ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 17/10/22

5ο μάθημα

Ορίζω για $z\in\mathbb{C}$ τη $\sqrt[n]{z}$ $(n\in\mathbb{N})$ ως εξής:

Αν $z\neq 0$ τότε $z=re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta=\arg(z)\in(-\pi,\pi]$

και ορίζω $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{\frac{i\theta}{n}}$

Αν $z=0$ ορίζω $\sqrt[n]{0}=0$

Παραδείγματα:

(1) $\sqrt{-1}$ $\quad -1=|-1|e^{i\pi}=e^{i\pi}\Rightarrow\sqrt{-1}=e^{i\pi/2}=\overset{0}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}+i\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=i$

Επειδή $i=e^{i\pi/2}$ έχουμε $\sqrt{i}=\sqrt{|i|}\cdot e^{i\pi/4}=\sqrt{1}\cdot e^{i\pi/4}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

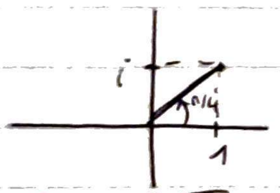
$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{e^{i\pi/2}}=e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

(2) Να υπολογισθεί η $\sqrt[5]{1+i}$

$1+i=|1+i|\cdot e^{i\theta}$, όπου $\theta=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}\in(-\pi,\pi]$

$r=|1+i|=\sqrt{2}$

Έτσι $\sqrt[5]{1+i}=\sqrt[5]{|1+i|}\,e^{i\theta/5}=\sqrt[5]{\sqrt{2}}\,e^{i\pi/20}=\sqrt[10]{2}\,e^{i\pi/20}$



(3) $\sqrt[3]{-1}=?$ $\quad -1=e^{i\pi}\Rightarrow\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{|-1|}\,e^{i\pi/3}=e^{i\pi/3}=$

$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

! $\sqrt[3]{-1}\neq-1$ όπως στο $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Η τοπολογία του Μιγαδικού Επιπέδου}}$$

Ακολουθία Μιγαδικών Αριθμών:

Η ακολουθία $(z_n)_{n\geq1}$ $[z:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση$]$

λέμε ότι συγκλίνει στο $z \in \mathbb{C}$ αν $|z_n - z| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και γράφουμε $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

$z_n \to z \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq n_0$ να είναι $|z_n - z| < \varepsilon$

Γνωρίζουμε ότι $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
Έτσι $z_n \to z \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z)$ και $\operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z)$

(*) Θα γράφουμε $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$

(*) Στην περίπτωση αυτή, θα γράφουμε
Επίσης αν $z_n \to z \in \mathbb{C}$ τότε $|z_n| \xrightarrow{n\to\infty} |z|$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχω:
$0 \leq \big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow |z_n| \to |z|$

Παραδείγματα

1. Έστω $z_n = z^n$, για $|z| < 1$
τότε $z_n = z^n \to 0$ διότι $|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ διότι $|z| < 1$

2. $\dfrac{2n}{n-3i} \xrightarrow{n\to\infty} 2$

Πράγματι: $\left|\dfrac{2n}{n-3i} - 2\right| = \left|\dfrac{2n - 2n + 6i}{n-3i}\right| = \dfrac{|6i|}{|n-3i|} = \dfrac{6}{\sqrt{n^2+9}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

3. Έστω $z_n = \dfrac{1}{n + in^2 + 1}$ Εξετάστε την (z_n) ως προς τη σύγκλιση

Θέτω $w_n = n + in^2 + 1$ και έχω
$z_n = \dfrac{1}{w_n} = \dfrac{\overline{w_n}}{|w_n|^2} = \dfrac{n + 1 - in^2}{(n+1)^2 + n^4} = \dfrac{n+1}{(n+1)^2 + n^4} - i\,\dfrac{n^2}{(n+1)^2 + n^4}$

$$\operatorname{Re} z_n = \frac{n+1}{n^4+(n+1)^2} \underset{\text{ίσιωσ}}{\overset{\text{έχει το}}{\sim}} \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\operatorname{Im} z_n = -\frac{n^2}{n^4+(n+1)^2} \sim -\frac{n^2}{n^4} = -\frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \operatorname{Im} z_n \to 0$$

Άρα $\quad z_n \to 0 + 0i = 0$

Πρόταση: Αν (z_n), (w_n) είναι ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ και $z_n \to z \in \mathbb{C}$, $w_n \to w \in \mathbb{C}$ τότε

i) $a \cdot z_n + b \cdot w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} az + bw$, $\forall\, a, b \in \mathbb{C}$

ii) $z_n \cdot w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \cdot w$

iii) αν $w \neq 0$ τότε $\dfrac{z_n}{w_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{z}{w}$

Πρόταση: Έστω (z_n) ακολουθία μιγ. αριθμών. Τα ΑΕΙ

a) Η (z_n) συγκλίνει σε κάποιο $z \in \mathbb{C}$

β) Η (z_n) είναι Cauchy

[Ορσ. Αν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ τότε λέμε ότι η (z_n) είναι Cauchy αν $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $\forall\, n, m \geq n_0$ ισχύει ότι $|z_n - z_m| < \varepsilon$]

Αποδ.

(α) ⇒ (β)

$\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ έχω $|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z_m - z| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow |z_n - z_m| \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} 0 \Rightarrow (z_n)_n \text{ είναι Cauchy}$$

(β) ⇒ (α)

Θέτω $z_n = x_n + i y_n$ με $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ $\forall n$.

Τότε $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ $|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ διότε $(z_n) =$ Cauchy

$|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$

Άρα οι ακολ. (x_n), (y_n) είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$ άρα $\exists\ x, y \in \mathbb{R}$: $x_n \to x$ και $y_n \to y$

τότε $z_n = x_n + iy_n \xrightarrow{n\to\infty} x + iy = z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Η (z_n) συγκλίνει

Ορισμός: Έστω $(z_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{C}$. Η (z_n) θα λέγεται φραγμένη, αν $\exists\ M>0$: $|z_n| \leq M$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ είναι φραγμένη

Παράδειγμα: Αν $z_n = (-1)^n + i\frac{1}{n}$, $n \geq 1$ τότε η (z_n) είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει $(|z_n| \leq \sqrt{2})$
($(-1)^n$ δεν συγκλίνει)

Πρόταση: Αν $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ και $z_n \to z \in \mathbb{C}$ τότε κάθε υπακολουθία (z_{k_n}) της (z_n) συγκλίνει στο z

Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία (z_n) μιγ. αριθμών, έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

Αποδ. (z_n) φραγμένη $\Rightarrow \exists\ M>0 \cdot |z_n| \leq M\ \forall n$

Αν $z_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$ τότε:

$|x_n|, |y_n| \leq |z_n| \leq M \Rightarrow$ $(x_n), (y_n)$ φραγμένες στο $\mathbb{R}$

Από Θ. B-W στο $\mathbb{R}$ $\exists$ υπακολουθία (x_{k_n})

της (x_n) και $x \in \mathbb{R}$: $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$

$(y_{k_n}) \subseteq (y_n)$ = φραγμένη $\xRightarrow{B-W \text{ στο } \mathbb{R}}$
Η (y_{k_n}) ~~έχουσα~~ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία
$(y_{k_{\lambda_n}})_{n\geq 1}$ με $y_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{n\to\infty} y$, για κάποιο $y \in \mathbb{R}$
Τότε $x_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{n\to\infty} x$ και $y_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{n\to\infty} y$ άρα

$z_{k_{\lambda_n}} = x_{k_{\lambda_n}} + i y_{k_{\lambda_n}} \to x + iy = z \Rightarrow$ Η $(z_{k_{\lambda_n}})$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της (z_n)

Το Εκτεταμένο Μιγαδικό Επίπεδο

Ορισμός: Θα λέμε ότι η ακολουθία (z_n) συγκλίνει στο ∞ αν $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \iff \forall\, M>0,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_0$ $|z_n| \geq M$.
$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ = το επεκτεταμένο μιγ επίπεδο

Αν $(z_n), (J_n)$ ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ και $z_n \to \infty$, $J_n \to J \in \mathbb{C}$ τότε $z_n + J_n \to \infty$ μπορούμε να γράψουμε
$\infty + a = a + \infty = \infty \quad \forall\, a \in \mathbb{C}$.

Επίσης στο $\tilde{\mathbb{C}}$ έχω για $a \in \mathbb{C}$:

$$\infty - a = a - \infty = \infty$$
$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty \ (a \neq 0), \quad \infty \cdot \infty = \infty$$
$$\frac{\infty}{a} = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0)$$

Απροσδιοριστίες στο $\tilde{\mathbb{C}}$: $\infty(\pm\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\,\infty$, $\frac{0}{0}$, 0^0

Παραδείγματα:

① Εξετάστε ως πρός τη σύγκλιση τις ακολουθίες:
τις

α) $z_n = z^n, \quad n \geq 1, \quad z \in \mathbb{C}$

β) $z_n = (1+i)^n, \quad n \geq 1$

γ) $z_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}, \quad n \geq 1$

δ) $z_n = n!\; z^n, \quad n \geq 1$

ε) $z_n = \dfrac{z^n}{n^a}, \quad a > 0, \quad |z| > 1$

στ) $z_n = \sqrt[n]{z}, \quad z \neq 0$

ζ) $z_n = i^n, \quad n \geq 1$

Λύση

α) Αν $|z| < 1 \Rightarrow |z_n| = |z|^n \xrightarrow[|z|<1]{n \to \infty} 0$

Αν $|z| > 1 \Rightarrow |z_n| = |z|^n \longrightarrow +\infty \Rightarrow z_n \to \infty$

Αν $|z| = 1$ και $z_n \xrightarrow{n \to \infty} a$ για κάποιο $a \in \mathbb{C}$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} z \cdot z^n = z^{n+1} \longrightarrow a \\ z \cdot z^n \to z \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow z \cdot a = a \quad (1)$$

$|z_n| = |z|^n = 1 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a \neq 0 \quad (2)$

(1), (2) $\Rightarrow z = 1$

Η $z_n = z^n$ με $|z| = 1$ συγκλίνει αν $z = 1$

β) $|z_n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \quad (\sqrt{2} > 1) \Rightarrow z_n \to \infty$

γ) $|z_n| = \dfrac{|1+i|^n}{n} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n} \longrightarrow +\infty \Rightarrow z_n \to \infty$

δ) $z_n = n!\, z^n,\ n \geq 1$

Αν $|z| \geq 1$ τότε $|z_n| = n!\,|z|^n \geq n! \to +\infty \Rightarrow$
$|z_n| \to +\infty \Rightarrow z_n \to \infty$

Αν $|z| < 1$ τότε $|z_n| = n!\,|z|^n = \dfrac{n!}{(|z|^{-1})^n} \to +\infty$

$$\frac{1}{|z_n|} = \frac{1}{n!\,|z|^n} = \frac{(|z|^{-1})^n}{n!} \to 0 \Rightarrow z_n \to \infty$$

Για $z = 0$ $\quad z_n = n!\,z^n = 0 \to 0$

Άρα $z_n \to \infty \ \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

ε) $z_n = \dfrac{z^n}{n^a}$, $a > 0$ $\quad |z| > 1$

$$|z_n| = \frac{|z|^n}{n^a} \to +\infty \underset{|z|>1}{\Longrightarrow} z_n \to \infty$$

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{\dfrac{|z|^{\cancel{n}+1}}{(n+1)^a}}{\dfrac{\cancel{|z|^n}}{n^a}} = \frac{n^a\,|z|}{(n+1)^a} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^a \cdot |z| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z| > 1$$

$\Rightarrow |z_n| \to +\infty \Rightarrow z_n \to \infty$

στ) $z_n = \sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$

Άρα αν $z = |z| e^{i\theta}$, όπου $\theta = \arg z$, τότε

$$z_n = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta/n} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \sin\frac{\theta}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\to 1(\underbrace{\cos 0}_{1} + i \underbrace{\sin 0}_{0}) = 1$$

ζ) $z_n = i^n$

$$z_{4n} = i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$z_{4n+1} = i^{4n+1} = (i^4)^n\, i = i \xrightarrow[n\to\infty]{} i \neq 1$$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty} z_{4n+1} \neq \lim\limits_{n\to\infty} z_{4n} \Rightarrow$ Η (z_n) δεν συγκλίνει.