19/10/21 7° μαθημα

Άσκηση Ρίχνω ένα ζάρι $n=10$ φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα η μέγιστη ένδειξη να είναι s και η ελάχιστη να είναι k για $1 \le k \le s \le 6$.

$N(\Omega) = 6^{10}$

$A_s = \{$η μέγιστη ένδειξη $= s\}$ $s=1,2,\dots,6$

$\Gamma_k = \{$η ελάχιστη ενδ. $= k\}$ $k=1,2,\dots,6$

Ζητείται $P(A_s \cap \Gamma_k) = ?$

Ορίζουμε $B_s = \{$η μέγιστη είναι $\le s\}$ $s=1,2,\dots,6$

$N(B_s) = s^{10}$, $B_0 = \emptyset$

$\boxed{A_s = B_s \setminus B_{s-1}}$

$\Delta_k = \{$η ελάχιστη ενδ. $\ge k\}$, $k=1,2,\dots,6$

$\Delta_1 = \Omega, \dots \Delta_7 = \emptyset$

$N(\Delta_k) = (7-k)^{10}$

$\boxed{\Gamma_k = \Delta_k \setminus \Delta_{k+1}}$

$A_s = B_s \cap B'_{s-1}$ $\quad \Gamma_k = \Delta_k \cap \Delta'_{k+1}$

$$P(A_s \cap \Gamma_k) = P(B_s \cap B'_{s-1} \cap \Delta_k \cap \Delta'_{k+1}) = P[B_s \cap \Delta_k \cap (B_{s-1} \cup \Delta_{k+1})']$$

$$= P(B_s \cap \Delta_k \setminus (B_{s-1} \cup \Delta_{k+1})) = P(B_s \cap \Delta_k) - P(B_s \cap \Delta_k \cap (B_{s-1} \cup \Delta_{k+1}))$$

$$= P(B_s \cap \Delta_k) - P((B_s \cap \Delta_k \cap B_{s-1}) \cup (\underbrace{B_s \cap \Delta_k \cap \Delta_{k+1}}_{\Delta_{k+1}}))$$

$$= P(B_s \cap \Delta_k) - P((B_{s-1} \cap \Delta_k) \cup (B_s \cap \Delta_{k+1}))$$

$$= P(B_s \cap \Delta_k) - P(B_{s-1} \cap \Delta_k) - P(B_s \cap \Delta_{k+1}) + P(\overbrace{B_s \cap B_{s-1}}^{B_{s-1}} \cap \overbrace{\Delta_k \cap \Delta_{k+1}}^{\Delta_{k+1}})$$

$$P(A_s \cap \Gamma_k) = P(B_s \cap \Delta_k) - P(B_{s-1} \cap \Delta_k) - P(B_s \cap \Delta_{k+1}) + P(B_{s-1} \cap \Delta_{k+1})$$

$N(B_s \cap \Delta_k) = N(\{$ο μεγ $\le s$ και ο ελαχ $\ge k\})$

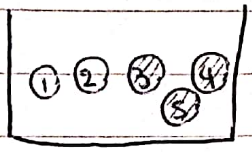
$= N(\{$όλες οι ενδ. ανήκουν στο $\{k, k+1, \dots, s\}\}) = (s-k+1)^{10}$

$$P(B_s \cap \Delta_k) = \left(\frac{s-k+1}{6}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow P(A_s \cap \Gamma_k) = \left(\frac{s-k+1}{6}\right)^{10} - \left(\frac{s-k}{6}\right)^{10} - \left(\frac{s-k}{6}\right)^{10} + \left(\frac{s-k-1}{6}\right)^{10}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ας φανταστώ μία κάλπη με 5 σφαιρίδια με αριθμούς 1,2,3,4,5, εκ των οποίων τα 1,2 άσπρα και τα 3,4,5 μαύρα.



Επιλέγω ένα σφαιρίδιο (στην τύχη)

$A = \{$το σφαιρίδιο άσπρο$\}$ $\quad P(A) = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$

$B = \{$το σφαιρίδιο να φέρει ζυγό αριθμό$\}$.

Ας υποθέσουμε ότι έγινε η εξαγωγή του σφαιριδίου και μάθαμε ότι πραγματοποιήθηκε το B.

$\Omega = \tilde{\Omega} = \{2, 4\} = B$ "δυνατά"

$A = \tilde{A} = \{2\} = A \cap B$

Ορισμός: Για δύο ενδεχόμενα A,B σε έναν χ.π $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ορίζουμε

$$P(A|B) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{εφ' όσον } P(B)>0$$

Όταν $P(A|B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = P(A)P(B)}$

τότε τα A, B καλούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητα.

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \overset{P(A)>0}{=} P(B) \Rightarrow P(B) = P(B|A)$$

$$P(A) = P(A|B) \Longleftrightarrow P(B) = P(B|A)$$

Η ισοδ. ισχύει όταν $P(A)>0$ και $P(B)>0$

πολ/κός νόμος πιθανοτήτων

$$P(A_1\cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1) \quad \text{εφ' όσον } P(A_1)>0$$

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n) = \underbrace{\boxed{P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})}}_{\Delta M} \quad \text{εφ' όσον } P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})>0$$

$(n = 2,3,4,\ldots)$

παρατ. $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1} \subseteq A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-2} \subseteq \ldots \subseteq A_1\cap A_2 \subseteq A_1$

$$\Delta M = \cancel{P(A_1)}\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\cdot\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}\cdot\ldots\cdot\frac{P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)}{\cancel{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Άσκηση

Κάποιος έχει n κλειδιά, εκ των οποίων μόνο ένα ταιριάζει στην πόρτα. Να βρεθεί η πιθανότητα να ανοίξει στην k δοκιμή $(k=1,2,\dots,n)$
(Δοκιμάζει ένα-ένα τα κλειδιά, και όποιο δεν κάνει δεν το ξαναδοκιμάζει)

$A_s = \{$η πόρτα ανοίγει στην s δοκιμή$\}$ $s=1,2,\dots,n$.

Ζητούμενο: $P(A_k)$

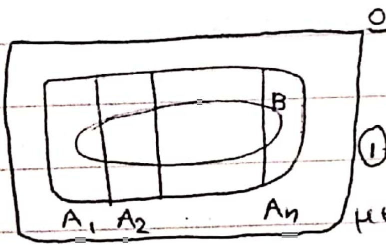
$A_k = A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_{k-1}' \cap A_k$ (επειδή $A_k \subseteq A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_{k-1}'$)

$$P(A_k) = P(A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_{k-1}' \cap A_k)$$
$$= P(A_1')\, P(A_2' \mid A_1')\, P(A_3' \mid A_1' \cap A_2') \dots P(A_{k-1}' \mid A_1' \cap \dots \cap A_{k-2}')\, P(A_k \mid A_1' \cap \dots \cap A_{k-1}')$$
$$= \frac{\cancel{n-1}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-2}} \cdots \frac{\cancel{n-(k-2)-1}}{\cancel{n-(k-2)}} \cdot \frac{1}{\cancel{n-(k-1)}} = \frac{1}{n}$$

*

Θ.Ο.Π. = Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (+τύπος Bayers)

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ ξένα ανά δύο ενδεχόμενα ($A_n \cap A_m = \emptyset$) και $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$



ΤΟΤΕ:

① $P(B) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$ με την προϋπόθεση ότι $P(A_i) > 0$ $\forall i=1,\dots,n$

② Αν ξένα και $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $P(A_n) > 0$ $\forall n$, τότε $P(B) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)$

* **Σημαντική παρατήρηση!**

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χ.π. και $B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$. Τότε η $P(\cdot \mid B)$ ορίζει πιθανότητα (όπου $P(A \mid B) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$)

Αποδ

$P(A \mid B) \geq 0$ $\forall A$ προφανές

(i) $P(\Omega \mid B) \overset{\text{ορ}}{=} \dots = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

(ii) Αν $A_1, A_2, \dots$ ξένα στοιχ. της $\mathcal{A}$ τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right) = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)}$

Αποδ ① $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \Rightarrow B = B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n)$

$\Rightarrow B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$

$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = B \cap \emptyset = \emptyset$ για $i \neq j$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right) \overset{\text{ξένα}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$$

Τύπος Bayers: Υπό τις ίδιες προϋποθέσεις του ΘΟΠ και την επιπρόσθετη $P(B) > 0$ ισχύει

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Αποδ:

$$P(A_k|B) \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{P(B \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$