513. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΉ ΛΟΓΙΚΉ

Σημειώσεις, Χειμερινό Εξάμηνο 2024

Γιάννης Λιβιεράτος
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών

Τελευταία προσθήκη: 29/10/2024 | Τελευταία επιμέλεια: 29/10/2024

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές γράφονται για τους/τις/τα φοιτητές/ριες/τα του τμήματος μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Βασίζονται στο βιβλίο των C.C. Leary και L. Kristiansen, "A Friendly Introduction to Mathematical Logic" [1]. Επεκτείνονται και επιμελούνται συνεχώς, ως εκ τούτου θα περιέχουν και λάθη.

1 Δομές και Γλώσσες

1.1 Συντακτικό και σημασιολογία

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τον τρόπο που θα προσεγγίζουμε τα μαθηματικά αντικείμενα του ενδιαφέροντός μας. Θα διακρίνουμε μεταξύ *συντακτικής* και *σημασιολογικής* προσέγγισης. Στην πρώτη, θα ασχοληθούμε με το πως να γράφουμε μαθηματικές προτάσεις με αυστηρό φορμαλιστικό τρόπο, βάσει ενός πλήρως προσδιορισμένου συνόλου συμβόλων και αυστηρών κανόνων συνδυασμών αυτών. Στην δεύτερη, θα δούμε πως να μιλάμε περί της αλήθειας ή μη αυτών των προτάσεων, αναλόγως με την ερμηνεία που θα δίνουμε στα σύμβολά μας.

1.2 Γλώσσες

Ξεκινάμε ορίζοντας μια αυστηρή μαθηματική *γλώσσα*, ένα (αριθμήσιμο) **άπειρο** σύνολο συμβόλων δηλαδή, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να μιλήσουμε για συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα.

Ορισμός 1.1. Μία (πρωτοβάθμια) γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι ένα σύνολο διακεκριμένων συμβόλων, κανένα από τα οποία δεν περιέχεται σε κάποιο άλλο, τα οποία χωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες:

I. Λογικά σύμβολα:

1. Παρενθέσεις: $(,)$.
2. Σύνδεσμοι: $\neg, \wedge$.
3. Ποσοδείκτες: $\forall$.
4. Μεταβλητές: $\mathcal{V} = \{v_n \mid v \in \mathbb{N}\}$.

II. Παράμετροι:

1. Σύμβολο ισότητας: $=$.
2. Σύμβολα σταθερών: σύνολο $\mathcal{C}$, με $|\mathcal{C}| \geq 0$.
3. Σύνολο n-μελών συναρτησιακών συμβόλων $\mathcal{F}^n$, με $|\mathcal{F}^n| \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
4. Σύνολο n-μελών κατηγορηματικών συμβόλων $\mathcal{R}^n$, με $|\mathcal{R}^n| \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. $\diamond$

Το σύνολο συμβόλων μπορεί να υποτεθεί και πεπερασμένο αλλά επαρκώς μεγάλο, ή ακόμη και υπεραριθμήσιμο. Θα μπούμε σε τέτοιες λεπτομέρειες εφόσον και όταν χρειαστεί. Ακόμη, το $=$ μπορεί να υποτεθεί και ως διμελές κατηγορηματικό σύμβολο και ως εκ τούτου μία γλώσσα δεν το περιέχει κατ' ανάγκην. Παρ' όλα αυτά, για να αποφύγουμε παρανοήσεις, θέλουμε όταν εμφανίζεται να έχει συγκεκριμένη ερμηνεία.

Τα λογικά σύμβολα υπάρχουν σε κάθε γλώσσα και ως εκ τούτου δεν θα κάνουμε ειδική αναφορά σε αυτά. Για να ορίσουμε μία συγκεκριμένη γλώσσα, χρειάζεται να προσδιορίσουμε μόνο τις παραμέτρους της. Ο ρόλος που έχει το πλήθος μελών ενός συναρτησιακού ή κατηγορηματικού συμβόλου θα φανεί στην συνέχεια. Αναφέρουμε εδώ για παράδειγμα ότι ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο, ένα στοιχείο δηλαδή του συνόλου $\mathcal{F}^n$, θα χρησιμοποιείται ως συνάρτηση δύο μεταβλητών, ενώ ένα στοιχείο του $\mathcal{R}^n$ ως σχέση μεταξύ τριών μεταβλητών.

Ορίζουμε την συνάρτηση πλήθος μελών ενός συναρτησιακού ή κατηγορηματικού συμβόλου:

$$\mu : \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^n \right) \to \mathbb{N},$$

με $\mu(f) = n$ (αντίστοιχα $\mu(P) = n$) αν και μόνον αν $f \in \mathcal{F}^n$ (αντίστοιχα $P \in \mathcal{R}^n$). Συχνά θα γράφουμε το πλήθος των μελών ως εκθέτη στο εκάστοτε σύμβολο. Ως εκ τούτου μία γλώσσα με τρία μονομελή και δύο διμελή συναρτησιακά σύμβολα, θα μπορούσε να έχει $\mathcal{F}^1 = \{f_1^1, f_2^1, f_3^1\}$, $\mathcal{F}^2 = \{f_1^2, f_2^2\}$ και $\mathcal{F}^n = \emptyset$, για κάθε $n \geq 3$.

Παράδειγμα 1. Ας δούμε μερικά παραδείγματα γλωσσών. Μερικές από αυτές θα επανέρχονται συνεχώς ως αντικείμενα ενασχόλησής μας.

(i) $\mathcal{L}_\emptyset = \emptyset$: η κενή γλώσσα, που περιέχει μόνον λογικά σύμβολα.

(ii) $\mathcal{L}_{ST} = \{\in^2\}$: γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\in^2 = \in$. Προορίζεται για ζητήματα της θεωρίας συνόλων, με το $\in$ να υποδηλώνει την σχέση του μέλους μεταξύ ενός στοιχείου και ενός συνόλου. Είναι λογικό να σκεφτούμε να εισάγουμε και σύμβολα για την σχέση του υποσυνόλου ή το κενό σύνολο, αλλά το να κρατήσουμε τόσο μικρή της γλώσσα μας θα φανεί χρήσιμο στην συνέχεια.

(iii) $\mathcal{L}_{G_{add}} = \{0, +^2\}$: γλώσσα με ένα σύμβολο σταθεράς και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο. Προορίζεται για να εκφράζει προσθετικές ομάδες, με το 0 να είναι το ουδέτερο στοιχείο και το $+^2 = +$ η συνήθης πρόσθεση.

(iv) $\mathcal{L}_{G_{mult}} = \{1, {}^{-1^1}, \cdot^2\}$: γλώσσα με ένα σύμβολο σταθεράς, ένα μονομελές συναρτησιακό και ένα διμελές. Προορίζεται για να εκφράζει πολλαπλασιαστικές ομάδες, με το 1 να είναι το ουδέτερο στοιχείο, το ${}^{-1^1} = {}^{-1}$ να είναι η συνάρτηση του αντιστρόφου και το $\cdot^2 = \cdot$ η συνήθης πράξη του πολλαπλασιασμού.

(v) $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S^1, +, \cdot, E^2, <^2\}$: η γλώσσα της θεωρίας αριθμών. Το μονομελές συναρτησιακό $S^1 = S$ προορίζεται να εκφράζει την συνάρτηση του επομένου. Το διμελές $E^2 =$ την ύψωση σε εκθέτη και το διμελές κατηγορηματικό $<^2 = <$ την σχέση του μικροτέρου.

(vi) $\mathcal{L}_{foo} = \{c_0, c_1, \ldots, c_k, f_1^{\mu(f_1)}, f_2^{\mu(f_2)}, \ldots, f_l^{\mu(f_l)}, P_1^{\mu(P_1)}, \ldots, P_m^{\mu(P_m)}\}$: γενική μορφή γλώσσας με k σύμβολα σταθεράς, l συναρτησιακά σύμβολα, όπου το i-οστό έχει $\mu(f_i)$ μέλη, $i = 1, \ldots, l$ και m κατηγορηματικά σύμβολα, όπου το j-οστό έχει $\mu(P_j)$ μέλη, $j = 1, \ldots, m$.

Παρ' ότι οι παράμετροι των γλωσσών, αλλά και το σύνολο από το οποίο οι μεταβλητές παίρνουν τιμές, επιδέχονται πολλών διαφορετικών ερμηνειών, σε περιπτώσεις γλωσσών όπως οι $\mathcal{L}_{ST}$ και $\mathcal{L}_{NT}$, υπάρχει ο συνηθισμένος τρόπος να ερμηνεύουμε τα σύμβολά τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα μιλάμε για *κανονικές* ερμηνείες και σπανίως θα χρησιμοποιούμε διαφορετικούς τρόπους να μιλάμε για αυτά τα σύμβολα. $\diamond$

Εν γένει, όταν χρησιμοποιούμε σύμβολα όπως το $+$, δεν θα τους δίνουμε διαφορετική σημασία από την συνήθη.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αφού μία σταθερά μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση με 0 μέλη, και μία n-μελής συνάρτηση είναι μία $(n+1)$-μελής σχέση όπου κάθε n-άδα μεταβλητών επεκτείνεται σε ακριβώς μία $(n+1)$-άδα, είναι δυνατόν να μιλήσουμε για πρωτοβάθμιες γλώσσες χρησιμοποιώντας για παραμέτρους μόνο κατηγορηματικά σύμβολα. Υπάρχουν και άλλοι λόγοι πλην της απλής πρακτικότητας που δεν επιλέγουμε να το κάνουμε αυτό, αλλά δεν είναι της παρούσης.

1.3 Όροι και Τύποι

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει μεν την γλώσσα μας, αλλά όχι τον τρόπο - τους κανόνες - με τον οποίο μπορούμε να γράφουμε. Συνεχίζουμε να συζητάμε στα πλαίσια της συντακτικής προσέγγισης: δεν μας απασχολεί η σημασία/ερμηνεία των συμβόλων μας, παρά μόνο το με ποιους τρόπους αυτά μπορούν να βρίσκονται σε σειρά, ώστε να έχει νόημα να ασχοληθούμε με αυτά.

Μία *συμβολοσειρά* (ή *λέξη*) w κάποιας γλώσσας $\mathcal{L}$, είναι μία πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας. Το μήκος $|w|$ είναι το πλήθος των συμβόλων αυτών. Η *κενή* λέξη, η συμβολοσειρά δηλαδή χωρίς κανένα σύμβολο, συμβολίζεται με ϵ.

Παράδειγμα 2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την γλώσσα της θεωρίας αριθμών $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}$. Θέλουμε να διακρίνουμε μεταξύ πέντε συμβολοσειρών:

$$v_{17})(\forall + +(((0, \tag{1}$$

$$+ S0ESS0 \cdot SS0SSS0 \tag{2}$$

$$(\neg(\forall v_1)((\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2)))) \tag{3}$$

$$\exists x \forall y (x < y) \tag{4}$$

$$\bar{1} + \bar{2}^{\bar{2}\cdot\bar{3}} \tag{5}$$

Θα ορίσουμε κανόνες ώστε η συμβολοσειρά 1 να είναι αδιάφορη ή μη επιτρεπτή, η συμβολοσειρά 2 να αναφέρεται σε κάποιο μαθηματικό αντικείμενο (με γλωσσολογικούς όρους ουσιαστικό) της γλώσσας μας, ενώ η συμβολοσειρά 3 να αποτελεί κάποια δήλωση (αληθή ή ψευδή) στην γλώσσα μας.

Χαλαρώνοντας λίγο την τυπική γραφή ώστε να ανταποκρινόμαστε στην συνήθη μαθηματική γραφή, θέλουμε η συμβολοσειρά 4 να αποτελεί *συντομογραφία* της 2 και η 5 της 3. ◇

Σε ότι ακολουθεί διακρίνουμε μεταξύ του κατηγορηματικού συμβόλου $=$ και του $:=$. Το $:=$ θα είναι σύμβολο της φυσικής μας γλώσσας, της *μετα-γλώσσας*, που θα χρησιμοποιούμε για να ορίζουμε μεταβλητές με συγκεκριμένες τιμές. Για παράδειγμα, γράφοντας $s := (\forall v_1)(= P^2 v_1 f^1 c_1 c_0)$ εννοούμε ότι η μεταβλητή s, που υπάρχει στην μετα-γλώσσα μας, αναφέρεται στην συμβολοσειρά που ακολουθεί.

Ορισμός 1.2. Έστω μία γλώσσα $\mathcal{L}$. Μία συμβολοσειρά t της $\mathcal{L}$ θα λέγεται *όρος* αν:

1. η t είναι μεταβλητή ή σύμβολο σταθεράς,
2. ή $t := f t_1 t_2 \cdots t_n$, όπου f ένα n-μελές συναρτησιακό σύμβολο και $t_1, \ldots, t_n$ όροι. ◇

Παράδειγμα 3. Η συμβολοσειρά 2 του παρ. 2 είναι όρος:

- Το διμελές συναρτησιακό σύμβολο $+$ ακολουθείται από δύο όρους, τους $S0$ και $ESS0{\cdot}SS0SSS0$.
- Η $S0$ είναι όρος καθώς το μονομελές συναρτησιακό S ακολουθείται από τον όρο σταθερά 0.
- Η $ESS0 \cdot SS0SSS0$ είναι επίσης όρος, καθώς το διμελές συναρτησιακό E ακολουθείται από τους όρους $SS0$ και $\cdot SS0SSS0$.
- Η $SS0$ είναι όρος, καθώς το 0 είναι σταθερά και ακολουθεί το S και το $S0$ ως όρος ακολουθεί το S.
- Η $\cdot SS0SSS0$ καθώς οι $SS0$ και $SSS0$ είναι.

Οι συμβολοσειρές 1, 3 του παρ. 2 δεν είναι όροι, καθώς περιέχουν σύμβολα που δεν εμφανίζονται στον Ορ. 1.2. $\diamond$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο ορισμός του όρου είναι αναδρομικός. Ως εκ τούτου, για να παράγουμε όρους της γλώσσας μας, ξεκινάμε από μεταβλητές και σταθερές και τις συνδυάζουμε με κατάλληλα συναρτησιακά σύμβολα ώστε να φτιάχνουμε όλο και πιο πολύπλοκα αντικείμενα.

Ορισμός 1.3. Έστω μία γλώσσα $\mathcal{L}$. Μία συμβολοσειρά ϕ της $\mathcal{L}$ θα λέγεται *τύπος* (*φόρμουλα*) αν:

1. $\phi := = t_1 t_2$, όπου t_1, t_2 όροι,
2. $\phi := P t_1 t_2 \cdots t_n$, όπου P ένα n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο και $t_1, \ldots, t_n$ όροι,
3. $\phi := (\neg \psi)$, όπου ψ τύπος,
4. $\phi := (\psi \vee \chi)$, όπου ψ, χ τύποι,
5. $\phi := (\forall v)(\psi)$, όπου ψ τύπος και $v \in \mathcal{V}$.

Αν ϕ είναι τύπος των περιπτώσεων 1 ή 2, θα λέγεται *ατομικός* τύπος. $\diamond$

Ο ορισμός των τύπων είναι επίσης αναδρομικός (λόγω των περιπτώσεων 3 έως 5). Στην περίπτωση 5, θα λέμε ότι η *εμβέλεια* του ποσοδείκτη $\forall v$ στον τύπου ϕ είναι ο τύπος ψ.

Παράδειγμα 4. Η συμβολοσειρά 3 του παρ. 2 είναι τύπος:

- Τα v_1, v_2 είναι μεταβλητές, άρα όροι. Ως εκ τούτου το διμελές κατηγορηματικό $<$ ακολουθούμενο από αυτούς, είναι ατομικός τύπος.
- Ο ατομικός τύπος $< v_1 v_2$ βρίσκεται στην εμβέλεια του ποσοδείκτη $\forall v_2$.
- Η $(\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2))$ είναι τύπος, αφού η $(\forall v_2)(< v_1 v_2)$ είναι τύπος και βρίσκεται στην εμβέλεια του $\forall v_1$.
- Αφού η $(\forall v_1)((\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2)))$ είναι τύπος, το ίδιο ισχύει και για την $(\neg(\forall v_1)((\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2))))$.

1.4 Επαγωγή

1.5 Προτάσεις

1.6 Δομές

References

[1] Christopher C Leary and Lars Kristiansen. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. Milne Library Publishing, 2015.