Εισαγωγική Διάλεξη στην Μαθηματική Λογική

Γιάννης Λιβιεράτος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

2 Μαρτίου 2024

Τι δεν είναι η Μαθηματική Λογική

- Δεν είναι κάποια μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων.
- Δεν είναι η εκμάθηση κάποιου αφηρημένου τρόπου σκέψης.
- Δεν είναι ο τρόπος που θα γράφετε μαθηματικά από εδώ και πέρα.

Ιστορικά

Η Λογική αποτελεί κλάδο της φιλοσοφίας:

- Τι είναι η αλήθεια;
- Τι αποτελεί έγκυρο συλλογισμό και πως κρίνουμε αν ένας συλλογισμός είναι έγκυρος.
- Πως αποδεικνύεται ένας ισχυρισμός.
- Η λεγόμενη μαθηματική απόδειξη, αποτελεί ιστορική έννοια.

Ιστορικά

Η Λογική αποτελεί κλάδο της φιλοσοφίας:

- Τι είναι η αλήθεια;
- Τι αποτελεί έγκυρο συλλογισμό και πως κρίνουμε αν ένας συλλογισμός είναι έγκυρος.
- Πως αποδεικνύεται ένας ισχυρισμός.
- Η λεγόμενη μαθηματική απόδειξη, αποτελεί ιστορική έννοια.

Σύνδεσμοι:
Britannica - History of logic
Wiki - Mathematical logic
Medium - Brief history

Ιστορικά, συνέχεια

- 1η αξιωματική Θεμελίωση, Gottlob Frege:

1879 Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens [A Formal Language for Pure Thought Modeled on that of Arithmetic]

1884 Die Grundlagen der Arithmetik [Foundations of Arithmetic]

1893 Grundgesetze der Arithmetik [Basic Laws of Arithmetic]

Ιστορικά, συνέχεια

- 1η αξιωματική Θεμελίωση, Gottlob Frege:
  - 1879 Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens [A Formal Language for Pure Thought Modeled on that of Arithmetic]
  - 1884 Die Grundlagen der Arithmetik [Foundations of Arithmetic]
  - 1893 Grundgesetze der Arithmetik [Basic Laws of Arithmetic]
- 23 Προβλήματα, David Hilbert:
  - 1900 Υπόθεση του Συνεχούς, Συνέπεια Βασικής Αριθμητικής.
  - 1928 Entscheidungsproblem: συστηματοποιημένη διαδικασία απόφασης για το αν ένας τυπικός μαθηματικός ισχυρισμός είναι αληθής ή όχι. Το 1936, οι Alonzo Church και Alan Turing έδειξαν ότι είναι αδύνατο.

Ιστορικά, συνέχεια

- 1η αξιωματική Θεμελίωση, Gottlob Frege:
  - 1879 Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens [A Formal Language for Pure Thought Modeled on that of Arithmetic]
  - 1884 Die Grundlagen der Arithmetik [Foundations of Arithmetic]
  - 1893 Grundgesetze der Arithmetik [Basic Laws of Arithmetic]
- 23 Προβλήματα, David Hilbert:
  - 1900 Υπόθεση του Συνεχούς, Συνέπεια Βασικής Αριθμητικής.
  - 1928 Entscheidungsproblem: συστηματοποιημένη διαδικασία απόφασης για το αν ένας τυπικός μαθηματικός ισχυρισμός είναι αληθής ή όχι. Το 1936, οι Alonzo Church και Alan Turing έδειξαν ότι είναι αδύνατο.

1910 Principa Mathematica: Bertrand Russel, A. N. Whitehead.

1931 Θεώρημα μη πληρότητας, Kurt Gödel.

Το Παράδοξο του Κουρέα

Ορισμός: Κουρέας είναι αυτός που κουρεύει όσους δεν κουρεύουν τον εαυτό τους.

Ερώτηση: Ποιος κουρεύει τον κουρέα;

Το Παράδοξο του Κουρέα

Ορισμός: Κουρέας είναι αυτός που κουρεύει όσους δεν κουρεύουν τον εαυτό τους.

Ερώτηση: Ποιος κουρεύει τον κουρέα;

"*That contradiction is extremely interesting. (...) I think it is clear that you can only get around it by observing that the whole question whether a class is or is not a member of itself is nonsense, i.e. that no class either is or is not a member of itself, and that it is not even true to say that, because the whole form of words is just noise without meaning.*" *—Bertrand Russell, The Philosophy of Logical Atomism*

Παράδοξο του Russel, 1901

Ορισμός: Σύνολο είναι μια συλλογή σαφώς ορισμένων και διακριτών αντικειμένων (Georg Cantor).

$x \in A$: το στοιχείο x είναι μέλος του συνόλου A.

$A \subseteq B$: κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ και $B \subseteq A)$.

$A := \{x \mid$ το x έχει την ιδιότητα $P\}$.

Δυναμοσύνολο: $P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$.

Παράδοξο του Russel, 1901

Ορισμός: Σύνολο είναι μια συλλογή σαφώς ορισμένων και διακριτών αντικειμένων (Georg Cantor).

$x \in A$: το στοιχείο x είναι μέλος του συνόλου A.

$A \subseteq B$: κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ και $B \subseteq A)$.

$A := \{x \mid$ το x έχει την ιδιότητα $P\}$.

Δυναμοσύνολο: $P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$.

$$R := \{X \mid X \notin X\}$$

Παράδοξο του Russel, συνέχεια

Παράδοξο: Αν $R := \{X \mid X \notin X\}$, τότε $R \in R$?

Παράδοξο του Russel, συνέχεια

$$\text{Παράδοξο: Αν } R := \{X \mid X \notin X\}, \ \text{ τότε } R \in R?$$

1903 Frege: "*Hardly anything more unfortunate can befall a scientific writer than to have one of the foundations of his edifice shaken after the work is finished. This was the position I was placed in by a letter of Mr. Bertrand Russell, just when the printing of this volume was nearing its completion.*" *(translated in Jean van Heijenoort 1967.)*

1908 Θεωρία Τύπων (Russel), Zermelo–Fraenkel Αξιωματική Θεωρία Συνόλων.

Τι θα κάνουμε στην Μαθηματική Λογική

- Διακρίνουμε την “γλώσσα-αντικείμενο” με την “μετα-γλώσσα”.
- Ορίζουμε, στην φυσική γλώσσα τους κανόνες με τους οποίους γράφουμε στην τυπική γλώσσα.
- Διατυπώνουμε προτάσεις μαθηματικού ενδιαφέροντος στην τυπική γλώσσα.
- Ελέγχουμε την ορθότητά τους “συντακτικά” και “σημασιολογικά”.
- Αναπτύσσουμε “μετα-θεωρήματα” που αφορούν την εκφραστική δυνατότητα της γλώσσας μας.

Γιατί;

Όχι:

- Χρονοβόρο.
- Στρυφνό.
- Άσχημο στο μάτι (υποκειμενικό).
- Εκφραστική δύναμη γλωσσών "αντιστρόφως ανάλογη" της περιπλοκότητας διατύπωσης προτάσεων σε αυτές.
- "Απέτυχε" (θεώρημα μη-πληρότητας).
- Δύσκολη η παραγωγή νέων αποτελεσμάτων.

Γιατί;

Όχι:

- Χρονοβόρο.
- Στρυφνό.
- Άσχημο στο μάτι (υποκειμενικό).
- Εκφραστική δύναμη γλωσσών "αντιστρόφως ανάλογη" της περιπλοκότητας διατύπωσης προτάσεων σε αυτές.
- "Απέτυχε" (θεώρημα μη-πληρότητας).
- Δύσκολη η παραγωγή νέων αποτελεσμάτων.

Ναι:

- Ιστορικότητα.
- Βαθιά κατανόηση μαθηματικών και των θεμελίων τους.
- Περιέργεια.
- Σύνδεση με αποτελέσματα Θεωρητικής Πληροφορικής.
- "Ζωντανός" κλάδος.