Ασκήσεις 1

(Α1) Νά λυθεί τό ΠΑΤ : $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Α2) Δείξτε ότι ο $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$, $t>0$, είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} \underline{y} \ := A(t)\,\underline{y}$$

(Α3). Έστω $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμικός μετασχηματισμός $\underline{y} = A\underline{x}$ πού ορίζεται από τόν (σταθερό) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω τό σύστημα $\underline{z}' = A\underline{z}$, $\underline{z}(0) = \underline{z}_0$. Δείξτε ότι αν $\underline{z}_0 \in E$ τότε $\underline{z}(t) \in E$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(Α4) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι $e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt}$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$ αν καί μόνο αν $AB = BA$.

(Α5) Νά βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_3 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}\right\}$$

(Α6) Έστω τό σύστημα: $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\underline{x}$. (i) Νά βρεθεί η γενική λύση. (ii) Νά προσδιορισθεί τό σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις νά τείνουν στό $\underline{0}$ καθώς $t \to +\infty$.

A7. Έστω $\Phi(t)$ θ.π.λ της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$. Δείξτε ότι η γενική λύση της $\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$ είναι:

$$\underline{y}(t) = \Phi(t)\underline{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\, b(t)\, dt \quad , \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

A8. Νά βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $t^2 x'' - 2x = 0$, $t > 0$, της μορφής $x(t) = t^p$. Με την χρήση των δύο λύσεων νά βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 0 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A9. Έστω σύστημα $\Sigma : \underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (σταθερός). Τό σύστημα $\Sigma' : \underline{x}' = -A^T\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ ονομάζεται συζυγές του Σ. Δείξτε ότι αν $\underline{\varphi}(t)$ καί $\underline{\psi}(t)$ οι λύσεις των Σ καί Σ', αντίστοιχα, τότε $\underline{\psi}^T(t)\underline{\varphi}(t) = \underline{x}_0^T \underline{y}_0$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$

A10. Δίνεται τό σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}(t)$ όπου $\underline{f}$ συνεχής καί 2π-περιοδική συνάρτηση καί $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι τό σύστημα έχει 2π-περιοδική λύση αν καί μόνο αν

$$\int_0^{2\pi} \underline{x}^T(t)\, \underline{f}(t)\, dt = 0$$

γιά κάθε 2π-περιοδική λύση $\underline{x}(t)$ του συζυγούς (ομογενούς) συστήματος $\underline{x}' = -A^T\underline{x}$.

Υπόδειξη: (1) Δείξτε ότι η $\underline{y}(t)$ είναι περιοδική (2π) συνάρτηση αν η αρχική συνθήκη $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$-(I_n - e^{-2\pi A})\underline{y}_0 = \int_0^{2\pi} e^{-As} \underline{f}(s)\, ds.$$

που είναι της μορφής $A\underline{x} = \underline{b}$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ωστε η εξίσωση αυτή νά έχει λύση είναι $\underline{b} \in Range(A) = Ker(A^T)^{\perp}$.

(A11) Δείξτε ότι $\frac{\partial}{\partial \tau} G(t,\tau) = -G(t,\tau)A(\tau)$ όπου $G(t,\tau)$ είναι ο πίνακας μεταφοράς που αντιστοιχεί στό σύστημα $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ καί $A = [a_{ij}(t)]$ μέ $a_{ij}(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σέ διάστημα $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$.

(A12) Εστω τό σύστημα $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}]$ όπου a_{ij} είναι συνεχείς συναρτήσεις στό $\mathbb{R}$. Ορίζουμε μετασχηματισμό $\underline{x}(t) = P(t)\underline{y}(t)$ όπου $P = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί p_{ij} συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στό $\mathbb{R}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι P^{-1} είναι καλά ορισμένος γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$ καί ότι $P^{-1} = [\hat{p}_{ij}]$ όπου $\hat{p}_{ij}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στό $\mathbb{R}$. (i) Δείξτε ότι $\underline{x}' = \tilde{A}(t)\underline{x}$ όπου $\tilde{A}(t) = (P'(t) + P(t)A(t))P^{-1}(t)$. (ii) Αν $\tilde{G}(t,t_0)$ η συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στό $\underline{x}' = \tilde{A}\underline{x}$, δείξτε ότι $\tilde{G}(t,t_0) = P(t)G(t,t_0)P^{-1}(t_0)$.

(A13) Είναι ο $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & e^t \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ θ.π.λ. γιά σύστημα $\underline{x}' = A\underline{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(A14) Εστω σύστημα $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}]$ όπου a_{ij} συνεχείς συναρτήσεις στό $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τό συζυγές σύστημα $\underline{z}' = -A^T(t)\underline{z}$. Έστω $G(t,t_0)$ καί $\hat{G}(t,t_0)$ οι αντίστοιχοι πίνακες μεταφοράς. Δείξτε ότι $\hat{G}(t,t_0) = G^T(t_0,t)$.

(A15) Εστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι η σειρά $(e^{At})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)_{ij} \frac{t^k}{k!}$ συγκλίνει (απολύτως) γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Έστω $m = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Δείξτε (π.χ. επαγωγικά) ότι $|(A^k)_{ij}| \le \frac{1}{n}(mn)^k$.

A16 Έστω η εξίσωση : $y'' + a_1(t) y' + a_0(t) y = 0$, όπου $a_1(t), a_2(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σέ διάστημα $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι $y_1(t)$ είναι μία λύση της εξίσωσης στό I καί ότι $y_1(t) \neq 0$, $t \in I$. Έστω $y_2(t) = v(t) y_1(t)$ όπου $v(t) \in C^2(I)$. Δείξτε ότι y_2 είναι επίσης λύση της εξίσωσης στό I, όπου

$$y_2(t) = y_1(t) \int y_1^{-2}(t) \exp\left\{ - \int a_1(t) dt \right\} dt$$

καί ότι (y_1, y_2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες στό I. Αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

βρείτε έναν θεμελιώδη πίνακα λύσεων (θ.π.λ) τού συστήματος $\underline{z}' = A(t) \underline{z}$.

A17 Δείξτε ότι $\varphi_1(t) = t e^{t^2}$ είναι λύση της δ.ε $x'' - 4t x' + (4t^2 - 2) x = 0$ καί βρείτε τη λύση πού ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(1) = e$, $x'(1) = 2e$. Επομένως νά βρεθεί η λύση του ΠΑΤ:

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - 4t^2 & 4t \end{bmatrix} \underline{y}, \quad \underline{y}(1) = \begin{bmatrix} e \\ 2e \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τό αποτέλεσμα της A16.

A18 Νά λυθεί τό ΠΑΤ: $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \underline{0}$

A19 Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ σέ κανονική μορφή companion:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

A.20 Δείξτε ότι υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας $Q^{-1}AQ = A_c$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $A_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας σε κανονική μορφή companion,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

αν και μόνο αν υπάρχει $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\det(\Gamma) \neq 0$
$\Gamma = [\underline{\beta}\ A\underline{\beta}\ A^2\underline{\beta} \cdots A^{n-1}\underline{\beta}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

A21 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $(\sigma + i\omega, \underline{x} + i\underline{z})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος του A.(*) Δείξτε ότι $(\sigma - i\omega, \underline{x} - i\underline{z})$ είναι επίσης ζεύγος ιδιοδιανύσματος/ιδιοτιμής του A. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ $V = \{c_1\underline{x} + c_2\underline{z} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι ο V είναι A-αναλλοίωτος δηλ. $\underline{y} \in V \Rightarrow A\underline{y} \in V$.
(* όπου $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $x, z \in \mathbb{R}^n$).

A22 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{y}(t)$$

A23 Να λυθεί το ΠΑΤ : $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

A24 Να βρεθεί ο εκθετικός πίνακας e^{At} αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A25 Έστω $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_k\}$ αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων πίνακα A που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$, δηλ.

$$\left.\begin{aligned}
(A-\lambda I)\,\underline{v}_k &= \underline{v}_{k-1} \\
(A-\lambda I)\,\underline{v}_{k-1} &= \underline{v}_{k-2} \\
&\vdots \\
(A-\lambda I)\,\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 \\
(A-\lambda I)\,\underline{v}_1 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

όπου $(\lambda I-A)^k\,\underline{v}_k = 0$, $(\lambda I - A)^{k-1}\,\underline{v}_k \neq 0$. Δείξτε ότι ~~η αλυσίδα~~ τα γεν. ιδιοδιανύσματα της αλυσίδας είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

A26 Έστω σύστημα $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}u$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ και $u(t)$ αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Στην Θεωρία Ελέγχου η συνάρτηση u πολλές φορές επιλέγεται ως "ανάδραση καταστάσεων", $u(t) = \underline{f}^T \underline{x}(t)$, $f \in \mathbb{R}^n$, ώστε το αντίστοιχο σύστημα "κλειστού βρόγχου", $\underline{x}' = A_c \underline{x}$, $A_c = A + \underline{b}\,\underline{f}^T$ να έχει επιθυμητές ιδιότητες. Έστω ότι

$$\Gamma = [\,\underline{b} \,|\, A\underline{b} \,|\, \cdots A^{n-1}\underline{b}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det(\Gamma) \neq 0$$

Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_c) := \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_0 \in \mathbb{R}[\lambda]$$

μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα (μέσω του διανύσματος $\underline{f}$). Δείξτε (με απλό παράδειγμα) ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $\det(\Gamma) = 0$. Υπόδειξη: Με χρήση της A20 ορίσατε αλλαγή μεταβλητών $\underline{y} = Q^{-1}\underline{x}$, $\det(Q) \neq 0$, ώστε $\underline{y}' = \hat{A}\underline{y} + \hat{\underline{b}}u$, $\hat{A} = Q^{-1}AQ$, $\hat{\underline{b}} = Q^{-1}\underline{b}$ με A_c πίνακα companion και $\hat{\underline{b}} = [0 \cdots 0\ 1]^T$.

A27 Δείξτε ότι αν $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}(t)$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}(t)]$, $a_{ij}(t)$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$, και

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

όπου $n_1 + n_2 = n$, τότε ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(t, t_0) = \begin{bmatrix} G_{11}(t, t_0) & G_{21}(t, t_0) \\ 0 & G_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

όπου $G_{ii}(t, t_0)$ είναι η λύση του ΠΑΤ

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{ii}(t, t_0) = A_{ii}(t)\, G_{ii}(t, t_0), \quad G_{ii}(t_0, t_0) = I_{n_i}$$

για $i = 1, 2$ και $G_{12}(t, t_0)$ η λύση του ΠΑΤ

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{12}(t, t_0) = A_{11} G_{12}(t, t_0) + A_{12}(t)\, G_{22}(t, t_0),$$

$$G_{12}(t_0, t_0) = 0.$$

Επομένως βρείτε τον πίνακα μεταφοράς $G(t, t_0)$ αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και υπολογίστε το όριο $\lim \underline{y}(t)$, $t \to \infty$, αν $\underline{y}(t) = \underline{\varphi}(t, t_0, \underline{y}_0)$ όπου $t_0 = 0$ και $\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\underline{\varphi}(t)$ είναι η λύση του ΠΑΤ $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$).