

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
715. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ
8 Ιουνίου 2023

Δίνεται το ακόλουθο μοντέλο

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{1}{k_1} x - \frac{\alpha}{k_1} y \right) \quad (1\alpha')$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 y \left(1 - \frac{1}{k_2} y - \frac{\beta}{k_2} x \right), \quad (1\beta')$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές, με το αντίστοιχο πρόβλημα Cauchy:

Με δεδομένα $x_0, y_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(x, y): \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2$, τέτοια ώστε η (x, y) να ικανοποιεί τόσο το σύστημα (Π_1) εξισώσεων (1) στο $(\mathcal{I} \setminus \{0\})^\circ$, όσο και την $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Θεωρούμε, επίσης, δεδομένη την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης του (Π_1) .

I. 1M Να αναγνωρίσετε και να χαρακτηρίσετε τους όρους αλληλεπίδρασης, και μη, του δεξιού μέλους του (1).

II. 1M Να αποδείξετε τη θετική ολικότητα της λύσης του (Π_1) .

III. i. 1M Να βρείτε τις μηδενοκλινείς καμπύλες.

ii. 2M Να απεικονίσετε αδρά το πεδίο διευθύνσεων για όλες τις πιθανές περιπτώσεις.

IV. 1M Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του (Π_1) .

V. i. 1M Να δείξετε ότι υπάρχει διακλάδωση από το $(k_1, 0)$ όταν $k_1 = \frac{k_2}{\beta}$, και από το $(0, k_2)$ όταν $k_2 = \frac{k_1}{\alpha}$, και να χαρακτηρίσετε το είδος της διακλάδωσης αυτής.

ii. 1M Να χαρακτηρίσετε τα σημεία ισορροπίας ως προς την ευστάθεια σε περιοχή γύρω από τη διακλάδωση.

iii. 1M Να κατασκευάσετε διάγραμμα διακλάδωσης, να βρείτε τον τύπο της και να χαρακτηρίσετε την ευστάθεια στο σημείο της διακλάδωσης.

Υπόδειξη: Για τον κάθετο άξονα εφαρμόστε απλοποίηση Lyapunov-Schmidt.

VI. 1M Να βρείτε τα αναλλοίωτα σύνολα του προβλήματος (Π_1) .