset{C-R}{=} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Άρα $f' = g' \underset{\underline{\Omega}\ \text{τόπος}}{\Longrightarrow} \exists\ c \in \mathbb{C}$ ώστε $f-g=c$ στο $\underline{\Omega} \Leftrightarrow$

$$(u+iv)-(u+iv_1)=c \Leftrightarrow i(v-v_1)=c$$

Αλλά η $v-v_1$ είναι πραγματική συνάρτηση $\Rightarrow c=ik$, για κάποιο $k\in\mathbb{R} \Rightarrow i(v-v_1)=ik \Rightarrow v-v_1=k\in\mathbb{R}$