Γεωμετρία ΙΙ

Ασκήσεις

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

29 Νοεμβρίου 2021

Θεματικές Ενότητες:

- Βασικές έννοιες στις παραμετρικές καμπύλες.
- Μήκος τόξου καμπύλης.
- Αναπαραμετρήση καμπύλης.

Περιεχόμενα

1 Ασκήσεις

1. Είναι η $\gamma(t) = \left(t^2, t^4\right)$ παραμέτρηση της παραβολής $y = x^2$;

2. Βρείτε παραμετρήσεις των ακόλουθων καμπυλών στάθμης :

(i) $y^2 - x^2 = 1$,

(ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3. Βρείτε τις καρτεσιανές εξισώσεις των ακόλουθων παραμετρημένων καμπυλών :

(i) $\gamma(t) = \big(\cos^2 t, \sin^2 t\big)$,

(ii) $\gamma(t) = \big(e^t, t^2\big)$.

4. Υπολογίστε τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών της Άσκησης 3.

5. Να υπολογίσετε το μήκος τόξου της *λογαριθμικής σπείρας*

$$\gamma(t) = \left(e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t\right)$$

όπου k είναι μια μη μηδενική σταθερά, με σημείο εκκίνησης το σημείο $\gamma(0) = (1, 0)$.

6. Αν $\gamma\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ είναι παραμετρική καμπύλη με σταθερό μέτρο, δείξτε ότι $\gamma(t) \cdot \dot\gamma(t) = 0$, για κάθε $t \in (a, b)$.

7. Υπολογίστε το μήκος τόξου της αλυσοειδούς $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ με σημείο εκκίνησης το $(0, 1)$.

8. Δείξτε ότι οι ακόλουθες καμπύλες είναι μοναδιαίας ταχύτητας :

(i) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$,

(ii) $\gamma(t) = \big(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\big)$.

9. Σε αυτήν την άσκηση καλείστε να αποδείξετε ότι η *ευθεία είναι η συντομότερη καμπύλη που συνδέει δύο δοθέντα σημεία*. Έστω p και q τα δύο σημεία, έστω γ μια καμπύλη που διέρχεται από αμφότερα τα σημεία, και ας υποθέσουμε ότι $\gamma(a) = p$ και $\gamma(b) = q$, όπου $a < b$. Δείξτε ότι, εαν $\mathbf{u}$ ένα τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα, τότε

$$\dot\gamma \cdot \mathbf{u} \leq \|\dot\gamma\|$$

και συμπεράνετε ότι

$$(q - p) \cdot \mathbf{u} \leq \int_a^b \|\dot\gamma\| dt.$$

Παίρνοντας $\mathbf{u} = (q - p)/\|q - p\|$, δείξτε ότι το μήκος του τμήματος της γ μεταξύ των p και q έχει μήκος τουλάχιστον ίσο με την ευθειακή απόσταση $\|q - p\|$.

10. Ποίες από τις παρακάτω είναι κανονικές ;

(i) $\gamma(t) = \left(\cos^2 t, \sin^2 t\right), \quad t \in \mathbb{R}$.

(ii) Η ίδια καμπύλη όπως στο (i) αλλά με $0 < t < \pi/2$.

(iii) $\gamma(t) = (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}$.

Βρείτε αναπαραμετρήσεις μοναδιαίας ταχύτητας για τις κανονικές καμπύλες.

11. Δείξτε ότι οι παραμετρικές καμπύλες $\gamma(t) = \left(t, t^2\right)$ και $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \left(\tilde{t}^3, \tilde{t}^6\right)$ είναι παραμετρήσεις της παραβολής $y = x^2$. Είναι η $\tilde{\gamma}$ να είναι αναπαραμέτρηση της γ ;

12 (Ιούλιος 2021)**.** Δίνεται λεία καμπύλη $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ώστε $\|\dot{\gamma}(t)\| = e^t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Βρείτε συνάρτηση φ ώστε $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma\left(\varphi(\tilde{t})\right)$ να είναι αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

13. Δείξτε ότι :

(i) Εαν $\tilde{\gamma}$ είναι μια αναπαραμέτρηση μιας καμπύλης γ, τότε η γ είναι αναπαραμέτρηση της $\tilde{\gamma}$.

(ii) Εαν $\tilde{\gamma}$ είναι μια αναπαραμέτρηση της γ και $\hat{\gamma}$ μια αναπαραμέτρηση της $\tilde{\gamma}$, τότε η $\hat{\gamma}$ είναι αναπαραμέτρηση της γ.

2 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων

1. Η γ δεν αποτελεί παραμέτρηση της παραβολής αφού παραμετρά μόνο το $\left\{\left(x, x^2\right) \mid x \geq 0\right\}$. Παρατηρήστε όμως ότι αποτελεί παραμέτρηση τμήματος της παραβολής $y = x^2$.

2. (i) Μια παραμέτρηση είναι η $\gamma(t)\left(\frac{1}{\cos\vartheta}, \tan\vartheta\right)$ ή εναλλάκτικά $\gamma(t) = (\sinh t, \cosh t)$.

(ii) Μια παραμέτρηση είναι η $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$.

3. (i) Αν $x = \cos^2 t \geq 0$ και $y = \sin^2 t \geq 0$, τότε παρατηρούμε ότι $x + y = 1$, συνεπώς καρτεσιανή εξίσωση της δοθείσας παραμετρικής καμπύλης είναι η $x + y - 1 = 0$ για $x, y \geq 0$.

(ii) Αν $x = e^t > 0 \Rightarrow t = \log x$ για $x > 0$ και $y = t^2$, άρα η ζητούμενη καρτεσιανή εξίσωση είναι η $y = (\log x)^2$ για $x > 0$.

4. (i) $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(2t), \sin(2t))$.

(ii) $\dot{\gamma}(t) = \left(e^t, 2t\right)$.

5. Έχουμε ότι $\dot{\gamma}(t) = \left(e^{kt}\left(k\cos t - \sin t\right), e^{kt}\left(k\sin t + \cos t\right)\right)$, συνεπώς ισχύει ότι

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du = \int_0^t e^{kt} \cdot \sqrt{k^2+1} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} \cdot \left(e^{kt} - 1\right).$$

6. Αν ισχύει ότι $\|\gamma(t)\| = a$ σταθερό για κάθε $t \in (a, b)$, τότε έχουμε ότι

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t) = a \Rightarrow \dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) + \gamma(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow \gamma(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0,\ \forall t \in (a, b).$$

7. Έχουμε ότι $\dot{\gamma}(t) = (1, \sinh t)$ συνεπώς ισχύει ότι

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du = \sinh t.$$

8.

9. Αν $\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο σταθερό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwartz για τα διανύσματα $\gamma(t), \mathbf{u}$ και κατόπιν ολοκληρώστε την προκείπτουσα σχέση, δεδομένου ότι $\mathbf{u}$ είναι σταθερό.

10. (i) Αφού $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(2t), \sin(2t))$, τότε για $t = 0$ είναι σαφές ότι $\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$, άρα η γ δεν είναι κανονική.

(ii) Αφού $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(2t), \sin(2t))$, τότε για $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $\gamma(t) \neq 0$, συνεπώς στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η γ είναι κανονική. Θεωρώντας το μήκος τόξου της γ με σημείο εκκίνησης το $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ έχουμε ότι

$$s(t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \|\dot{\gamma}(u)\| \, du = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(2t) \Rightarrow \varphi(s) = t = \arccos(\sqrt{2}s).$$

Συνεπώς έχουμε ότι η καμπύλη $\gamma \circ \varphi$ είναι μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

(iii) Είναι σαφές ότι η γ είναι κανονική. Από την Άσκηση 7 έχουμε ότι το μήκος τόξου της γ με σημείο εκκίνησης το $(0, 1)$ ισούται με $s(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Έτσι έχουμε ότι

$$s = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow e^{2t} - 2se^t - 1 = 0 \Rightarrow \varphi(s) = t = \log\left(s + \sqrt{s^2 + 1}\right).$$

Επομένως η $\gamma \circ \varphi$ είναι μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

11. Η γ είναι κανονική καμπύλη. Γνωρίζουμε ότι αναπαραμέτρηση κανονικής καμπύλης είναι κανονική, συνεπώς η $\tilde{\gamma}$ δεν μπορεί να είναι κανονική.

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση μήκους τόξου s της γ με σημείο εκκίνησης του $\gamma(0)$. Έτσι έχουμε ότι $s(t) = e^t - 1$. Αν $\psi(t) = s(t) + 1 = e^t$, τότε για την $\varphi = \psi^{-1} = \log$ έχουμε ότι $\gamma \circ \varphi$ είναι αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ.

13. (i) Έστω $\tilde{\gamma} \colon (\tilde{a}, \tilde{b}) \to \mathbb{R}^n$ αναπαραμέτρηση της $\gamma \colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $\varphi \colon (\tilde{a}, \tilde{b}) \to (a, b)$ 1-1, επί, λεία με φ^{-1} λεία ώστε $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma \circ \varphi(\tilde{t}) \Rightarrow \gamma(t) = \tilde{\gamma} \circ \varphi^{-1}(t)$. Έτσι είναι σαφές ότι γ είναι αναπαραμέτρηση της $\tilde{\gamma}$ εφαρμόζοντας τον ορισμό της αναπαραμέτρησης για την φ^{-1}.

(ii) Έστω $\tilde{\gamma} \colon (\tilde{a}, \tilde{b}) \to \mathbb{R}^n$ αναπαραμέτρηση της $\gamma \colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$, και έστω $\hat{\gamma} \colon (\hat{a}, \hat{b}) \to \mathbb{R}^n$ αναπαραμέτρηση της $\tilde{\gamma} \colon (\tilde{a}, \tilde{b}) \to \mathbb{R}^n$. Δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi \colon (\tilde{a}, \tilde{b}) \to (a, b)$ και $\psi \colon (\hat{a}, \hat{b}) \to (\tilde{a}, \tilde{b})$, 1-1, επί, λείες με φ^{-1}, ψ^{-1} λείες ώστε $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma \circ \varphi(\tilde{t})$ και $\hat{\gamma}(\hat{t}) = \tilde{\gamma} \circ \varphi(\hat{t})$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της αναπαραμέτρησης για $\varphi \circ \psi$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{\gamma}$ είναι αναπαραμέτρηση της γ.