

Μιγαδική Ανάλυση

Τυπολόγιο

Ιάσωνας Ασκούνης

March 20, 2025

Κεφάλαιο 1ο-2ο:Ακολουθίες και σειρές μιγαδικών αριθμών-Μιγαδικοί αριθμοί:

1. Βασικά όρια ακολουθιών:

- $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$, $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ αν $a > 0$, $(1 + \frac{z}{n})^n \rightarrow e^z$ για κάθε $z \neq 0$.
- Αν $a_n \rightarrow a$ και (b_n) αλληλ. τυχούσα ακολουθία, τότε $\limsup a_n b_n = a \limsup b_n$.
- Αν p, q είναι μιγαδικά πολυώνυμα, τότε $p(n)/q(n) \rightarrow 0$ αν $\deg p < \deg q$, επίσης $p(n)/q(n) \rightarrow +\infty$ αν $\deg p > \deg q$ και $p(n)/q(n) \rightarrow a_n/b_n$ αν $\deg p = \deg q = n$ και $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ και $q(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$.

2. Γνωστές σειρές:

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$ και αποκλίνει για $0 < p < 1$, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|z| < 1$ και αποκλίνει αν $|z| > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^M z^n$ συγκλίνει για τα z με $|z| < 1$ και οποιοδήποτε $M > 0$. Επίσης οι πραγματικές σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ συγκλίνει για $0 < r < 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^M r^n$ συγκλίνει για κάθε $M > 0$ και $0 < r < 1$.

3. Βασική σειρά:

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει για $z \in \mathbb{C}$ όπου $|z| = 1$ αλλά $z \neq 1$, αλλά η σύγκλιση δεν είναι απόλυτη.

Εφαρμογή 1: Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(2+3i)^n}{(1-2i\sqrt{3})^n}$. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $z = \frac{2+3i}{1-2i\sqrt{3}}$, τότε $z \neq 1$ προφανώς και $|z| = \frac{|2+3i|}{|1-2i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 1$ και άρα την προηγούμενη Άσκηση έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(2+3i)^n}{(1-2i\sqrt{3})^n}$ συγκλίνει.

Εφαρμογή 2: Για ποιούς πραγματικούς αριθμούς θ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $z = e^{i\theta}$ τότε παρατηρούμε ότι $|z| = 1$ και $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = 1 \iff \theta = 2k\pi$ και άρα $z \neq 1$ αν και μόνο αν $\theta \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Τότε όμως, για αυτά τα θ έχουμε λόγω της βασικής σειράς 3. έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\theta})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ συγκλίνει και για κάθε άλλο θ έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

4. Κριτήριο σύγκρισης για σειρές:

Έστω $(z_n), (w_n)$ είναι ακολουθίες μιγαδικών αριθμών. Τότε αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι $|z_n| \leq M|w_n|$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως (και άρα συγκλίνει και υπο την απλή έννοια)

5. Κριτήριο Λόγου για σειρές:

Έστω (z_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $z_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

- Αν $\lim_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
- Αν $\lim_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

6. Κριτήριο ρίζας

Έστω (z_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Τότε ισχύουν τα εξής:

- Αν $\lim_n \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
- Αν $\lim_n \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

7. Βασικά όρια συναρτήσεων:

- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{az} - 1}{z} = a$ για κάθε $a \neq 0$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(az)}{z} = a$ για κάθε $a \neq 0$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(az) - 1}{z} = a$ για κάθε $a \neq 0$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1-z)}{z} = 1$.

8. Συνέχεια και ολομορφία γνωστών συναρτήσεων:

- **Η εκθετική συνάρτηση** $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και άρα και συνεχής με $(e^z)' = e^z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επίσης ικανοποιεί τις εξής **βασικές ιδιότητες**:
 $e^z e^w = e^{z+w}, |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, e^z = e^w \iff z = w + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ και επίσης $e^z \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Τέλος $e^{\log z} = z$ για κάθε $z \neq 0$.

- **Ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου** $\log z = \log |z| + i \arg(z), z \neq 0$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με $(\log z)' = 1/z$ για κάθε $z \in \Omega$ και **δεν είναι ούτε καν συνεχής στην αρνητική ημιευθεία** $(-\infty, 0]$ και άρα ούτε ολόμορφη συνάρτηση. Εν γένει **δεν ισχύουν** τα εξής $\log(z \cdot w) = \log z + \log w, \log e^z = z$.
 - **Ο κύριος κλάδος της λ-δύναμης** $z^\lambda := e^{\lambda \log z}, z \neq 0$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με $(z^\lambda)' = \lambda z^{\lambda-1}$ για κάθε $z \in \Omega$ και **δεν είναι ούτε καν συνεχής στην αρνητική ημιευθεία** $(-\infty, 0]$ και άρα ούτε ολόμορφη συνάρτηση. Εν γένει **δεν ισχύουν** τα εξής $(z^\lambda)^\mu = z^{\lambda\mu}$ και $(z \cdot w)^\lambda = z^\lambda \cdot w^\lambda$. **Ισχύει** όμως ότι $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda \cdot z^\mu$.
9. **Τρόπος απόδειξης μη ύπαρξης ενός ορίου μέσω ακολουθιών**: Για να αποδείξουμε ότι ένα όριο $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ **δεν υπάρχει** αρκεί να βρούμε ακολουθίες $(z_n), (w_n)$ με $z_n, w_n \neq z_0, z_n, w_n \rightarrow z_0$ και $\lim_n f(z_n) \neq \lim_n f(w_n)$.
Για παράδειγμα: το όριο $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$ δεν υπάρχει γιατί αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $z_n = 1/(2\pi n i)$ και $w_n = 1/(2n+1)\pi i$, τότε $z_n, w_n \neq 0, z_n, w_n \rightarrow 0$ αλλά $\lim_n f(z_n) = 1 \neq -1 = \lim_n f(w_n)$.
10. **Βασική ταυτότητα**: Για κάθε $z \neq 1$ ισχύει ότι $1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$.
11. **Η εξίσωση** $z^n = w$: **έχει ακριβώς n το πλήθος ρίζες πάντα** οι οποίες είναι οι $z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$ όπου $e^{it} = \cos t + i \sin t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
12. **Η εξίσωση** $e^z = w$: **έχει άπειρες ρίζες** οι οποίες και είναι $z_k = \log |w| + i \arg(w) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
13. **Το σύμβολο** e^{it} : είναι ο αριθμός που ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ως $e^{it} = \cos t + i \sin t$ και ισχύει ότι $|e^{it}| = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
14. **Αναλυτικός ορισμός του arg**: Για κάθε $z = a + ib \neq 0$ ισχύει ότι

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, b < 0 \end{cases} \quad (1)$$

όπου η επιλογή της $\arccos$ είναι έτσι ώστε $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ και $\arccos$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $\cos$. Για παράδειγμα $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4, \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6, \arccos \frac{1}{2} = \pi/3, \arccos 1 = 0, \arccos(-1) = \pi$.

Κεφάλαιο 4ο: Δυναμοσειρές

1. **Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης του Weierstrass**: Το πιο χρήσιμο κριτήριο για να αποδεικνύουμε ότι μια σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα: Αν $X \neq \emptyset$ μη κενό σύνολο και $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων. Τότε εάν η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$, όπου $\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$ συγκλίνει, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X .

2. Θεώρημα Cauchy-Hadamard:

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R . Τότε ισχύουν τα εξής:

- Η δυναμοσειρά **συγκλίνει απόλυτα** σε κάθε σημείο του ανοιχτού δίσκου $\Delta(a, R)$.
- Η δυναμοσειρά **συγκλίνει ομοιόμορφα** στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(a, r)}$, για κάθε r με $0 < r < R$.
- Η δυναμοσειρά **αποκλίνει** για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z-a| > R$.
- Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς δίνεται από τον τύπο $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$ υπό την σύμβαση $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Προσοχή!: Το θεώρημα δεν μας δίνει αποτέλεσμα για την σύγκλιση της σειράς για τα z με $|z-a| = R$, και αυτά τα σημεία τα ελέγχουμε ξεχωριστά.

3. **Η γεωμετρική σειρά:** $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει για τα $|z| < 1$, δηλαδή στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$ και μάλιστα ισχύει ότι $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ για τα z με $|z| < 1$. Προσοχή **δεν συγκλίνει ομοιόμορφα** στον $\Delta(0, 1)$.
4. **Θεώρημα Cauchy-Hadamard:**
Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού ακτίνας σύγκλισης:
 Έστω (c_n) μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $c_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{C}$. Τότε, αν υπάρχει το όριο $\lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ (επιτρέπεται να παίρνει και την τιμή $+\infty$), τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ είναι $R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$.
5. **Θεώρημα Διαφόρισης Δυναμοσειρών:** Κάθε δυναμοσειρά είναι ολόμορφη και μάλιστα **άπειρες φορές παραγωγίσιμη στον δίσκο σύγκλισης της**. Πιο αυστηρά:
 -αν $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ είναι μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε η $f : \Delta(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(a, R)$ και ισχύει ότι $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$, για κάθε $z \in \Delta(a, R)$. Επίσης οι συντελεστές c_n της δυναμοσειράς δίνονται από τον τύπο: $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ για κάθε $n \geq 0$.
6. **Η συνάρτηση συνημιτόνου:** Ορίζουμε την συνάρτηση **συνημίτονο** ως την $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
7. **Η συνάρτηση ημιτόνου:** Ορίζουμε την συνάρτηση **ημίτονο** ως την $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
8. **Η εκθετική συνάρτηση ως δυναμοσειρά:** Η εκθετική συνάρτηση αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το μηδέν ως εξής: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
9. **Ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου ως δυναμοσειρά:** Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < 1$, τότε ισχύει ότι $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$.
10. **Τύπος του Euler:** Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
11. **Βασικές ιδιότητες:**
- Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ και $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
 - Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
 - Ισχύει ότι $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ και $\sin z = 0 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Κεφάλαιο 5ο: Μιγαδική Ολοκλήρωση

1. **Καμπύλη-Ίχνος Καμπύλης:** Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $a < b \in \mathbb{R}$ καλείται **καμπύλη** του μιγαδικού επιπέδου. Η **εικόνα ή ίχνος της γ** ορίζεται ως το σύνολο τιμών της $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$ και θα το συμβολίζουμε με $[\gamma]$, δηλαδή $[\gamma] = \gamma([a, b])$.
2. **Παραδείγματα καμπυλών:**
- Αν a και $r > 0$, θεωρούμε την καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = a + re^{it}$ που είναι ο το περιγράμμα του κύκλου κέντρου a και ακτίνας r και θα την συμβολίζουμε με $C(a, r)$.
 - Αν $z, w \in \mathbb{C}$ θεωρούμε την καμπύλη $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = (1-t)z + tw$ που είναι η ευθεία που ενώνει τα z, w και θα την συμβολίζουμε με $[z, w]$.
3. **Κλειστή καμπύλη:** λέγεται κάθε καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\gamma(a) = \gamma(b)$.
 Παραδείγματα κλειστών καμπυλών είναι οι $\gamma = C(a, r)$.

4. **Μήκος καμπύλης:** Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ κλάσεως C^1 καμπύλη. Τότε ορίζουμε **το μήκος της καμπύλης γ** ως την ποσότητα: $\ell(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Παραδείγματα: κάθε καμπύλη $\gamma = C(a, R)$ έχει μήκος $\ell(\gamma) = 2\pi R$, κάθε καμπύλη $\gamma = [z, w]$ έχει μήκος $\ell(\gamma) = |z - w|$.

5. **Μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε C^1 καμπύλες:**

Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη, δηλαδή κλάσεως C^1 και $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ως **μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της καμπύλης γ** ορίζεται να είναι το ολοκλήρωμα: $\int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$.

6. **Ανισότητα ML:** Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ κλάσεως C^1 και $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύει η ανισότητα: $\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \|f\|_\infty$, όπου $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in [\gamma]\}$.

7. **Θεώρημα:** Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ μια C^1 καμπύλη και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχή συνάρτηση.

- Αν f έχει παράγουσα στο Ω , τότε ισχύει ότι $\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.
- Αν επιπλέον η f έχει παράγουσα και η γ είναι κλειστή (πχ $\gamma = C(a, R)$), τότε: $\int_\gamma f(z) dz = 0$.
- Αν η f είναι ολόμορφη στο Ω και γ είναι κλειστή καμπύλη (πχ $\gamma = C(a, R)$), τότε: $\int_\gamma f'(z) dz = 0$.

πχ: Για κάθε μιγαδικό πολυώνυμο P και κάθε καμπύλη $\gamma = C(a, R)$ ισχύει ότι $\int_\gamma P(z) = 0$ γιατί ως πολυώνυμο είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ και η γ είναι κλειστή.

8. **Θεώρημα:** Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ κλάσεως C^1 καμπύλη και $f_n : [\gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.

- Αν $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ μια άλλη συνάρτηση και $f_n \xrightarrow{\text{ολ}} f$, τότε: $\int_\gamma f_n(z) \rightarrow \int_\gamma f(z) dz$.
- Αν η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^\infty f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\gamma]$, τότε: $\int_\gamma \sum_{n=1}^\infty f_n(z) dz = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n(z) dz$.

9. **Βασικό Ορίο:** Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και $a \in \mathbb{C}$. Αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(a, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a).$$

Εφαρμογή Να ελέγξετε την ισότητα :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(i, \epsilon)} \frac{(1+z)^z \log z}{(1+|z|^2)^{\frac{z}{2}}(z-i)} dz = -\frac{\pi^2}{e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = \frac{(1+z)^z \log z}{(1+|z|^2)^{\frac{z}{2}}}$, τότε παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση ως πηλίκο τέτοιων και άρα από την προηγούμενη Άσκηση, έπεται ότι

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C(i, \epsilon)} \frac{f(z)}{z - i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{(1+i)^i \log i}{2^{\frac{i}{2}}}$$

και κάνουμε πράξεις.

10. **Δείκτης στροφής καμπύλης:** Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ μια κλειστή και κατά τμήματα C^1 ή κλάσεως C^1 καμπύλη και $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$. Ορίζουμε ως **δείκτη στροφής της καμπύλης γ γύρω από το z** την ποσότητα: $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ και θα το συμβολίζουμε με $\delta_\gamma(z)$, δηλαδή $\delta_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$. Η συνάρτηση $\delta_\gamma : \mathbb{C} \setminus [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ θα καλείται **δείκτης στροφής της καμπύλης γ** .

Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ μια κλειστή κατά τμήματα C^1 ή κλάσεως C^1 καμπύλη. Τότε ισχύουν τα εξής:

- Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ ο $\delta_\gamma(z)$ είναι ακέραιος αριθμός.
- Η δ_γ είναι σταθερή συνάρτηση σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.
- Η δ_γ είναι μηδενική στην μοναδική μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Παραδείγματα: Αν $\gamma = C(a, R)$ τότε $\delta_\gamma(b) = 1$ για κάθε $b \in \Delta(a, R)$ (ανήκει στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα της γ) και $\delta_\gamma(b) = 0$ για κάθε $b \notin \Delta(a, R)$ (δεν ανήκει στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα της γ)

Γεωμετρική ερμηνεία του δείκτη στροφής μιας καμπύλης:

Έστω $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ μια κλειστή κατά τμήματα C^1 ή κλάσεως C^1 καμπύλη. Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ αποδείξαμε στο προηγούμενο Θεώρημα ότι ο $\delta_\gamma(z)$ είναι ακέραιος αριθμός.

Γεωμετρικά, σκεφτόμαστε τον ακέραιο αριθμό $\delta_\gamma(z)$ σαν το πλήθος των περιστροφών που διαγράφει η καμπύλη γύρω από το σημείο z του μιγαδικού επιπέδου, με την βασική προϋπόθεση ότι η κατεύθυνση περιστροφής της καμπύλης γ γύρω από το z συνεισφέρει $+1$ στον $\delta_\gamma(z)$ αν η καμπύλη γ κινείται αντιωρολογιακά και συνεισφέρει -1 στον $\delta_\gamma(z)$ αν η καμπύλη γ κινείται ωρολογιακά γύρω από το z .

Κεφάλαιο 6ο: Τύπος του Cauchy και εφαρμογές

1. Ακέραια συνάρτηση:

Κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ θα καλείται **ακέραια**.

2. Θεώρημα Αναλυτικότητας Ολόμορφων συναρτήσεων:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε η f είναι **αναλυτική συνάρτηση** στο Ω :

Για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχει μια ακτίνα $R_a > 0$ και συντελεστές $c_n = c_n(a) \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, για κάθε $z \in \Delta(a, R_a)$ και μάλιστα η ακτίνα R_a ικανοποιεί την σχέση $R_a \geq \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \inf\{|a-w| : w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}$.

Δηλαδή ο δίσκος $\Delta(a, R_a)$ είναι ο μεγαλύτερος ανοιχτός δίσκος κέντρου a που περιέχεται στο Ω . Επίσης για τους συντελεστές της f γνωρίζουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

για οποιοδήποτε $0 < r < R_a$.

3. Το βασικό πόρισμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι το εξής:

- Κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f: \Delta(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ (ορισμένη δηλαδή σε δίσκο) αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου a στον $\Delta(a, R)$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z \in \Delta(a, R)$.
- Κάθε ακέραια συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ αναλύεται σε δυναμοσειρά **οποιοδήποτε κέντρου** $a \in \mathbb{C}$ σε όλο το $\mathbb{C}$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z \in \mathbb{C}$.

4. Εκτιμήσεις Cauchy:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ και $R > 0$ ώστε $\overline{\Delta(a, R)} \subset \Omega$. Αν η $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: $\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}$, όπου $M = \max\{|f(z)| : |z-a| = R\}$.

-Βασική εφαρμογή:

Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f ώστε: $|f(z)| \leq 3 + \sqrt[5]{|z^4|}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι αν f είναι μια τέτοια συνάρτηση, τότε αφού είναι ακέραια, έπεται ότι αναλύεται στο $\mathbb{C}$ σε δυναμοσειρά κέντρου 0 και άρα έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Επίσης από το Θεώρημα Διαφόρισης Δυναμοσειρών γνωρίζουμε ότι για τα (c_n) ισχύει ότι: $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n \geq 0$. Επομένως, τώρα αν πάρουμε $R > 0$ τυχόν, τότε αφού $\Delta(0, R) \subset \mathbb{C}$ έπεται ότι από τις Εκτιμήσεις Cauchy θα ισχύει ότι: $|c_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}$, για κάθε $n \geq 0$ όπου $M = \max\{|f(z)| : z \in C(0, R)\}$. Αφού όμως για κάθε $z \in C(0, R)$ ισχύει ότι

$$|f(z)| \leq 3 + \sqrt[5]{|z^4|} = 3 + \sqrt[5]{|z|^4} = 3 + \sqrt[5]{R^4}$$

έπεται ότι $M = \max\{|f(z)| : z \in C(0, R)\} \leq 3 + \sqrt[5]{R^4}$. Τελικά για κάθε $n \geq 0$ έχουμε ότι: $|c_n| \leq \frac{3 + \sqrt[5]{R^4}}{R^n}$. Όμως αν $n \geq 1 > 4/5$ τότε παίρνοντας όριο $R \rightarrow +\infty$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε ότι

$$|c_n| \leq \frac{3 + \sqrt[5]{R^4}}{R^n} = \frac{3}{R^n} + \frac{1}{R^{n-4/5}} \rightarrow 0 \implies |c_n| = 0$$

και άρα $c_n = 0$.

Τελικά, $f(z) = c_0$, $z \in \mathbb{C}$ με $|c_0| \leq 3$ και άρα οι ακέραιες συναρτήσεις που ικανοποιούν την ανισότητα της υπόθεσης είναι οι σταθερές και ίσες με μιγαδικό αριθμό που έχει μέτρο μικρότερο του 3.

-Βασική Εφαρμογή:

Σωστό ή Λάθος: Αν η f είναι ακέραια συνάρτηση, τότε υπάρχει ακέραια συνάρτηση g ώστε $g^{(n)}(0) = i\sqrt{n}|f^{(n)}(0)|$ για κάθε $n \geq 0$.

Είναι σωστό!

Αφού η f είναι ακέραια συνάρτηση έπεται ότι αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου $0 \in \mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$ και άρα έστω: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, όπου λόγω Θεωρήματος Διαφόρισης Δυναμοσειρών, έχουμε ότι για τους συντελεστές (c_n) ισχύει ότι: $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n \geq 0$. Επίσης από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard για την ακτίνα σύγκλισης της R_f ισχύει ότι: $R_f = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}}$, και αφού $R_f = +\infty$, έπεται ότι $\limsup_n \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|} = 0$. Αν τώρα θεωρήσουμε την g όπου

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\sqrt{n}|f^{(n)}(0)|}{n!} z^n$$

τότε παρατηρούμε ότι αυτή από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard έχει ακτίνα σύγκλισης R_g όπου: $R_g = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}} = +\infty$ και άρα η g ορίζει ακέραια συνάρτηση. Επίσης, λόγω του Θεωρήματος Διαφόρισης Δυναμοσειρών, έχουμε ότι για κάθε $n \geq 0$, ισχύει ότι $\frac{i\sqrt{n}|f^{(n)}(0)|}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \implies g^{(n)}(0) = i\sqrt{n}|f^{(n)}(0)|$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

5. Θεώρημα Liouville:

Κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.

6. Πόρισμα Morera- Θεώρημα Σύγκλισης του Weirstrass:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω σε μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε η f είναι ολόμορφη συνάρτηση. Επίσης ισχύει ότι και $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω .

7. Το βασικό πόρισμα του προηγούμενου Θεωρήματος είναι το εξής:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω . Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο Ω .

-Βασική Εφαρμογή: Αποδεικνύει ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$ συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < 1$ και ορίζει για αυτά τα z ολόμορφη συνάρτηση.

Αν αποδείξουμε ότι για κάθε $r \in (0, 1)$ ισχύει ότι η (6) συγκλίνει στον $\Delta(0, r)$, τότε η σειρά θα συγκλίνει και στον $\Delta(0, 1)$ γιατί για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ υπάρχει $r_z \in (0, 1)$ ώστε $|z| \leq r_z$ και έτσι $z \in \Delta(0, r_z)$ απ όπου και έπεται ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$ θα συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε τυχόν $r \in (0, 1)$ και θεωρήσουμε τον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0, r)}$ αλλά και την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \overline{\Delta(0, r)} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f_n(z) = \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$ τότε έχουμε ότι για $z \in \overline{\Delta(0, r)}$ ισχύει ότι

$$|f_n(z)| = \left| \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}} \right| = \frac{n^3 |z|^n}{|e^{ia_n} + z^{3n}|} \leq \frac{n^3 r^n}{|e^{ia_n}| - |z|^{3n}} = \frac{n^3 r^n}{1 - |z|^{3n}} \leq \frac{n^3 r^n}{1 - r^{3n}} \leq \frac{n^3 r^n}{1 - r}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για να το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιήσαμε ότι

$$|e^{ia_n}| = 1, \quad r^{3n} \leq r \implies 1 - r^{3n} \geq 1 - r \implies \frac{1}{1 - r^{3n}} \leq \frac{1}{1 - r}$$

$$|e^{ia_n}| - |z|^{3n} \leq |e^{ia_n} + z^{3n}| \implies \frac{1}{|e^{ia_n} + z^{3n}|} \leq \frac{1}{|e^{ia_n}| - |z|^{3n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι έχουμε όμως ότι $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{1-r} n^3 r^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αφού όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 2., η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 r^n$ συγκλίνει, έπεται από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ συγκλίνει. Άρα από το Κριτήριο του Weirstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta(0, r)}$ και άρα και κανονικά σε κάθε σημείο του $\overline{\Delta(0, r)}$. Έτσι ορίζεται η $f : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{ia_n} + z^{3n}}$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη: Αν αποδείξουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\Delta(0, 1)$, τότε από το Θεώρημα σύγκλισης του Weirstrass θα έχουμε ότι η f είναι ολόμορφη στον δίσκο

$\Delta(0, 1)$. Έστω επομένως $K \subset \Delta(0, 1)$ συμπαγές. Τότε όμως έχουμε ότι υπάρχει $r_K \in (0, 1)$ ώστε $K \subset \overline{\Delta(0, r_K)}$ και άρα λόγω αυτού που αποδείξαμε παραπάνω, έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\Delta(0, r_K)$ και άρα και στο K , αφού είναι υποσύνολο του. Έτσι από το Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{e^{i a n} + z^{3n}}$ ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(0, 1)$.

8. Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ένας ασπρόμορφος τόπος, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ μια κλειστή καμπύλη. Για κάθε $z \in \Omega \setminus [\gamma]$ και $n \geq 0$ ισχύει ότι:

$$f^{(n)}(z) \cdot \delta_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (2)$$

Ο (2) καλείται **ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους**.

Δύο βασικές εφαρμογές στο Κεφάλαιο 6ο:

1. Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε υπάρχουν $c_n \in \mathbb{C}$ ώστε $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$, $z \in \Omega$. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $g : \Delta(0, 1) \rightarrow \Omega$, $g(w) = \frac{1+w}{1-w}$ τότε όπως έχουμε δει στο μάθημα αυτή είναι μια 1-1, επί απεικόνιση οποία επιπλέον είναι και ολόμορφη επί του $\Delta(0, 1)$ ως ρητή και έχει αντίστροφη την $g^{-1} : \Omega \rightarrow \Delta(0, 1)$, $g^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}$. Επομένως, αφού και η f είναι ολόμορφη στον Ω έπεται ότι και η σύνθεση τους $f \circ g : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$. Επομένως από το Θεώρημα Αναλυτικότητας, έχουμε ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου 0 $\in \Delta(0, 1)$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ ώστε $(f \circ g)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$, $w \in \Delta(0, 1)$ που σημαίνει ότι $f\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$, $w \in \Delta(0, 1)$. Τελικά, έχουμε ότι $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$, $z \in \Omega$ και αυτή έχει ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} \geq 1 \implies \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1$.

2. Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$. Αποδείξτε ότι αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε υπάρχουν $c_n \in \mathbb{C}$ ώστε $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1}\right)^n$, $z \in \Omega$.

-Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τις απεικονίσεις $g_1 : \Delta(0, 1) \rightarrow H_+$, $g_1(w) = \frac{1+w}{1-w}$ και $g_2 : H_+ \rightarrow \Omega$, $g_2(w) = \log w$ τότε αυτές είναι 1-1 και επί συναρτήσεις και επίσης ολόμορφες, αφού η $\log$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και άρα και στον ημίχωρο $H_+ \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Επίσης η g_2 έχει ως αντίστροφη, όπως ήδη γνωρίζουμε την εκθετική συνάρτηση και η g_1 έχει αντίστροφη την $g_1^{-1} : H_+ \rightarrow \Delta(0, 1)$, $g_1^{-1}(w) = \frac{1-w}{1+w}$. Επομένως αφού και η f είναι ολόμορφη στον Ω , έπεται ότι και η σύνθεση $f \circ g_2 \circ g_1 : \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$ και λόγω του Θεωρήματος Αναλυτικότητας, έπεται ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου 0, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$ με $(f \circ g_2 \circ g_1)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$, $w \in \Delta(0, 1)$ ή ισοδύναμα Όμως $g_1^{-1} \circ g_2^{-1} : \Omega \rightarrow \Delta(0, 1)$ όπου

$$(g_1^{-1} \circ g_2^{-1})(w) = g_1^{-1}(e^w) = \frac{e^w - 1}{e^w + 1}, \quad w \in \Omega$$

και συνθέτοντας την παραπάνω σχέση με $g_1^{-1} \circ g_2^{-1}$ έχουμε τελικά ότι $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1}\right)^n$, $z \in \Omega$ με ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} \geq 1 \implies \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1$.

Κεφάλαιο 7ο: Θεωρία Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

1. Θεώρημα Εύρεσης Τάξης Ρίζας:

Το $\alpha \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα τάξης m της f αν και μόνο αν $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha)$ και $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Παραδείγματα: οι ρίζες $z_k = k\pi$ της $f(z) = \sin z$ είναι όλες τάξης 1, οι ρίζες $z'_k = 2k\pi$ της $g(z) = \cos z - 1$ είναι όλες τάξης 2, οι ρίζες $z''_k = \frac{2k\pi}{\gamma}$ της $h(z) = e^{\gamma z} - 1$ είναι όλες τάξης 1, η μοναδική ρίζα 0 της $w(z) = \log z$ είναι τάξης 1. Επίσης η $m(z) = e^z - 1 - z$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0.

2. Πολλαπλασιαστικός Νόμος τάξης ριζών:

Αν το α είναι ρίζα τάξης m της f και το α είναι και ρίζα τάξης k της g , τότε το α είναι ρίζα τάξης $k + m$ της $f \cdot g$.

3. Κριτήριο Εύρεσης τάξης πόλου:

Η f έχει πόλο τάξης m στο $a \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = \ell \neq 0$.

4. **Χαρακτηρισμός Επουσιωδών ανωμαλιών:**

Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο $a \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ ή $\lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) = 0$.

5. **Χαρακτηρισμός Ουσιωδών ανωμαλιών:**

Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $a \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ δεν υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Αρκεί επομένως να βρούμε δύο ακολουθίες $(z_n), (w_n)$ ώστε $z_n, w_n \rightarrow a, z_n, w_n \neq a$ για κάθε n και $\lim_n f(z_n) \neq \lim_n f(w_n)$. Παραδείγματα: οι συναρτήσεις $e^{1/z}, \sin \frac{1}{z}, \cos \frac{1}{z}$ καθώς και συναρτήσεις που περιέχουν αυτές έχουν ουσιώδη ανωμαλία στο 0, όπως πχ: $\sin z + \sin \frac{1}{z}, \cos(e^{1/z})$ κτλ.

6. **Θεώρημα Casorati-Weierstrass:**

Αν μια συνάρτηση $f : \Omega \setminus \{a\}$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a τότε για κάθε $R > 0$ με $\Delta(a, R) \subset \Omega$ ισχύει ότι το $f(\Delta(a, R) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή το σύνολο αυτό τέμνει κάθε ανοιχτό δίσκο $\Delta(b, R')$.

7. **Σειρά Laurent:** είναι κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

και για να ελέγξουμε για ποια z συγκλίνει, συγκλίνει απολύτως ή ομοιόμορφα ελέγχουμε αυτές τις ιδιότητες για τις επιμέρους δύο σειρές της παραπάνω ανάλυσης και η τομή των συνόλων σύγκλισης τους, μας δίνει το ζητούμενο για την σειρά Laurent.

8. **Δακτύλιος:** είναι κάθε σύνολο της μορφής

$$\Delta(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

όπου $a \in \mathbb{C}$ και $0 \leq r < R \leq +\infty$. Για παράδειγμα $\mathbb{C} \setminus \{a\} = \Delta(a, 0, +\infty)$ για κάθε $a \in \mathbb{C}$.

9. **Θεώρημα Laurent:**

Κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f : \Delta(a, r, R) \rightarrow \mathbb{C}$ -ορισμένη δηλαδή σε δακτύλιο-αναπτύσσεται σε σειρά Laurent κέντρου a στον $\Delta(a, r, R)$, δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $c_n \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Επιπλέον οι συγκλίσεις των επιμέρους δύο παραπάνω σειρών της (1) είναι απόλυτη στον $\Delta(a, r, R)$ και ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $\Delta(a, r, R)$ (πχ στους κλειστούς δίσκους $\Delta(b, R') \subset \Delta(a, r, R)$).

Για ολόμορφες συναρτήσεις $f : \Delta(a, R) \setminus \{a\} = \Delta(a, 0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ με ανάπτυγμα Laurent κέντρου a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, z \in \Delta(a, 0, R)$$

ισχύουν τα εξής αποτελέσματα:

10. **Χαρακτηρισμός μεμονωμένων ανωμαλιών μέσω αναπτύγματος Laurent:**

Αν $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ είναι το ανάπτυγμα Laurent της f κέντρου a , τότε:

- Το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της f αν $c_{-n} = 0$ για κάθε n .
- Το a είναι πόλος τάξης m της f αν $c_{-m} \neq 0$ αλλά $c_{-n} = 0$ για κάθε $n > m$.
- Το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f αν $c_{-n} \neq 0$ για άπειρους n .

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{z^n}, z \neq 0$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0 αφού όλοι οι άπειροι το πλήθος συντελεστές $c_{-n} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \neq 0$.

Εφαρμογή του Casorati-Weierstrass: Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $f(z)$ του παραπάνω παραδείγματος (που έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0) ισχύει ότι για κάθε $a \in \mathbb{C}$ υπάρχει ακολουθία (z_k) του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $z_k \rightarrow a$ και $f(z_k) \rightarrow a$.

-Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ τυχόν. Αφού η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0, από το Θεώρημα Casorati-Weierstrass (6) έπεται ότι για κάθε $R > 0$ το σύνολο $f(\Delta(0, R) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή τέμνει κάθε ανοιχτό δίσκο και άρα για κάθε $R > 0$ έχουμε ότι $f(\Delta(0, R) \setminus \{0\}) \cap \Delta(a, R) \neq \emptyset$. Επομένως, εφαρμόζοντας αυτό για $R = 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $f(\Delta(0, 1/k) \setminus \{0\}) \cap \Delta(a, 1/k) \neq \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και άρα υπάρχει ακολουθία (z_k) με $z_k \neq 0$ και $|z_k - 0| < 1/k$ και $|f(z_k) - a| < 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και που μας εξασφαλίζει ότι $z_k \rightarrow 0$ και $f(z_k) \rightarrow a$.

11. **Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο της f στο a :**

Καλείται ο συντελεστής c_{-1} και τον συμβολίζουμε με $Res(f, a)$ και ισχύει ο εξής βασικός τύπος:

$$Res(f, a) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)} f(z) dz$$

για κάθε $r < \rho < R$.

12. **Σύνδεση μεμονωμένων ανωμαλιών με ολοκληρωτικό υπόλοιπο:**

Ισχύουν τα εξής:

- Αν f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a , τότε $Res(f, a) = 0$.
- Αν f έχει πόλο τάξης m στο a , τότε $Res(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} g^{(m-1)}(z)$, όπου $g(z) = (z - a)^m \cdot f(z)$.
- Αν η f έχει πόλο τάξης 1 (απλό πόλο) στο a , τότε $Res(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z)$.

Παρατήρηση: Αν η f έχει απλό πόλο σε ένα σημείο a τότε $Res(f, a) \neq 0$.

13. **Παρατήρηση:** Δεν έχουμε κλειστό τύπο για το πόσο κάνει το $Res(f, a)$ όταν το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f άρα **ο μόνος τρόπος** να το υπολογίσουμε σε αυτήν την περίπτωση είναι να αναπτύξουμε την f σε σειρά Laurent κέντρου a και να δούμε ποιός είναι ο συντελεστής c_{-1} .

14. **Μιγαδικός Κανόνας L'Hospital:** Αν f, g είναι ολόμορφες συναρτήσεις που η f έχει ρίζα τάξης k στο a και η g έχει ρίζα τάξης m στο a , τότε η f/g έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο a και μάλιστα ισχύουν τα εξής:

- Αν $k \geq m$, τότε η ανωμαλία της f/g στο a είναι επουσιώδης και

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0, & k > m \\ \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}, & k = m \end{cases} \quad (3)$$

- Αν $k < m$, τότε η ανωμαλία της f/g στο a είναι πόλος τάξης $m - k$.

15. **Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:**

Αν $\Omega \subset \mathbb{C}$ είναι αστρόμορφος τόπος, $f : \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ είναι κλειστή και κλάσεως C^1 καμπύλη, τότε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res(f, a_k) \cdot \delta_{\gamma}(a_k).$$

Εφαρμογή: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=2/3} \frac{\sin^2 \pi z}{(2z-1) \log^3(1-z)}.$$

- **Βήμα 1ο:** Βρίσκουμε της ανωμαλίες της ολοκληρωτέας συνάρτησης που στην περίπτωση μας είναι τα σημεία $1/2, 0$.
- **Βήμα 2ο:** Αναγνωρίζουμε το είδος των ανωμαλιών: Αν σε κάποιο από τα σημεία ανωμαλιών μηδενίζεται και ο αριθμητής εφαρμόζουμε Μιγαδικό Κανόνα L'Hospital (στην περίπτωση μας μηδενίζεται ο αριθμητής στο 0 και έχει ρίζα τάξης 2 στο 0 και ο παρανομαστής έχει ρίζα τάξης 3 στο 0 και άρα η f έχει πόλο

τάξης $3 - 2 = 1$ στο 0) και αν ο αριθμητής δεν μηδενίζεται τότε θα μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα εύκολα (στην περίπτωση μας βλέπουμε ότι ο αριθμητής δεν μηδενίζεται στο $1/2$ και η f έχει πόλο τάξης 1 στο $1/2$ αφού $\lim_{z \rightarrow 1/2} (z - 1/2) \cdot f(z) = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

- **Βήμα 3ο: Χρησιμοποιούμε το (12) για να υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στα σημεία ανωμαλιών:** που στην περιπτώσή μας είναι τα $\text{Res}(f, 0)$, $\text{Res}(f, 1/2)$ και αφού είναι και τα δύο πόλοι τάξης 1, έχουμε ότι $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z)$ και $\text{Res}(f, 1/2) = \lim_{z \rightarrow 1/2} (z - 1/2) \cdot f(z)$.

- **Βήμα 4ο: Βρίσκουμε τον δείκτη στροφής της καμπύλης στα σημεία ανωμαλιών:** που στην περίπτωση μας η καμπύλη είναι η $\gamma = C(0, 2/3)$ και αφού $0, 1/2 \in \Delta(0, 2/3)$, δηλαδή ανήκουν στην φραγμένη συνεκτική συνιστώσα της γ έπεται ότι $\delta_{C(0, 2/3)}(0) = \delta_{C(0, 2/3)}(1/2) = 1$.

- **Βήμα 5ο: Εφαρμόζουμε Θεωρήμα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων:** και στην περίπτωση μας έχουμε ότι

$$\int_{|z|=2/3} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) \delta_{C(0, 2/3)}(0) + \text{Res}(f, 1/2) \cdot \delta_{C(0, 2/3)}(1/2))$$

όπου όλες οι ποσότητες έχουν υπολογιστεί παραπάνω.

Εφαρμογή: Εξετάστε αν υπάρχει ακολουθία P_n πολυωνύμων ώστε $P_n \rightarrow \frac{z(e^z - 1)^2}{\sin^4 z}$ ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0, 1, 2)$.

Έστω ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία ολόμορφων πολυωνύμων (P_n) και τότε λόγω Θεωρήματος του Κεφαλαίου 5. θα είχαμε ότι αν θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma = C(0, 2)$ που είναι κλειστή και C^1 , και περιέχεται και στον δακτύλιο τότε: $\int_{\gamma} P_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$. Αφού όμως τα πολυώνυμα P_n είναι ολόμορφες συναρτήσεις $\mathbb{C}$ και έχουν παράγους και η γ είναι κλειστή καμπύλη, έπεται από Θεώρημα ότι $\int_{\gamma} P_n(z) dz = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\int_{\gamma} P_n(z) dz \rightarrow 0$. Από μοναδικότητα όμως του ορίου, έπεται τελικά ότι πρέπει να ισχύει ότι $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι για την $f(z) = \frac{z(e^z - 1)^2}{\sin^4 z}$ ισχύει ότι αυτή έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στα σημεία μηδενισμού του παρανομαστή, δηλαδή στα σημεία μηδενισμού της $\sin$ που είναι τα $z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ και μάλιστα παρατηρούμε ότι απ αυτές οι μόνες που περιέχονται στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 2)$ είναι αυτή που αντιστοιχεί στο $k = 0$, δηλαδή το $z_0 = 0$. Παρατηρούμε μάλιστα ότι αφού ο αριθμητής έχει ρίζα τάξης 3 στο 0 (γιατί η z έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και η $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0) και ο παρανομαστής έχει ρίζα τάξης 4 στο 0 (γιατί η $\sin$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0), έπεται από τον Μιγαδικό Κανόνα L'Hospital ότι η f έχει πόλο τάξης $4 - 3 = 1$ στο 0, δηλαδή απλό πόλο και άρα $\text{Res}(f, 0) \neq 0$. Επομένως από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, έπεται ότι $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) \neq 0$ και άρα, από το και επομένως **δεν υπάρχει τέτοια ακολουθία**.

16. Αρχή του Rouché:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $a \in \mathbb{C}, R > 0$ ώστε $\overline{\Delta(a, R)} \subset \Omega$. Αν για τις ολόμορφες συναρτήσεις $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, ισχύει ότι:

$$|f(z)| < |g(z)|, \quad \text{για κάθε } z \in C(a, r)$$

τότε το πλήθος ριζών της $f + g$ στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(a, R)$ είναι ίσο με το πλήθος ριζών της g στον $\Delta(a, R)$.

Εφαρμογή: Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $p(z) = z^{15} + 18z^7 + 13z^3 + z + 2$ έχει 7 ρίζες στον δίσκο $\Delta(0, 1)$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι για $z \in C(0, 1)$ έχουμε ότι

$$|p(z) - 18z^7| = |z^{15} + 13z^3 + z + 2| \leq |z|^{15} + 13|z|^3 + |z| + 2 = 17 < 18 = |18z^7| \quad (4)$$

και άρα από την αρχή του Rouché για τις ολόμορφες συναρτήσεις $f(z) = p(z) - 18z^7$ και $g(z) = 18z^7$ έχουμε ότι η $f + g = p$ έχει όσες ρίζες έχει και η g στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$ και αφού αυτή έχει μοναδική ρίζα το 0 στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$ και είναι τάξης 7, έπεται ότι και η p θα έχει 7 ρίζες στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$.

17. Αρχή ορίσματος: Μας δίνει άμεσο τύπο για υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{\gamma} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz$: Αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ κλειστή και C^1 καμπύλη, τότε:

- $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \times (\text{πλήθος ριζών της } f \text{ στο εσωτερικό της } \gamma).$
- $\int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in Z(f), a \in \text{εσω. της } \gamma} a.$

- Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\int_{\gamma} z^k \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in Z(f), a \in \text{εσ. της } \gamma} a^k$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{2z^3-1} dz$. Παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής έχει ακριβώς 3 διακεκριμένες ρίζες και όλες βρίσκονται στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0, 1)$, αφού έχουν μέτρο $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 1$. Επομένως από την αρχή ορίσματος έχουμε ότι

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z^3-1} dz = \frac{1}{6} \int_{|z|=1} \frac{(2z^3-1)'}{(2z^3-1)} dz = \frac{1}{6} 2\pi i (1+1+1) = \pi i.$$

18. **Τύποι Vieta για ρίζες πολυωνύμων:** Έστω $p(z) = c_z z^n + \dots + c_1 z + c_0$ μιγαδικό πολυώνυμο p με ρίζες $\rho_1, \dots, \rho_n$. Τότε ισχύουν οι εξής τύποι: $\sum_{k=1}^n \rho_k = -\frac{c_{n-1}}{c_n}$ και $\sum_{k=1}^n \rho_k^2 = \left(-\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^2 - 2\frac{c_{n-2}}{c_n}$.
19. **Σημεία συσσώρευσης συνόλου:** Έστω $A \subset \mathbb{C}$. Ένα $z \in \mathbb{C}$ καλείται **σημείο συσσώρευσης του συνόλου A**, αν υπάρχει ακολουθία z_n στοιχείων του A με $z_n \rightarrow z$ και $z_n \neq z$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του συνόλου A καλείται **παράγωγο σύνολο του A** και το συμβολίζουμε με A' .
-**Παράδειγμα:** Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ και παρατηρούμε ότι το σύνολο αυτό έχει σημείο συσσώρευσης το 0 αφού η ακολουθία $z_n = 1/n$ είναι ακολουθία στοιχείων του A και ισχύει ότι $z_n \rightarrow 0$ και $z_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια, $0 \in A'$.
20. **Άρχη της ταυτότητας:** Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ τόπος και έστω και $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ δύο ολόμορφες συναρτήσεις. Αν θεωρήσουμε το **σύνολο ταύτισης των f, g**, δηλαδή

$$T = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\} \subset \Omega$$

και ισχύει ότι $T' \cap \Omega$ είναι **μη κενό σύνολο**, δηλαδή υπάρχουν σημεία συσσώρευσης του T μέσα στο Ω , τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

4 βασικές Εφαρμογές στο Κεφάλαιο 7ο:

1. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i+1)}{n!} (z-1)^n$ αν $f(z) = \frac{z(e^z-1-z)^2}{(e^z-1)^5}$.
- Παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard έχουμε ότι $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(i+1)}{n!}\right|}}$. Παρατηρούμε ότι η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0 και επειδή ο αριθμητής έχει ρίζα τάξης 5 στο 0 γιατί καθένας από τους παράγοντες $z, e^z - 1 - z$ έχει ρίζα τάξης 1 και τάξης 2 αντίστοιχα στο 0 και ο παρανομαστής έχει επίσης ρίζα τάξης 5 στο 0 γιατί ο παράγοντας $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0. Τελικά από το Μιγαδικό Κανόνα De L'Hospital έπεται ότι η f έχει **εμπουσιώδη ανωμαλία** στο 0 και άρα επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση γύρω από το 0. Παρατηρούμε επίσης ότι ο παρανομαστής μηδενίζεται στα σημεία $z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ και άρα σε καθένα από αυτά η f επίσης παρουσιάζει μεμονωμένης ανωμαλία και πιο συγκεκριμένα η f έχει πόλο στα $z_k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Αφού όμως οι **πλησιέστεροι πόλοι** στο $i+1$ είναι οι $2\pi i, -2\pi i$, έπεται ότι η f επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(i+1, M)$ όπου

$$M = \min\{\sqrt{1+(2\pi-1)^2}, \sqrt{1+(2\pi+1)^2}\} = \sqrt{1+(2\pi-1)^2}$$

και άρα από το Θεώρημα Αναλυτικότητας ολόμορφων συναρτήσεων έπεται ότι αυτή αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου $i+1$ στον δίσκο αυτό, δηλαδή $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-(i+1))^n, z \in \Delta(i+1, M)$ με $R_f = M$ και αφού από Cauchy-Hadamard ισχύει ότι $R_f = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(i+1)}{n!}\right|}} = M$ έπεται ότι και

$R = M = \sqrt{1+(2\pi-1)^2}$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς της εκφώνησης.

2. Υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ για την οποία να ισχύει ότι $f'(z) = z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right)$;
-Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση, τότε παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την κλειστή καμπύλη $\gamma = C(0, 1)$ τότε από Θεώρημα έπεται ότι $\int_{C(0,1)} f'(z) dz = 0$ και άρα θα έπρεπε να ισχύει ότι και $\int_{C(0,1)} z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right) dz$ που παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει μοναδική μεμονωμένη ανωμαλία στο 0 και άρα αφού $0 \in \Delta(0, 1)$ έπεται ότι $\delta_{C(0,1)}(0) = 1$ και από Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων του Cauchy θα έπρεπε να ισχύει ότι $\int_{C(0,1)} z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}(g, 0) \delta_{C(0,1)}(0) = 2\pi i \text{Res}(g, 0)$ όπου $g(z) = z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right)$. Πρέπει επομένως να βρούμε το $\text{Res}(g, 0)$ αλλά δεν είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε το είδος της ανωμαλίας της g στο 0 γι αυτό και θα πάμε με το ανάπτυγμα της σε σειρά Laurent κέντρου 0. Παρατηρούμε ότι για την $\cos$ ισχύει ότι αυτή αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 στο $\mathbb{C}$ ως εξής: $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}$ και άρα για $z \neq 0$ έχουμε ότι

$\cos\left(\frac{1+i}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(1+i)^{2n}}{z^{2n}}$ και άρα $g(z) = z \cos\left(\frac{1+i}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+i)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-1}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και έτσι ο συντελεστής του $\frac{1}{z}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι αυτός που αντιστοιχεί στο $n = 1$ και άρα είναι ο $\frac{(-1)^1 (1+i)^2}{2!} = -\frac{1+2i-1}{2} = -i$ και έτσι $\text{Res}(g, 0) = -i \implies \int_{C(0,1)} g(z) dz = 2\pi i(-i) = 2\pi \neq 0$ και άρα **δεν μπορεί να υπάρχει τέτοια συνάρτηση**.

3. Εξετάστε εάν υπάρχει συνεχής $f : \overline{\Delta(0,1)} \rightarrow \mathbb{C}$, η οποία είναι ολόμορφη στον ανοιχτό δίσκο $\Delta(0,1)$ και $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$.

-Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g : \Delta(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ με $g(z) = \frac{z}{1+z}$, τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη και αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση f θα είχαμε ότι $f(1/n) = g(1/n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $1/n \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου T είναι σύνολο ταύτισης της f με την g . Αφού τώρα $1/n \rightarrow 0$ και $1/n \neq 0$ για κάθε n και η ακολουθία $(1/n)$ είναι ακολουθία στοιχείων του T , έπεται ότι τελικά $0 \in T' \cap \Delta(0,1)$ και άρα $T' \cap \Delta(0,1) \neq \emptyset$. Επομένως από την Αρχή της Ταυτότητας, έπεται ότι $f = g$ στον $\Delta(0,1)$ και αυτό είναι **άτοπο**, γιατί λόγω της συνέχειας της f στο $-1 \in \overline{\Delta(0,1)}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{C} \ni f(-1) = \lim_{|z|<1, z \rightarrow -1} f(z) = \lim_{|z|<1, z \rightarrow -1} g(z) = \infty$$

4. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυνόμων $P_n \in \mathbb{C}[z]$ ώστε

$$P_n(z) \longrightarrow \frac{z(e^z - 1)^5}{(\pi^z - 1)^2(1 - \cos z)^2}$$

ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0,1,2)$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(z) = \frac{z(e^z - 1)^5}{(\pi^z - 1)^2(1 - \cos z)^2}$ τότε παρατηρούμε ότι αυτή παρουσιάζει μεμονωμένες ανωμαλίες στις ρίζες των εξισώσεων: $\cos z = 1 \iff z_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ και $\pi^z - 1 = e^{z \log \pi} - 1 = 0 \iff e^{z \log \pi} = e^0 \iff z'_k \log \pi = 2k\pi i \iff z'_k = \frac{2k\pi}{\log \pi} i, k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε τώρα ότι για το 0 έχουμε ότι αφού η ποσότητα $1 - \cos z$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0, έπεται ότι ο παράγοντας $(1 - \cos z)^2$ έχει ρίζα τάξης 4 στο 0. Από την άλλη, το 0 ελέγχεται ότι είναι και ρίζα τάξης 1 του $\pi^z - 1 = e^{z \log \pi} - 1$ γιατί $e^{0 \log \pi} - 1 = e^0 - 1 = 0$ και $(e^{z \log \pi} - 1)' = \log \pi e^{z \log \pi} \implies \log \pi e^{0 \log \pi} = \log \pi \neq 0$. Επομένως ο παράγοντας $(\pi^z - 1)^2$ έχει ρίζα τάξης 2 στο 0 και τελικά όλος ο παρανομαστής της f έχει ρίζα τάξης $2 + 4 = 6$ στο 0. Από την άλλη, ο αριθμητής έχει επίσης ρίζα τάξης 6 στο 0 γιατί ο παράγοντας z έχει ρίζα τάξης 1 στο 0 και ο $(e^z - 1)^5$ έχει ρίζα τάξης 5 στο 0, αφού ο $e^z - 1$ έχει ρίζα τάξης 1 στο 0. Επομένως από τον Μιγαδικό Κανόνα De L'Hospital έπεται ότι η f έχει **επουσιώδης ανωμαλία στο 0** και άρα επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση γύρω από το 0. Οι υπόλοιπες ρίζες z_k, z'_k , για τα $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ είναι πόλοι της f και αφού τώρα οι **πλησιέστεροι στο 0 πόλοι** είναι οι $2\pi/\log \pi, -2\pi/\log \pi$ και η f επεκτείνεται ομαλά γύρω από το 0, έπεται ότι επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $\Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και από το Θεώρημα Αναλυτικότητας Ολομόρφων συναρτήσεων, έπεται ότι αυτή έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κέντρου 0 στον $\Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και άρα έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και $R_f = 2\pi/\log \pi$, η ακτίνα σύγκλισης της. Παρατηρούμε όμως ότι $R_f > 2$ και άρα $\Delta(0,1,2) \subset \Delta(0, 2\pi/\log \pi)$ και από το θεώρημα Cauchy-Hadamard έχουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0,1,2)$, δηλαδή αν θεωρήσουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της δυναμοσειράς, έστω $P_n \in \mathbb{C}[z]$ με $P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$ τότε $P_n(z) \longrightarrow f(z)$ ομοιόμορφα στον δακτύλιο $\Delta(0,1,2)$.