

# Γεωμετρική Ανάλυση

Αθανάσιος Χατζηκαλέας

## Περίληψη

Οι παρούσες σημειώσεις αυτές έχουν βασιστεί, εν μέρει, στη μελέτη διαφόρων πηγών της σχετικής βιβλιογραφίας, συμπεριλαμβανομένων των συγγραμάτων των do Carmo [6], Spivak [7], Frankel [9], Lee [5] και Κουτρουφιώτη [2], τα οποία συνέβαλαν στη διαμόρφωση του παρόντος υλικού, τόσο ως προς τη δομή όσο και ως προς την ερμηνευτική προσέγγιση των εννοιών. Παρουσιάζονται πλήρεις και αναλυτικές αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων, καθώς και λεπτομερείς λύσεις ασκήσεων, οι οποίες παρατίθενται στο τέλος κάθε Κεφαλαίου. Με σκοπό την περαιτέρω εμβάθυνση στις σχετικές έννοιες και τη σύνδεσή τους με την Φυσική, περιλαμβάνονται εφαρμογές από τα συγγράμματα των Flanders [3], Baez-Muniain [4], Isham [1] και Stone-Goldbart [8]. Η διδακτέα ύλη που καλύπτεται μέσω των σημειώσεων αυτών αντιστοιχεί πλήρως στην ύλη του προπτυχιακού μαθήματος “Γεωμετρική Ανάλυση”, όπως αυτή καθορίζεται από τον οδηγό σπουδών του Μαθηματικού Τμήματος του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

# Περιεχόμενα

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Διαφορικές Μορφές στον <math>\mathbb{R}^n</math></b> | <b>5</b>  |
| 1.1      | Εφαπτόμενος και δυϊκός χώρος . . . . .                  | 5         |
| 1.2      | Διαφορικές μορφές . . . . .                             | 9         |
| 1.3      | Γεωμετρική ερμηνεία των μορφών . . . . .                | 13        |
| 1.4      | Εξωτερικό γινόμενο μορφών . . . . .                     | 17        |
| 1.5      | Μετασχηματισμός μορφών . . . . .                        | 21        |
| 1.6      | Διαφορικό μορφών . . . . .                              | 28        |
| 1.7      | Το Λήμμα Poincare . . . . .                             | 32        |
| 1.8      | Ο τελεστής Hodge . . . . .                              | 36        |
| 1.9      | Διαφορικοί τελεστές . . . . .                           | 40        |
| 1.10     | Ασκήσεις επανάληψης . . . . .                           | 49        |
| <br>     |                                                         |           |
| <b>2</b> | <b>Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες</b>                       | <b>55</b> |
| 2.1      | Η έννοια της πολλαπλότητας . . . . .                    | 55        |
| 2.2      | Πολλαπλότητες χωρίς σύνορο . . . . .                    | 63        |
| 2.3      | Μερικές παράγωγοι . . . . .                             | 74        |
| 2.4      | Εφαπτόμενος και δυϊκός χώρος . . . . .                  | 76        |
| 2.5      | Διαφορικές μορφές . . . . .                             | 79        |
| 2.6      | Γεωμετρική ερμηνεία των μορφών . . . . .                | 81        |
| 2.7      | Ασκήσεις επανάληψης . . . . .                           | 86        |
| <br>     |                                                         |           |
| <b>3</b> | <b>Το Θεώρημα του Stokes σε πολλαπλότητες</b>           | <b>95</b> |
| 3.1      | Πολλαπλότητες με σύνορο . . . . .                       | 95        |
| 3.2      | Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες . . . . .                   | 98        |
| 3.3      | Το Θεώρημα του Stokes . . . . .                         | 99        |
| 3.4      | Ασκήσεις επανάληψης . . . . .                           | 107       |

|          |                                              |            |
|----------|----------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Εφαρμογές</b>                             | <b>117</b> |
| 4.1      | Εφαρμογές στην Διαφορική Γεωμετρία . . . . . | 117        |
| 4.2      | Εφαρμογές στην Ανάλυση . . . . .             | 126        |
| 4.3      | Εφαρμογές στην Ρευστομηχανική . . . . .      | 131        |
| 4.4      | Εφαρμογές στον Ηλεκτρομαγνητισμό . . . . .   | 142        |
|          | <b>Βιβλιογραφία</b>                          | <b>159</b> |



# Chapter 1

## Διαφορικές Μορφές στον $\mathbb{R}^n$

Στο Κεφάλαιο αυτό, εφοδιάζουμε τον Ευκλείδιο χώρο  $\mathbb{R}^n$  με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x^1, \dots, x^n)$  (εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά) και υπενθυμίζουμε ότι αυτός έχει την συνήθη βάση  $\{e_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  όπου  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , όπου η μονάδα τοποθετείται στην  $i$ -θέση. Τα διανύσματα  $e_i$  έχουν αρχή το σημείο  $0 = (0, \dots, 0)$ . Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα  $e_i$  της βάσης του  $\mathbb{R}^n$  ώστε αυτά να έχουν αρχή το σημείο  $p$  και τα συμβολίζουμε με  $(e_i)_p$ .

### 1.1 Εφαπτόμενος και δυϊκός χώρος

Πρώτα, δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς.

**Ορισμός 1.1.1** (Εφαπτόμενος χώρος). Έστω  $p \in \mathbb{R}^n$  ένα σταθερό σημείο. Ο **εφαπτόμενος χώρος** (tangent space) στο σημείο  $p$  ορίζεται ως το σύνολο όλων των διανυσμάτων με αρχή το  $p$ , δηλαδή

$$\mathbb{R}_p^n := \{q - p : q \in \mathbb{R}^n\} = \text{span}(\{(e_i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}).$$

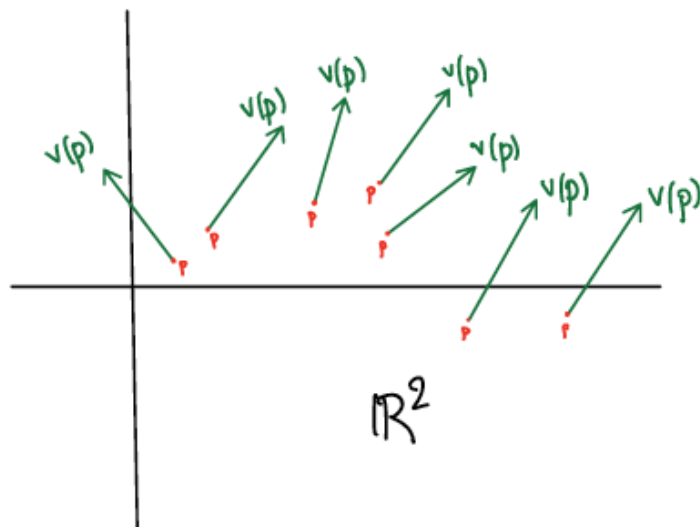
Το Σχήμα 1.2 δείχνει τον εφαπτόμενο χώρο  $\mathbb{R}_p^2$ .

**Ορισμός 1.1.2** (Διανυσματικά πεδία). Ένα **διανυσματικό πεδίο** (vector field) είναι μία απεικόνιση  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  με

$$p \in \mathbb{R}^n \mapsto v(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p)(e_i)_p \in \mathbb{R}_p^n,$$

όπου οι συνιστώσες  $p \mapsto v^i(p)$  είναι όλες λείες συναρτήσεις ως προς  $p$ .

Το Σχήμα 1.1 δείχνει ένα παράδειγμα διανυσματικού πεδίου στον  $\mathbb{R}^2$ .



Σχήμα 1.1: Ένα παράδειγμα διανυσματικού πεδίου στον  $\mathbb{R}^2$ . Για κάθε  $p \in \mathbb{R}^2$ , έχουμε ένα διάνυσμα  $v(p) \in \mathbb{R}_p^2$ .

**Ορισμός 1.1.3** (Δυϊκός χώρος). Ο **δυϊκός χώρος** (dual space) ορίζεται ως το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον εφαπτόμενο χώρο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή

$$(\mathbb{R}_p^n)^* := \{ \varphi : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R} : \eta \text{ απεικόνιση } v(p) \mapsto \varphi(v(p)) \text{ είναι γραμμική} \}.$$

Ας βρούμε μία βάση του χώρου αυτού. Ορίζουμε τις γραμμικές (εξ ορισμού) απεικονίσεις  $(dx^i)_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε

$$(dx^i)_p((e_j)_p) = \delta_j^i,$$

για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Ορίζοντας μόνο τις τιμές των απεικονίσεων αυτών στα στοιχεία της βάσης, καθορίζονται αυτόματα όλες οι τιμές. Πράγματι, λόγω της γραμμικότητας αυτών, παίρνουμε

$$(dx^i)_p(v(p)) = (dx^i)_p \left( \sum_{j=1}^n v^j(p)(e_j)_p \right) = \sum_{j=1}^n v^j(p)(dx^i)_p((e_j)_p)$$

$$= \sum_{j=1}^n v^j(p) \delta_j^i = v^i(p), \quad (1.1)$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Η σχέση αυτή δηλώνει ότι οι γραμμικές απεικονίσεις  $(dx^i)_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι απεικονίσεις συντεταγμένων για τα διανύσματα του εφαπτομένου χώρου  $\mathbb{R}_p^n$  ακριβώς όπως οι  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι απεικονίσεις συντεταγμένων για τα σημεία του  $\mathbb{R}^n$ . Πρώτα, θα αποδείξουμε ότι το σύνολο  $\{(dx^i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i (dx^i)_p = 0 &\implies \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (dx^i)_p \right) ((e_j)_p) = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i (dx^i)_p ((e_j)_p) = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_j^i = 0 \\ &\implies \lambda_j = 0, \end{aligned}$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ . Απομένει να δείξουμε ότι παράγει τον χώρο. Έστω ένα τυχαία επιλεγμένο στοιχείο  $\varphi \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ . Αναζητούμε (εάν υπάρχουν) συντελεστές  $\lambda_i$  τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i (dx^i)_p &\implies \varphi((e_j)_p) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (dx^i)_p \right) ((e_j)_p) \\ &\implies \varphi((e_j)_p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (dx^i)_p ((e_j)_p) \\ &\implies \varphi((e_j)_p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_j^i \\ &\implies \varphi((e_j)_p) = \lambda_j, \end{aligned}$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ . Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε κάθε στοιχείο  $\varphi \in (\mathbb{R}_p^n)^*$  συναρτήσει της βάσης ως εξής

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi((e_i)_p) (dx^i)_p, \quad (1.2)$$

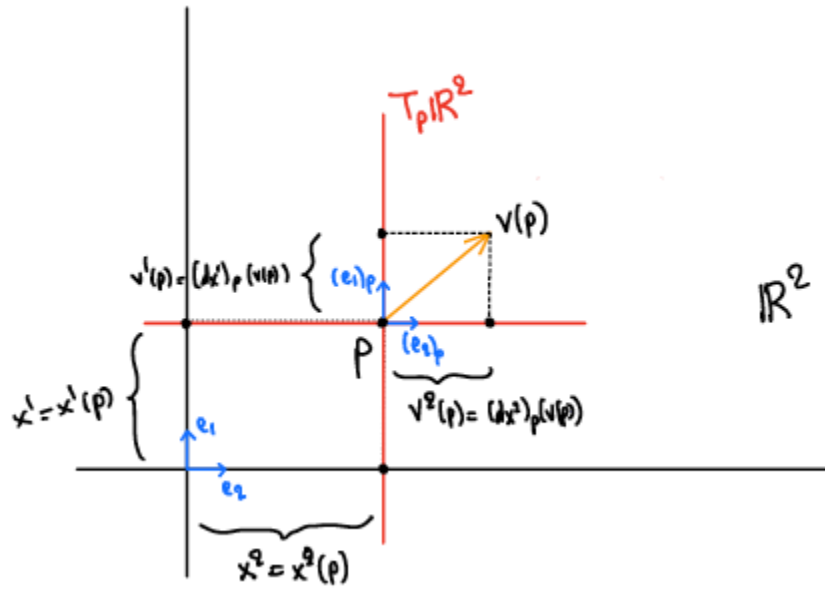
το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. Έτσι, έχουμε

$$(\mathbb{R}_p^n)^* = \text{span} \left( \{(dx^i)_p : i = 1, 2, \dots, n\} \right).$$

Προφανώς, η διάσταση του χώρου είναι

$$\dim(\mathbb{R}_p^n)^* = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Το Σχήμα 1.2 δείχνει την βάση του εφαπτόμενου χώρου  $\mathbb{R}_p^2$ .



Σχήμα 1.2: Ο εφαπτόμενος χώρος  $\mathbb{R}_p^2$ . Το σύνολο  $\{(e_1)_p, (e_2)_p\}$  αποτελεί βάση αυτού. Κάθε  $(e_i)_p$  προκύπτει από παράλληλη μεταφορά του αντίστοιχου στοιχείου βάσης  $e_i$  του  $\mathbb{R}^2$ . Οι συναρτήσεις  $(dx^i)_p : \mathbb{R}_p^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συναρτήσεις συντεταγμένων για τα διανύσματα  $v(p)$  του  $\mathbb{R}_p^2$  με την έννοια της (1.1) ακριβώς όπως οι  $x^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συναρτήσεις συντεταγμένων για τα σημεία  $p$  του  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.2 Διαφορικές μορφές

**Ορισμός 1.2.1** (1-μορφές). Μία 1-μορφή (1-form) είναι μία απεικόνιση  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  με

$$p \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i(p)(dx^i)_p \in (\mathbb{R}_p^n)^*,$$

όπου οι συνιστώσες  $p \mapsto \omega_i(p) := \omega(p)((e_i)_p)$  είναι όλες λείες συναρτήσεις ως προς  $p$ .

**Παράδειγμα 1.2.2** (Διαφορικό συνάρτησης). Ένα παράδειγμα 1-μορφής είναι το διαφορικό μίας λείας συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  σε κάποιο σημείο  $p \in \mathbb{R}^n$ . Αυτό είναι η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση

$$(df)_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε ο πίνακας που την αναπαριστά ως προς την βάση  $\{(e_i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}$  του  $\mathbb{R}_p^n$  να είναι ο

$$(df)_p = \left( \frac{\partial f(p)}{\partial x^j} \right).$$

Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι

$$(df)_p((e_j)_p) = \frac{\partial f(p)}{\partial x^j}.$$

Ορίζοντας μόνο τις τιμές αυτής στα στοιχεία της βάσης, καθορίζονται αυτόματα όλες οι τιμές. Πράγματι, επειδή αυτή είναι γραμμική, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (df)_p(v(p)) &= (df)_p \left( \sum_{i=1}^n v^i(p)(e_i)_p \right) = \sum_{i=1}^n v^i(p)(df)_p((e_i)_p) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial f(p)}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

για κάθε  $v(p) \in \mathbb{R}_p^n$ . Η τιμή  $(df)_p(v(p))$  ονομάζεται **κατευθυνόμενη παράγωγος** της  $f$  στο σημείο  $p$  στην κατεύθυνση του  $v(p)$ . Ισοδύναμα, λόγω της (1.2), η απεικόνιση αυτή γράφεται και ως

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n (df)_p((e_i)_p)(dx^i)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} (dx^i)_p$$

και εμπεριέχει όλη την πληροφορία για τις κατευθυνόμενες παραγώγους της  $f$  στο σημείο  $p$  ως προς κάθε κατεύθυνση: υπολογίζοντάς την σε ένα διάνυσμα  $v(p)$ , παίρνουμε την κατευθυνόμενη παραγωγή της  $f$  στο σημείο  $p$  ως προς αυτήν την κατεύθυνση  $v(p)$ .

**Ορισμός 1.2.3** (Χώρος των πολυγραμμικών και εναλλασσόμενων απεικονίσεων). Έστω  $k \geq 1$  έας ακέραιος αριθμός. Μία απεικόνιση

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}_p^n \times \cdots \times \mathbb{R}_p^n}_{k \text{ αντίγραφα}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1(p), \dots, v_k(p)) \mapsto \varphi(v_1(p), \dots, v_k(p))$$

ονομάζεται **πολυγραμμική** εάν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της και **εναλλασσόμενη** εάν αυτή αλλάζει πρόσημο όταν εναλλάσσουμε οι διαδοχικά τοποθετημένες μεταβλητές, δηλαδή

$$\varphi(\dots, v_i(p), v_{i+1}(p), \dots) = -\varphi(\dots, v_{i+1}(p), v_i(p), \dots),$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Συμβολίζουμε τον **χώρο των πολυγραμμικών και εναλλασσόμενων απεικονίσεων** ως εξής

$$\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^* := \{\text{όλες οι πολυγραμμικές και εναλλασσόμενες απεικονίσεις}\}.$$

Παρατηρήστε ότι  $\Lambda^1(\mathbb{R}_p^n)^* = (\mathbb{R}_p^n)^*$ . Ως ένα παράδειγμα, ας δούμε ένα στοιχείο του χώρου  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ . Για κάθε 1-μορφές  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ , ορίζουμε το στοιχείο

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$$

από τον τύπο

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1(p), \dots, v_k(p)) := \det(\varphi_i(v_j(p))), \quad (1.3)$$

για κάθε  $v_1(p), \dots, v_k(p) \in \mathbb{R}_p^n$ . Είναι εύκολο να δεί κανείς, από τις ιδιότητες τις ορίζουσας, ότι η απεικόνιση αυτή είναι πολυγραμμική και εναλλασσόμενη, και ως εκ τούτου ανήκει πράγματι στον χώρο  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ . Παρατηρήστε ότι, από την (1.3) προκύπτει

$$(dx^i)_p \wedge (dx^i)_p = 0, \quad (dx^i)_p \wedge (dx^j)_p = -(dx^j)_p \wedge (dx^i)_p. \quad (1.4)$$

για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$  με  $i \neq j$ . Στην συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε το στοιχείο αυτό για να βρούμε μία βάση του χώρου  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ . Συγκεκριμένα, ισχυριζόμαστε ότι

$$\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^* = \text{span} \left( \{ (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \} \right).$$

Πράγματι, το σύνολο  $\{ (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p &= 0 \implies \\ \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p \right) ((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) &= 0 \implies \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p ((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) &= 0 \implies \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \det((dx^{i_\mu})_p((e_{j_\nu})_p)) &= 0 \implies \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} &= 0 \implies \\ \lambda_{j_1 \dots j_k} &= 0, \end{aligned}$$

για κάθε  $(j_1, \dots, j_k)$  με  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ . Εδώ, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\det((dx^{i_\mu})_p((e_{j_\nu})_p)) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k}.$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί πιο αναλυτικά ως εξής: Εάν  $i_1 > j_1$ , τότε  $1 \leq j_1 < i_1 < \dots < i_k \leq n$  και συνεπώς  $(dx^{i_\mu})_p((e_{j_1})_p) = \delta_{j_1}^{i_\mu} = 0$ , για κάθε  $\mu = 1, 2, \dots, k$ . Αυτό μας δίνει  $\det((dx^{i_\mu})_p((e_{j_\nu})_p)) = 0$ . Εάν  $i_1 < j_1$ , τότε

$1 \leq i_1 < j_1 < \dots < j_k \leq n$  και συνεπώς  $(dx^{i_1})_p((e_{j_\nu})_p) = \delta_{j_\nu}^{i_1} = 0$ , για κάθε  $\nu = 1, 2, \dots, k$ . Αυτό μας δίνει πάλι  $\det((dx^{i_\mu})_p((e_{j_\nu})_p)) = 0$ . Έτσι, για κάθε  $i_1 \neq j_1$ , έχουμε  $\det((dx^{i_\mu})_p((e_{j_\nu})_p)) = 0$ . Τώρα, υποθέτουμε ότι  $i_1 = j_1$  και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή επαγωγικά για  $i_2 < j_2$  και  $i_2 > j_2$ . Απομένει να δείξουμε ότι το σύνολο αυτό παράγει τον χώρο. Έστω ένα τυχαία επιλεγμένο στοιχείο  $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ . Αναζητούμε (εάν υπάρχουν) συντελεστές  $\lambda_{i_1 \dots i_k}$  τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p \implies \\ \varphi((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) &= \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p \right) ((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) \implies \\ \varphi((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p ((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) \implies \\ \varphi((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \det((dx^{i_\mu})_p((e_{j_\nu})_p)) \implies \\ \varphi((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} = \lambda_{j_1 \dots j_k}, \end{aligned}$$

για κάθε  $(j_1, \dots, j_k)$  με  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ . Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε κάθε στοιχείο  $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$  συναρτήσει της βάσης ως εξής

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varphi((e_{j_1})_p, \dots, (e_{j_k})_p) (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p,$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. Προφανώς, η διάσταση του χώρου αυτού είναι ίση με τον αριθμό των  $k$  συνδιασμών από  $n$  στοιχεία, δηλαδή

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^* = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Ορισμός 1.2.4** ( $k$ -μορφές). Μία  $k$ -μορφή ( $k$ -form) είναι μία απεικόνιση  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$  με

$$p \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*,$$

όπου οι συνιστώσες  $p \mapsto \omega_{i_1 \dots i_k}(p) := \omega(p)((e_{i_1})_p, \dots, (e_{i_k})_p)$  είναι όλες λείες συναρτήσεις ως προς  $p$ .

**Παρατήρηση 1.2.5** (Πόσες  $k$ -μορφές υπάρχουν). Παρατηρήστε ότι

$$k > n \implies \binom{n}{k} = 0 \implies \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^* = \{0\}.$$

Αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι σε έναν χώρο διάστασης  $n$ , όπως ο διϊκός χώρος  $(\mathbb{R}_p^n)^*$ , δεν μπορούν να υπάρξουν  $k$  το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα με  $k > n$ . Έτσι, όταν  $k > n$ , κάθε σύνολο  $\{(v_1(p), \dots, v_k(p))\} \subseteq \mathbb{R}_p^n$  είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένο και ως εκ τούτου  $\varphi(v_1(p), \dots, v_k(p)) = 0$ , για κάθε  $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ . Αυτό προκύπτει επειδή η απεικόνιση  $\varphi$  είναι εναλλασσόμενη. Κάθε εναλλασσόμενη απεικόνιση μηδενίζεται όταν δύο μεταβλητές της είναι ίσες. Λόγω της πολυγραμμικότητάς της, το ίδιο ισχύει όταν μία μεταβλητή της γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπων. Αυτό αποδεικνύεται στην Άσκηση 1.10.1.

## 1.3 Γεωμετρική ερμηνεία των μορφών

Για παράδειγμα, στον  $\mathbb{R}^3$ , οι μόνες μη-μηδενικές μορφές είναι οι εξής:

- 0-μορφές: κατά σύμβαση, αυτές είναι απλά συναρτήσεις

$$\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\text{όπου } \omega = \omega(x^1, x^2, x^3).$$

- 1-μορφές: όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυτές εκφράζουν **μήκος** και είναι της μορφής

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3,$$

$$\text{όπου } \omega_j = \omega_j(x^1, x^2, x^3), \text{ για κάθε } j = 1, 2, 3.$$

- 2-μορφές: όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυτές εκφράζουν **εμβαδό** και είναι της μορφής

$$\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3,$$

$$\text{όπου } \omega_{ij} = \omega_{ij}(x^1, x^2, x^3), \text{ για κάθε } i, j = 1, 2, 3 \text{ με } i < j.$$

- 3-μορφές: όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυτές εκφράζουν **όγκο** και είναι της μορφής

$$\omega = \omega_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

$$\text{όπου } \omega_{123} = \omega_{123}(x^1, x^2, x^3).$$

## 1-μορφές στον $\mathbb{R}^3$

Έστω  $d\lambda$  η (μοναδική) 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε

$$d\lambda(e_1) = 1, \quad d\lambda(e_2) = 0, \quad d\lambda(e_3) = 0.$$

Με βάση τον Ορισμό 1.2.4, έχουμε ότι

$$d\lambda = d\lambda(e_1)dx^1 + d\lambda(e_2)dx^2 + d\lambda(e_3)dx^3 = dx^1.$$

Η 1-μορφή αυτή ονομάζεται **στοιχείο μήκους** (line element) στην κατεύθυνση  $e_1$ . Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε το στοιχείο μήκους και στις άλλες κατευθύνσεις. Η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι εάν την εφαρμόσουμε σε ένα διανυσματικό πεδίο  $v$ , παίρνουμε το (προσανατολισμένο) **μήκος** του  $v$  στην κατεύθυνση του  $e_1$ , δηλαδή

$$d\lambda(v) = \langle v, e_1 \rangle = |\text{proj}_{e_1}(v)|.$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει ως εξής. Έστω ότι

$$v = \sum_{j=1}^3 \alpha_j e_j.$$

Τότε, βρίσκουμε

$$d\lambda(v) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j d\lambda(e_j) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \delta_1^j = \alpha_1 = \langle v, e_1 \rangle.$$

Γενικά, μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  είναι της μορφής

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$$

και έτσι μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως την απεικόνιση που εμπεριέχει όλη την πληροφορία για τα μήκη των προβολών των διανυσματικών πεδίων στις αντίστοιχες διευθύνσεις της βάσης.

## 2-μορφές στον $\mathbb{R}^3$

Έστω  $dA$  η (μοναδική) 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε

$$dA(e_1, e_2) = 1, \quad dA(e_2, e_3) = 0, \quad dA(e_1, e_3) = 0.$$

Με βάση τον Ορισμό 1.2.4, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dA &= dA(e_1, e_2)dx^1 \wedge dx^2 + dA(e_2, e_3)dx^2 \wedge dx^3 + dA(e_1, e_3)dx^1 \wedge dx^3 \\ &= dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Η 2-μορφή αυτή ονομάζεται **στοιχείο εμβαδού** (area element) στις κατευθύνσεις  $e_1$  και  $e_2$ . Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε το στοιχείο εμβαδού και στις άλλες κατευθύνσεις. Η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι εάν την εφαρμόσουμε σε δύο διανυσματικά πεδία  $v_1$  και  $v_2$ , παίρνουμε το (προσανατολισμένο) **εμβαδό του παραλληλογράμμου** που ορίζεται από αυτά, δηλαδή

$$dA(v_1, v_2) = \pm \det(v_1, v_2) = \pm \text{Area}(v_1, v_2).$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει ως εξής. Έστω ότι

$$v_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_j,$$

για κάθε  $i = 1, 2$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την (1.3) και υποθέτοντας θετικά προσανατολισμένη βάση  $\{v_1, v_2\}$ , δηλαδή οι κατευθύνσεις αυτών είναι αντιωρολογιακές (το οποίο μεταφράζεται στην συνθήκη  $\det(v_1, v_2) > 0$ ), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} A(v_1, v_2) &= (dx^1 \wedge dx^2)(v_1, v_2) = \det(dx^\kappa(v_\lambda)) = \det(\alpha_{\lambda\kappa}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \det(v_1, v_2) = |v_1 \times v_2| \\ &= \text{Area}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Γενικά, μία 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  είναι της μορφής

$$\omega = \omega_{12}dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{13}dx^1 \wedge dx^3 + \omega_{23}dx^2 \wedge dx^3$$

Για τον λόγο αυτό, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την  $dA$  ως την απεικόνιση που εμπεριέχει όλη την πληροφορία για τα εμβαδά παραλληλόγραμμων που δημιουργούνται από δύο διανυσματικά πεδία. Εάν τα  $v_1$  και  $v_2$  είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε το εμβαδό  $A(v_1, v_2)$  ισούται με μηδέν.

### 3-μορφές στον $\mathbb{R}^3$

Έστω  $dV$  η (μοναδική) 3-μορφή στον  $\mathbb{R}^n$  τέτοια ώστε

$$dV(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

Με βάση τον Ορισμό 1.2.4, έχουμε ότι

$$dV = dV(e_1, e_2, e_3)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Η 3-μορφή αυτή ονομάζεται **στοιχείο όγκου** (volume element) . Η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι εάν την εφαρμόσουμε σε τρία διανυσματικά πεδία  $v_1, v_2$  και  $v_3$ , παίρνουμε τον (προσανατολισμένο) **όγκο του στερεού** που δημιουργείται από αυτά, δηλαδή

$$dV(v_1, v_2, v_3) = \pm \det(v_1, v_2, v_3) = \pm \text{vol}(v_1, v_2, v_3).$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει ως εξής. Έστω ότι

$$v_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_j,$$

για κάθε  $i = 1, 2, 3$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την (1.3) και υποθέτοντας θετικά προσανατολισμένη βάση  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , δηλαδή οι κατευθύνσεις αυτών ακολουθούν τον κανόνα του δεξιού χεριού (το οποίο μεταφράζεται στην συνθήκη  $\det(v_1, v_2, v_3) > 0$ ), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} dV(v_1, v_2, v_3) &= (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)(v_1, v_2, v_3) = \det(dx^\kappa(v_\lambda)) \\ &= \det(\alpha_{\lambda\kappa}) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \det(v_1, v_2, v_3) \\ &= (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = \text{vol}(v_1, v_2, v_3). \end{aligned}$$

Για τον λόγο αυτό, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την  $dV$  ως την απεικόνιση που εμπεριέχει όλη την πληροφορία για τους όγκους στερεών που δημιουργούνται από τρία διανυσματικά πεδία. Εάν τα  $v_1, v_2$  και  $v_3$  είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ο όγκος  $\text{vol}(v_1, v_2, v_3)$  ισούται με μηδέν.

## 1.4 Εξωτερικό γινόμενο μορφών

Από εδώ και στο εξής, θα παραλείπουμε την εξάρτηση ως προς το αρχικό σημείο  $p$  εκεί όπου δεν προκαλείται σύγχυση. Για να ελαφρύνουμε ακόμα περισσότερο τον συμβολισμό, θα γράφουμε την τοπική έκφραση των  $k$ -μορφών ως εξής

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I,$$

όπου  $I := \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ .

**Ορισμός 1.4.1** (Πράξεις με  $k$ -μορφές). Έστω  $\omega$  μία  $k$ -μορφη και  $\varphi$  μία  $s$ -μορφή στον ίδιο χώρο  $\mathbb{R}^n$  με

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I, \quad \varphi = \sum_J \varphi_J dx^J.$$

Μόνο για  $k = s$ , ορίζουμε την **πρόσθεση**  $\omega + \varphi$  ως την  $k$ -μορφή που δίνεται από

$$\omega + \varphi := \sum_I (\omega_I + \varphi_I) dx^I.$$

Επίσης, για κάθε  $k$  και  $s$ , ορίζουμε το **εξωτερικό γινόμενο** (wedge product)  $\omega \wedge \varphi$  ως την  $(k + s)$ -μορφή που δίνεται από

$$\omega \wedge \varphi := \sum_{I, J} \omega_I \varphi_J dx^I \wedge dx^J.$$

Ο ορισμός αυτός είναι συμβατός με αυτόν της (1.3). Ας το αποδείξουμε αυτό στην ειδική περίπτωση όπου  $k = 2$  και  $n = 3$ . Πράγματι, έστω ότι έχουμε  $k = 2$  το πλήθος 1-μορφές  $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$  και διανυσματικά πεδία  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ . Αυτά γράφονται και ως

$$\varphi_r = \sum_{i=1}^3 \varphi_{ri} dx^i, \quad v_r = \sum_{i=1}^3 v_r^i e_i,$$

για κάθε  $r = 1, 2$ , και υπολογίζουμε

$$\varphi_r(v_l) = \sum_{i=1}^3 \varphi_{ri} dx^i(v_l) = \sum_{i=1}^3 \varphi_{ri} v_l^i,$$

για κάθε  $r = 1, 2$  και για κάθε  $l = 1, 2, 3$ . Τώρα, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου καθώς και τις ιδιότητες (1.4), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \wedge \varphi_2 &:= \sum_{i,j=1}^3 \varphi_{1i} \varphi_{2j} dx^i \wedge dx^j \\
&= \varphi_{11} \varphi_{21} dx^1 \wedge dx^1 + \varphi_{11} \varphi_{22} dx^1 \wedge dx^2 + \varphi_{11} \varphi_{23} dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad + \varphi_{12} \varphi_{21} dx^2 \wedge dx^1 + \varphi_{12} \varphi_{22} dx^2 \wedge dx^2 + \varphi_{12} \varphi_{23} dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \varphi_{13} \varphi_{21} dx^3 \wedge dx^1 + \varphi_{13} \varphi_{22} dx^3 \wedge dx^2 + \varphi_{13} \varphi_{23} dx^3 \wedge dx^3 \\
&= \varphi_{11} \varphi_{22} dx^1 \wedge dx^2 + \varphi_{11} \varphi_{23} dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad - \varphi_{12} \varphi_{21} dx^1 \wedge dx^2 + \varphi_{12} \varphi_{23} dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad - \varphi_{13} \varphi_{21} dx^1 \wedge dx^3 - \varphi_{13} \varphi_{22} dx^2 \wedge dx^3 \\
&= (\varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12} \varphi_{21}) dx^1 \wedge dx^2 + (\varphi_{11} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{21}) dx^1 \wedge dx^3 \\
&\quad + (\varphi_{12} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{22}) dx^2 \wedge dx^3, \\
(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) &:= (\varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12} \varphi_{21})(dx^1 \wedge dx^2)(v_1, v_2) \\
&\quad + (\varphi_{11} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{21})(dx^1 \wedge dx^3)(v_1, v_2) \\
&\quad + (\varphi_{12} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{22})(dx^2 \wedge dx^3)(v_1, v_2) \\
&= (\varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12} \varphi_{21}) \det \begin{pmatrix} dx^1(v_1) & dx^1(v_2) \\ dx^2(v_1) & dx^2(v_2) \end{pmatrix} \\
&\quad + (\varphi_{11} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{21}) \det \begin{pmatrix} dx^1(v_1) & dx^1(v_2) \\ dx^3(v_1) & dx^3(v_2) \end{pmatrix} \\
&\quad + (\varphi_{12} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{22}) \det \begin{pmatrix} dx^2(v_1) & dx^2(v_2) \\ dx^3(v_1) & dx^3(v_2) \end{pmatrix} \\
&= (\varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12} \varphi_{21}) \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + (\varphi_{11} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{21}) \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^3 & v_2^3 \end{pmatrix} \\
&\quad + (\varphi_{12} \varphi_{23} - \varphi_{13} \varphi_{22}) \det \begin{pmatrix} v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η παραπάνω έκφραση γράφεται και ως

$$\det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \varphi_{1i} v_1^i & \sum_{i=1}^3 \varphi_{1i} v_2^i \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_{2i} v_1^i & \sum_{i=1}^3 \varphi_{2i} v_2^i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

**Παράδειγμα 1.4.2** (Υπολογισμός εξωτερικού γινομένου). Ως ένα παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το εξωτερικό γινόμενο της 1-μορφής  $\omega$  με την 2-μορφή  $\varphi$  στον  $\mathbb{R}^3$  όπου

$$\begin{aligned}\omega &= x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3, \\ \varphi &= x^1 dx^1 \wedge dx^2 + dx^1 \wedge dx^3.\end{aligned}$$

Ο ορισμός και η (1.4) μας δίνουν ότι

$$\begin{aligned}\omega \wedge \varphi &= (x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) \wedge (x^1 dx^1 \wedge dx^2 + dx^1 \wedge dx^3) \\ &= (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + x^1 dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad + x^1 x^2 dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + x^2 dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad + x^3 x^1 dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + x^3 dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &= -x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^3 x^1 dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 \\ &= -x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + x^3 x^1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= (x^3 x^1 - x^2) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,\end{aligned}$$

το οποίο είναι μία 3-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$ .

**Παράδειγμα 1.4.3** (Υπολογισμός εξωτερικού γινομένου). Από την (1.4), έχουμε  $dx^i \wedge dx^i = 0$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Αυτό **δεν** συνεπάγεται αναγκαστικά ότι  $\omega \wedge \omega = 0$ , για κάθε  $k$ -μορφή  $\omega$ . Πράγματι, για παράδειγμα ας υπολογίσουμε το εξωτερικό γινόμενο  $\omega \wedge \omega$  όπου  $\omega$  είναι η 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^4$  που δίνεται από

$$\omega = x^1 dx^1 \wedge dx^2 + x^2 dx^3 \wedge dx^4.$$

Ο ορισμός και η (1.4) μας δίνουν ότι

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega &= (x^1 dx^1 \wedge dx^2 + x^2 dx^3 \wedge dx^4) \wedge (x^1 dx^1 \wedge dx^2 + x^2 dx^3 \wedge dx^4) \\ &= (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\ &\quad + x^1 x^2 dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + (x^2)^2 dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\ &= x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + x^1 x^2 dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - x^1 x^2 dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \\
&= x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + x^1 x^2 dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \\
&= x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \\
&= x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\
&= 2x^1 x^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι μία 4-μορφή στον  $\mathbb{R}^4$ . Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, βλέπε Λήμμα 1.4.4 (β), αυτό ισχύει για όλες τις  $k$ -μορφές με  $k$  περιττό. Πράγματι, όταν το  $k$  είναι περιττός, το  $k^2$  είναι επίσης περιττός και τότε το Λήμμα 1.4.4 (β) μας δίνει

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega \implies \omega \wedge \omega = 0.$$

**Λήμμα 1.4.4** (Ιδιότητες  $k$ -μορφών). Έστω ότι  $\omega$  είναι μία  $k$ -μορφή,  $\varphi$  μία  $s$ -μορφή και  $\vartheta$  μία  $r$ -μορφή. Τότε, έχουμε τις ιδιότητες

$$\begin{aligned}
(\alpha) \quad & (\omega \wedge \varphi) \wedge \vartheta = \omega \wedge (\varphi \wedge \vartheta), \\
(\beta) \quad & \omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} (\varphi \wedge \omega), \\
(\gamma) \quad & \omega \wedge (\varphi + \vartheta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \vartheta,
\end{aligned}$$

όπου το  $(\gamma)$  ισχύει μόνο για  $s = r$  (ώστε να ορίζεται η πρόσθεση των  $\varphi$  και  $\vartheta$ ).

*Απόδειξη.* Οι ιδιότητες  $(\alpha)$  και  $(\gamma)$  προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς. Για την  $(\beta)$ , γράφουμε

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I, \quad \varphi = \sum_J \varphi_J dx^J$$

και παρατηρήστε ότι στο σύνολο  $I$  υπάρχουν  $k$  στοιχεία ενώ στο σύνολο  $J$  υπάρχουν  $s$  στοιχεία. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου και την ιδιότητα (1.4), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \varphi &= \sum_{I,J} \omega_I \varphi_J dx^I \wedge dx^J \\
&= \sum_{I,J} \omega_I \varphi_J dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}
\end{aligned}$$

$$= - \sum_{I,J} \omega_I \varphi_J dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{i_k} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}.$$

Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία συνολικά  $k$  φορές, μεταφέρουμε το  $dx^{j_1}$  στην πρώτη θέση, δηλαδή

$$\omega \wedge \varphi = (-1)^k \sum_{I,J} \omega_I \varphi_J dx^{j_1} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}.$$

Επαναλαμβάνοντας και πάλι αυτήν την διαδικασία για κάθε ένα από τα στοιχεία του συνόλου  $J$ , βρίσκουμε

$$\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \sum_{I,J} \omega_I \varphi_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega,$$

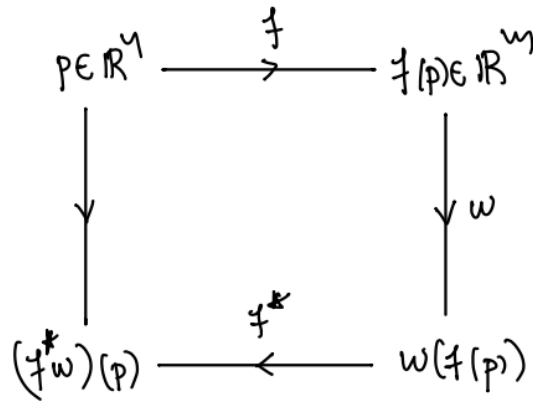
το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## 1.5 Μετασχηματισμός μορφών

Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μία λεία απεικόνιση και  $p \in \mathbb{R}^n$ . Η  $f$  επάγει μία απεικόνιση που μετατρέπει  $k$ -μορφές  $f(p) \mapsto \omega(f(p))$  του  $\mathbb{R}^m$  σε  $k$ -μορφές  $p \mapsto (f^*\omega)(p)$  του  $\mathbb{R}^n$ . Αυτή ονομάζεται **pull-back** και συμβολίζεται με

$$f^* : \Lambda^k(\mathbb{R}_{f(\cdot)}^m)^* \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*, \quad \omega(f(p)) \mapsto (f^*\omega)(p).$$

Το Σχήμα 1.3 δείχνει την απεικόνιση αυτή.



Σχήμα 1.3: Η απεικόνιση pull-back  $\omega(f(p)) \mapsto (f^*\omega)(p)$  δοθέντος μίας συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Όταν  $k = 0$ , δηλαδή το  $\omega$  είναι απλά μία λεία συνάρτηση, αυτή ορίζεται κατά σύμβαση ως

$$(f^*\omega)(p) := \omega(f(p)).$$

Όταν  $k \geq 1$ , αυτή ορίζεται ως

$$(f^*\omega)(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)) := \omega(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))),$$

για κάθε  $v_1(p), \dots, v_k(p) \in \mathbb{R}_p^n$ . Εδώ,  $(df)_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$  είναι το διαφορικό της  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  στο σημείο  $p \in \mathbb{R}^n$  το οποίο ορίζεται ως η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση η οποία αναπαριστάται ως προς τις βάσεις  $\{(e_i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}$  και  $\{(e_i)_{f(p)} : i = 1, 2, \dots, m\}$  των  $\mathbb{R}_p^n$  και  $\mathbb{R}_{f(p)}^m$  αντίστοιχα από τον πίνακα

$$(df)_p = \left( \frac{\partial f^i(p)}{\partial x^j} \right).$$

Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι

$$(df)_p((e_j)_p) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^i(p)}{\partial x^j} (e_i)_{f(p)},$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ . Ορίζοντας μόνο τις τιμές αυτής στα στοιχεία της βάσης, καθορίζονται αυτόματα όλες οι τιμές. Πράγματι, επειδή αυτή είναι γραμμική, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (df)_p(v(p)) &= (df)_p \left( \sum_{j=1}^n v^j(p) (e_j)_p \right) = \sum_{j=1}^n v^j(p) (df)_p((e_j)_p) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n v^j(p) \frac{\partial f^i(p)}{\partial x^j} \right) (e_i)_{f(p)}, \end{aligned}$$

για κάθε  $v(p) \in \mathbb{R}_p^n$ .

**Λήμμα 1.5.1** (Ιδιότητες της απεικόνισης pull-back). Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μία λεία απεικόνιση,  $\omega, \varphi$  δύο  $k$ -μορφές στον  $\mathbb{R}^m$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  1-μορφές στον  $\mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  και  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  δύο ακόμη λείες συναρτήσεις. Τότε, έχουμε

$$(\alpha) \quad f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi,$$

$$\begin{aligned}
(\beta) \quad & f^*(g\omega) = (g \circ f)f^*\omega, \\
(\gamma) \quad & (f \circ h)^*(\omega) = h^*(f^*\omega), \\
(d) \quad & f^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\varphi_k).
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω  $p \in \mathbb{R}^n$  και  $v_1(p), \dots, v_k(p) \in \mathbb{R}_p^n$ . Με βάση τον ορισμό, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
& (f^*(\omega + \varphi))(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)) \\
&= (\omega + \varphi)(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))) \\
&= \omega(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))) \\
&\quad + \varphi(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))) \\
&= (f^*\omega)(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)) + (f^*\varphi)(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)),
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το  $(\alpha)$ . Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}
& (f^*(g\omega))(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)) \\
&= (g\omega)(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))) \\
&= (g\omega)(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))) \\
&= g(f(p))\omega(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))) \\
&= g(f(p))(f^*\omega)(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)),
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το  $(\beta)$ . Για το  $(\gamma)$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
& ((f \circ h)^*(\omega))(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)) \\
&= \omega_{(f \circ h)(p)}((d(f \circ h))_p(v_1(p)), \dots, (d(f \circ h))_p(v_k(p))) \\
&= \omega_{f(h(p))}(((df)_{h(p)} \circ (dh)_p)(v_1(p)), \dots, ((df)_{h(p)} \circ (dh)_p)(v_k(p))) \\
&= \omega_{f(h(p))}((df)_{h(p)}((dh)_p(v_1(p))), \dots, (df)_{h(p)}((dh)_p(v_k(p)))) \\
&= (f^*\omega)(h(p))((dh)_p(v_1(p)), \dots, (dh)_p(v_k(p))) \\
&= (h^*(f^*\omega))(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)).
\end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας και την (1.3), έχουμε

$$\begin{aligned}
& (f^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k))(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)) \\
&= (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(f(p))((df)_p(v_1(p)), \dots, (df)_p(v_k(p))) \\
&= \det(\varphi_i((df)_p(v_j(p))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det ((f^* \varphi_i)(p)(v_j(p))) \\
&= (f^* \varphi_1 \wedge \cdots \wedge f^* \varphi_k)(p)(v_1(p), \dots, v_k(p)),
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το (δ) και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Λήμμα 1.5.2** (Γενικός υπολογισμός της απεικόνισης pull-back). Έστω ότι  $(x^1, \dots, x^n)$  και  $(y^1, \dots, y^m)$  είναι οι συντεταγμένες στους  $\mathbb{R}^n$  και  $\mathbb{R}^m$  αντίστοιχα και  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μία λεία απεικόνιση με

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n),$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ . Έστω ακόμα  $p \in \mathbb{R}^n$  και  $\omega$  μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^m$  με

$$\omega(f(p)) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1 \dots i_k}(f(p))(dy^{i_1})_{f(p)} \wedge \cdots \wedge (dy^{i_k})_{f(p)}.$$

Τότε, έχουμε

$$(f^* \omega)_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1 \dots i_k}(f(x^1, \dots, x^n))(df^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (df^{i_k})_p.$$

Δηλαδή, η  $k$ -μορφή  $f^* \omega$  (ως προς  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ ) προκύπτει από την  $k$ -μορφή  $\omega$  (ως προς  $dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$ ) με αντικατάσταση των μεταβλητών  $y^j = f^j(x^1, \dots, x^n)$  εκεί όπου εμφανίζονται.

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Λήμματος 1.5.1. Έχουμε

$$\begin{aligned}
(f^* \omega)_p &= f^* \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1 \dots i_k}(f(p))(dy^{i_1})_{f(p)} \wedge \cdots \wedge (dy^{i_k})_{f(p)} \right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f^* \left( \omega_{i_1 \dots i_k}(f(p))(dy^{i_1})_{f(p)} \wedge \cdots \wedge (dy^{i_k})_{f(p)} \right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} (f^*(\omega_{i_1 \dots i_k}))(p) f^* \left( (dy^{i_1})_{f(p)} \wedge \cdots \wedge (dy^{i_k})_{f(p)} \right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ f)(x^1, \dots, x^n) (f^*(dy^{i_1}))_p \wedge \cdots \wedge (f^*(dy^{i_k}))_p \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1 \dots i_k}(f(x^1, \dots, x^n))(df^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (df^{i_k})_p,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε την ισότητα

$$(f^*(dy^l))_p = (df^l)_p, \quad (1.5)$$

για κάθε  $l = 1, 2, \dots, m$ . Αυτή προκύπτει ως εξής:

$$(f^*(dy^l))_p(v(p)) = (dy^l)_{f(p)}((df)_p(v(p))) = (d(y^l \circ f))_p(v(p)) = (df^l)_p(v(p)),$$

για κάθε  $v(p) \in \mathbb{R}^n$ , το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Παράδειγμα 1.5.3** (Υπολογισμός της απεικόνισης pull-back). Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω  $n = 2$  και  $\omega$  η 1-μορφή που δίνεται από

$$\omega = -\frac{y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} dy^1 + \frac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2} dy^2.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή ορίζεται μόνο στο  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Ωστόσο, όλα όσα αναπτύξαμε παραπάνω μπορούν να οριστούν και σε υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  χωρίς σύγχυση. Η παραπάνω απεικόνιση  $f$  είναι ουσιαστικά μία απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων. Αλλάζουμε συντεταγμένες από Καρτεσιανές  $(y^1, y^2)$  σε πολικές  $(r, \vartheta)$  μέσω της απεικόνισης

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(r, \vartheta) = (y^1(r, \vartheta), y^2(r, \vartheta)),$$

όπου

$$U := \{(r, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \vartheta \in (0, 2\pi)\}, \quad \begin{cases} y^1(r, \vartheta) = r \cos(\vartheta), \\ y^2(r, \vartheta) = r \sin(\vartheta). \end{cases}$$

Με βάση το Λήμμα 1.5.2, για να υπολογίσουμε την 1-μορφή  $f^*\omega$  πρέπει και αρ-  
κεί να αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές  $y^1 = y^1(r, \vartheta)$  και  $y^2 = y^2(r, \vartheta)$  στην  
έκφραση του  $\omega$ . Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} f^*\omega &= -\frac{y^2(r, \vartheta)}{(y^1(r, \vartheta))^2 + (y^2(r, \vartheta))^2} dy^1(r, \vartheta) + \frac{y^1(r, \vartheta)}{(y^1(r, \vartheta))^2 + (y^2(r, \vartheta))^2} dy^2(r, \vartheta) \\ &= -\frac{r \sin(\vartheta)}{r^2} dy^1(r, \vartheta) + \frac{r \cos(\vartheta)}{r^2} dy^2(r, \vartheta) \\ &= -\frac{r \sin(\vartheta)}{r^2} \left( \frac{\partial y^1(r, \vartheta)}{\partial r} dr + \frac{\partial y^1(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) + \frac{r \cos(\vartheta)}{r^2} \left( \frac{\partial y^2(r, \vartheta)}{\partial r} dr + \frac{\partial y^2(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{r \sin(\vartheta)}{r^2} (\cos(\vartheta)dr - r \sin(\vartheta)d\vartheta) + \frac{r \cos(\vartheta)}{r^2} (\sin(\vartheta)dr + r \cos(\vartheta)d\vartheta) \\
&= d\vartheta.
\end{aligned}$$

**Λήμμα 1.5.4** (Μετασχηματισμός του στοιχείου όγκου). Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  μία λεία απεικόνιση με

$$f(u_1, \dots, u_n) = (x^1, \dots, x^n).$$

Συμβολίζουμε με

$$(dV)_x := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

το στοιχείο όγκου του  $\mathbb{R}^n$  ως προς τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x^1, \dots, x^n)$  και με

$$(dV)_u := du^1 \wedge \dots \wedge du^n$$

το στοιχείο όγκου του  $\mathbb{R}^n$  ως προς τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(u^1, \dots, u^n)$ . Τότε, έχουμε

$$f^*((dV)_x) = \det(df(u))(dV)_u.$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της pull-back απεικόνισης που αποδείξαμε παραπάνω καθώς και την (1.5), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
f^*((dV)_x) &= f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\
&= f^*(dx^1) \wedge \dots \wedge f^*(dx^n) \\
&= df^1 \wedge \dots \wedge df^n \\
&= \left( \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial u^{i_1}} du^{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i_n=1}^n \frac{\partial f^n}{\partial u^{i_n}} du^{i_n} \right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial f^n}{\partial u^{i_n}} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_n}.
\end{aligned}$$

Αυτό το άθροισμα περιλαμβάνει όλους τους συνδιασμούς των  $du^{i_l}$ , για κάθε  $l = 1, 2, \dots, n$ . Ωστόσο, εάν κάποιος δείκτης επαναλαμβάνεται, τότε το εξωτερικό γινόμενο  $du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_n}$  μηδενίζεται λόγω της (1.4). Άρα, οι μόνο όροι

που ουσιαστικά συμβάλλουν στο άθροισμα είναι αυτοί με διακεκριμένους δείκτες δηλαδή όταν οι δείκτες  $(i_1, \dots, i_n)$  είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει όταν η ακολουθία  $(i_1, \dots, i_n)$  είναι μία αναδιάταξη των αριθμών του συνόλου  $\{1, 2, \dots, n\}$  χωρίς επαναλήψεις. Το σύνολο όλων αυτών των μεταθέσεων συμβολίζεται με  $S_n$  και οι μεταθέσεις που εμπεριέχει είναι της μορφής

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

όπου τα  $\sigma(i)$  είναι διακεκριμένοι αριθμοί αναδιάταξης του συνόλου των αριθμών του συνόλου  $\{1, 2, \dots, n\}$  χωρίς επαναλήψεις. Όταν η  $\sigma$  είναι άρτια (δηλαδή προκύπτει από ζυγό αριθμό ανταλλαγών των θέσεων), έχουμε  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ , ενώ όταν αυτή είναι περιττή (δηλαδή προκύπτει από μονό αριθμό ανταλλαγών των θέσεων), έχουμε  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ . Έτσι, γράφουμε το παραπάνω άθροισμα συμπεριλαμβάνοντας μόνο τους μη-μηδενικούς όρους (δηλαδή μόνο αυτούς που συμβάλλουν στο άθροισμα) και παίρνουμε

$$f^*((dV)_x) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial f^1}{\partial u^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f^n}{\partial u^{\sigma(n)}} du^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge du^{\sigma(n)}.$$

Επιπλέον, λόγω της (1.4), έχουμε

$$du^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge du^{\sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma) du^1 \wedge \cdots \wedge du^n = \text{sgn}(\sigma)(dV)_u$$

και συνεπώς καταλήγουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} f^*((dV)_x) &= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial f^1}{\partial u^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f^n}{\partial u^{\sigma(n)}} \text{sgn}(\sigma)(dV)_u \\ &= \left( \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial f^1}{\partial u^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f^n}{\partial u^{\sigma(n)}} \right) (dV)_u \\ &= \det(df)(dV)_u, \end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. □

## 1.6 Διαφορικό μορφών

Υπενθυμίζουμε ότι μια 0-μορφή είναι απλά μία λεία συνάρτηση το διαφορικό της οποίας ορίσαμε στο Παράδειγμα 1.2.2. Στην συνέχεια, θα ορίσουμε το διαφορικό  $k$ -μορφών για κάθε  $k \geq 1$ .

**Ορισμός 1.6.1** (Διαφορικό  $k$ -μορφών). Έστω  $\omega$  μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^n$  με

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I.$$

Το **διαφορικό** (differetial) της είναι η  $(k+1)$ -μορφή  $d\omega$  που ορίζεται ως

$$d\omega := \sum_I d\omega_I \wedge dx^I := \sum_I \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^I.$$

**Παράδειγμα 1.6.2** (Υπολογισμός διαφορικού 1-μορφής). Έστω ότι μας δίνεται η 1-μορφή

$$\omega = x^1 x^2 x^3 dx^1 + x^2 x^3 dx^2 + (x^1 + x^3) dx^3$$

στον  $\mathbb{R}^3$ . Το διαφορικό της είναι η 2-μορφή

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x^1 x^2 x^3) \wedge dx^1 + d(x^2 x^3) \wedge dx^2 + d(x^1 + x^3) \wedge dx^3 \\ &= \left( \frac{\partial(x^1 x^2 x^3)}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial(x^1 x^2 x^3)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial(x^1 x^2 x^3)}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(x^2 x^3)}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial(x^2 x^3)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial(x^2 x^3)}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(x^1 + x^3)}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial(x^1 + x^3)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial(x^1 + x^3)}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^3 \\ &= ((x^2 x^3) dx^1 + (x^1 x^3) dx^2 + (x^1 x^2) dx^3) \wedge dx^1 \\ &\quad + (x^3 dx^2 + x^2 dx^3) \wedge dx^2 + (dx^1 + dx^3) \wedge dx^3 \\ &= (x^2 x^3) dx^1 \wedge dx^1 + (x^1 x^3) dx^2 \wedge dx^1 + (x^1 x^2) dx^3 \wedge dx^1 \\ &\quad + x^3 dx^2 \wedge dx^2 + x^2 dx^3 \wedge dx^2 + dx^1 \wedge dx^3 + dx^3 \wedge dx^3 \\ &= -(x^1 x^3) dx^1 \wedge dx^2 - (x^1 x^2) dx^1 \wedge dx^3 - x^2 dx^2 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^3 \\ &= -x^1 x^3 dx^1 \wedge dx^2 + (1 - x^1 x^2) dx^1 \wedge dx^3 - x^2 dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

**Λήμμα 1.6.3** (Ιδιότητες διαφορικού μορφών). Έστω  $\omega$  μία  $k$ -μορφή και  $\varphi$  μία  $s$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^n$ . Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad d(\omega + \varphi) &= d\omega + d\varphi, \\(\beta) \quad d(\omega \wedge \varphi) &= (d\omega) \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge (d\varphi),\end{aligned}$$

όπου το  $(\alpha)$  ισχύει μόνο για  $k = s$  (ώστε να ορίζεται η πρόσθεση των  $\omega$  και  $\varphi$ ).

Απόδειξη. Το  $(\alpha)$  προκύπτει άμεσα από τον ορισμό. Για το  $(\beta)$ , γράφουμε

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I, \quad \varphi = \sum_J \varphi_J dx^J$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \varphi) &= d \left( \sum_{I,J} \omega_I \varphi_J dx^I \wedge dx^J \right) = \sum_{I,J} d(\omega_I \varphi_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\&= \sum_{I,J} (\varphi_J (d\omega_I) + \omega_I (d\varphi_J)) \wedge dx^I \wedge dx^J \\&= \sum_{I,J} \varphi_J (d\omega_I) \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J} \omega_I (d\varphi_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\&= \sum_{I,J} \varphi_J (d\omega_I) \wedge dx^I \wedge dx^J + (-1)^k \sum_{I,J} \omega_I dx^I \wedge (d\varphi_J) \wedge dx^J \\&= \left( \sum_I (d\omega_I) \wedge dx^I \right) \wedge \left( \sum_J \varphi_J dx^J \right) \\&\quad + (-1)^k \left( \sum_I \omega_I dx^I \right) \wedge \left( \sum_{J} (d\varphi_J) \wedge dx^J \right) \\&= (d\omega) \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge (d\varphi),\end{aligned}$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Λήμμα 1.6.4** (Το διαφορικό μορφών αντιμετωπίζεται με την απεικόνιση pull-back). Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μία λεία απεικόνιση και  $\omega$  μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^m$ . Τότε, έχουμε

$$d(f^* \omega) = f^*(d\omega).$$

Απόδειξη. Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε δύο βήματα. Πρώτα, υποθέτουμε ότι  $k = 0$ , δηλαδή η μορφή  $\omega$  είναι απλά μία λεία συνάρτηση την οποία και θα συμβολίσουμε με  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Έστω  $(x^1, \dots, x^n)$  οι Καρτεσιανές συντεταγμένες στον  $\mathbb{R}^n$  και  $(y^1, \dots, y^m)$  οι Καρτεσιανές συντεταγμένες στον  $\mathbb{R}^m$ . Τότε, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του διαφορικού και της απεικόνισης pull-back, το Λήμμα 1.5.2 και τον κανόνα αλυσίδας, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} d(f^*g) &= d(g \circ f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(g \circ f)(x)}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(f(x))}{\partial y^i} \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} dx^j \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(f(x))}{\partial y^i} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} dx^j \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(f(x))}{\partial y^i} df^i(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial g}{\partial y^i} \circ f(x) \right) df^i(x) = f^* \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(y)}{\partial y^i} dy^i \right) = f^*(dg), \end{aligned}$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του πρώτου μέρους. Τώρα, υποθέτουμε ότι  $k \geq 1$  και γράφουμε

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του διαφορικού και της απεικόνισης pull-back, το Λήμμα 1.5.1 και το πρώτο κομμάτι της απόδειξης που αποδείξαμε παραπάνω (για  $g = \omega_I$ ), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d \left( f^* \left( \sum_I \omega_I dx^I \right) \right) = d \left( \sum_I (\omega_I \circ f) f^*(dx^I) \right) \\ &= d \left( \sum_I f^*(\omega_I) f^*(dx^I) \right) = \sum_I d(f^*(\omega_I) f^*(dx^I)) \\ &= \sum_I d(f^*(\omega_I)) \wedge f^*(dx^I) = \sum_I f^*(d\omega_I) \wedge f^*(dx^I) \\ &= \sum_I f^*(d\omega_I \wedge dx^I) = f^* \left( \sum_I d\omega_I \wedge dx^I \right) \\ &= f^*(d\omega), \end{aligned}$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του δεύτερου μέρους.  $\square$

**Λήμμα 1.6.5** (Διπλή εφαρμογή του διαφορικού μορφών). Έστω  $\omega$  μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^n$ . Τότε, έχουμε

$$d(d\omega) = 0.$$

*Απόδειξη.* Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε δύο βήματα. Πρώτα, υποθέτουμε ότι  $k = 0$ , δηλαδή η μορφή  $\omega$  είναι απλά μία λεία συνάρτηση την οποία και θα συμβολίσουμε με  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του διαφορικού και τις ιδιότητες (1.4), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \wedge dx^j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) dx^i\right) \wedge dx^j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j - \sum_{\substack{j,i=1 \\ j > i}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0, \end{aligned}$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του πρώτου μέρους. Τώρα, υποθέτουμε ότι  $k \geq 1$  και γράφουμε

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του διαφορικού και τις ιδιότητες που αποδείξαμε στο Λήμμα 1.6.3, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum_I \omega_I dx^I\right) = \sum_I d(\omega_I dx^I) \\ &= \sum_I ((d\omega_I) \wedge dx^I + (-1)^0 \omega_I \wedge d(dx^I)) \\ &= \sum_I (d\omega_I) \wedge dx^I, \end{aligned}$$

αφού ο ίδιος ο ορισμός του διαφορικού μορφών μας δίνει

$$d(dx^I) = d(1 \cdot dx^I) = d(1) \wedge dx^I = 0 \wedge dx^I = 0.$$

Έτσι, συνεχίζοντας από τον παραπάνω υπολογισμό, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_I (d\omega_I) \wedge dx^I\right) = \sum_I d((d\omega_I) \wedge dx^I) \\ &= \sum_I d((d\omega_I) \wedge dx^I) \\ &= \sum_I (d(d\omega_I) \wedge dx^I + (-1)^1 d\omega_I \wedge d(dx^I)) = 0, \end{aligned}$$

αφού  $d(dx^I) = 0$  όπως δείξαμε παραπάνω και  $d(d\omega_I) = 0$  από το πρώτο μέρος της απόδειξης, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του δεύτερου μέρους.  $\square$

## 1.7 Το Λήμμα Poincare

**Λήμμα 1.7.1** (Λήμμα Poincare για 1-μορφές στον  $\mathbb{R}^3$ ). Έστω ότι  $\omega$  είναι μία 1-μορφή ορισμένη σε όλο τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  με Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x^1, x^2, x^3)$ . Εάν η  $\omega$  δίνεται από

$$\omega = \sum_{j=1}^3 \omega_j(x^1, x^2, x^3) dx^j,$$

για κάποιες λείες συναρτήσεις  $\omega_j = \omega_j(x^1, x^2, x^3)$ , ορίζουμε την λεία συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  από τον τύπο

$$f(x^1, x^2, x^3) := \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^3 \omega_j(tx^1, tx^2, tx^3)x^j \right] dt,$$

για κάθε  $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ . Τότε, έχουμε

$$d\omega = 0 \iff \omega = df.$$

*Απόδειξη.* Πρώτα, υποθέτουμε ότι  $\omega = df$ . Τότε, έχουμε  $d\omega = d(df) = 0$  από το Λήμμα 1.6.5. Τώρα, υποθέτουμε ότι  $d\omega = 0$  και θα αποδείξουμε ότι  $\omega = df$ . Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3) = d(\omega_1 dx^1) + d(\omega_2 dx^2) + d(\omega_3 dx^3) \\ &= d\omega_1 \wedge dx^1 + d\omega_2 \wedge dx^2 + d\omega_3 \wedge dx^3 \\ &= \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_1}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^1 + \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_2}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^2 + \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_3}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^3 \\ &= \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{\partial \omega_1}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{\partial \omega_2}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^2 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{\partial \omega_3}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^3 \\ &= \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} dx^2 \right) \wedge dx^3 \\ &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 \\ &\quad + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \\ &= -\frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3.$$

Επειδή το σύνολο  $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο, η υπόθεση  $d\omega = 0$  μας δίνει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_2(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} &= \frac{\partial \omega_1(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \omega_3(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} &= \frac{\partial \omega_1(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial \omega_3(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2} &= \frac{\partial \omega_2(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3}, \end{aligned}$$

για κάθε  $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ . Εξ ορισμού, έχουμε

$$df = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j.$$

Συνεπώς, για να αποδείξουμε το ζητούμενο  $\omega = df$ , πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \omega_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} = \omega_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x^3} = \omega_3.$$

Έτσι, θέτουμε  $y^j = tx^j$ , για κάθε  $j = 1, 2, 3$ , και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^1} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^3 \omega_j(tx^1, tx^2, tx^3) x^j \right] dt \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \omega_j(tx^1, tx^2, tx^3) x^j \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3) x^1 \right] dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \omega_2(tx^1, tx^2, tx^3) x^2 \right] dt \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \omega_3(tx^1, tx^2, tx^3) x^3 \right] dt \\ &= \int_0^1 \left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3) \right] + \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3) \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} [\omega_2(tx^1, tx^2, tx^3)] dt + x^3 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} [\omega_3(tx^1, tx^2, tx^3)] dt \\
& = \int_0^1 \left[ x^1 t \frac{\partial \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3)}{\partial y^1} + \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3) \right] dt \\
& + x^2 \int_0^1 \left[ t \frac{\partial \omega_2(tx^1, tx^2, tx^3)}{\partial y^1} \right] dt + x^3 \int_0^1 \left[ t \frac{\partial \omega_3(tx^1, tx^2, tx^3)}{\partial y^1} \right] dt \\
& = \int_0^1 \left[ x^1 t \frac{\partial \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3)}{\partial y^1} + \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3) \right] dt \\
& + x^2 \int_0^1 \left[ t \frac{\partial \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3)}{\partial y^2} \right] dt + x^3 \int_0^1 \left[ t \frac{\partial \omega_1(tx^1, tx^2, tx^3)}{\partial y^3} \right] dt,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το παραπάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων στην τελευταία γραμμή. Τώρα, παρατηρήστε ότι η παραπάνω έκφραση γράφεται και ως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} &= \int_0^1 \left[ \omega_1(y^1, y^2, y^3) + \sum_{j=1}^3 y^j \frac{\partial \omega_1(y^1, y^2, y^3)}{\partial y^j} \right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \omega_1(y^1, y^2, y^3)] dt \\
&= t \omega_1(y^1, y^2, y^3) \Big|_{t=1} - t \omega_1(y^1, y^2, y^3) \Big|_{t=0} \\
&= \omega_1(x^1, x^2, x^3),
\end{aligned}$$

για κάθε  $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ . Με παρόμοιο τρόπο, μπορεί να δείξει κανείς ότι  $\partial f / \partial x^2 = \omega_2$  και  $\partial f / \partial x^3 = \omega_3$ , το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Παρατήρηση 1.7.2** (Γενίκευση του Λήμματος 1.7.1). Το αποτέλεσμα του Λήμματος 1.7.1 ισχύει, όχι μόνο για  $n = 3$ , αλλά και για κάθε  $n \geq 1$ . Ισχύει επίσης και εάν αντικαταστήσουμε τον Ευκλείδιο χώρο  $\mathbb{R}^n$  με ένα ανοικτό σύνολο  $U \subset \mathbb{R}^n$  το οποίο είναι **αστερόμορφο** (star-shaped), δηλαδή υπάρχει κάποιο  $x_0 \in U$  τέτοιο, ώστε όλο το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το  $x_0$  με κάθε άλλο  $x \in U$  κείται εξ ολοκλήρου μέσα στο  $U$ . Με άλλα λόγια, το  $U$  δεν περιέχει τρύπες στο εσωτερικό του. Ανατρέξτε στην παραπάνω απόδειξη και επαληθεύστε τους ισχυρισμούς αυτούς.

## 1.8 Ο τελεστής Hodge

**Ορισμός 1.8.1** (Ο τελεστής Hodge). Ο **τελεστής Hodge** (Hodge star operator) είναι η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει  $k$ -μορφές  $\omega$  του  $\mathbb{R}^n$  σε  $(n - k)$ -μορφές  $\star\omega$  του  $\mathbb{R}^n$  έτσι ώστε

$$\star(dx^I) = \text{sgn}(\sigma)dx^J, \quad J := \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$$

όπου

$$\sigma = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ \hline I & & & J & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix},$$

είναι μία μετάθεση των  $\{1, 2, \dots, n\}$  με  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  εάν αυτή είναι περιττή (δηλαδή προκύπτει από περιττό αριθμό ανταλλαγών των θέσεων) και  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  εάν αυτή είναι άρτια (δηλαδή προκύπτει από ζυγό αριθμό ανταλλαγών των θέσεων). Εδώ, τα στοιχεία των συνόλων  $I$  και  $J$  συμβολίζονται με

$$I = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\},$$

$$J = \{(j_1, \dots, j_{n-k}) : 1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n\}.$$

**Παρατήρηση 1.8.2** (Τελεστής Hodge και εσωτερικό γινόμενο). Σημειώνουμε ότι ο τελεστής Hodge εξαρτάται από την επιλογή εσωτερικού γινομένου στον χώρο  $\mathbb{R}^3$ . Ο Ορισμός 1.8.1 ισχύει μόνο εάν ο  $\mathbb{R}^3$  είναι εφοδιασμένος με το συνήθες Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο. Αργότερα, βλέπε Κεφάλαιο 4.4, θα μελετήσουμε μία εφαρμογή στην οποία θα εφοδιάσουμε τον Ευκλείδιο χώρο  $\mathbb{R}^4$  με ένα διαφορετικό εσωτερικό γινόμενο (το εσωτερικό γινόμενο Minkowski) και συνεπώς θα τροποποιήσουμε κατάλληλα τον Ορισμό 1.8.1.

**Παράδειγμα 1.8.3** (Υπολογισμός του τελεστή Hodge). Έστω ότι έχουμε την 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^2$  η οποία δίνεται από

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2.$$

Επειδή η απεικόνιση  $\omega \mapsto \star\omega$  είναι γραμμική, έχουμε

$$\star\omega = \omega_1 \star(dx^1) + \omega_2 \star(dx^2).$$

Εδώ, έχουμε  $k = 1$  και  $n = 2$ . Για το πρώτο στοιχείο, έχουμε  $I = \{1\}$  και άρα αναγκαστικά  $J = \{2\}$ . Αυτό μας δίνει την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ I & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)$$

η οποία είναι άρτια και συνεπώς

$$\star(dx^1) = dx^2.$$

Για το δεύτερο στοιχείο, έχουμε  $I = \{2\}$  και άρα αναγκαστικά  $J = \{1\}$ . Αυτό μας δίνει την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ I & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)$$

η οποία είναι περιττή και συνεπώς

$$\star(dx^2) = -dx^1.$$

Έτσι, καταλήγουμε στην έκφραση

$$\star\omega = \omega_1 dx^2 - \omega_2 dx^1$$

η οποία είναι μία  $n - k = 2 - 1 = 1$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^2$ .

**Παράδειγμα 1.8.4** (Υπολογισμός του τελεστή Hodge). Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε την 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  η οποία δίνεται από

$$\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3.$$

Επειδή η απεικόνιση  $\omega \mapsto \star\omega$  είναι γραμμική, έχουμε

$$\star\omega = \omega_{12} \star(dx^1 \wedge dx^2) + \omega_{13} \star(dx^1 \wedge dx^3) + \omega_{23} \star(dx^2 \wedge dx^3).$$

Εδώ, έχουμε  $k = 2$  και  $n = 3$ . Για το πρώτο στοιχείο, έχουμε  $I = \{1, 2\}$  και άρα αναγκαστικά  $J = \{3\}$ . Αυτό μας δίνει την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ I & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)$$

η οποία είναι άρτια και συνεπώς

$$\star(dx^1 \wedge dx^2) = dx^3.$$

Για το δεύτερο στοιχείο, έχουμε  $I = \{1, 3\}$  και άρα αναγκαστικά  $J = \{2\}$ . Αυτό μας δίνει την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ I & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 3)$$

η οποία είναι περιττή και συνεπώς

$$\star(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^2.$$

Για το τρίτο και τελευταίο στοιχείο, έχουμε  $I = \{2, 3\}$  και άρα αναγκαστικά  $J = \{1\}$ . Αυτό μας δίνει την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ I & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3)(1 \ 2)$$

η οποία είναι άρτια και συνεπώς

$$\star(dx^2 \wedge dx^3) = dx^1.$$

Έτσι, καταλήγουμε στην έκφραση

$$\star\omega = \omega_{12}dx^3 - \omega_{13}dx^2 + \omega_{23}dx^1$$

η οποία είναι μία  $n - k = 3 - 2 = 1$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^3$ .

**Λήμμα 1.8.5** (Διπλή εφαρμογή του τελεστή Hodge). Έστω  $\omega$  μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^n$ . Τότε, έχουμε

$$\star\star\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega.$$

*Απόδειξη.* Έστω ότι η  $k$ -μορφή  $\omega$  δίνεται από

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I, \quad I = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Επειδή η απεικόνιση  $\omega \mapsto \star \omega$  είναι γραμμική, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\star \star dx^I = (-1)^{k(n-k)} dx^I.$$

Η  $dx^I$  είναι μία  $k$ -μορφή και συνεπώς η  $\star dx^I$  είναι μία  $(n-k)$ -μορφή ενώ η  $\star \star dx^I$  είναι μία  $(n - (n-k)) = k$ -μορφή. Η πρώτη εφαρμογή του τελεστή Hodge μας δίνει ότι

$$\star dx^I = \text{sgn}(\sigma) dx^J,$$

όπου

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Η δεύτερη εφαρμογή του τελεστή Hodge μας δίνει ότι

$$\star \star dx^I = \text{sgn}(\sigma) \star dx^J = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) dx^L,$$

όπου  $L = \{(l_1, \dots, l_k) : 1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq n\}$  και

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_{n-k} & l_1 & \cdots & l_k \end{pmatrix}.$$

Οι δείκτες του  $L$  συμπληρώνουν στο σύνολο  $J$  ώστε  $L \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$  και οι δείκτες του  $J$  συμπληρώνουν στο σύνολο  $I$  ώστε  $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$ . Έτσι, έχουμε  $L = I$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό, η σύνθεση  $\pi := \tau \circ \sigma^{-1}$  των δύο μεταθέσεων  $\tau$  και  $\sigma$  είναι

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_{n-k} & l_1 & \cdots & l_k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_{n-k} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_{n-k} & l_1 & \cdots & l_k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_{n-k} \\ 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_{n-k} \\ j_1 & \cdots & j_{n-k} & i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

δηλαδή η μετάθεση  $\pi$  αντιστρέφει τα δύο μπλόκ  $(i_1, \dots, i_k)$  και  $(j_1, \dots, j_{n-k})$ . Όταν μετακινήσουμε τα  $k$  σε πλήθος στοιχεία  $(i_1, \dots, i_k)$ , κάθε ένα πρέπει να ανταλλαχθεί με τα  $(n-k)$  σε πλήθος στοιχεία  $(j_1, \dots, j_{n-k})$ . Έτσι, έχουμε  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{k(n-k)}$ , το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## 1.9 Διαφορικοί τελεστές

Στο Κεφάλαιο αυτό, θα ορίσουμε 4 σημαντικούς διαφορικούς τελεστές. Καταρχήν, σημειώνουμε ότι το συνήθες εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  του  $\mathbb{R}^n$  μας επιτρέπει να μετατρέπουμε διανυσματικά πεδία σε 1-μορφές και αντίστροφα. Συγκεκριμένα, δοθέντος ενός διανυσματικού πεδίου  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  με

$$v(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p)(e_i)_p, \quad (1.6)$$

ορίζουμε την 1-μορφή  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  από τον τύπο

$$\omega(p) := \langle \cdot, v(p) \rangle. \quad (1.7)$$

Πιο αναλυτικά, αυτό σημαίνει ότι

$$\omega(p)(u(p)) := \langle u(p), v(p) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n u^i(p)(e_i)_p, \sum_{i=1}^n v^i(p)(e_i)_p \right\rangle := \sum_{i=1}^n u^i(p)v^i(p),$$

για κάθε  $u(p) \in \mathbb{R}_p^n$ . Η παραπάνω έκφραση γράφεται και ως

$$\omega(p) := \sum_{i=1}^n v^i(p)(dx^i)_p \quad (1.8)$$

αφού

$$\begin{aligned} \omega(p)(u(p)) &:= \sum_{i=1}^n v^i(p)(dx^i)_p(u(p)) = \sum_{i=1}^n v^i(p)(dx^i)_p \left( \sum_{j=1}^n u_p^j(e_j)_p \right) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i(p) \sum_{j=1}^n u_p^j(dx^i)_p((e_j)_p) = \sum_{i=1}^n v^i(p) \sum_{j=1}^n u_p^j \delta_j^i \\ &= \sum_{i=1}^n v^i(p)u^i(p), \end{aligned}$$

για κάθε  $u(p) \in \mathbb{R}_p^n$ . Συγκρίνετε τις (1.6) και (1.8): η μετατροπή από  $v(p)$  σε  $\omega(p)$  (και ανάποδα) γίνεται ουσιαστικά διατηρώντας ίδιους τους συντελεστές και αλλάζοντας μόνο την βάση.

## (1) Απόκλιση διανυσματικών πεδίων

**Ορισμός 1.9.1** (Απόκλιση διανυσματικών πεδίων). Έστω  $p \in \mathbb{R}^n$ . Η **απόκλιση** (divergence) ενός διανυσματικού πεδίου  $p \mapsto v(p) \in \mathbb{R}_p^n$  είναι η συνάρτηση  $p \mapsto (\operatorname{div} v)(p) \in \mathbb{R}$  που ορίζεται ως το ίχνος της γραμμικής απεικόνισης  $(dv)_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_p^n$ , δηλαδή

$$(\operatorname{div} v)(p) := \operatorname{trace}((dv)_p).$$

**Λήμμα 1.9.2** (Ιδιότητες απόκλισης). Έστω  $p = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  και  $p \mapsto v(p) \in \mathbb{R}_p^n$  ένα διανυσματικό πεδίο με

$$v(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p)(e_i)_p.$$

(α) Έχουμε

$$(\operatorname{div} v)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^i}.$$

(β) Ακολουθώντας τις πράξεις  $v \mapsto \omega \mapsto \star \omega \mapsto d(\star \omega)$ , έχουμε

$$d(\star \omega) = (\operatorname{div} v)dV,$$

όπου  $dV$  είναι το στοιχείο όγκου του  $\mathbb{R}^n$ .

*Απόδειξη.* Για το (α), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$(dv)_p((e_j)_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^j} (e_i)_p$$

και συνεπώς ο πίνακας που αναπαριστά την γραμμική απεικόνιση  $(dv)_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_p^n$  είναι ο  $(\partial v^i(p)/\partial x^j)$ . Το ίχνος δίνεται από το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα αυτού. Για το (β), θα ακολουθήσουμε τις πράξεις όπως υποδεικνύεται. Παραλείπουμε την εξάρτηση ως προς  $p$ . Το διανυσματικό πεδίο

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$$

ορίζει την 1-μορφή που δίνεται από την (1.8), δηλαδή

$$\omega = \sum_{i=1}^n v^i dx^i.$$

Αυτή είναι μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^n$ . Ο τελεστής Hodge την μετατρέπει στην  $(n-1)$ -μορφή  $\star\omega$ , βλέπε Ορισμό 1.8.1. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\star\omega = \sum_{i=1}^n v^i (\star dx^i) = \sum_{i=1}^n v^i (-1)^{i-1} dx^{J_i},$$

όπου  $J_i = \{j_1, \dots, j_{n-1}\}$  με  $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n$  και  $J_i = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\} = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$  καθώς και

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i & j_1 & \cdots & j_{n-1} \end{pmatrix}$$

είναι μία μετάθεση των  $\{1, 2, \dots, n\}$  με  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1}$ . Έτσι, έχουμε

$$\star\omega = \sum_{i=1}^n v^i (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Τώρα, το διαφορικό της  $(n-1)$ -μορφής  $\star\omega$  θα είναι η  $n$ -μορφή  $d(\star\omega)$ . Αυτή δίνεται από

$$\begin{aligned} d(\star\omega) &= d \left( \sum_{i=1}^n v^i (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} d \left( v^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} dv^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right) dV = (\operatorname{div} v) dV,
\end{aligned}$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## (2) Κλίση συνάρτησης

**Ορισμός 1.9.3** (Κλίση συνάρτησης). Η **κλίση** (gradient) μίας λείας συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται ως το διανυσματικό πεδίο  $p \mapsto (\operatorname{grad} f)(p) \in \mathbb{R}_p^n$  για το οποίο

$$\langle (\operatorname{grad} f)(p), u(p) \rangle = (df)_p(u(p)),$$

για κάθε  $u(p) \in \mathbb{R}_p^n$ .

**Λήμμα 1.9.4** (Ιδιότητες κλίσης). Έστω  $p = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ . (α) Έχουμε

$$(\operatorname{grad} f)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} (e_i)_p.$$

(β) Έστω ότι  $(\operatorname{grad} f)(p) \neq 0$ . Τότε, το  $(\operatorname{grad} f)(p)$  είναι κάθετο στην επιφάνεια στάθμης  $\Sigma := \{q \in \mathbb{R}^n : f(q) = f(p)\}$ . Επίσης, ο εφαπτόμενος χώρος της  $\Sigma$  στο σημείο  $p$  δίνεται από το σύνολο  $\ker((df)_p)$ .

(γ) Έστω ότι  $(\operatorname{grad} f)(p) \neq 0$  και συμβολίζουμε με  $S_p := \{v(p) \in \mathbb{R}_p^n : |v(p)| = 1\}$  την μοναδιαία σφαίρα στον εφαπτόμενο χώρο με κέντρο το  $p$ . Τότε, η απεικόνιση  $(df)_p : S_p \rightarrow \mathbb{R}$  λαμβάνει την μέγιστη τιμή της για  $v(p) = (\operatorname{grad} f)(p) / |(\operatorname{grad} f)(p)|$ .

Απόδειξη. Το (α) προκύπτει άμεσα από τον ορισμό. Πράγματι, επειδή  $(\text{grad } f)(p) \in \mathbb{R}_p^n$ , θα γράφεται συναρτήσει της βάσης του  $\mathbb{R}_p^n$  ως

$$(\text{grad } f)(p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(p)(e_i)_p,$$

για κάποιες λείες συναρτήσεις  $p \mapsto \lambda_i(p)$ . Έστω  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Από τον Ορισμό 1.9.3 για  $u(p) = (e_j)_p$ , έχουμε

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x^j} = (df)_p((e_j)_p) = \langle (\text{grad } f)(p), (e_j)_p \rangle = \lambda_j(p),$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. Για το (β), υποθέτουμε ότι  $(\text{grad } f)(p) \neq 0$ . Προφανώς  $p \in \Sigma$ . Έστω ότι έχουμε μία λεία καμπύλη  $t \mapsto \gamma(t) \in \Sigma$  με συντεταγμένες  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , για κάθε  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Το διάνυσμα  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$  ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο της  $\Sigma$ . Τότε, για κάθε  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , ο κανόνας αλυσίδας μας δίνει

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in \Sigma &\implies f(\gamma(t)) = f(p) \implies \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = 0 \\ &\implies \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^j} \frac{d}{dt}\gamma^j(t) = 0 \\ &\implies \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^j} \dot{x}^j(t) = 0 \\ &\implies \langle (\text{grad } f)(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0, \end{aligned}$$

το οποίο δηλώνει ότι το διάνυσμα  $(\text{grad } f)(\gamma(t))$  είναι κάθετο στον εφαπτόμενο χώρο της  $\Sigma$  στο σημείο  $\gamma(t) \in \Sigma$  και ως εκ τούτου είναι αναγκαστικά κάθετο σε αυτήν. Επίσης, εξ ορισμού της κλίσης, το συμπέρασμα  $\langle (\text{grad } f)(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$  γράφεται και ως  $(df)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = 0$  το οποίο αποδεικνύει ότι ο εφαπτόμενος χώρος της  $\Sigma$  στο σημείο  $\gamma(t) \in \Sigma$  δίνεται από το σύνολο  $\ker((df)_{\gamma(t)})$  το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο γιατί κάθε  $p \in \Sigma$  μπορεί να γραφεί ως  $\gamma(t)$  για κάποιο  $t$ . Για το (γ), υποθέτουμε πάλι ότι  $(\text{grad } f)(p) \neq 0$  και θέτουμε  $v(p) := (\text{grad } f)(p)/|(\text{grad } f)(p)|$ . Αφενός, επειδή η απεικόνιση  $v(p) \mapsto (df)_p(v(p))$  είναι γραμμική, έχουμε

$$(df)_p(v(p)) = (df)_p \left( \frac{(\text{grad } f)(p)}{|(\text{grad } f)(p)|} \right) = \frac{(df)_p((\text{grad } f)(p))}{|(\text{grad } f)(p)|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle (\text{grad } f)(p), (\text{grad } f)(p) \rangle}{|(\text{grad } f)(p)|} = \frac{|(\text{grad } f)(p)|^2}{|(\text{grad } f)(p)|} \\
&= |(\text{grad } f)(p)|.
\end{aligned}$$

Αφετέρου, συμβολίζοντας με  $S_p := \{v(p) \in \mathbb{R}_p^n : |v(p)| = 1\}$  την μοναδιαία σφαίρα στον εφαπτόμενο χώρο με κέντρο το  $p$ , η ανισότητα Cauchy-Schwarz<sup>1</sup> μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
(df)_p(w(p)) &= \langle (\text{grad } f)(p), w(p) \rangle \leq |\langle (\text{grad } f)(p), w(p) \rangle| \\
&\leq |(\text{grad } f)(p)| |w(p)| = |(\text{grad } f)(p)| \\
&= (df)_p(v(p)),
\end{aligned}$$

για κάθε  $w(p) \in S_p$ . Συνεπώς, η απεικόνιση  $(df)_p : S_p \rightarrow \mathbb{R}$  λαμβάνει την μέγιστη τιμή της (η οποία είναι ίση με  $(df)_p(v(p)) = |(\text{grad } f)(p)|$ ) για  $w(p) = v(p)$  το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

### (3) Τελεστής Laplace

**Ορισμός 1.9.5** (Τελεστής Laplace). Ο **τελεστής Laplace** (Laplacian operator) μίας λείας συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η λεία συνάρτηση  $\Delta f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται ως

$$(\Delta f)(p) := (\text{div } (\text{grad } f))(p),$$

για κάθε  $p \in \mathbb{R}^n$ .

**Λήμμα 1.9.6** (Ιδιότητες του τελεστή Laplace). Έστω  $p = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ .

(α) Έχουμε

$$(\Delta f)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(p)}{\partial (x^i)^2}.$$

(β) Ισχύει ο κανόνας γινομένου

$$(\Delta(fh))(p) = f(p)(\Delta h)(p) + h(p)(\Delta f)(p) + 2\langle (\text{grad } f)(p), (\text{grad } h)(p) \rangle.$$

---

<sup>1</sup>Για κάθε δύο διανύσματα  $x$  και  $y$  του  $\mathbb{R}^n$ , έχουμε  $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ .

(γ) Ακολουθώντας τις πράξεις  $f \mapsto df \mapsto \star(df) \mapsto d(\star(df))$ , έχουμε

$$d(\star(df)) = (\Delta f)dV,$$

όπου  $dV$  είναι το στοιχείο όγκου του  $\mathbb{R}^n$ .

Απόδειξη. Το (α) προκύπτει άμεσα από τα Λήμματα 1.9.2 και 1.9.4. Πράγματι, από το Λήμμα 1.9.2, έχουμε

$$(\operatorname{div} v)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^i}, \quad v(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p)(e_i)_p$$

και, από το Λήμμα 1.9.4, έχουμε

$$(\operatorname{grad} f)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} (e_i)_p.$$

Έτσι, το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας  $v^i(p) = \partial f(p)/\partial x^i$ . Το (β) είναι άμεση συνέπεια του (α). Για το (γ), θα ακολουθήσουμε τις πράξεις όπως υποδεικνύεται. Παραλείπουμε την εξάρτηση ως προς  $p$ . Η απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  επάγει την 1-μορφή  $p \mapsto (df)_p \in (\mathbb{R}_p^n)^*$  η οποία δίνεται από

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

βλέπε Παράδειγμα 1.2.2. Τώρα, θέτουμε  $\omega = df$  στο αποτέλεσμα του Λήμματος 1.9.2 (β). Η 1-μορφή αυτή αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο  $v = \operatorname{grad} f$  μέσω της (1.7). Έτσι, χρησιμοποιώντας και τον Ορισμό 1.9.5, παίρνουμε ότι

$$d(\star(df)) = (\operatorname{div} \operatorname{grad} f)dV = (\Delta f)dV.$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

#### (4) Στροβιλισμός διανυσματικών πεδίων

**Ορισμός 1.9.7** (Στροβιλισμός διανυσματικών πεδίων). Ο στροβιλισμός (rotational) ενός διανυσματικού πεδίου  $p \mapsto v(p) \in \mathbb{R}_p^n$  είναι η  $(n-2)$ -μορφή

$p \mapsto (\operatorname{curl} v)(p) \in \Lambda^{n-2}(\mathbb{R}_p^n)^*$  η οποία ορίζεται ακολουθώντας τις πράξεις  $v \mapsto \omega \mapsto d\omega \mapsto \star(d\omega)$ , δηλαδή

$$(\operatorname{curl} v)(p) := (\star(d\omega))(p),$$

για κάθε  $p \in \mathbb{R}^n$ .

**Λήμμα 1.9.8** (Ιδιότητες του στροβιλισμού). Έστω  $p = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  και  $p \mapsto v(p) \in \mathbb{R}_p^n$  ένα διανυσματικό πεδίο με

$$v(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p)(e_i)_p.$$

(α) Μόνο για  $n = 3$ , έχουμε

$$\begin{aligned} (\operatorname{curl} v)(p) &= \left( \frac{\partial v^3(p)}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2(p)}{\partial x^3} \right) (e_1)_p + \left( \frac{\partial v^1(p)}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3(p)}{\partial x^1} \right) (e_2)_p \\ &\quad + \left( \frac{\partial v^2(p)}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1(p)}{\partial x^2} \right) (e_3)_p. \end{aligned}$$

(β) Για κάθε  $n \geq 1$  και για κάθε λεία συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , έχουμε

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} (\operatorname{curl} v) = 0.$$

*Απόδειξη.* Το (α) προκύπτει μετά από έναν στοιχειώδη υπολογισμό. Πράγματι, έστω ότι έχουμε  $n = 3$ . Τότε, ακολουθώντας τις πράξεις  $v \mapsto \omega \mapsto d\omega \mapsto \star(d\omega)$ , βρίσκουμε

$$\begin{aligned} v &= v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3, \\ \omega &= v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + v^3 dx^3, \\ d\omega &= dv^1 \wedge dx^1 + dv^2 \wedge dx^2 + dv^3 \wedge dx^3 \\ &= \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v^1}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^1 + \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v^2}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^2 + \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v^3}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^3 \\ &= \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{\partial v^1}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{\partial v^2}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^2 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{\partial v^3}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial v^1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial v^1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial v^2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 \\
&+ \frac{\partial v^3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial v^3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \\
&= -\frac{\partial v^1}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial v^1}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} dx^2 \wedge dx^3 \\
&+ \frac{\partial v^3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial v^3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \\
&= \left( \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left( \frac{\partial v^3}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3 \\
&+ \left( \frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

Η  $d\omega$  είναι μία 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$ . Ο τελεστής Hodge την μετατρέπει στην  $(3-2) = 1$ -μορφή  $\star(d\omega)$ , βλέπε Ορισμό [1.8.1](#). Επειδή η απεικόνιση  $\star \mapsto \star(d\omega)$  είναι γραμμική, έχουμε

$$\begin{aligned}
\star(d\omega) &= \left( \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) \star(dx^1 \wedge dx^2) + \left( \frac{\partial v^3}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^3} \right) \star(dx^1 \wedge dx^3) \\
&+ \left( \frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) \star(dx^2 \wedge dx^3).
\end{aligned}$$

Ο καθένας από αυτούς τους όρους δίνεται από το Παράδειγμα [1.8.4](#). Εκεί αποδείξαμε ότι

$$\star(dx^1 \wedge dx^2) = dx^3, \quad \star(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^2, \quad \star(dx^2 \wedge dx^3) = dx^1$$

και έτσι καταλήγουμε στην έκφραση

$$\star(d\omega) = \left( \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) dx^3 + \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right) dx^2 + \left( \frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) dx^1.$$

Τέλος, η 1-μορφή αυτή αντιστοιχεί μέσω της [\(1.7\)](#) στο διανυσματικό πεδίο

$$\text{curl } v = \left( \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) e_3 + \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right) e_2 + \left( \frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) e_1$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Συνοψίζουμε τους διαφορικούς αυτούς τελεστές στον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{array}{l} d(\star\omega) = (\operatorname{div} v)dV \\ d(\star(df)) = (\Delta f)dV \\ \operatorname{curl} v = \star(dw) \end{array}$$

όπου τα διανυσματικά πεδία  $v$  μετατρέπονται σε 1-μορφές  $\omega$  μέσω της (1.7) και  $dV$  είναι το στοιχείο όγκου στον  $\mathbb{R}^3$  το οποίο δίνεται από  $dV = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ , βλέπε Κεφάλαιο 2.6.

## 1.10 Ασκήσεις επανάληψης

**Άσκηση 1.10.1** (Εναλλασσόμενες απεικονίσεις). Έστω  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  μία διγραμμική απεικόνιση. Να αποδείξετε ότι

$$\varphi \text{ εναλλασσόμενη} \iff \varphi(v, v) = 0, \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Να αποδείξετε ακόμα ότι, εάν η  $\varphi$  είναι εναλλασσόμενη και τα  $v$  και  $w$  γραμμικά εξαρτημένα, τότε  $\varphi(v, w) = 0$ , για κάθε  $v, w \in \mathbb{R}^3$ .

*Απόδειξη.* Πρώτα, υποθέτουμε ότι η  $\varphi$  είναι εναλλασσόμενη, δηλαδή  $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$ , για κάθε  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Για  $v = w$ , έχουμε  $\varphi(v, v) = -\varphi(v, v)$  το οποίο συνεπάγεται  $\varphi(v, v) = 0$ . Τώρα, υποθέτουμε ότι  $\varphi(v, v) = 0$ , για κάθε  $v \in \mathbb{R}^3$ , και θα αποδείξουμε ότι η  $\varphi$  είναι εναλλασσόμενη. Έστω  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Από την υπόθεση και την διγραμμικότητα της απεικόνισης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(v + w, v + w) \\ &= \varphi(v, v) + \varphi(v, w) + \varphi(w, v) + \varphi(w, w) \\ &= \varphi(v, w) + \varphi(w, v), \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι  $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$ . Τέλος, εάν η  $\varphi$  είναι εναλλασσόμενη και τα  $v$  και  $w$  γραμμικά εξαρτημένα, τότε θα υπάρχει  $\lambda \neq 0$  τέτοιο, ώστε  $w = \lambda v$  και συνεπώς

$$\varphi(v, w) = \varphi(v, \lambda v) = \lambda \varphi(v, v) = 0,$$

για κάθε  $v, w \in \mathbb{R}^3$ , το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Άσκηση 1.10.2** (Βασικοί υπολογισμοί). Έστω οι ακόλουθες μορφές στον  $\mathbb{R}^3$

$$\varphi = x^1 dx^1 - x^2 dx^2, \quad \psi = x^3 dx^1 \wedge dx^2 + x^1 dx^2 \wedge dx^3, \quad \vartheta = x^3 dx^2.$$

Να υπολογίσετε τις μορφές  $\varphi \wedge \psi$ ,  $\vartheta \wedge \varphi \wedge \psi$ ,  $d\varphi$ ,  $d\psi$  και  $d\vartheta$ .

Απόδειξη. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &= (x^1 dx^1 - x^2 dx^2) \wedge (x^3 dx^1 \wedge dx^2 + x^1 dx^2 \wedge dx^3) \\ &= x^1 x^3 dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - x^2 x^3 dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - x^1 x^2 dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\ d\vartheta &= d(x^3 dx^2) = dx^3 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα προκύπτουν ανάλογα. □

**Άσκηση 1.10.3** (Υπολογισμός της pull-back). Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μία λεία απεικόνιση και  $\omega$  μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^m$ . Να αποδείξετε ότι

$$k > n \implies f^* \omega = 0.$$

Απόδειξη. Επειδή η  $\omega$  είναι μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^m$ , η  $f^* \omega$  θα είναι μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^n$ . Συνεπώς, για  $k > n$ , έχουμε  $f^* \omega = 0$ , βλέπε Παρατήρηση 1.2.5. □

**Άσκηση 1.10.4** (Υπολογισμός εξωτερικού γινομένου). Έστω  $\omega$  η 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^{2n}$  από δίνεται από τον τύπο

$$\omega_n = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + \cdots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n}.$$

Να υπολογίσετε το εξωτερικό γινόμενο  $\omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n$  όπου η  $\omega_n$  εμφανίζεται  $n$  φορές.

Απόδειξη. Για  $n = 1$ , έχουμε

$$\omega_1 = dx^1 \wedge dx^2.$$

Για  $n = 2$ , έχουμε

$$\omega_2 = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4,$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 \wedge \omega_2 &= (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \\
&= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \\
&= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \\
&= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \\
&= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4, \\
&= 2dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4.
\end{aligned}$$

Έτσι, υποψιαζόμαστε ότι για

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$$

έχουμε

$$\underbrace{\omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n}_{n \text{ αντίγραφα}} = n! dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}.$$

Μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι ο ισχυρισμός αυτός ισχύει για κάθε  $n \geq 1$ . Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς, ισχύει για  $n = 1$  και  $n = 2$ . Έστω ότι ισχύει για κάποιο  $n \geq 3$ , δηλαδή

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n dx^{2i-1} \wedge dx^{2i} \implies \underbrace{\omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n}_{n \text{ αντίγραφα}} = n! dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}.$$

Τότε, θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n + 1$  στην θέση του  $n$ , δηλαδή

$$\omega_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i} \implies \underbrace{\omega_{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1}}_{n+1 \text{ αντίγραφα}} = (n+1)! dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2(n+1)}.$$

Έστω ότι η μορφή δίνεται από

$$\omega_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\omega_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i} = \omega_n + dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2}.$$

Στην έκφραση

$$\underbrace{\omega_{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1}}_{n+1 \text{ αντίγραφα}}$$

όλοι οι όροι που περιέχουν το ίδιο στοιχείο μηδενίζονται λόγω της (1.4) και οι μόνοι μη-μηδενικοί όροι είναι εκείνοι που περιέχουν  $n$  αντίγραφα του  $\omega_n$  και ακριβώς μία φορά το νέο στοιχείο  $dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2}$  σε οποιαδήποτε θέση. Με άλλα λόγια, κάθε τέτοιος όρος είναι

$$\underbrace{\omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n}_n \wedge dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2}$$

και θα εμφανιστούν ακριβώς

$$\binom{n+1}{1} = n+1$$

φορές. Συνεπώς, το αποτέλεσμα της πράξης αυτής θα είναι

$$\underbrace{\omega_{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1}}_{n+1 \text{ αντίγραφα}} = (n+1) \underbrace{\omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n}_n \wedge dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2}.$$

Η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned} \underbrace{\omega_{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1}}_{n+1 \text{ αντίγραφα}} &= (n+1) \underbrace{\omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n}_n \wedge dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2} \\ &= (n+1)n! dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} \wedge dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2} \\ &= (n+1)! dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} \wedge dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2}, \end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. □

**Άσκηση 1.10.5** (Διανυσματικά πεδία που προκύπτουν από δυναμικό). Έστω  $U \subset \mathbb{R}^n$  ένα ανοικτό σύνολο και  $p \mapsto v(p) \in \mathbb{R}_p^n$  ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται για κάθε  $p \in U$ . Λέμε ότι **το διανυσματικό πεδίο προκύπτει τοπικά από ένα δυναμικό** εάν και μόνο εάν υπάρχει ανοικτή περιοχή  $V \subset \mathbb{R}^n$  με  $p \in V \subseteq U$  και λεία συνάρτηση  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  (που ονομάζεται **δυναμικό**) έτσι ώστε  $v(p) = (\text{grad}(F))_p$ , για κάθε  $p \in V$ . Το διανυσματικό πεδίο αυτό αντιστοιχεί σε μία 1-μορφή  $\omega$  μέσω της (1.7).

(α) Να αποδείξετε ότι ένα διανυσματικό πεδίο  $v$  προκύπτει τοπικά από ένα δυναμικό  $F$  εάν και μόνο εάν

$$d\omega = 0.$$

(β) Να αποδείξετε ότι η συνθήκη του (α) είναι ισοδύναμη με την

$$\text{curl } v = 0.$$

(γ) Έστω τώρα  $V$  ένα ανοικτό σύνολο με  $(0, 0, 0) \notin V$ ,  $p = (x^1, x^2, x^3) \in V$  και

$$v(p) := - \sum_{j=1}^3 \frac{x^j}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{3/2}} (e_j)_p.$$

Το διανυσματικό πεδίο αυτό ονομάζεται **ηλεκτρική έλξη** (electric attraction). Να δείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο αυτό προκύπτει τοπικά από το δυναμικό  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  που δίνεται από

$$F(p) := \frac{1}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}} + c,$$

όπου το  $c \in \mathbb{R}$  είναι μία οποιαδήποτε σταθερά.

(δ) Να αποδείξετε ότι το δυναμικό  $F$  του ερωτήματος (γ) είναι αρμονική συνάρτηση, δηλαδή  $(\Delta F)(p) = 0$ , για κάθε  $p \in V$ .

*Απόδειξη.* Για το (α), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο  $v = \text{grad}(F)$  αντιστοιχεί στην 1-μορφή  $\omega = dF$  μέσω της (1.7). Έτσι, το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 1.7.1 και την Παρατήρηση 1.7.2. Για το (β), υπενθυμίζουμε τον ορισμό  $\text{curl } v = \star(dw)$ . Έτσι, το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με την

συνεπαγωγή  $d\omega = 0 \iff \star(d\omega) = 0$  το οποίο προκύπτει κατευθείαν από τον ορισμό του τελεστή Hodge καθώς αυτός δεν αλλάζει τις συνιστώσες της 1-μορφής  $d\omega$  αλλά μόνο τα στοιχεία της βάσης. Για το  $(\gamma)$ , πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial F(p)}{\partial x^j} = \frac{-x^j}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{3/2}},$$

για κάθε  $j = 1, 2, 3$ . Ορίζουμε την ακτινική μεταβλητή

$$r(x^1, x^2, x^3) = ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2},$$

για κάθε  $p = (x^1, x^2, x^3) \in V$ . Παρατηρήστε ότι

$$F(p) = G(r(p)), \quad G(r) = \frac{1}{r} + c, \quad \frac{\partial r(p)}{\partial x^j} = \frac{x^j}{r(p)},$$

για κάθε  $j = 1, 2, 3$ . Επομένως, ο κανόνας αλυσίδας μας δίνει ότι

$$\frac{\partial F(p)}{\partial x^j} = \frac{dG(r)}{dr} \frac{\partial r(p)}{\partial x^j} = \frac{-1}{r^2} \frac{x^j}{r} = \frac{-x^j}{r^3} = \frac{-x^j}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{3/2}},$$

για κάθε  $p = (x^1, x^2, x^3) \in V$ , το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. Τέλος, το  $(\delta)$  προκύπτει μετά από έναν στοιχειώδη υπολογισμό. Ο υπολογισμός αυτός απλοποιείται επειδή η συνάρτηση  $F$  είναι ακτινική. Πράγματι, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι, στην περίπτωση όπου η συνάρτηση  $F$  είναι ακτινική όπως παραπάνω, δηλαδή  $F(p) = G(r(p))$ , η έκφραση (βλέπε Λήμμα 1.9.6 (α))

$$(\Delta F)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F(p)}{\partial (x^i)^2}$$

γίνεται

$$(\Delta F)(p) = \frac{d^2 G(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dG(r)}{dr},$$

όπου  $r = r(p)$ . Εδώ, έχουμε  $n = 3$ . Επομένως, υπολογίζουμε

$$(\Delta F)(p) = \frac{2}{r^3} + \frac{2}{r} \cdot \frac{-1}{r^2} = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0,$$

για κάθε  $p = (x^1, x^2, x^3) \in V$ , το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## Κεφάλαιο 2

# Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

### 2.1 Η έννοια της πολλαπλότητας

Μία (ομαλή) καμπύλη ή επιφάνεια είναι κάποιο υποσύνολο ενός Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ . Οι ορισμοί τους εξαρτώνται από τις συντεταγμένες του Ευκλείδειου χώρου που τις περιβάλλει. Για παράδειγμα, μία ευθεία στο επίπεδο των  $x^1 x^2$  στον  $\mathbb{R}^3$  δίνεται από

$$\mathcal{E} := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 + x^2 = 1, x^3 = 0\}$$

και μία σφαίρα στον  $\mathbb{R}^3$  δίνεται από

$$\mathbb{S}^2 := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}.$$

Εάν επιλέξουμε ένα σημείο, είτε  $p \in \mathcal{E}$  είτε  $p \in \mathbb{S}^2$ , τότε αυτό θα είναι της μορφής  $p = (x^1, x^2, x^3)$  με κάποιον περιορισμό για τα  $x^1, x^2$  και  $x^3$ . Με άλλα λόγια, για να ορίσουμε τα σημεία πάνω στα  $\mathcal{E}$  και  $\mathbb{S}^2$ , χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$  που τις περιβάλλει. Αυτό δεν είναι αναγκαίο και μπορεί να βελτιωθεί! Η έννοια της (διαφορίσιμης) πολλαπλότητας αποτελεί γενίκευση της έννοιας μίας (ομαλής) καμπύλης ή επιφάνειας στις ακόλουθες κατευθύνσεις:

- Η πολλαπλότητα δεν είναι αναγκαστικά υποσύνολο κάποιου Ευκλείδειου χώρου<sup>1</sup> αλλά ένας γενικός τοπολογικός χώρος.
- Τα “σημεία” της έχουν συντεταγμένες που ορίζονται χωρίς την παρουσία κάποιου Ευκλείδειου χώρου να τα περιβάλλει, είναι η δομή που θα της δώσουμε από τον ορισμό της τέτοια ώστε αυτό να είναι εφικτό.

---

<sup>1</sup>εάν και η διαφορική δομή της θα της επιτρέψει εκ των υστέρων να τοποθετηθεί μέσα σε κάποιον Ευκλείδιο χώρο  $\mathbb{R}^N$  για κάποιο μεγάλο  $N$ , αυτό είναι το διάσημο Θεώρημα Whitney.

- Ο ορισμός της πολλαπλότητας είναι τόσο γενικός όσο “πρέπει” ώστε να επιτρέπει τον ορισμό γεωμετρικών εννοιών σε αυτήν.

Ας δούμε μέσα από ένα παράδειγμα πως θα ορίσουμε μία τέτοια δομή σε ένα σύνολο ώστε τα παραπάνω να είναι εφικτά. Ας υποθέσουμε ότι μελετάμε την σφαίρα που είδαμε παραπάνω, δηλαδή

$$\mathbb{S}^2 := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : f(x^1, x^2, x^3) = 1\},$$

όπου

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x^1, x^2, x^3) := (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2,$$

για κάποιο σταθερό  $(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in \mathbb{R}^3$ . Καταρχήν, το σύνολο αυτό είναι τοπολογικός χώρος και ως εκ τούτου έχει ήδη τοπολογική δομή: ένα υποσύνολο  $U \subset \mathbb{S}^2$  της σφαίρας (προσοχή, όχι του  $\mathbb{R}^3$ ) είναι ανοικτό (στην  $\mathbb{S}^2$ ) εάν και μόνο εάν

$$\exists A \subset \mathbb{R}^3 : A \text{ ανοικτό (στον } \mathbb{R}^3) \text{ και } U = A \cap \mathbb{S}^2. \quad (2.1)$$

Η τοπολογία αυτή ονομάζεται **σχετική τοπολογία** (relative topology).

Εάν επιλέξουμε ένα σημείο  $p \in \mathbb{S}^2$ , τότε αυτό θα είναι της μορφής  $p = (x^1, x^2, x^3)$ , δηλαδή με βάση τον ορισμό αυτό χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$  που την εμπεριέχει. Αυτό θέλουμε να το αποφύγουμε και ο τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι να εφαρμόσουμε το **θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων**: επιλέγουμε ένα τυχαίο αλλά σταθερό σημείο

$$p = (\alpha, \beta) \in \mathbb{S}^2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) = 1 &\iff (\alpha_1 - x_0^1)^2 + (\alpha_2 - x_0^2)^2 + (\beta - x_0^3)^2 = 1 \\ &\implies (\alpha_1, \alpha_2, \beta) \neq (x_0^1, x_0^2, x_0^3) \end{aligned}$$

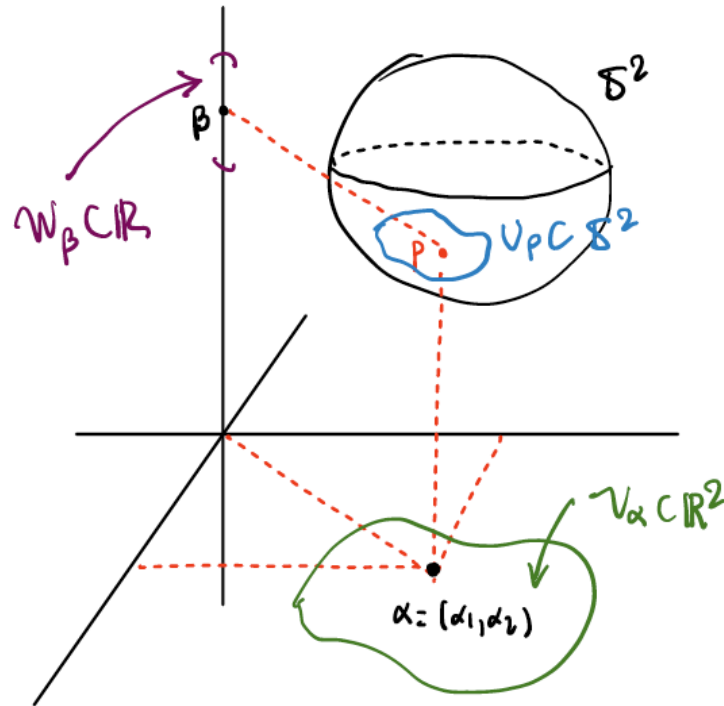
και καθώς και

$$\begin{aligned} (\nabla f)(\alpha, \beta) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}(\alpha, \beta), \frac{\partial f}{\partial x^2}(\alpha, \beta), \frac{\partial f}{\partial x^3}(\alpha, \beta) \right) \\ &= 2(\alpha_1 - x_0^1, \alpha_2 - x_0^2, \beta - x_0^3) \\ &\neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Επομένως, από το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων παίρνουμε ότι υπάρχουν:

- ένα ανοικτό (στον  $\mathbb{R}^2$ ) σύνολο  $V_\alpha$  με  $\alpha \in V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ ,
- ένα ανοικτό (στον  $\mathbb{R}$ ) σύνολο  $W_\beta$  με  $\beta \in W_\beta \subset \mathbb{R}$ ,
- μία λεία συνάρτηση  $F_p : V_\alpha \rightarrow W_\beta$  τέτοια ώστε  $F_p(\alpha) = \beta$ ,
- το σύνολο  $U_p := (V_\alpha \times W_\beta) \cap \mathbb{S}^2$  είναι ανοικτό (στην  $\mathbb{S}^2$ ) ως προς την τοπολογία (2.1),
- το σύνολο  $U_p := (V_\alpha \times W_\beta) \cap \mathbb{S}^2$  είναι το γράφημα της  $F_p$ , δηλαδή  $U_p = \text{graph}(F_p) = \{(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2)) : (x^1, x^2) \in V_\alpha\}$ .

Το Σχήμα 2.1 δείχνει τα σύνολα  $V_\alpha$ ,  $W_\beta$  καθώς και την απεικόνιση  $F_p : V_\alpha \rightarrow W_\beta$ .



Σχήμα 2.1: Τα σύνολα  $V_\alpha$ ,  $W_\beta$  καθώς και την απεικόνιση  $F_p : V_\alpha \rightarrow W_\beta$ . Το σύνολο  $U_p := (V_\alpha \times W_\beta) \cap \mathbb{S}^2$  βρίσκεται πάνω στην  $\mathbb{S}^2$ , είναι ανοικτό (στην  $\mathbb{S}^2$ , ως προς την τοπολογία (2.1) και είναι το γράφημα της  $F_p$ , δηλαδή  $\text{graph}(F_p) = U_p$ .

Εν γένει, η απεικόνιση  $F_p$  εξαρτάται από το σημείο  $p$  καθώς η γεωμετρία του  $U_p$  ενδέχεται να μην είναι ίδια σε κάθε σημείο. Είναι προφανές ότι μπορούμε να

επαναλάβουμε την διαδικασία αυτή για κάθε  $p \in \mathbb{S}^2$  και έτσι να την καλύψουμε από τα ανοικτά (στην  $\mathbb{S}^2$ ) σύνολα  $U_p$ , δηλαδή

$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{p \in \mathbb{S}^2} U_p, \quad U_p = \text{graph}(F_p).$$

Η σφαίρα είναι ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος<sup>2</sup>. Αυτό σημαίνει ότι η ανοικτή κάλυψη  $\{U_p : p \in \mathbb{S}^2\}$  έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλαδή υπάρχει ένας φυσικός αριθμός  $N$  και σημεία  $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2$  τέτοια ώστε

$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{j=1}^N U_{p_j}, \quad U_{p_j} = \text{graph}(F_{p_j}). \quad (2.2)$$

Ας μελετήσουμε τώρα τις συντεταγμένες των σημείων στην σφαίρα. Έστω  $q \in \mathbb{S}^2$  ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο. Λόγω της σχέσης (2.2), υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $p_j$  έτσι ώστε

$$q \in U_{p_j} = \text{graph}(F_{p_j}).$$

Εδώ είναι το ουσιαστικό σημείο! Η σχέση αυτή δηλώνει ότι δεν χρειαζόμαστε τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  που περιβάλλει την  $\mathbb{S}^2$  για να ορίσουμε συντεταγμένες στο  $q$ . Μπορούμε να παραλείψουμε τελείως την ύπαρξη του  $\mathbb{R}^3$  και να ορίσουμε συντεταγμένες στο  $q$  μέσω της προβολής

$$\pi_{p_j} : U_{p_j} \subseteq \mathbb{S}^2 \rightarrow \pi_{p_j}(U_{p_j}) = V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2,$$

η οποία ορίζεται ως

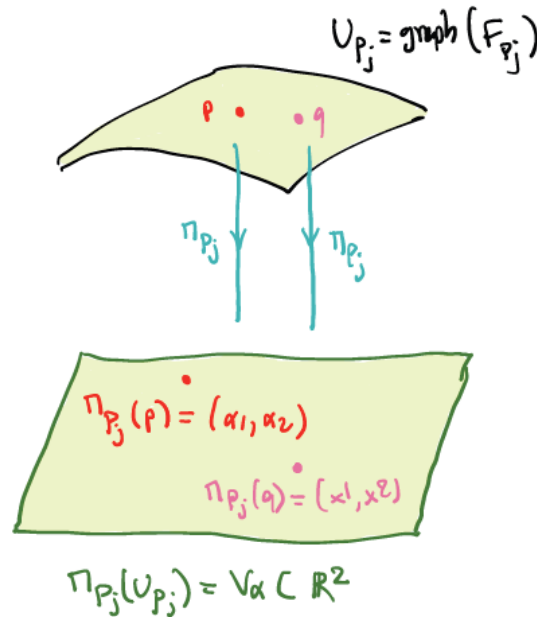
$$\pi_{p_j}(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2)) := (x^1, x^2), \quad \forall (x^1, x^2) \in V_\alpha.$$

Με άλλα λόγια, κάθε σημείο  $q \in \mathbb{S}^2$ , θα ανήκει σε κάποιο  $U_{p_j} = \text{graph}(F_{p_j})$ , συνεπώς θα γράφεται ως  $(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2))$  για κάποιο  $(x^1, x^2) \in V_\alpha$  και τότε κληρονομεί τις συντεταγμένες που έχει η προβολή αυτού, δηλαδή το  $\pi_{p_j}(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2))$

---

<sup>2</sup>Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος και  $A \subseteq X$  ένα υποσύνολο. Τότε, το  $A$  είναι συμπαγές εάν και μόνο εάν κάθε κάλυψη του από ανοικτά σύνολα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλαδή για κάθε συλλογή  $\{A_i : i \in I\}$  από ανοικτά σύνολα  $A_i$  με  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ , υπάρχει πεπερασμένο σύνολο δεικτών  $J$  με  $J \subseteq I$  τέτοιο, ώστε  $X = \bigcup_{i \in J} A_i$ . Υπενθυμίζουμε ότι η συνεπαγωγή: “το  $A$  είναι συμπαγές εάν και μόνο εάν είναι κλειστό και φραγμένο” προϋποθέτει  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , για κάποιο  $n \geq 1$ .

που εξ ορισμού είναι απλά  $(x^1, x^2)$ . Έτσι, κάθε σημείο της δισδιάστατης σφαίρας  $S^2$  αποκτά ακριβώς 2 συντεταγμένες (και όχι 3) όπως και αρμόζει στην πραγματική της διάσταση. Το Σχήμα 2.2 δείχνει την απεικόνιση προβολής.



Σχήμα 2.2: Η απεικόνιση προβολής  $\pi_{p_j} : U_{p_j} \subseteq S^2 \rightarrow \pi_{p_j}(U_{p_j}) = V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ . Κάθε σημείο  $q \in U_{p_j}$  γράφεται ως  $(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2))$  για κάποιο  $(x^1, x^2) \in V_\alpha$  και του προσάπτουμε τις συντεταγμένες  $(x^1, x^2) \in V_\alpha$  του σημείου  $\pi_{p_j}(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2))$ .

Ωστόσο, κάθε απεικόνιση που ορίζει συντεταγμένες, έτσι και η προβολή  $\pi_{p_j}$ , δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη καθώς πρέπει να επάγει, όχι απλά ένα ζεύγος  $(x^1, x^2)$ , αλλά ένα ζεύγος  $(x^1, x^2)$  που να έχει την έννοια των συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι η προβολή  $\pi_{p_j}$  πρέπει να ικανοποιεί ιδιότητες που την καθιστούν απεικόνιση συντεταγμένων. Με την σειρά του, αυτό σημαίνει δύο αναγκαίες προϋποθέσεις.

Πρώτα, η απεικόνιση  $\pi_{p_j}$  πρέπει να είναι ομοιομορφισμός (homomorphism), δηλαδή συνεχής, αντιστρέψιμη με συνεχή αντίστροφο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ένα σημείο  $q \in U_{p_j}$  αποκτά τις συντεταγμένες  $(x^1, x^2) = \pi_{p_j}(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2))$  ακριβώς όπως αναφέραμε παραπάνω. Εάν λίγο μεταβάλλουμε το σημείο, από  $q \in U_{p_j}$  σε  $\bar{q} \in U_{p_j}$  με  $|q - \bar{q}| < \delta$ , πρέπει και οι αντίστοιχες συντεταγμένες

τους, ως τις ονομάσουμε  $(x^1, x^2) \in V_\alpha$  και  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \in V_\alpha$ , να έχουν μεταβληθεί αντίστοιχα λίγο, δηλαδή  $|(x^1, x^2) - (\bar{x}^1, \bar{x}^2)| < \epsilon$ . Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση  $\pi_{p_j} : U_{p_j} \rightarrow V_\alpha$  πρέπει να είναι συνεχής. Το ίδιο πρέπει να ισχύει και αντίστροφα. Εάν λίγο μεταβάλλουμε τις συντεταγμένες, από  $(x^1, x^2) \in V_\alpha$  σε  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \in V_\alpha$  με  $|(x^1, x^2) - (\bar{x}^1, \bar{x}^2)| < \delta$ , πρέπει και τα αντίστοιχα σημεία  $q \in U_{p_j}$  και  $\bar{q} \in U_{p_j}$  να έχουν μεταβληθεί αντίστοιχα λίγο, δηλαδή  $|q - \bar{q}| < \epsilon$ . Αυτό σημαίνει ότι η αντίστροφη απεικόνιση  $\pi_{p_j}^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_{p_j}$  πρέπει (να υπάρχει και) να είναι συνεχής.

Δεύτερον, η απεικόνιση  $\pi_{p_j}$  πρέπει να επιτρέπει την αλλαγή συντεταγμένων με λείο τρόπο. Πράγματι, έστω ότι έχουμε ένα σημείο  $q \in \mathbb{S}^2$  το οποίο τυγχάνει να ανήκει σε δύο ανοικτά σύνολα  $U_{p_i}$  και  $U_{p_j}$  τα οποία προέρχονται από δύο διαφορετικά (εν γένει) σημεία  $p_i$  και  $p_j$ . Έτσι, με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω, το σημείο αυτό θα κληρονομήσει δύο (εν γένει) διαφορετικές συντεταγμένες, ως τις πούμε  $(x^1, x^2) = \pi_{p_i}(x^1, x^2, F_{p_j}(x^1, x^2))$  και  $(y^1, y^2) = \pi_{p_j}(y^1, y^2, F_{p_j}(y^1, y^2))$ . Πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η αλλαγή από  $(x^1, x^2)$  σε  $(y^1, y^2)$  είναι εφικτή και γίνεται με λείο τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση

$$\pi_{p_j} \circ \pi_{p_i}^{-1} : \pi_{p_i}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi_{p_j}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \subseteq \mathbb{R}^2$$

που δίνεται από

$$(\pi_{p_j} \circ \pi_{p_i}^{-1})(x^1, x^2) = (y^1, y^2), \quad \forall (x^1, x^2) \in \pi_{p_i}(U_{p_i} \cap U_{p_j})$$

πρέπει να είναι λεία, δηλαδή άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την αλλαγή από  $(y^1, y^2)$  σε  $(x^1, x^2)$ . Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση

$$\pi_{p_i} \circ \pi_{p_j}^{-1} : \pi_{p_j}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi_{p_i}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \subseteq \mathbb{R}^2$$

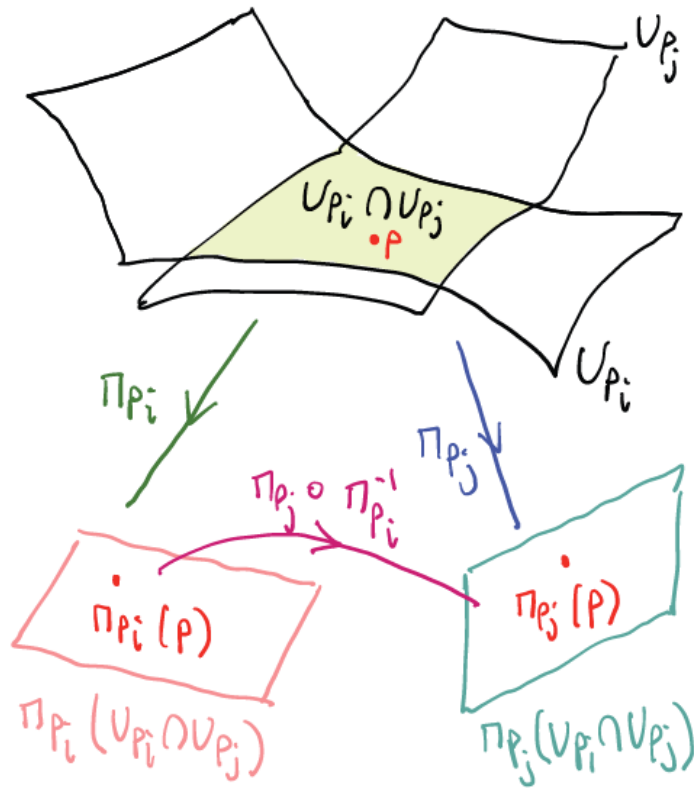
που δίνεται από

$$(\pi_{p_i} \circ \pi_{p_j}^{-1})(y^1, y^2) = (x^1, x^2), \quad \forall (y^1, y^2) \in \pi_{p_j}(U_{p_i} \cap U_{p_j})$$

πρέπει να είναι λεία. Παρατηρήστε ότι η μία είναι η αντίστροφη της άλλης, δηλαδή

$$(\pi_{p_i} \circ \pi_{p_j}^{-1})^{-1} = \pi_{p_j} \circ \pi_{p_i}^{-1}.$$

Το Σχήμα 2.3 δείχνει την απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων.



Σχήμα 2.3: Η απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων  $\pi_{p_j} \circ \pi_{p_i}^{-1} : \pi_{p_i}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi_{p_j}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Αυτή απεικονίζει τα  $(x^1, x^2)$  στα  $(y^1, y^2)$  και συνεπώς  $y^1 = y^1(x^1, x^2)$  και  $y^2 = y^2(x^1, x^2)$ . Οι απεικονίσεις αυτές πρέπει να είναι λείες.

Συνοψίζοντας, για να επεκτείνουμε την έννοια των καμπυλών και των επιφανειών όπως αναφέραμε στην αρχή του Κεφαλαίου αυτού, χρειαζόμαστε τα εξής:

- (1) Την ύπαρξη μίας οικογένειας  $\{U_i : i \in I\}$  από ανοικτά σύνολα  $U_i$  τα οποία καλύπτουν την  $S^2$ . Η υπόθεση αυτή είναι αναγκαία και πρέπει να συμπεριληφθεί στον ορισμό της πολλαπλότητας.
- (2) Μία ιδιότητα (όχι αναγκαστικά αυτή της συμπάγειας όπως στο παράδειγμα εδώ) η οποία θα μας επιτρέψει να ελέγχουμε το πλήθος του συνόλου  $I$ , δηλαδή πόσα σύνολα από την οικογένεια  $\{U_i : i \in I\}$  καλύπτουν την  $S^2$ . Αφενός, δεν είναι αναγκαίο αυτά να είναι πεπερασμένα σε πλήθος όπως στην (2.2). Αφετέρου όμως, χρειάζεται το σύνολο  $I$  να μην είναι υπεραριθμήσιμο. Έτσι, οδηγούμαστε στην υπόθεση ότι το σύνολο  $I$  είναι το πολύ αριθμήσιμο. Όταν ένα σύνολο

ικανοποιεί την υπόθεση αυτή λέμε ότι έχει **αριθμήσιμη βάση**. Η υπόθεση αυτή είναι αναγκαία για την ύπαρξη διαμερισμού της μονάδας (partition of unity) και επομένως πρέπει να συμπεριληφθεί στον ορισμό της πολλαπλότητας.

- (3) Την ύπαρξη μίας οικογένειας  $\{\varphi_i : i \in I\}$  από απεικονίσεις  $\varphi_i : U_i \subseteq \mathbb{S}^2 \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^2$  οι οποίες ορίζουν συντεταγμένες για τα σημεία του συνόλου  $\mathbb{S}^2$ , δηλαδή να είναι συνεχείς, αντιστρέψιμες με συνεχή αντίστροφη  $\varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{S}^2 \rightarrow U_i \subseteq \mathbb{S}^2$ . Απεικονίσεις σαν τις  $\varphi_i$  με αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται **ομοιομορφισμοί**. Επιπρόσθετα, οι απεικονίσεις αυτές πρέπει να είναι τέτοιες ώστε, εφόσον  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , οι απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^2$  και  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^2$  να είναι (άπειρες φορές) παραγωγίσιμες. Απεικονίσεις σαν τις  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  με αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται **διαφορομορφισμοί**. Οι υποθέσεις αυτές είναι αναγκαίες και πρέπει να συμπεριληφθούν στον ορισμό της πολλαπλότητας.

- (4) Μία τοπολογία στο σύνολο  $\mathbb{S}^2$  (ώστε να έχει νόημα η συνέχεια των απεικονίσεων από το σύνολο  $\mathbb{S}^2$  στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^2$ ) όπως αυτή της (2.1). Ωστόσο, η προϋπόθεση αυτή προκύπτει από τις παραπάνω, ως εκ τούτου, δεν συμπεριλαμβάνεται στον ορισμό της πολλαπλότητας. Πράγματι, εάν έχουμε ήδη μία συλλογή  $\{U_i : i \in I\}$  από ανοικτά σύνολα (όπως στα (1) και (2)) και μία συλλογή απεικονίσεων  $\{\varphi_i : i \in I\}$  (όπως στο (3)), τότε ορίζουμε ένα υποσύνολο  $U \subseteq \mathcal{M}$  να είναι ανοικτό (στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ ) εάν και μόνο εάν

$$\forall i \in I : \varphi_i(U \cap U_i) \text{ ανοικτά (στον } \mathbb{R}^3).$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η συλλογή όλων αυτών των ανοικτών συνόλων είναι πράγματι μία τοπολογία στην πολλαπλότητα. Αυτή ονομάζεται **επαγώμενη** (από την διαφορική δομή) **τοπολογία**.

- (5) Τα σύνολα που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις (1)-(4) είναι πολύ γενικά και αφηρημένα, έτσι ενδέχεται να μην παρουσιάζουν γεωμετρικό ενδιαφέρον. Προκειμένου να αποκλείσουμε τέτοιες περιπτώσεις εισάγουμε μία επιπλέον υπόθεση:

$$\forall p, q \in \mathbb{S}^2, \exists U, V \subseteq \mathbb{S}^2 : p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset.$$

Όταν ένα σύνολο ικανοποιεί την υπόθεση αυτή λέμε ότι είναι **Hausdorff**. Η υπόθεση αυτή είναι αναγκαία ώστε το όριο των συγκλίνουσων ακολουθιών στην πολλαπλότητα να είναι μοναδικό και επομένως πρέπει να συμπεριληφθεί στον ορισμό της πολλαπλότητας.

Έτσι, οδηγούμαστε στον ορισμό της (διαφορίσιμης) πολλαπλότητας.

## 2.2 Πολλαπλότητες χωρίς σύνορο

**Ορισμός 2.2.1** (Διαφορίσιμη πολλαπλότητα χωρίς σύνορο). Ένα σύνολο  $\mathcal{M}$  ονομάζεται **διαφορίσιμη πολλαπλότητα** διάστασης  $n \geq 1$  **χωρίς σύνορο** εάν και μόνο εάν είναι Hausdorff με αριθμήσιμη βάση και υπάρχουν μία οικογένεια  $\{U_i : i \in I\}$  συνόλων και μία οικογένεια  $\{\varphi_i : i \in I\}$  απεικονίσεων τέτοια ώστε:

- Η οικογένεια  $\{U_i : i \in I\}$  αποτελείται από ανοικτά (στο  $\mathcal{M}$ ) σύνολα και καλύπτει την  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

- Οι απεικονίσεις συντεταγμένων

$$\varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$$

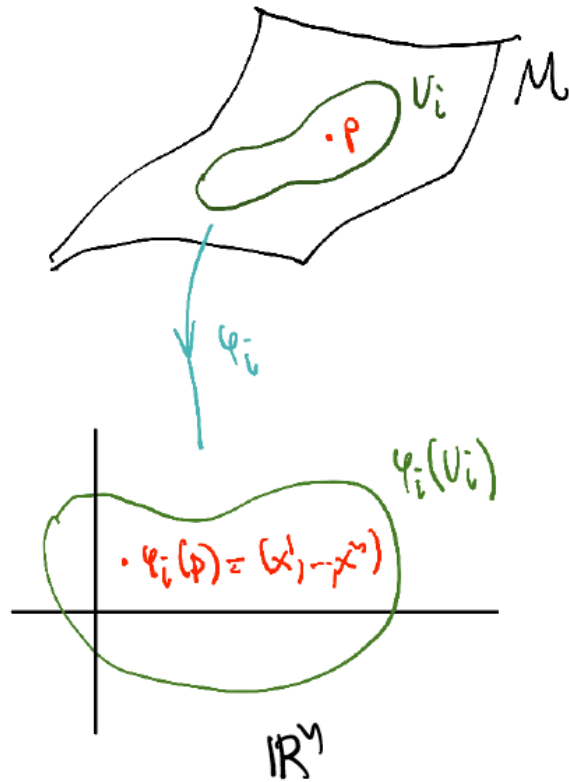
είναι ομοιομορφισμοί, δηλαδή αυτές καθώς και οι αντίστροφές τους είναι συνεχείς.

- Για κάθε  $i, j \in I$  με  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , τα σύνολα  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  είναι ανοικτά (στον  $\mathbb{R}^n$ ) και οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής

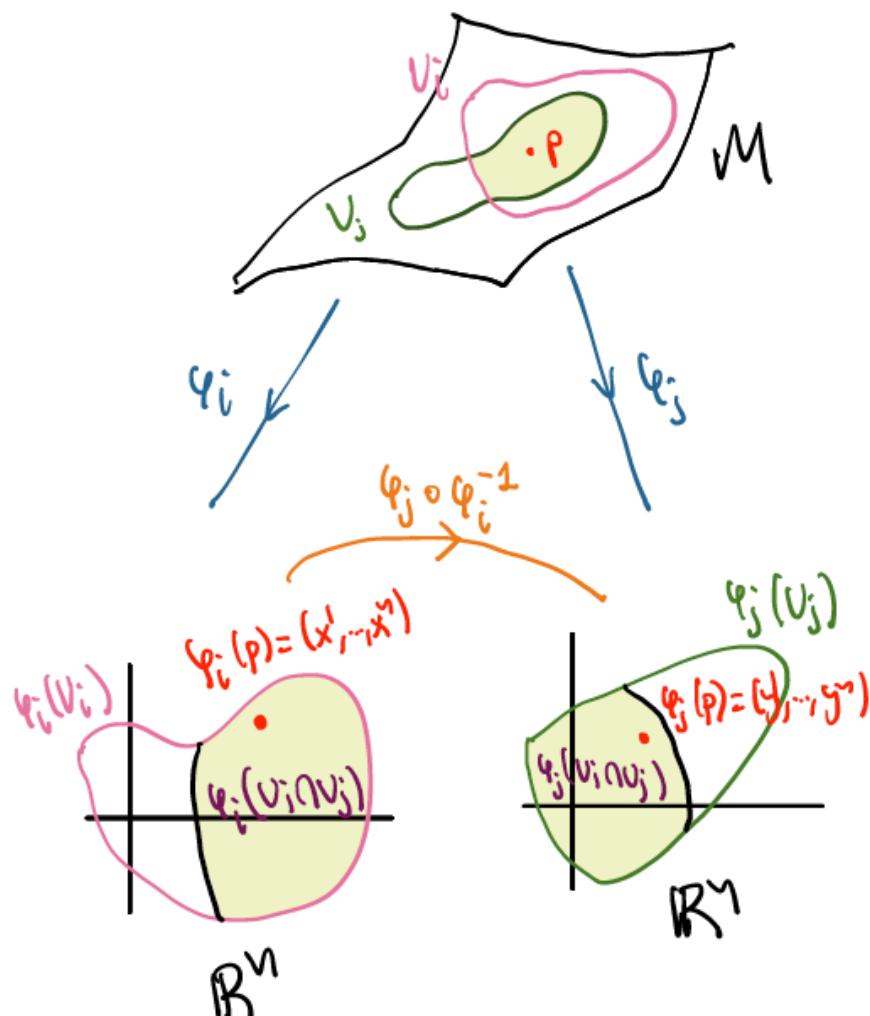
$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι διαφορομορφισμοί, δηλαδή αυτές καθώς και οι αντίστροφές τους είναι (άπειρες φορές) παραγωγίσιμες.

Το Σχήμα 2.4 δείχνει την απεικόνιση συντεταγμένων και το Σχήμα 2.5 την απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων.



Σχήμα 2.4: Η απεικόνιση συντεταγμένων  $\varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Αυτή προσάπτει σε κάθε  $p \in U_i$  τις συντεταγμένες  $(x^1, \dots, x^n)$  που έχει στο σημείο  $\varphi_i(p) = (x^1, \dots, x^n)$ . Οι απεικονίσεις αυτές πρέπει να είναι ομοιομορφισμοί, δηλαδή αυτές καθώς και οι αντίστροφές τους είναι συνεχείς.



Σχήμα 2.5: Η απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Αυτή απεικονίζει τα  $(x^1, \dots, x^n)$  στα  $(y^1, \dots, y^n)$  και συνεπώς  $y^l = y^l(x^1, \dots, x^n)$  για κάθε  $l = 1, 2, \dots, n$ . Οι απεικονίσεις αυτές πρέπει να είναι διαφορομορφισμοί, δηλαδή αυτές καθώς και οι αντίστροφές τους είναι (άπειρες φορές) παραγωγίσιμες.

**Ορισμός 2.2.2** (Ονοματολογία). Οι **συντεταγμένες** (coordinates) ενός σημείου  $p \in U_i$  στην πολλαπλότητα  $M$  ορίζονται ως οι συντεταγμένες του  $\varphi_i(p) = (x^1, \dots, x^n) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Τα σύνολα  $U_i$  ονομάζονται **περιοχές συντεταγμένων** (coordinate neighborhoods), οι απεικονίσεις  $\varphi_i$  ονομάζονται **απεικονίσεις συντεταγμένων** (coordinate maps), κάθε ζεύγος  $(U_i, \varphi_i)$  ονομάζεται **σύστημα συντεταγμένων** (coordinate system) και ολόκληρη η

συλλογή  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ , που θεωρείται η μέγιστη δυνατή, ονομάζεται **διαφορική δομή** (differentiable structure).

**Παρατήρηση 2.2.3** (Τα ανοικτά υποσύνολα είναι πολλαπλότητες ίδιας διάστασης). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $n \geq 1$  με διαφορική δομή  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  και  $U \subseteq \mathcal{M}$  ένα ανοικτό σύνολο. Είναι εύκολο να δει κανείς από τον Ορισμό 2.2.1 ότι το υποσύνολο  $U$  είναι πολλαπλότητα ίδιας διάστασης  $n \geq 1$  και συγκεκριμένα η συλλογή  $\{(U_i \cap U, \varphi_i|_U) : i \in I\}$  είναι η διαφορική της δομή. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, βλέπε Παράδειγμα 2.2.5, δεν ισχύει το ίδιο για τα κλειστά σύνολα. Προσοχή: εάν ένα σύνολο είναι κλειστό, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν είναι ανοικτό. Για παράδειγμα, σε κάθε τοπολογικό χώρο  $X$ , τα σύνολα  $X$  και  $\emptyset$  είναι και ανοικτά και κλειστά ταυτόχρονα.

**Ορισμός 2.2.4** (Προσανατολίσιμη πολλαπλότητα). Η πολλαπλότητα ονομάζεται **προσανατολίσιμη** (orientable) όταν για κάθε  $i, j \in I$  με  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , το διαφορικό της απεικόνισης αλλαγής συντεταγμένων

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n) = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(x^1, \dots, x^n)$$

έχει γνήσια θετική ορίζουσα, δηλαδή

$$\det(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})) = \det\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\right) > 0.$$

Σε αντίθετη περίπτωση, ονομάζεται **μη-προσανατολίσιμη** (non-orientable).

**Παράδειγμα 2.2.5** (Σύνολα πινάκων). Το σύνολο όλων των πινάκων με πραγματικούς συντελεστές ορίζεται ως

$$\mathbb{R}^{3 \times 3} := \{A = (\alpha_{ij}) : \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j = 1, 2, 3.\}$$

και είναι πολλαπλότητα διάστασης  $n = 9$ . Πράγματι, η απεικόνιση  $\varphi : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^9$  που ορίζεται ως

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right) := \underbrace{(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})}_{1\eta \text{ γραμμή}}, \underbrace{(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})}_{2\eta \text{ γραμμή}}, \underbrace{(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})}_{3\eta \text{ γραμμή}}$$

είναι η (μοναδική) απεικόνιση συντεταγμένων. Το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων πινάκων με πραγματικούς συντελεστές ορίζεται ως

$$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det(A) \neq 0\}$$

και είναι ένα ανοικτό υποσύνολό του  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  γιατί η απεικόνιση  $A \mapsto \det(A)$  είναι συνεχής. Ως εκ τούτου (βλέπε Παρατήρηση 2.2.3) είναι πολλαπλότητα ίδιας διάστασης  $n = 9$  και η απεικόνιση  $\varphi : \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^9$  που ορίζεται όπως παραπάνω (αλλά με αυτό το ανοικτό υποσύνολο ως πεδίο ορισμού) είναι η (μοναδική) απεικόνιση συντεταγμένων. Ωστόσο, το κλειστό υποσύνολο

$$G := \{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : \alpha_{22} = 0\}$$

είναι πολλαπλότητα διάστασης  $n = 8$ . Πράγματι, η απεικόνιση  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^8$  που ορίζεται ως

$$\psi \left( \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right) := (\underbrace{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}}_{1\text{η γραμμή}}, \underbrace{\alpha_{21}, \alpha_{23}}_{2\text{η γραμμή}}, \underbrace{\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}}_{3\text{η γραμμή}})$$

είναι η (μοναδική) απεικόνιση συντεταγμένων. Με παρόμοιο τρόπο, το υποσύνολο

$$\mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det(A) = 1\}$$

είναι πολλαπλότητα διάστασης  $n = 8$ , αφού η συνθήκη  $\det(A) = 1$  περιορίζει τα στοιχεία  $\alpha_{ij}$  του πίνακα  $A$  και μας δίνει τουλάχιστον ένα από αυτά, ας πούμε το  $\alpha_{11}$ , συναρτήσει των υπολοίπων. Έτσι, η απεικόνιση  $\chi : \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^8$  που ορίζεται ως

$$\chi \left( \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right) := (\underbrace{\alpha_{12}, \alpha_{13}}_{1\text{η γραμμή}}, \underbrace{\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}}_{2\text{η γραμμή}}, \underbrace{\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}}_{3\text{η γραμμή}})$$

είναι η (μοναδική) απεικόνιση συντεταγμένων. Τέλος, το σύνολο όλων των συμμετρικών πινάκων με πραγματικούς συντελεστές ορίζεται ως

$$\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A^T = A\}$$

είναι πολλαπλότητα διάστασης  $n = 6$ . Πράγματι, η απεικόνιση  $\zeta : \text{Sym}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6$  που ορίζεται ως

$$\zeta \left( \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right) := \left( \underbrace{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}}_{1\text{η γραμμή}}, \underbrace{\alpha_{22}, \alpha_{23}}_{2\text{η γραμμή}}, \underbrace{\alpha_{33}}_{3\text{η γραμμή}} \right)$$

είναι η (μοναδική) απεικόνιση συντεταγμένων. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι, σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, οι απεικονίσεις συντεταγμένων είναι ομοιομορφισμοί. Ακόμα, η διαφορική δομή τους αποτελείται και ένα και μόνο σύστημα συντεταγμένων με μία και μόνο ολική περιοχή συντεταγμένων (δηλαδή η μοναδική περιοχή συντεταγμένων είναι ολόκληρη την πολλαπλότητα). Αυτό συνεπάγεται ότι οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής είναι όλες η ταυτοτική απεικόνιση (επομένως λεία) και, ως εκ τούτου, όλες οι πολλαπλότητες αυτές είναι προσανατολίσιμες.

**Παράδειγμα 2.2.6** (Λωρίδα Möbius). Η **λωρίδα Möbius** είναι μία (άπειρη) κορδέλα που περιστρέφεται μία φορά κατά  $180^\circ$  στο ένα άκρο της και ενώνεται με τον ευατό της με το άλλο άκρο της δημιουργώντας ένα σχήμα με μόνο μία πλευρά. Αυτό το σχήμα προκύπτει από την λωρίδα

$$R := \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^1 \in \mathbb{R}, -1 < x^2 < 1\}$$

ταυτίζοντας τα σημεία του ως εξής

$$(x^1, x^2) \sim (x^1 + 1, -x^2), \quad \forall (x^1, x^2) \in R.$$

Με αυτόν τον τρόπο, τα “σημεία” της λωρίδα Möbius είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας

$$\begin{aligned} [(x^1, x^2)] &:= \{(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \in R : (\bar{x}^1, \bar{x}^2) \sim (x^1, x^2)\} \\ &= \{(x^1 + k, (-1)^k x^2) : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

και ο ίδιος ο χώρος μπορεί να γραφεί ως το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή

$$\mathcal{M} := R / \sim.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι πολλαπλότητα διάστασης 2.

Βήμα 1: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων.

Πράγματι, για μικρό  $\epsilon > 0$ , ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{[(x^1, x^2)] \in \mathcal{M} : \epsilon < x^1 < 1 - \epsilon\}, \\ U_2 &:= \{[(x^1, x^2)] \in \mathcal{M} : 0 < x^1 < 2\epsilon\}, \\ U_3 &:= \{[(x^1, x^2)] \in \mathcal{M} : 1 - 2\epsilon < x^1 < 1\} \end{aligned}$$

καθώς και τις απεικονίσεις

$$\varphi_j : U_j \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^2$$

από τους τύπους

$$\begin{aligned} \varphi_1([(x^1, x^2)]) &:= (x^1, x^2), \\ \varphi_2([(x^1, x^2)]) &:= (x^1, x^2), \\ \varphi_3([(x^1, x^2)]) &:= (x^1 - 1, -x^2). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι, επειδή  $(0, x^2) \sim (1, -x^2)$ , για κάθε  $0 < x^2 < 1$ , οι περιοχές  $\varphi_j(U_j)$  κολλάνε ομαλά, δηλαδή

$$\begin{aligned} \varphi_1(U_1) &= (\epsilon, 1 - \epsilon) \times (-1, 1), \\ \varphi_2(U_2) &= (0, 2\epsilon) \times (-1, 1), \\ \varphi_3(U_3) &= (-2\epsilon, 0) \times (-1, 1). \end{aligned}$$

Βήμα 2: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων είναι ομοιομορφισμοί.

Εφοδιάζουμε τον χώρο πηλίκου  $\mathcal{M} = R / \sim$  με την **τοπολογία πηλίκου** (quotient topology), δηλαδή ένα υποσύνολο  $U \subseteq \mathcal{M}$  είναι ανοικτό (στο  $\mathcal{M}$ ) εάν και μόνο εάν το υποσύνολο  $\pi^{-1}(U) \subseteq R$  είναι ανοικτό (στο  $\mathbb{R}^2$ ), όπου  $\pi : R \rightarrow \mathcal{M} = R / \sim$  με  $\pi(x^1, x^2) = [(x^1, x^2)]$ , για κάθε  $(x^1, x^2) \in R$ . Ας το αποδείξουμε αυτό μόνο για  $j = 1$  καθώς για τα υπόλοιπα η απόδειξη είναι πανομοιότυπη. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση  $\varphi_1 : U_1 \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^2$  που ορίζεται ως  $\varphi_1([(x^1, x^2)]) := (x^1, x^2)$  είναι συνεχής. Αυτό είναι προφανές από τον ορισμό της τοπολογίας στο  $\mathcal{M}$ : εάν  $A \subseteq \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^2$  είναι ένα ανοικτό (στον  $\mathbb{R}^2$ ) σύνολο, τότε η αντίστροφη εικόνα δίνεται από  $\varphi_1^{-1}(A) = \{[(x^1, x^2)] : (x^1, x^2) \in A\}$  που είναι ένα ανοικτό (στον  $\mathcal{M}$ ) σύνολο. Επειδή η  $\varphi_1$  αντιστρέφει ανοικτά (στον  $\mathbb{R}^2$ ) σε ανοικτά (στον  $\mathcal{M}$ ) σύνολα είναι συνεχής. Επίσης, η  $\varphi_1$  είναι προφανώς

1-1 και επί (λόγω των ιδιοτήτων των κλάσεων ισοδυναμίας), και επομένως η αντίστροφη απεικόνιση  $\varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow U_1 \subseteq \mathcal{M}$  υπάρχει και ορίζεται ως  $\varphi_1^{-1}(x^1, x^2) = [(x^1, x^2)]$ . Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να δεί ότι αυτή είναι συνεχής.

Βήμα 3: Οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής είναι λείες.

Ας το αποδείξουμε αυτό μόνο για  $i = 1$  και  $j = 3$  καθώς για τα υπόλοιπα η απόδειξη είναι πανομοιότυπη (οι υπόλοιπες δίνονται σε κλειστό τύπο αμέσως παρακάτω). Καταρχήν, παρατηρήστε ότι  $U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$  και συγκεκριμένα

$$U_1 \cap U_3 = U_3 = \{[(x^1, x^2)] \in \mathcal{M} : 1 - \epsilon < x^1 < 1\}$$

καθώς και

$$\varphi_1(U_1 \cap U_3) = (1 - \epsilon, 1) \times (-1, 1), \quad \varphi_3(U_1 \cap U_3) = (-\epsilon, 0) \times (-1, 1).$$

Η απεικόνιση

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3) \subseteq \mathbb{R}^2$$

ορίζεται ως

$$(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1})(x^1, x^2) = \varphi_1(\varphi_3^{-1}(x^1, x^2)) = \varphi_1([(x^1 + 1, -x^2)]) = (x^1 + 1, -x^2),$$

για κάθε  $(x^1, x^2) \in \varphi_3(U_1 \cap U_3)$ . Αυτή είναι προφανώς λεία, αντιστρέψιμη με λεία αντίστροφο.

Έτσι, η συλλογή  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  με  $I = \{1, 2, 3\}$  αποτελεί μία διαφορεική δομή καθιστώντας την λωρίδα Möbius πολλαπλότητα διάστασης  $n = 2$ . Είναι όμως προσανατολίσιμη πολλαπλότητα;

Βήμα 4: Προσανατολισμός

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι οι απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων δίνονται από

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(x^1, x^2) &= (x^1, x^2), & (x^1, x^2) &\in (0, \epsilon) \times (-1, 1), \\ (\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1})(x^1, x^2) &= (x^1 + 1, -x^2), & (x^1, x^2) &\in (-\epsilon, 0) \times (-1, 1). \end{aligned}$$

ενώ η  $\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}$  δεν ορίζεται γιατί  $U_2 \cap U_3 = \emptyset$ . Επομένως, υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$\det(d((\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

$$\det(d((\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} (x^1 + 1) & \frac{\partial}{\partial x^1} (-x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x^2} (x^1 + 1) & \frac{\partial}{\partial x^2} (-x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Οι ορίζουσες αλλάζουν πρόσημο και συνεπώς η λωρίδα Möbius είναι μη-προσανατολίσιμη πολλαπλότητα.

**Παράδειγμα 2.2.7** (Προβολικός χώρος). Ο (πραγματικός) **προβολικός χώρος** (real projective plane) συμβολίζεται με  $P^2(\mathbb{R})$  και ορίζεται ως το σύνολο όλων των ευθειών στον  $\mathbb{R}^3$  που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Κάθε “σημείο” του είναι μία τέτοια ευθεία. Ισοδύναμα, μπορούμε να αποκτήσουμε μία τέτοια ευθεία με το να ταυτίσουμε όλα τα σημεία  $(x^1, x^2, x^3)$  του  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  που ανήκουν σε αυτήν, δηλαδή ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας

$$(x^1, x^2, x^3) \sim (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \iff \exists \lambda \neq 0 : \bar{x}^j = \lambda x^j, \forall j = 1, 2, 3.$$

Με αυτόν τον τρόπο, τα “σημεία” του προβολικού χώρου είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας

$$\begin{aligned} [(x^1, x^2, x^3)] &:= \{(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \sim (x^1, x^2, x^3)\} \\ &:= \{(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \exists \lambda \neq 0 : \bar{x}^j = \lambda x^j, \forall j = 1, 2, 3\} \\ &:= \{\lambda(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \lambda \neq 0\} \end{aligned}$$

και ο ίδιος ο χώρος μπορεί να γραφεί ως το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή

$$P^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι πολλαπλότητα διάστασης 2.

Βήμα 1: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων.

Πράγματι, ορίζουμε τα σύνολα

$$U_j := \{[(x^1, x^2, x^3)] \in P^2(\mathbb{R}) : x^j \neq 0\},$$

για κάθε  $j = 1, 2, 3$ . Παρατηρήστε ότι, εάν  $x^1 \neq 0$ , τότε

$$\begin{aligned} [(x^1, x^2, x^3)] &:= \left\{ \lambda(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \lambda = \frac{\mu}{x^1} \neq 0 \right\} \\ &:= \left\{ \mu \left( 1, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1} \right) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \mu \neq 0 \right\} \\ &= \left[ \left( 1, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1} \right) \right] \end{aligned}$$

και παρομοίως εάν  $x^2 \neq 0$  ή  $x^3 \neq 0$ . Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[(1, u, v)] \in P^2(\mathbb{R}) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}, \\ U_2 &= \{[(u, 1, v)] \in P^2(\mathbb{R}) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}, \\ U_3 &= \{[(u, v, 1)] \in P^2(\mathbb{R}) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\varphi_j : U_j \subseteq P^2(\mathbb{R}) \rightarrow \varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^2$$

από τους τύπους

$$\begin{aligned} \varphi_1([(1, u, v)]) &:= (u, v), \\ \varphi_2([(u, 1, v)]) &:= (u, v), \\ \varphi_3([(u, v, 1)]) &:= (u, v). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι  $\varphi_j(U_j) = \mathbb{R}^2$ , για κάθε  $j = 1, 2, 3$ . Καταρχήν, τα σύνολα  $U_j$  είναι όλα ανοικτά (στο  $P^2(\mathbb{R})$ ) ως προς την επαγόμενη τοπολογία αφού το σύνολο  $\mathbb{R}^2$  ανοικτό (στον  $\mathbb{R}^2$ ) ως προς την συνήθη τοπολογία του Ευκλείδειου χώρου. Επίσης, είναι προφανές ότι η οικογένεια  $\{U_1, U_2, U_3\}$  είναι πεπερασμένη και καλύπτει τον χώρο  $P^2(\mathbb{R})$ .

Βήμα 2: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων είναι ομοιομορφισμοί.

Εφοδιάζουμε τον χώρο πηλίκο  $P^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$  με την τοπολογία πηλίκου (quotient topology), δηλαδή ένα υποσύνολο  $U \subseteq P^2(\mathbb{R})$  είναι ανοικτό (στο  $P^2(\mathbb{R})$ ) εάν και μόνο εάν το υποσύνολο  $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  είναι ανοικτό (στο  $\mathbb{R}^3$ ), όπου  $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow P^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$  με  $\pi(x^1, x^2, x^3) = [(x^1, x^2, x^3)]$ , για κάθε  $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Ας το αποδείξουμε αυτό μόνο για  $j = 1$  καθώς για τα υπόλοιπα η απόδειξη είναι πανομοιότυπη. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση  $\varphi_1 : U_1 \subseteq P^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  που ορίζεται ως  $\varphi_1([(1, u, v)]) := (u, v)$  είναι συνεχής. Αυτό είναι προφανές από τον ορισμό της τοπολογίας στο  $P^2(\mathbb{R})$ : εάν  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  είναι ένα ανοικτό (στον  $\mathbb{R}^2$ ) σύνολο, τότε η αντίστροφη εικόνα δίνεται από  $\varphi_1^{-1}(A) = \{[(1, u, v)] : (u, v) \in A\}$  που είναι ένα ανοικτό (στον  $P^2(\mathbb{R})$ ) σύνολο. Επειδή η  $\varphi_1$  αντιστρέφει ανοικτά (στον  $\mathbb{R}^2$ ) σε ανοικτά (στον  $P^2(\mathbb{R})$ ) σύνολα είναι συνεχής. Επίσης, η  $\varphi_1$  είναι προφανώς 1-1 και επί (λόγω των ιδιοτήτων των κλάσεων ισοδυναμίας), και επομένως η αντίστροφη απεικόνιση  $\varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_1 \subseteq P^2(\mathbb{R})$  υπάρχει και ορίζεται ως  $\varphi_1^{-1}(u, v) = [(1, u, v)]$ . Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να δεί ότι αυτή είναι συνεχής.

Βήμα 3: Οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής είναι λείες.

Ας το αποδείξουμε αυτό μόνο για  $i = 1$  και  $j = 2$  καθώς για τα υπόλοιπα η απόδειξη είναι πανομοιότυπη (οι υπόλοιπες δίνονται σε κλειστό τύπο αμέσως παρακάτω). Καταρχήν, παρατηρήστε ότι  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  και συγκεκριμένα

$$U_1 \cap U_2 = \{[(1, u, v)] \in P^2(\mathbb{R}) : (u, v) \in \mathbb{R}^2, u \neq 0\}$$

καθώς και

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0\},$$

Η απεικόνιση

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2$$

ορίζεται ως

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(u, v) &= \varphi_1(\varphi_2^{-1}(u, v)) = \varphi_1([(u, 1, v)]) \\ &= \varphi_1\left(\left[\left(1, \frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right]\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right), \end{aligned}$$

για κάθε  $(u, v) \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ . Αυτή είναι προφανώς λεία, αντιστρέψιμη με λεία αντίστροφο.

Έτσι, η συλλογή  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  με  $I = \{1, 2, 3\}$  αποτελεί μία διαφορική δομή καθιστώντας τον προβολικό χώρο πολλαπλότητα διάστασης  $n = 2$ . Είναι όμως προσανατολίσιμη πολλαπλότητα;

#### Βήμα 4: Προσανατολισμός

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι οι απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων δίνονται από

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(u, v) = \left( \frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right), \quad u \neq 0$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1})(u, v) = \left( \frac{v}{u}, \frac{1}{u} \right), \quad u \neq 0$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1})(u, v) = \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right), \quad v \neq 0.$$

Επομένως, υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$\det(d((\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{u} \right) & \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v}{u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{u} \right) & \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v}{u} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & -\frac{v}{u^2} \\ 0 & -\frac{1}{v^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2 v^2} > 0,$$

$$\det(d((\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{v}{u} \right) & \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v}{u} \right) & \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{u} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2} & -\frac{1}{u^2} \\ \frac{1}{u} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{u^3} \in \mathbb{R},$$

$$\det(d((\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u}{v} \right) & \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u}{v} \right) & \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{v} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & 0 \\ -\frac{u}{v^2} & -\frac{1}{v^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{v^3} \in \mathbb{R}.$$

Οι ορίζουσες αλλάζουν πρόσημο και συνεπώς ο προβολικός χώρος είναι μη-προσανατολίσιμη πολλαπλότητα.

## 2.3 Μερικές παράγωγοι

**Ορισμός 2.3.1** (Λείες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων). Έστω  $\mathcal{M}_1$  και  $\mathcal{M}_2$  δύο πολλαπλότητες διάστασης  $n_1$  και  $n_2$  με διαφορικές δομές  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  και  $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$  αντίστοιχα. Η απεικόνιση  $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  είναι **λεία**

στο σημείο  $p \in \mathcal{M}_1$  εάν και μόνο εάν για κάθε  $U_i$  με  $p \in U_i$  και για κάθε  $V_j$  με  $f(p) \in V_j$  έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \psi_j(V_j) \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο σημείο  $\varphi_i(p)$ .

**Ορισμός 2.3.2** (Μερική παράγωγος). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $n$ , ένα σημείο  $p \in \mathcal{M}$  και ένα σύστημα συντεταγμένων  $(U, \varphi)$  όπου  $\varphi : U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  είναι η απεικόνιση συντεταγμένων. Έστω ακόμα  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  μία λεία απεικόνιση στο  $p$ . Με βάση τον Ορισμό 2.3.1, η απεικόνιση

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο σημείο  $\varphi(p)$ . Ορίζουμε την **μερική παράγωγο** της  $f$  στο σημείο  $p$  ως τον τελεστή

$$f \mapsto \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f)$$

που ορίζεται ως

$$\underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p}_{\substack{\text{μερική παράγωγος} \\ \text{σε συναρτήσεις} \\ \text{με πεδίο ορισμού} \\ \text{μία πολλαπλότητα}}} (f) := \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(p)}}_{\substack{\text{μερική παράγωγος} \\ \text{σε συναρτήσεις} \\ \text{με πεδίο ορισμού} \\ \text{τον Ευκλείδειο χώρο } \mathbb{R}^n}} (f \circ \varphi^{-1}). \quad (2.3)$$

**Παράδειγμα 2.3.3** (Μερική παράγωγος των συναρτήσεων συντεταγμένων). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $n$  και ένα σύστημα συντεταγμένων  $(U, \varphi)$ , όπου  $\varphi : U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  είναι η απεικόνιση συντεταγμένων. Όπως είδαμε στον Ορισμό 2.2.1, ένα σημείο  $p \in U$  αποκτά τις συντεταγμένους του σημείου  $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$ . Ας υπολογίσουμε την μερική παράγωγο των συναρτήσεων συντεταγμένων  $x^j : U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ . Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.3.2, έχουμε

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^j) := \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(p)} (x^j \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} (x^1, \dots, x^n) = \delta_{ij}.$$

## 2.4 Εφαπτόμενος και δυϊκός χώρος

**Ορισμός 2.4.1** (Εφαπτόμενος χώρος). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα,  $(U, \varphi)$  ένα σύστημα συντεταγμένων και  $p \in U \subseteq \mathcal{M}$  ένα σταθερό σημείο. Ο **εφαπτόμενος χώρος** (tangent space) στο σημείο  $p$  ορίζεται ως το σύνολο όλων των τελεστών που παράγουν οι μερικές παράγωγοι στο σημείο αυτό, δηλαδή

$$T_p\mathcal{M} := \text{span} \left( \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p : i = 1, 2, \dots, n \right\} \right).$$

Το Σχήμα 2.6 δείχνει την βάση αυτή.

**Παρατήρηση 2.4.2** (Αλλαγή βάσης στον εφαπτόμενο χώρο). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $n$ , δύο συστήματα συντεταγμένων  $(U_1, \varphi_1)$  και  $(U_2, \varphi_2)$  και  $p \in U_1 \cap U_2$ . Με βάση τον Ορισμό 2.2.1, το σημείο  $p$  κληρονομεί δύο  $n$ -άδες συντεταγμένων: ως πούμε την  $\varphi_1(p) = (x^1, \dots, x^n)$  από την απεικόνιση  $\varphi_1 : U_1 \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^n$  και την  $\varphi_2(p) = (y^1, \dots, y^n)$  από την απεικόνιση  $\varphi_2 : U_2 \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Οι απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων είναι

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n$$

και ορίζονται από τον τύπο

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(y^1, \dots, y^n) = (x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)).$$

Ως εκ τούτου και ο εφαπτόμενος χώρος στο σημείο  $p$  θα έχει δύο βάσεις: την  $\{(\partial/\partial x^j)_p : j = 1, 2, \dots, n\}$  από την απεικόνιση  $\varphi_1 : U_1 \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^n$  και την  $\{(\partial/\partial y^j)_p : j = 1, 2, \dots, n\}$  από την απεικόνιση  $\varphi_2 : U_2 \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ισχυριζόμαστε ότι τα στοιχεία της δεύτερης βάσης δίνονται συναρτήσεις των στοιχείων της πρώτης βάσης ως εξής

$$\left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i(p)}{\partial y^j} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Πράγματι, επειδή κάθε ένα στοιχείο  $(\partial/\partial y^j)_p$  ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο  $T_p\mathcal{M}$  και το σύνολο  $\{(\partial/\partial x^j)_p : j = 1, 2, \dots, n\}$  είναι μία βάση αυτού, θα υπάρχουν συντελεστές  $\lambda_j^i(p)$  τέτοιοι ώστε

$$\left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p = \sum_{i=1}^n \lambda_j^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p.$$

Τώρα, επιλέγουμε ένα  $k = 1, 2, \dots, n$  και εφαρμόζουμε και τα δύο μέλη αυτής της ισότητας στις συναρτήσεις συντεταγμένων  $x^k : U_1 \cap U_2 \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.3.2 και το Παράδειγμα 2.3.3, βρίσκουμε

$$\frac{\partial x^k(p)}{\partial y^j} = \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p (x^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_j^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_j^i(p) \delta_{ik} = \lambda_j^k(p),$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

**Ορισμός 2.4.3** (Διανυσματικά Πεδία). Ένα **διανυσματικό πεδίο** (vector field) είναι μία απεικόνιση

$$p \mapsto v(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \in T_p \mathcal{M},$$

όπου οι συνιστώσες  $p \mapsto v^i(p)$  είναι όλες λείες (με την έννοια του Ορισμού 2.3.1) συναρτήσεις ως προς  $p$ .

**Ορισμός 2.4.4** (Δυϊκός χώρος). Ο **δυϊκός χώρος** (dual space) ορίζεται ως το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον εφαπτόμενο χώρο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή

$$(T_p \mathcal{M})^* := \{ \varphi : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} : \text{η απεικόνιση } v(p) \mapsto \varphi(v(p)) \text{ είναι γραμμική} \}.$$

Ας βρούμε μία βάση του χώρου αυτού. Ορίζουμε τις γραμμικές (εξ ορισμού) απεικονίσεις  $(dx^i)_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε

$$(dx^i)_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \delta_j^i,$$

για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Ορίζοντας μόνο τις τιμές των απεικονίσεων αυτών στα στοιχεία της βάσης, καθορίζονται αυτόματα όλες οι τιμές. Πράγματι, λόγω της γραμμικότητας αυτών, παίρνουμε

$$(dx^i)_p(v(p)) = (dx^i)_p \left( \sum_{j=1}^n v^j(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n v^j(p) (dx^i)_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n v^j(p) \delta_j^i = v^i(p), \quad (2.4)$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Η σχέση αυτή δηλώνει ότι οι γραμμικές απεικονίσεις  $(dx^i)_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι απεικονίσεις συντεταγμένων για τα διανυσματικά πεδία ακριβώς όπως οι απεικονίσεις  $x^i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  για τα σημεία της πολλαπλότητας  $\mathcal{M}$ . Αριβώς όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 1.1, έτσι και εδώ, το σύνολο  $\{(dx^i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον χώρο. Πιο αναλυτικά, μπορούμε να εκφράσουμε κάθε στοιχείο  $\varphi \in (T_p\mathcal{M})^*$  συναρτήσει της βάσης ως εξής

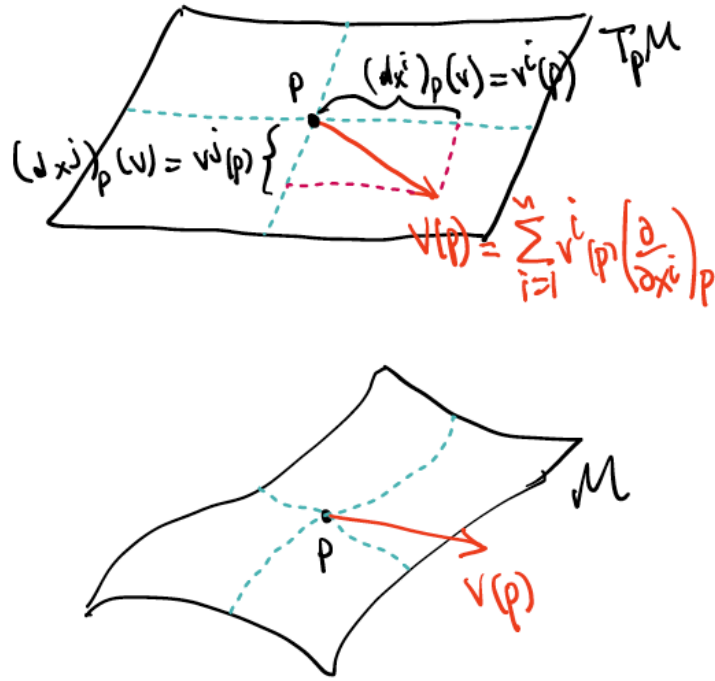
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) (dx^i)_p.$$

Έτσι, έχουμε

$$(T_p\mathcal{M})^* = \text{span} \left( \{(dx^i)_p : i = 1, 2, \dots, n\} \right).$$

Προφανώς, η διάσταση του χώρου  $(T_p\mathcal{M})^*$  είναι  $n$ .

Το Σχήμα 2.6 δείχνει την βάση του εφαπτόμενου χώρου  $T_p\mathcal{M}$ .



Σχήμα 2.6: Ο εφαπτόμενος χώρος  $T_p \mathcal{M}$  μίας πολλαπλότητας  $\mathcal{M}$ . Το σύνολο  $\{(\partial/\partial x^1)_p, \dots, (\partial/\partial x^n)_p\}$  αποτελεί βάση αυτού. Κάθε  $(\partial/\partial x^i)_p$  προκύπτει ως γενίκευση της κλασσικής μερικής παραγώγου με την έννοια της (2.3). Οι συναρτήσεις  $(dx^i)_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συναρτήσεις συντεταγμένων για τα διανύσματα  $v(p)$  του  $T_p \mathcal{M}$  με την έννοια της (2.4) ακριβώς όπως οι συναρτήσεις  $x^i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συναρτήσεις συντεταγμένων για τα σημεία  $p$  του  $\mathcal{M}$ , βλέπε Σχήμα 2.4.

## 2.5 Διαφορικές μορφές

Όλη η θεωρία των  $k$ -μορφών στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$ , όπως αυτή αναπτύχθηκε στα Κεφάλαια 1.2–1.8, επεκτείνεται με φυσικό τρόπο στις  $k$ -μορφές σε πολλαπλότητες  $\mathcal{M}$ . Απλά αντικαθιστούμε τον  $\mathbb{R}^n$  με την πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  (τα σημεία αυτών έχουν συντεταγμένες  $(x^1, \dots, x^n)$ ) και τον εφαπτόμενο χώρο  $\mathbb{R}_p^n$  με τον εφαπτόμενο χώρο  $T_p \mathcal{M}$  (οι βάσεις αυτών είναι  $\{(dx^i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}$ ). Όταν κάποια συνάρτηση με πεδίο ορισμού είτε την πολλαπλότητα είτε κάποιο ανοιχτό υποσύνολό της υποτίθεται λεία (όπως οι συντελεστές των  $k$ -μορφών για παράδειγμα), τότε είναι λεία με την έννοια του Ορισμού 2.3.1. Ωστόσο, για να μεταφέρουμε

τις έννοιες του Κεφαλαίου 1.9 από τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$  σε πολλαπλότητες  $\mathcal{M}$ , χρειαζόμαστε την έννοια της **μετρικής**. Αυτή είναι ένα εσωτερικό γινόμενο για διανύσματα του  $T_p\mathcal{M}$ , δηλαδή

$$g(p) : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1(p), v_2(p)) \mapsto g(p)(v_1(p), v_2(p))$$

το οποίο αντικαθιστά στην σχέση (1.7) το εσωτερικό γινόμενο για διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1(p), v_2(p)) \mapsto \langle v_1(p), v_2(p) \rangle.$$

Ο πίνακας που αναπαριστά την γραμμική απεικόνιση  $g(p) : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  δίνεται από

$$g(p) = (g_{ij}(p)), \quad g_{ij}(p) := g(p) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right).$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} g(p)(v(p), w(p)) &= g(p) \left( \sum_{i=1}^n v^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \sum_{j=1}^n w^j(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n v^i(p) w^j(p) g(p) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) v^i(p) w^j(p), \end{aligned}$$

για κάθε διανύσματα  $v(p), w(p) \in T_p\mathcal{M}$ . Το μήκος ενός διανύσματος  $v(p) \in T_p\mathcal{M}$  ορίζεται ως

$$|v(p)|_g := \sqrt{g(p)(v(p), v(p))} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) v^i(p) v^j(p)}.$$

Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο για διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$ , η μετρική δεν είναι αναγκαστικά διαγώνια. Ο αντίστροφος του πίνακα  $g = (g_{ij})$  συμβολίζεται με  $g^{-1} = (g^{ij})$ . Τέλος, ανατρέξτε στο Λήμμα 1.9.4 και επαληθεύστε

ότι η κλίση μίας λείας συνάρτησης  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  ορισμένη σε μία πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  δίνεται από

$$(\text{grad } f)(p) = \sum_{k,l=1}^3 g^{kl}(p) \frac{\partial f(p)}{\partial x^l} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p.$$

## 2.6 Γεωμετρική ερμηνεία των μορφών

Σε μία πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  διάστασης  $n = 3$ , οι μόνες μη-μηδενικές μορφές είναι οι εξής:

- 0-μορφές: κατά σύμβαση, αυτές είναι απλά συναρτήσεις

$$\omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R},$$

όπου  $\omega = \omega(x^1, x^2, x^3)$ .

- 1-μορφές: όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυτές εκφράζουν **μήκος** και είναι της μορφής

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3,$$

όπου  $\omega_j = \omega_j(x^1, x^2, x^3)$ , για κάθε  $j = 1, 2, 3$ .

- 2-μορφές: όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυτές εκφράζουν **εμβαδό** και είναι της μορφής

$$\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3,$$

όπου  $\omega_{ij} = \omega_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ , για κάθε  $i, j = 1, 2, 3$  με  $i < j$ .

- 3-μορφές: όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυτές εκφράζουν **όγκο** και είναι της μορφής

$$\omega = \omega_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

όπου  $\omega_{123} = \omega_{123}(x^1, x^2, x^3)$ .

**Ορισμός 2.6.1** (Ίωση διανυσματικού πεδίου). Δοθέντος μίας  $k$ -μορφής  $p \mapsto \omega(p) \in \Lambda^k(T_p\mathcal{M})^*$  και ενός διανυσματικού πεδίου  $p \mapsto X_p \in T_p\mathcal{M}$ , ορίζουμε την  $(k-1)$ -μορφή  $p \mapsto (\iota_X\omega)_p \in \Lambda^{k-1}(T_p\mathcal{M})^*$  ως εξής

$$(\iota_X\omega)_p(v_1(p), \dots, (v_{k-1})_p) := \omega(p)(X_p, v_1(p), \dots, (v_{k-1})_p),$$

για κάθε  $v_1(p), \dots, (v_{k-1})_p \in T_p\mathcal{M}$ . Η απεικόνιση  $\iota_X$  ονομάζεται **Ίωση** (contraction) του  $X$ .

### 3-μορφές σε πολλαπλότητες

Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $n = 3$  την οποία υποθέτουμε προσανατολισμένη και  $dV$  η (μοναδική) 3-μορφή στην πολλαπλότητα τέτοια ώστε

$$dV \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \sqrt{\det(g)},$$

όπου  $g = (g_{ij})$  είναι ο πίνακας που αναπαριστά την μετρική. Έχουμε ότι

$$dV = dV \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \sqrt{\det(g)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Η 3-μορφή αυτή ονομάζεται **στοιχείο όγκου** (volume element) στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ . Η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι εάν την εφαρμόσουμε σε τρία διανυσματικά πεδία  $(v_1, v_2, v_3)$  με  $v_1, v_2, v_3 \in T_p\mathcal{M}$ , παίρνουμε τον (προσανατολισμένο) **όγκο του στερεού** που δημιουργείται από αυτά, δηλαδή

$$dV(v_1, v_2, v_3) = \text{vol}_g(v_1, v_2, v_3).$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει ως εξής. Έστω ότι

$$v_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

για κάθε  $i = 1, 2, 3$ . Θέτουμε  $\alpha = (\alpha_{ij})$  και  $G_{ij} := g(v_i, v_j)$  και υπολογίζουμε

$$G_{ij} = g(v_i, v_j) = g \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_{l=1}^3 \alpha_{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,l=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jl} g \left( \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\
&= \sum_{k,l=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jl} g_{kl} = (\alpha \cdot g \cdot \alpha^T)_{ij}.
\end{aligned}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την (1.3) και υποθέτοντας ότι  $\det(\alpha) > 0$  (δηλαδή θετικά προσανατολισμένη βάση), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
dV(v_1, v_2, v_3) &= \sqrt{\det(g)} (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)(v_1, v_2, v_3) \\
&= \sqrt{\det(g)} \det(\alpha) = \sqrt{\det(\alpha \cdot g \cdot \alpha^T)} \\
&= \sqrt{\det(G)} = \text{vol}_g(v_1, v_2, v_3)
\end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

## 2-μορφές σε πολλαπλότητες

Ας υποθέσουμε ότι  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία λεία συνάρτηση. Ορίζουμε το σύνολο

$$\Sigma := f^{-1}(\alpha) := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : f(x^1, x^2, x^3) = \alpha\},$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$  είναι μία τιμή τέτοια ώστε η γραμμική απεικόνιση  $(df)_p : \mathbb{R}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι επί για κάθε  $p \in \Sigma$ . Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με  $\text{rank}(df)_p = 1$ , για κάθε  $p \in \Sigma$ . Με την σειρά του, αυτό είναι ισοδύναμο με την συνθήκη  $(df)_p \neq 0$ , για κάθε  $p \in \Sigma$ . Το σύνολο  $\Sigma$  είναι μία λεία πολλαπλότητα διάστασης  $n = 2$  μέσα στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  διάστασης  $n = 3$ . Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται **θεώρημα κανονικής τιμής** (regular value theorem) και προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2.1. Το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο κάθετο στην  $\Sigma$  δίνεται από

$$N := \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x^1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} e_3}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)^2}},$$

για κάθε  $p \in \Sigma$ . Η 2-μορφή που ορίζεται ως

$$dA := \iota_N dV := dV(N, \cdot, \cdot)$$

ονομάζεται **στοιχείο εμβαδού** (area element) στην πολλαπλότητα  $\Sigma$ . Μετά απο στοιχειώδεις πράξεις, βρίσκουμε

$$dA = \frac{\frac{\partial f}{\partial x^1} dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)^2}}.$$

Η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι εάν την εφαρμόσουμε σε δύο διανυσματικά πεδία  $v_1 \in T_p \Sigma$  και  $v_2 \in T_p \Sigma$ , παίρνουμε το (προσανατολισμένο) **εμβαδό του παραλληλογράμμου** που ορίζεται από αυτά, δηλαδή

$$A(v_1, v_2) = \text{Area}_g(v_1, v_2).$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ορισμό  $dA := dV(N, \cdot, \cdot)$  ως εξής

$$dA(v_1, v_2) = dV(N, v_1, v_2) = \text{vol}_g(N, v_1, v_2) = \text{Area}_g(v_1, v_2),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο  $p \mapsto N(p)$  είναι κάθετο στα  $v_1$  και  $v_2$  (αφού είναι κάθετο σε όλο τον εφαπτόμενο χώρο  $T_p \Sigma$ ) και είναι μοναδιαίο, δηλαδή  $|N(p)| = 1$ . Έτσι, ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από τα  $N, v_1, v_2$  μας δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα  $v_1, v_2$ .

## 1-μορφές σε πολλαπλότητες

Έστω  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  μία λεία καμπύλη πάνω στην πολλαπλότητα  $\Sigma = f^{-1}(\alpha)$  η οποία, με την σειρά της, κείται στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$ . Η **ταχύτητα** της είναι το διανυσματικό πεδίο  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \Sigma$  και είναι εφαπτόμενο στην  $\Sigma$ . Συγκεκριμένα, εάν επιλέξουμε το  $\epsilon > 0$  αρκούντως μικρό, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι ολόκληρη η εικόνα  $\gamma((-\epsilon, \epsilon))$  θα κείται μέσα σε μία και μόνο περιοχή συντεταγμένων  $U$  από την διαφορική δομή της  $\Sigma$  ως πολλαπλότητα. Έτσι, εάν  $(U, \varphi)$  είναι αυτό το σύστημα συντεταγμένων, κάθε σημείο  $\gamma(t) \in \Sigma$  της καμπύλης αποκτά συντεταγμένες

$$\varphi(\gamma(t)) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

για κάθε  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η ταχύτητα της καμπύλης είναι το διανυσματικό πεδίο

$$\dot{\gamma}(t) := \sum_{j=1}^n \frac{dx^j(t)}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}\Sigma.$$

Επειδή η πολλαπλότητα  $\Sigma$  είναι διάστασης  $n = 2$ , και ο εφαπτόμενός της χώρος θα είναι επίσης διάστασης  $n = 2$ . Έτσι, υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο  $t \mapsto w(\gamma(t))$  κατά μήκος της  $\gamma$  με

$$|w(\gamma(t))| = 1, \quad \langle \dot{\gamma}(t), w(\gamma(t)) \rangle = 0,$$

για κάθε  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , τέτοιο, ώστε

$$T_{\gamma(t)}\Sigma = \text{span}(\{\dot{\gamma}(t), w(\gamma(t))\}),$$

για κάθε  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Η 1-μορφή που ορίζεται ως

$$d\lambda := \iota_w dA := dA(w, \cdot) := dV(N, w, \cdot)$$

ονομάζεται **στοιχείο μήκους** (line element) στην πολλαπλότητα  $\Sigma$ . Μετά απο στοιχειώδεις πράξεις, βρίσκουμε

$$d\lambda = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x^1} w^2 - \frac{\partial f}{\partial x^2} w^1 \right) dx^3 + \left( \frac{\partial f}{\partial x^3} w^1 - \frac{\partial f}{\partial x^1} w^3 \right) dx^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x^2} w^3 - \frac{\partial f}{\partial x^3} w^2 \right) dx^1}{\sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)^2}}.$$

Η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι εάν την εφαρμόσουμε στο διανυσματικό πεδίο  $\dot{\gamma}(t)$ , παίρνουμε το (προσανατολισμένο) **μήκος της ταχύτητας**, δηλαδή

$$d\lambda(\dot{\gamma}(t)) = |\dot{\gamma}(t)|.$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ορισμό  $d\lambda := \iota_w dA$  ως εξής

$$d\lambda(\dot{\gamma}(t)) = dA(w(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) = \text{Area}_g(w(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) = |\dot{\gamma}(t)|_g,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο  $t \mapsto w(\gamma(t))$  είναι κάθετο στο  $\dot{\gamma}(t)$  (αφού είναι κάθετο σε όλο τον εφαπτόμενο χώρο  $T_{\gamma(t)}\gamma((-\epsilon, \epsilon))$ ) και είναι μοναδιαίο, δηλαδή  $|w(\gamma(t))| = 1$ . Έτσι, το το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με την μία ακμή του τέτοια ώστε  $|w(\gamma(t))| = 1$  και  $w(\gamma(t)) \perp_g \dot{\gamma}(t)$  εκφράζει το μήκος της άλλης ακμής, δηλαδή το  $|\dot{\gamma}(t)|$ .

## 2.7 Ασκήσεις επανάληψης

**Άσκηση 2.7.1** (Εφαπτομενική δέσμη). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $n$ . Η **εφαπτομενική δέσμη** (tangent bundle) συμβολίζεται με  $T\mathcal{M}$  και ορίζεται ως το σύνολο όλων των σημείων σε μία πολλαπλότητα μαζί με όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο αυτό, δηλαδή

$$T\mathcal{M} := \{(p, v(p)) : p \in \mathcal{M}, v(p) \in T_p\mathcal{M}\}.$$

Να αποδείξετε ότι το σύνολο αυτό είναι πολλαπλότητα διάστασης  $2n$  και μάλιστα προσανατολίσιμη (ακόμα και στην περίπτωση όπου η πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  δεν είναι).

*Απόδειξη.* Έστω  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  η διαφορική δομή στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ . Εξ ορισμού, αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα  $U_i$  είναι ανοιχτά (στην  $\mathcal{M}$ ), καλύπτουν την πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  και οι απεικονίσεις

$$\varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \varphi_i(p) = (x^1, \dots, x^n)$$

είναι ομοιομορφισμοί. Επίσης, εάν έχουμε δύο τέτοιες απεικονίσεις με

$$\varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \varphi_j : U_j \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$$

που ορίζονται ως

$$p \mapsto \varphi_i(p) = (x^1, \dots, x^n), \quad p \mapsto \varphi_j(p) = (y^1, \dots, y^n)$$

και είναι τέτοιες ώστε  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , τότε οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$$

που ορίζονται ως

$$(y^1, \dots, y^n) \mapsto (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y^1, \dots, y^n) = (x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n))$$

είναι διαφορομορφισμοί.

Βήμα 1: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων.

Για κάθε  $i \in I$ , ορίζουμε τα σύνολα

$$V_i := U_i \times \mathbb{R}^n \subseteq T\mathcal{M}$$

καθώς και τις απεικονίσεις

$$\psi_i : V_i \subseteq T\mathcal{M} \rightarrow \psi_i(V_i) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

από τους τύπους

$$\begin{aligned} \psi_i(p, v(p)) &= \psi_i \left( \varphi_i^{-1}(x^1, \dots, x^n), \sum_{j=1}^n v^j(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) \\ &:= (x^1, \dots, x^n, v^1(p), \dots, v^n(p)), \end{aligned}$$

για κάθε  $(p, v(p)) \in V_i$ . Καταρχήν, παρατηρήστε ότι αυτές είναι καλά ορισμένες γιατί  $(p, v(p)) \in V_i := U_i \times \mathbb{R}^n$  συνεπάγεται ότι το  $\varphi_i(p) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$  δίνεται από  $\varphi_i(p) = (x^1, \dots, x^n)$  και το  $v(p) \in T_p\mathcal{M}$  γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός της βάσης  $\{(\partial/\partial x^l)_p : l = 1, 2, \dots, n\}$  του  $T_p\mathcal{M}$  ως προς αυτές τις συντεταγμένες. Επίσης, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι  $\psi_i(V_i) = \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ . Τέλος, παρατηρήστε ότι τα σύνολα  $V_i$  είναι ανοικτά (στην  $T\mathcal{M}$ ) και η συλλογή  $\{V_i : i \in I\}$  καλύπτει ολόκληρο το σύνολο  $T\mathcal{M}$ .

Βήμα 2: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων είναι ομοιομορφισμοί.

Οι απεικονίσεις συντεταγμένων είναι προφανώς συνεχείς. Επίσης, είναι αντιστρέψιμες γιατί οι απεικονίσεις  $\varphi_i$  είναι αντιστρέψιμες και οι συντελεστές  $v^j(p)$  μοναδικά ορισμένοι.

Βήμα 3: Οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής είναι λείες.

Επιλέγουμε  $i, j \in I$  τέτοια ώστε  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Αυτό συνεπάγεται ότι  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Θα αποδείξουμε ότι και οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(V_i \cap V_j) \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \psi_i(V_i \cap V_j) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

είναι επίσης λείες. Για κάθε  $(p, v(p)) \in V_i := U_i \times \mathbb{R}^n$  (και άρα το  $\varphi_i(p) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$  δίνεται από  $\varphi_i(p) = (x^1, \dots, x^n)$  και το  $v(p)$  γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός της βάσης  $\{(\partial/\partial x^l)_p : l = 1, 2, \dots, n\}$ ), έχουμε

$$\psi_i(p, v(p)) = \psi_i \left( \varphi_i^{-1}(x^1, \dots, x^n), \sum_{l=1}^n v^l(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right)_p \right)$$

$$:= (x^1, \dots, x^n, v^1(p), \dots, v^n(p)).$$

Επίσης, για κάθε  $(p, w(p)) \in V_j := U_j \times \mathbb{R}^n$  (και άρα το  $\varphi_j(p) \in \varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$  δίνεται από  $\varphi_j(p) = (y^1, \dots, y^n)$  και το  $w(p)$  γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός της βάσης  $\{(\partial/\partial y^k)_p : k = 1, 2, \dots, n\}$ ), έχουμε

$$\begin{aligned} \psi_j(p, v(p)) &= \psi_j \left( \varphi_j^{-1}(y^1, \dots, y^n), \sum_{k=1}^n w^k(p) \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \right)_p \right) \\ &:= (y^1, \dots, y^n, w^1(p), \dots, w^n(p)). \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε την Παρατήρηση 2.4.2. Έτσι, οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών δίνονται από

$$\begin{aligned} (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(y^1, \dots, y^n, w^1(p), \dots, w^n(p)) &= \\ \psi_i(\psi_j^{-1}(y^1, \dots, y^n, w^1(p), \dots, w^n(p))) &= \\ \psi_i \left( \varphi_j^{-1}(y^1, \dots, y^n), \sum_{k=1}^n w^k(p) \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \right)_p \right) &= \\ \psi_i \left( \varphi_j^{-1}(y^1, \dots, y^n), \sum_{k=1}^n w^k(p) \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial x^l(p)}{\partial y^k} \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right)_p \right) \right) &= \\ \psi_i \left( \varphi_i^{-1}((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y^1, \dots, y^n)), \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n w^k(p) \frac{\partial x^l(p)}{\partial y^k} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right)_p \right) &= \\ \left( (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y^1, \dots, y^n), \sum_{k=1}^n w^k(p) \frac{\partial x^1(p)}{\partial y^k}, \dots, \sum_{k=1}^n w^k(p) \frac{\partial x^n(p)}{\partial y^k} \right) &= \\ ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y^1, \dots, y^n), (d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))_{(y^1, \dots, y^n)}(w)) &, \end{aligned}$$

για κάθε  $(y^1, \dots, y^n, w^1(p), \dots, w^n(p)) \in \psi_j(V_i \cap V_j)$ . Αυτές είναι προφανώς διαφορομορφισμοί γιατί οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$  είναι διαφορομορφισμοί.

#### Βήμα 4: Προσανατολισμός

Όπως είδαμε παραπάνω, οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής δίνονται από

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(V_i \cap V_j) \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \psi_i(V_i \cap V_j) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

και ορίζονται από τους τύπους

$$\begin{aligned}(\psi_i \circ \psi_j^{-1})(u) &= (h^1(u), \dots, h^{2n}(u)) \\ &= (h^1(u), \dots, h^n(u), h^{n+1}(u), \dots, h^{2n}(u)) \\ &= (f^1(y), \dots, f^n(y), g^1(y, w), \dots, g^n(y, w)),\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}y &\mapsto f(y) := (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y) = (x^1(y), \dots, x^n(y)), \\ (y, w) &\mapsto g(y, w) := (d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))_{(y^1, \dots, y^n)}(w)\end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}u &= (u^1, \dots, u^{2n}) = (u^1, \dots, u^n, u^{n+1}, \dots, u^{2n}) \\ &= (y^1, \dots, y^n, w^1(p), \dots, w^n(p)) = (y, w).\end{aligned}$$

Το διαφορικό της απεικόνισης  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$  είναι μία γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας που την αναπαριστά ως προς τις συνήθεις βάσεις είναι

$$d(\psi_i \circ \psi_j^{-1}) = \left( \frac{\partial h^i}{\partial u^j} \right).$$

Πιο αναλυτικά, αυτός γράφεται ως

$$\begin{aligned}d(\psi_i \circ \psi_j^{-1}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} f^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} f^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial w^1} f^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial w^n} f^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^1} f^n & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} f^n & \dots & \frac{\partial}{\partial w^1} f^n & \dots & \frac{\partial}{\partial w^n} f^n \\ \frac{\partial}{\partial y^1} g^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} g^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial w^1} g^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial w^n} g^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^1} g^n & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} g^n & \dots & \frac{\partial}{\partial w^1} g^n & \dots & \frac{\partial}{\partial w^n} g^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} x^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} x^1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^1} x^n & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} x^n & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y^1} g^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} g^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y^1} x^1 & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} x^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^1} g^n & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} g^n & \dots & \frac{\partial}{\partial y^1} x^n & \dots & \frac{\partial}{\partial y^n} x^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \left( \frac{d((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))}{\left(\frac{\partial g^i}{\partial y^j}\right)} \middle| \frac{0}{d((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))} \right).$$

Η ορίζουσα αυτού δίνεται από

$$\det(d(\psi_i \circ \psi_j^{-1})) = [\det(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))]^2$$

και είναι γνήσια θετική για κάθε  $i, j \in I$  ανεξάρτητα από το πρόσημο των  $\det(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))$ . Συνεπώς, η εφαπτομενική δέσμη  $T\mathcal{M}$  είναι πάντα προσανατολίσιμη ακόμα και εάν η  $\mathcal{M}$  δεν είναι.  $\square$

**Άσκηση 2.7.2** (Καρτεσιανό γινόμενο πολλαπλοτήτων). Έστω ότι  $\mathcal{M}$  και  $\mathcal{N}$  είναι δύο πολλαπλότητες διάστασης  $m$  και  $n$  αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το Καρτεσιανό γινόμενο  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  είναι πολλαπλότητα διάστασης  $m + n$  και βρείτε την διαφορική δομή του. Επίσης, να δείξετε ότι η πολλαπλότητα  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  είναι προσανατολίσιμη εάν και οι δύο πολλαπλότητες  $\mathcal{M}$  και  $\mathcal{N}$  είναι προσανατολίσιμες. Τέλος, να δείξετε ότι η πολλαπλότητα  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  είναι πάντα προσανατολίσιμη ακόμα και εάν η  $\mathcal{M}$  δεν είναι.

*Απόδειξη.* Έστω  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  και  $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$  οι διαφορικές δομές των  $\mathcal{M}$  και  $\mathcal{N}$  αντίστοιχα. Εξ ορισμού, αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα  $U_i$  είναι ανοικτά (στην  $\mathcal{M}$ ), καλύπτουν την πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ , τα σύνολα  $V_j$  είναι ανοικτά (στην  $\mathcal{N}$ ), καλύπτουν την πολλαπλότητα  $\mathcal{N}$  και οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} &\rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^m, & p &\mapsto \varphi_i(p) = (x^1, \dots, x^m), \\ \psi_j : V_j \subseteq \mathcal{N} &\rightarrow \psi_j(V_j) \subseteq \mathbb{R}^n, & q &\mapsto \psi_j(q) = (y^1, \dots, y^n) \end{aligned}$$

είναι ομοιομορφισμοί. Επίσης, εάν έχουμε δύο τέτοιες απεικονίσεις από κάθε πολλαπλότητα με

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1} : U_{i_1} \subseteq \mathcal{M} &\rightarrow \varphi_{i_1}(U_{i_1}) \subseteq \mathbb{R}^m, & \varphi_{i_2} : U_{i_2} \subseteq \mathcal{M} &\rightarrow \varphi_{i_2}(U_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^m, \\ \psi_{i_1} : V_{i_1} \subseteq \mathcal{N} &\rightarrow \psi_{i_1}(V_{i_1}) \subseteq \mathbb{R}^n, & \psi_{i_2} : V_{i_2} \subseteq \mathcal{N} &\rightarrow \psi_{i_2}(V_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

που ορίζονται ως

$$\begin{aligned} p &\mapsto \varphi_{i_1}(p) = (x^1, \dots, x^m), & p &\mapsto \varphi_{i_2}(p) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m), \\ q &\mapsto \psi_{i_1}(q) = (y^1, \dots, y^n), & q &\mapsto \psi_{i_2}(q) = (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n) \end{aligned}$$

και είναι τέτοιες ώστε  $U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$  και  $V_{i_1} \cap V_{i_2} \neq \emptyset$ , τότε οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1} : \varphi_{i_2}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) &\subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_{i_1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^m, \\ \psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1} : \psi_{i_2}(V_{i_1} \cap V_{i_2}) &\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \psi_{i_1}(V_{i_1} \cap V_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

που ορίζονται ως

$$\begin{aligned}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m) &\mapsto (\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1})(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m) = (x^1(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m), \dots, x^n(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)), \\ (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n) &\mapsto (\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1})(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n) = (y^1(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n), \dots, y^n(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n))\end{aligned}$$

είναι διαφορομορφισμοί.

Βήμα 1: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων.

Για κάθε  $(i, j) \in I \times J$ , ορίζουμε τα σύνολα

$$W_{ij} := U_i \times V_j \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$$

καθώς και τις απεικονίσεις

$$\zeta_{ij} : W_{ij} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \zeta_{ij}(W_{ij}) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$$

από τους τύπους

$$\zeta_{ij}(p, q) = (\varphi_i(p), \psi_j(q)) = (x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n),$$

για κάθε  $(p, q) \in W_{ij}$ . Καταρχήν, παρατηρήστε ότι αυτές είναι καλά ορισμένες. Επίσης, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι  $\zeta_{ij}(W_{ij}) = \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ . Τέλος, παρατηρήστε ότι τα σύνολα  $W_{ij}$  είναι ανοικτά (στην  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ ) και η συλλογή  $\{W_{ij} : (i, j) \in I \times J\}$  καλύπτει ολόκληρο το σύνολο  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ .

Βήμα 2: Οι απεικονίσεις συντεταγμένων είναι ομοιομορφισμοί.

Οι απεικονίσεις συντεταγμένων  $\zeta_{ij}$  είναι προφανώς συνεχείς γιατί οι απεικονίσεις  $\varphi_i$  και  $\psi_j$  είναι συνεχείς. Επίσης, είναι και αντιστρέψιμες γιατί οι απεικονίσεις  $\varphi_i$  και  $\psi_j$  είναι αντιστρέψιμες. Οι αντίστροφες είναι

$$\zeta_{ij}^{-1} : \zeta_{ij}(W_{ij}) \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow W_{ij} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$$

και ορίζονται από τους τύπους

$$\begin{aligned}\zeta_{ij}^{-1}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) &= \zeta_{ij}^{-1}(\varphi_i(p), \psi_j(q)) = (p, q) \\ &= (\varphi_i^{-1}(x^1, \dots, x^m), \psi_j^{-1}(y^1, \dots, y^n)),\end{aligned}$$

για κάθε  $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) \in \zeta_{ij}(W_{ij}) = \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ .

Βήμα 3: Οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής είναι λείες.

Επιλέγουμε  $(i_1, j_1) \in I \times J$  και  $(i_2, j_2) \in I \times J$  τέτοια ώστε  $W_{i_1 j_1} \cap W_{i_2 j_2} \neq \emptyset$ . Αυτό συνεπάγεται ότι  $U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$  και  $V_{j_1} \cap V_{j_2} \neq \emptyset$ . Θα αποδείξουμε ότι και οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών

$$\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1} : \zeta_{i_2 j_2}(W_{i_1 j_1} \cap W_{i_2 j_2}) \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \zeta_{i_1 j_1}(W_{i_1 j_1} \cap W_{i_2 j_2}) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$$

είναι επίσης λείες. Με βάση τον υπολογισμό στο Βήμα 2, αυτές δίνονται από

$$\begin{aligned}(\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1})(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n) &= \\ \zeta_{i_1 j_1}(\zeta_{i_2 j_2}^{-1}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)) &= \\ \zeta_{i_1 j_1}(\varphi_{i_2}^{-1}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m), \psi_{i_2}^{-1}(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)) &= \\ (\varphi_{i_1}(\varphi_{i_2}^{-1}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)), \psi_{i_1}(\psi_{i_2}^{-1}(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n))) &= \\ ((\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1})(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m), (\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1})(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)),\end{aligned}$$

για κάθε  $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n) \in \zeta_{i_2 j_2}(W_{i_1 j_1} \cap W_{i_2 j_2})$ . Αυτές είναι προφανώς διαφορομορφισμοί γιατί οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών  $\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1} : \varphi_{i_2}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_{i_1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^m$  και  $\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1} : \psi_{i_2}(V_{i_1} \cap V_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \psi_{i_1}(V_{i_1} \cap V_{i_2}) \subseteq \mathbb{R}^n$  είναι διαφορομορφισμοί.

Βήμα 4: Προσανατολισμός

Όπως είδαμε παραπάνω, οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής δίνονται από

$$(\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1})(\bar{u}) = ((\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1})(\bar{x}), (\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1})(\bar{y})),$$

όπου  $\bar{x} := (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)$ ,  $\bar{y} := (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)$  και  $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y})$ . Το διαφορικό της απεικόνισης  $\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1}$  είναι μία γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας που την αναπαριστά ως προς τις συνήθεις βάσεις είναι

$$(d(\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1}))_{\bar{u}} = \left( \frac{\partial(\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1})(\bar{u})}{\partial \bar{u}^j} \right).$$

Πιο αναλυτικά, αυτός γράφεται ως

$$(d(\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1}))_{\overline{u}} = \left( \frac{(d(\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1}))_{\overline{x}}}{0} \middle| \frac{0}{(d(\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1}))_{\overline{y}}} \right)$$

και η ορίζουσα αυτού δίνεται από

$$\det((d(\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1}))_{\overline{u}}) = [\det((d(\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1}))_{\overline{x}})][\det((d(\psi_{i_1} \circ \psi_{i_2}^{-1}))_{\overline{y}})].$$

Από αυτό προκύπτει ότι η πολλαπλότητα γινόμενο  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  είναι προσανατολίσιμη εάν και οι δύο πολλαπλότητες  $\mathcal{M}$  και  $\mathcal{N}$  είναι προσανατολίσιμες. Τέλος, για  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ , έχουμε

$$\det((d(\zeta_{i_1 j_1} \circ \zeta_{i_2 j_2}^{-1}))_{(\overline{x}, \overline{x})}) = [\det((d(\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2}^{-1}))_{\overline{x}})]^2$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η πολλαπλότητα  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  είναι πάντα προσανατολίσιμη ακόμα και εάν η  $\mathcal{M}$  δεν είναι. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$



## Κεφάλαιο 3

# Το Θεώρημα του Stokes σε πολλαπλότητες

### 3.1 Πολλαπλότητες με σύνορο

**Ορισμός 3.1.1** (Διαφορίσιμη πολλαπλότητα με σύνορο). Ένα σύνολο  $\mathcal{M}$  ονομάζεται **διαφορίσιμη πολλαπλότητα** διάστασης  $n \geq 1$  με **σύνορο** εάν και μόνο εάν ικανοποιεί τον Ορισμό που προκύπτει αντικαθιστώντας τον  $\mathbb{R}^n$  του Ορισμού 2.2.1 με το σύνολο  $\mathbb{R}_-^n := \{(x^1, \dots, x^n) : x^1 \leq 0\}$ .

**Ορισμός 3.1.2** (Ονοματολογία). Ένα σημείο ανήκει πάνω στο σύνορο της πολλαπλότητας, δηλαδή  $p \in \partial\mathcal{M}$ , εάν και μόνο εάν η απεικόνιση συντεταγμένων  $\varphi_i$  που αποδίδει συντεταγμένες στον  $\mathbb{R}^{n-1}$  και συγκεκριμένα με την πρώτη μεταβλητή μηδενική, δηλαδή  $\varphi_i(p) = (0, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}_-^n$ .

**Παρατήρηση 3.1.3** (Ο Ορισμός 3.1.2 είναι καλώς ορισμένος). Θα αποδείξουμε ότι η έννοια του σημείου πάνω στο σύνορο που ορίσαμε στον Ορισμό 3.1.2 είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των συστημάτων συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι εάν ένα σημείο βρίσκεται στο σύνορο ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε θα βρίσκεται στο σύνορο ως προς κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έτσι, υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σημείο  $p \in \mathcal{M}$  στο οποίο όμως αποδίδονται δύο διαφορετικές συντεταγμένες από διαφορετικές περιοχές συντεταγμένων  $(U_1, \varphi_1)$  και  $(U_2, \varphi_2)$  με  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  και συγκεκριμένα η μία δηλώνει ότι αυτό ανήκει στο σύνορο, ενώ η άλλη στο εσωτερικό. Αυτό σημαίνει ότι

$$\varphi_1(p) = (0, x^2, \dots, x^n), \quad \varphi_2(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x^1 < 0.$$

Αφενός, η απεικόνιση  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^n$  είναι διαφορομορφισμός. Αφετέρου, επειδή  $x^1 < 0$ , το  $U_2$  είναι ανοικτό και η  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \varphi_2(U_2)$  είναι συνεχής, υπάρχει μία μικρή περιοχή  $V_2 \subseteq U_2$  τέτοια, ώστε  $p \in V_2 \subseteq U_2$  και η  $V_2$  να μην τέμνει τον άξονα  $x^1$ . Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε  $\varphi_2(V_2) = \{\varphi_2(q) : q \in V_2\} = \{(y^1, y^2, \dots, y^n) : y^1 < -\delta < 0\}$ . Τώρα, θέτουμε  $W := U_1 \cap V_2$  το οποίο είναι επίσης ανοικτό και  $p \in W$ . Περιορίζοντας την απεικόνιση  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  στο  $\varphi_2(W)$ , παίρνουμε μία απεικόνιση  $\psi := (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})|_{\varphi_2(W)} : \varphi_2(W) \rightarrow \varphi_1(W)$  με  $\det(d\psi) \neq 0$ . Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, έχουμε ότι η  $\psi$  είναι τοπικά αντιστρέψιμη και η αντίστροφη είναι επίσης τοπικός διαφορομορφισμός. Όμως  $\varphi_2(p) \in \mathcal{M}$  ενώ  $\varphi_1(p) \in \partial\mathcal{M}$  κάτι που είναι αδύνατον γιατί ο διαφορομορφισμός  $\psi$  δεν μπορεί να μεταφέρει σημεία από το εσωτερικό στο σύνορο και αντίστροφα.

**Λήμμα 3.1.4** (Το σύνορο  $\partial\mathcal{M}$  ως πολλαπλότητα). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα με σύνορο διάστασης  $n \geq 1$ . Τότε, το σύνορο  $\partial\mathcal{M}$  (όπως αυτό ορίστηκε στον Ορισμό 3.1.2) είναι μία πολλαπλότητα χωρίς σύνορο διάστασης  $n - 1$ . Επίσης, εάν η  $\mathcal{M}$  είναι προσανατολίσιμη, τότε και το  $\partial\mathcal{M}$  είναι προσανατολίσιμο.

*Απόδειξη.* Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα με σύνορο διάστασης  $n \geq 1$ . Εξ ορισμού, βλέπε Ορισμό 3.1.1, έχουμε μία συλλογή  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  η οποία καλύπτει την  $\mathcal{M}$  καθώς και απεικονίσεις  $\varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Έστω  $p \in \partial\mathcal{M}$ . Τότε, ο Ορισμός 3.1.2 μας δίνει  $\varphi_i(p) = (0, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ορίζουμε τα σύνολα

$$V_i := U_i \cap \partial\mathcal{M} = U_i \cap \varphi_i^{-1}(\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 = 0\}).$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αυτά είναι ανοικτά (στο  $\partial\mathcal{M}$ ) σύνολα (ως προς την σχετική τοπολογία, δηλαδή αυτήν των υποσυνόλων) και καλύπτουν πλήρως το σύνολο  $\partial\mathcal{M}$ . Επίσης, περιορίζοντας τις απεικονίσεις  $\varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$  στα σύνολα αυτά παίρνουμε τις

$$\psi_i := \varphi_i|_{V_i} : V_i \subseteq \partial\mathcal{M} \rightarrow \varphi_i(V_i) = \{x^1 = 0\} \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}$$

οι οποίες είναι ομοιομορφισμοί με τις αλλαγές συντεταγμένων να είναι διαφορομορφισμοί. Έτσι, η συλλογή  $\{(V_i, \psi_i) : i \in I\}$  είναι η διαφορική δομή που καθιστά το σύνορο  $\partial\mathcal{M}$  πολλαπλότητα διάστασης  $n - 1$ . Έστω τώρα ότι η πολλαπλότητα

$\mathcal{M}$  είναι προσανατολίσιμη, δηλαδή έχουμε  $\det(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})) > 0$ , για κάθε  $i, j \in I$  με  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Έστω ότι

$$\begin{aligned}\varphi_i : U_i \subseteq \mathcal{M} &\rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n, & q &\mapsto \varphi_i(q) = (x^1, \dots, x^n), \\ \varphi_j : U_j \subseteq \mathcal{M} &\rightarrow \varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n, & q &\mapsto \varphi_j(q) = (y^1, \dots, y^n)\end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}\psi_i : V_i \subseteq \partial\mathcal{M} &\rightarrow \psi_i(V_i) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, & q &\mapsto \psi_i(q) = (0, x^2, \dots, x^n), \\ \psi_j : V_j \subseteq \partial\mathcal{M} &\rightarrow \psi_j(V_j) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, & q &\mapsto \psi_j(q) = (0, y^2, \dots, y^n).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y^1, \dots, y^n) &= (x^1, \dots, x^n), \\ (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(0, y^2, \dots, y^n) &= (0, x^2, \dots, x^n).\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πίνακας

$$d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

εμπεριέχει τον πίνακα

$$d(\psi_i \circ \psi_j^{-1}) = \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_{2 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}.$$

Για κάθε  $p \in V_j \subseteq \partial\mathcal{M}$ , έχουμε  $y^1 = 0$  και επομένως

$$d((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\psi_j(p)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ 0 & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}.$$

Τώρα, αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη και παίρνουμε

$$\det((d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))_{\psi_j(p)}) = \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \det((d(\psi_i \circ \psi_j^{-1}))_{\psi_j(p)}).$$

για κάθε  $p \in \partial \mathcal{M}$ . Επειδή υποθέτουμε ότι η πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  είναι προσανατολίσιμη, έχουμε  $\det((d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}))_{\psi_j(p)}) > 0$ . Επίσης,  $\partial x^1 / \partial y^1 > 0$  γιατί η συνάρτηση  $y^1 \mapsto x^1 = x^1(y^1)$  αυξάνει από το  $y^1 < 0$  που έχει στο εσωτερικό  $\mathcal{M}$  προς το  $y^1 = 0$  που έχει στο σύνορο  $\partial \mathcal{M}$ . Επομένως, παίρνουμε ότι  $\det((d(\psi_i \circ \psi_j^{-1}))_{\psi_j(p)}) > 0$  το οποίο και αποδεικνύει ότι το σύνορο  $\partial \mathcal{M}$  είναι προσανατολίσιμη πολλαπλότητα και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## 3.2 Ολοκλήρωση σε πολλαπλότητες

**Ορισμός 3.2.1** (Ολοκλήρωση  $n$ -μορφών). Έστω μία πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  χωρίς σύνορο διάστασης  $n \geq 1$  και  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  η διαφορική δομή της. Έστω  $\{\chi_l : l = 1, 2, \dots, N\}$  ένας διαμερισμός της μονάδας, δηλαδή μία συλλογή λείων συναρτήσεων τέτοια ώστε

$$\chi_l : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{l=1}^N \chi_l = 1,$$

για κάθε  $l = 1, 2, \dots, N$ . Επίσης, προσαρμόζουμε την διαμέριση στην διαφορική δομή, δηλαδή υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι

$$\forall l = 1, 2, \dots, N, \quad \exists i = i(l) \in I : \text{supp}(\chi_l) \subset U_i.$$

Έστω  $\omega$  μία  $n$ -μορφή στην  $\mathcal{M}$ . Επειδή  $\text{supp}(\chi_l \omega) \subset U_i$ , η  $\chi_l \omega$  είναι μία  $n$ -μορφή στο  $U_i$ . Συνεπώς, αυτή μπορεί να γραφτεί ως προς την βάση ως

$$\chi_l \omega = \chi_l \omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Η αντίστροφη απεικόνιση συντεταγμένων

$$\varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U_i \subseteq \mathcal{M}, \quad x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto p = \varphi_i^{-1}(x^1, \dots, x^n)$$

ορίζει την pull-back απεικόνιση η οποία μετατρέπει την  $n$ -μορφή  $\chi_l \omega$  στο υποσύνολο  $U_i$  του  $\mathcal{M}$  στην  $n$ -μορφή  $(\varphi_i^{-1})^*(\chi_l \omega)$  στο υποσύνολο  $\varphi_i(U_i)$  του  $\mathbb{R}^n$ . Με βάση το Λήμμα 1.5.2, αυτή μπορεί να γραφτεί ως προς την βάση ως

$$(\varphi_i^{-1})^*(\chi_l \omega) = (\chi_l \omega_{i_1 \dots i_n}) \circ \varphi_i^{-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα της μορφής  $\omega$**  στην πολλαπλότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \omega &= \sum_{l=1}^N \int_{\mathcal{M}} \chi_l \omega = \sum_{l=1}^N \int_{U_i} \chi_l \omega = \sum_{l=1}^N \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(\chi_l \omega) \\ &= \sum_{l=1}^N \int_{\varphi_i(U_i)} (\chi_l \omega_{i_1 \dots i_n}) \circ \varphi_i^{-1} dx^1 \dots dx^n. \end{aligned}$$

### 3.3 Το Θεώρημα του Stokes

**Θεώρημα 3.3.1** (Το Θεώρημα του Stokes). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα με σύνορο η οποία είναι συμπαγής και προσανατολισμένη. Για κάθε  $(n-1)$ -μορφή  $\omega$  στην  $\mathcal{M}$ , έχουμε

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \omega.$$

όπου στο δεξί μέλος περιορίζουμε την  $\omega$  στο σύνορο  $\partial \mathcal{M}$  χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο για τον περιορισμό αυτό<sup>1</sup>.

*Απόδειξη.* Ορίζουμε το κλειστό σύνολο

$$K := \text{supp}(\omega) := \overline{\{p \in \mathcal{M} : \omega(p) \neq 0\}}.$$

Επειδή στο σύνολο αυτό εμπεριέχονται όλα τα  $p \in \mathcal{M}$  για τα οποία  $\omega(p) \neq 0$ , έχουμε  $\omega(p) = 0$ , για κάθε  $p \notin K$ . Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

---

<sup>1</sup>Στο δεξί μέλος, περιορίζουμε την  $(n-1)$ -μορφή  $\omega$  στο σύνορο  $\partial \mathcal{M}$ . Ο περιορισμός αυτός γίνεται μέσω της απεικόνισης έγκλισης (inclusion map). Αυτή είναι η απεικόνιση  $\iota : \partial \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  και ορίζει την pull-back απεικόνιση η οποία μετατρέπει κάθε  $(n-1)$ -μορφή  $\omega$  στην  $\mathcal{M}$  στην  $(n-1)$ -μορφή  $\iota^*(\omega)$  στο  $\partial \mathcal{M}$ . Με βάση το Λήμμα 1.5.2, η  $\iota^*(\omega)$  είναι η ίδια μορφή  $\omega$  αλλά περιορισμένη στο σύνορο  $\partial \mathcal{M}$ . Έτσι, στο δεξί μέλος, μέσα στο ολοκλήρωμα του συνόρου  $\partial \mathcal{M}$  πρέπει κανονικά να έχουμε  $\iota^*(\omega)$  αντί της  $\omega$ .

Περίπτωση 1: Το  $K$  εμπεριέχεται σε μία και μόνο περιοχή συντεταγμένων

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία απεικόνιση συντεταγμένων  $\varphi : U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  τέτοια ώστε  $K \subseteq U$ . Η απεικόνιση αυτή επάγει συντεταγμένες  $\varphi(q) = (x^1, \dots, x^n)$  για όλα τα σημεία  $q \in U$  και κατά συνέπεια ορίζει τις βάσεις  $\{\partial_{x^i} : i = 1, 2, \dots, n\}$  και  $\{dx^i : i = 1, 2, \dots, n\}$  των  $T\mathcal{M}$  και  $T^*\mathcal{M}$  αντίστοιχα. Ως προς αυτές τις (τοπικές) συντεταγμένες κάθε  $(n-1)$ -μορφή γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός  $(n-1)$ -μορφών όπου σε κάθε μία από αυτές απουσιάζει μία (και μόνο) εκ των μεταβλητών  $dx^1, \dots, dx^n$ . Έτσι, μπορούμε να την εκφράσουμε ως

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \dots \wedge dx^n.$$

όπου το σύμβολο  $\widehat{dx}^j$  δηλώνει ότι η συγκεκριμένη μεταβλητή απουσιάζει από την συνολική έκφραση. Εξ ορισμού, οι συναρτήσεις  $\omega_j = \omega_j(p)$  είναι όλες λείες με την έννοια του Ορισμού [2.3.1](#). Υπολογίζουμε το διαφορικό αυτής ως εξής

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^n d(\omega_j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_{j=1}^n d\omega_j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} (-1)^{j-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} \right) dV, \end{aligned}$$

η οποία είναι προφανώς μία  $n$ -μορφή και πολλαπλάσιο του στοιχείου όγκου  $dV := dx^1 \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge dx^n$ . Τώρα, διακρίνουμε δύο ακόμα περιπτώσεις:

Περίπτωση 1Α: Το  $U$  δεν τέμνει το σύνορο  $\partial\mathcal{M}$

Υποθέτουμε ότι  $U \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$ . Τότε,  $\omega = 0$  σε κάθε σημείο του  $\partial\mathcal{M}$  και συνεπώς

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = 0.$$

Έτσι, ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = 0.$$

Θέτουμε  $\tilde{\omega} := \omega_j \circ \varphi^{-1}$ . Οι συναρτήσεις  $\omega_j$  υπολογίζονται στο  $p$  ενώ οι συναρτήσεις  $\tilde{\omega}_j$  υπολογίζονται στο  $(x^1, \dots, x^n)$ . Οι συναρτήσεις  $\tilde{\omega}_j = \tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^n)$  ορίζονται μόνο για  $(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U)$ . Επειδή  $K \subseteq U$ , έχουμε  $\varphi(K) \subseteq \varphi(U)$ . Για  $(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(K)$ , οι τιμές  $\tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^n)$  είναι μη-μηδενικές λόγω του ορισμού του  $K$ . Επεκτείνουμε (διατηρώντας το ίδιο σύμβολο για τις επεκτάσεις αυτών) τις συναρτήσεις  $\tilde{\omega}_j : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε αυτές να ορίζονται σε όλο τον  $\mathbb{R}_-^n$  θέτοντας

$$\tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^n) := \begin{cases} \tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^n), & (x^1, \dots, x^n) \in \varphi(K) \\ h_j(x^1, \dots, x^n), & (x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U) \setminus \varphi(K) \\ 0, & (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}_-^n \setminus \varphi(U) \end{cases} \quad (3.1)$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ . Εδώ, επιλέγουμε τις συναρτήσεις  $h_j : \varphi(U) \setminus \varphi(K) \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε αυτές να είναι λείες στο πεδίο ορισμού τους αλλά και να συνδέουν τις τιμές  $\tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^n)$  και 0 με τέτοιο τρόπο ώστε οι επεκτάσεις  $\tilde{\omega}_j : \mathbb{R}_-^n \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι λείες συναρτήσεις σε όλο το  $\mathbb{R}_-^n$ . Ορίζουμε το παραλληλεπίπεδο

$$Q := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}_-^n : x^j \in Q^j, \forall j = 1, 2, \dots, n\}$$

όπου τα επιμέρους διαστήματα δίνονται από

$$Q^j := [\alpha_j, \beta_j],$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ . Παρατηρήστε ότι  $(x^1, \dots, x^n) \in Q$  ενώ  $x^j \in Q^j$ . Επιλέγουμε τις πλευρές  $\{\alpha_j : j = 1, 2, \dots, n\}$  και  $\{\beta_j : j = 1, 2, \dots, n\}$  αρκού- ντως μεγάλες έτσι ώστε  $\varphi(K) \subset Q$  αλλά και ώστε τα άκρα του  $Q$  να βρίσκονται

εκτός του  $\varphi(U)$ , βλέπε Σχήμα 3.1. Με την βοήθεια του παραλληλεπιπέδου αυτού, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} d\omega &= \int_K d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_K \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} dV \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\varphi(K)} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{Q^1 \times \cdots \times Q^n} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{Q^1 \times \cdots \times \widehat{Q}^j \times \cdots \times Q^n} \left( \int_{Q^j} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \widehat{dx}^j \cdots dx^n.
\end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &\notin \varphi(U), \\
(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &\notin \varphi(U),
\end{aligned}$$

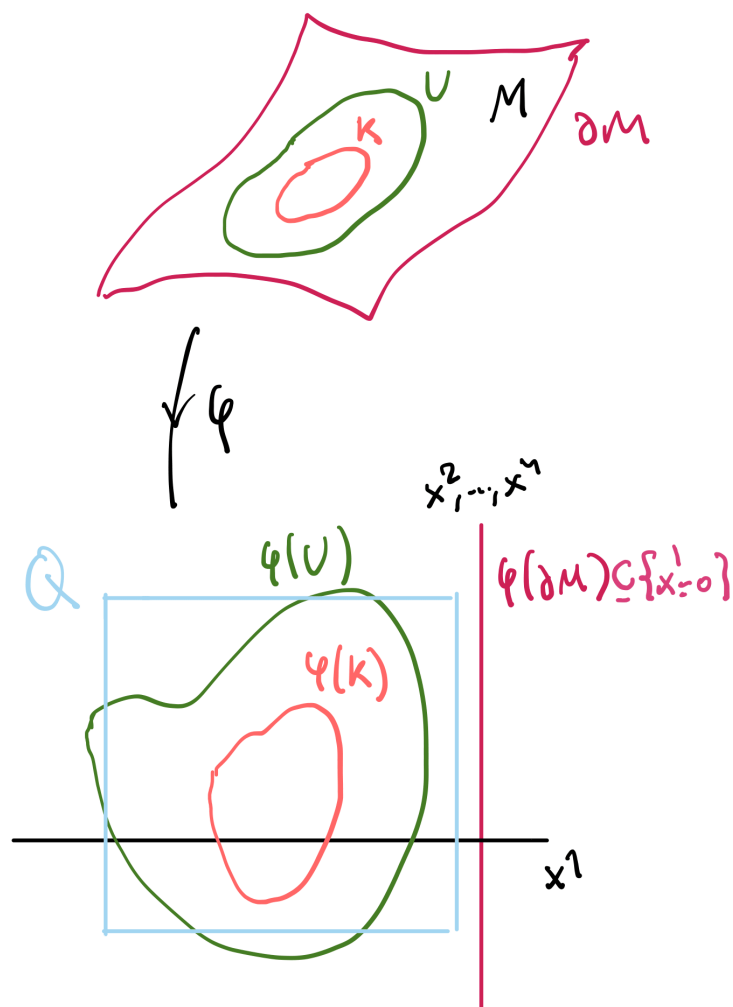
η (3.1) μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &= 0, \\
\tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &= 0,
\end{aligned}$$

και τα δύο για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ , και συνεπώς παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{Q^j} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^j &= \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^j \\
&= \tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta_j, x^{j+1}, \dots, x^n) \\
&\quad - \tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha_j, x^{j+1}, \dots, x^n) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ , το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. Η κατασκευή που αντιστοιχεί στην Περίπτωση 1Α δίνεται στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Περίπτωση 1A: Τα σύνολα  $\varphi(U)$  και  $\varphi(K)$  της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.1. Το  $Q$  είναι ένα παραλληλεπίπεδο που εμπεριέχει το  $\varphi(K)$  και δεν τέμνει το σύνολο  $\varphi(\partial M)$  το οποίο έχει τις συντεταγμένες που συνόρου  $\partial M$ . Παρατηρήστε ότι τα άκρα του  $Q$  βρίσκονται εκτός του  $\varphi(U)$ .

Περίπτωση 1B: Το  $U$  τέμνει το σύνορο  $\partial M$

Υποθέτουμε ότι  $U \cap \partial M \neq \emptyset$ . Τότε, το σύνολο  $U \cap \partial M$  είναι μία περιοχή συντεταγμένων για τα σημεία του συνόρου. Ο περιορισμός της  $\omega$  στην περιοχή

αυτή γίνεται με το να θέτουμε  $x^1 = 0$  σε αυτήν. Πιο αναλυτικά, ο περιορισμός της  $\omega$  στην συρνοριακή αυτή περιοχή συντεταγμένων είναι

$$\omega|_{\partial\mathcal{M}} = \tilde{\omega}_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Επεκτείνουμε (διατηρώντας το ίδιο σύμβολο για τις επεκτάσεις αυτών) τις συναρτήσεις  $\tilde{\omega}_j : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε αυτές να ορίζονται και να είναι λείες σε όλο τον  $\mathbb{R}^n_-$  όπως στην (3.1). Ωστόσο τροποποιούμε τον ορισμό του παραλληλεπιπέδου  $Q$  θέτοντας

$$Q := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n_- : x^1 \in [\alpha_1, 0], x^j \in Q^j, \forall j = 2, 3, \dots, n\}$$

όπου τα επιμέρους διαστήματα δίνονται από

$$Q^j := [\alpha_j, \beta_j],$$

για κάθε  $j = 2, 3, \dots, n$ . Επιλέγουμε τις πλευρές  $\{\alpha_j : j = 1, 2, \dots, n\}$  και  $\{\beta_j : j = 2, 3, \dots, n\}$  αρκούντως μεγάλες έτσι ώστε  $\varphi(K) \subset Q$  αλλά και ώστε τα άκρα του  $Q$  να βρίσκονται εκτός του  $\varphi(U)$ , βλέπε Σχήμα 3.2. Με την βοήθεια του παραλληλεπιπέδου αυτού, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d\omega &= \int_K d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_K \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} dV \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\varphi(K)} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_Q \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x^1} dx^1 \dots dx^n + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^n. \end{aligned}$$

Αφενός, επειδή

$$(\beta_1, x^2, \dots, x^n) \notin \varphi(U),$$

η (3.1) μας δίνει ότι

$$\tilde{\omega}_1(\beta_1, x^2, \dots, x^n) = 0$$

και συνεπώς παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_Q \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x^1} dx^1 \cdots dx^n &= \int_{Q_1 \times \cdots \times Q_n} \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x^1} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_{Q^2 \times \cdots \times Q^n} \left( \int_{Q^1} \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^2 \cdots dx^n \\
&= \int_{Q^2 \times \cdots \times Q^n} (\tilde{\omega}_1(0, x^2, \dots, x^n) - \tilde{\omega}_1(\beta_1, x^2, \dots, x^n)) dx^2 \cdots dx^n \\
&= \int_{Q^2 \times \cdots \times Q^n} \tilde{\omega}_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n \\
&= \int_{\partial \mathcal{M}} \omega|_{\partial \mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Αφετέρου, επειδή

$$\begin{aligned}
(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &\notin \varphi(U), \\
(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &\notin \varphi(U),
\end{aligned}$$

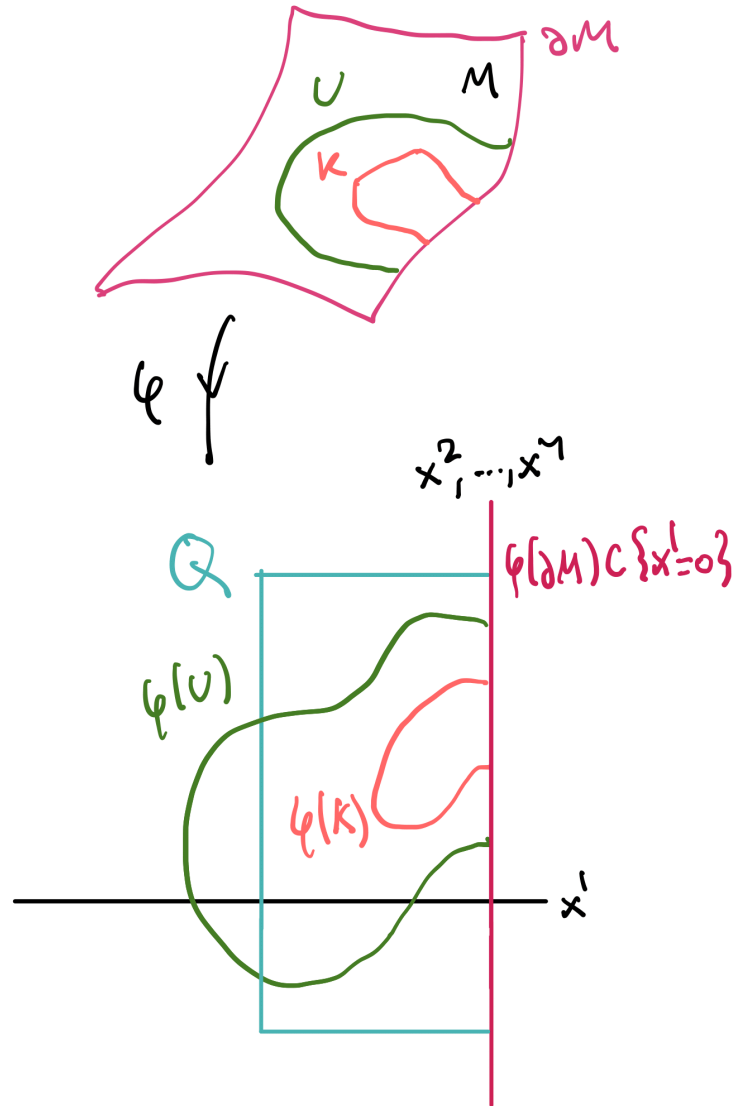
η (3.1) μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &= 0, \\
\tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta_j, x^{j+1}, \dots, x^n) &= 0
\end{aligned}$$

και τα δύο για κάθε  $j = 2, 3, \dots, n$ , και συνεπώς παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_Q \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^n &= \int_{Q_1 \times \cdots \times Q_n} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_{Q^1 \times \cdots \times \hat{Q}^j \times \cdots \times Q^n} \left( \int_{Q^j} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \widehat{dx}^j \cdots dx^n \\
&= \int_{Q^1 \times \cdots \times \hat{Q}^j \times \cdots \times Q^n} \left[ \tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta_j, x^j, \dots, x^n) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{\omega}_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha_j, x^j, \dots, x^n) \right] dx^1 \cdots \widehat{dx}^j \cdots dx^n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

για κάθε  $j = 2, 3, \dots, n$ , το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. Η κατασκευή που αντιστοιχεί στην Περίπτωση 1Α δίνεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Περίπτωση 1B: Τα σύνολα  $\varphi(U)$  και  $\varphi(K)$  της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.1. Το  $Q$  είναι ένα παραλληλεπίπεδο που εμπεριέχει το  $\varphi(K)$  και τέμνει το σύνολο  $\varphi(\partial M)$  το οποίο έχει τις συντεταγμένες που συνόρου  $\partial M$ . Παρατηρήστε ότι τα άκρα του  $Q$  βρίσκονται εκτός του  $\varphi(U)$ .

Περίπτωση 2: Χωρίς καμία υπόθεση για το  $K$

Έστω ότι έχουμε μία διαμέριση  $\{\chi_i : i = 1, 2, \dots, N\}$  προαρμοσμένη στην διαφορική δομή  $\{(U_i, \varphi_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$  όπως στον Ορισμό 3.2.1. Έτσι, όλες οι  $(n-1)$ -μορφές  $\chi_i \omega$  ικανοποιούν την υπόθεση της Περίπτωσης 1 καθώς το αντίστοιχο σύνολο  $K_i := \text{supp}(\chi_i \omega)$  εμπεριέχεται σε μία και μόνο περιοχή συντεταγμένων. Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stokes της Περίπτωσης 1 στις  $(n-1)$ -μορφές  $\chi_i \omega$ , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{M}} d(\chi_i \omega) = \sum_{i=1}^N \int_{\partial \mathcal{M}} \chi_i \omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \sum_{i=1}^N \chi_i \omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \omega,$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

### 3.4 Ασκήσεις επανάληψης

**Άσκηση 3.4.1** (Στοιχείο μήκους σε επιφανειακή καμπύλη). Έστω  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  μία συμπαγής δισδιάστατη επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο  $p \mapsto N(p)$ ,  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  ένα κλειστό διάστημα και  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Sigma$  μία επιφανειακή καμπύλη. Έστω ακόμα  $p \in \gamma([\alpha, \beta]) \mapsto T(p) := T^1(p)(e_1)_p + T^2(p)(e_2)_p + T^3(p)(e_3)_p$  το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο κάθετο στην επιφάνεια  $\Sigma$ . Εδώ,  $\{(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p\}$  είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}_p^3$  η οποία επάγει την συνήθης βάση  $\{(dx^1)_p, (dx^2)_p, (dx^3)_p\}$  του  $(\mathbb{R}_p^3)^*$ .

(1) Να δείξετε ότι το στοιχείο μήκους στην επιφανειακή καμπύλη  $\gamma$  γράφεται ως

$$d\lambda = T^1 dx^1 + T^2 dx^2 + T^3 dx^3.$$

(2) Για κάθε  $p \in \gamma([\alpha, \beta])$ , επιλέγουμε μία άλλη ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}_p^3$  την οποία συμβολίζουμε με  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  τέτοια ώστε  $(E_1)_p := T(p)$ . Έστω  $\omega$  μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  και  $v$  το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από αυτήν μέσω της (1.7). Τότε, έχουμε

$$(\omega|_{T\gamma([\alpha, \beta])})(p) = \langle v(p), T(p) \rangle (d\lambda)_p.$$

*Απόδειξη.* (1) Έστω  $p \in \Sigma \mapsto T(p)$  το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο εφαπτόμενο στην καμπύλη  $\gamma$ ,  $p \in \Sigma \mapsto N(p)$  το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο κάθετο στην επιφάνεια  $\Sigma$  και ορίζουμε ως  $B(p)$  το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο που είναι

κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα  $T(p)$  και στο  $N(p)$ , δηλαδή  $B(p) := (N \times T)(p)$ . Έξ ορισμού, βλέπε Κεφάλαιο 2.6, το στοιχείο μήκους για μία καμπύλη  $\gamma$  ορίζεται ως  $d\lambda := \iota_B dA$ , όπου  $dA$  είναι το στοιχείο εμβαδού, δηλαδή

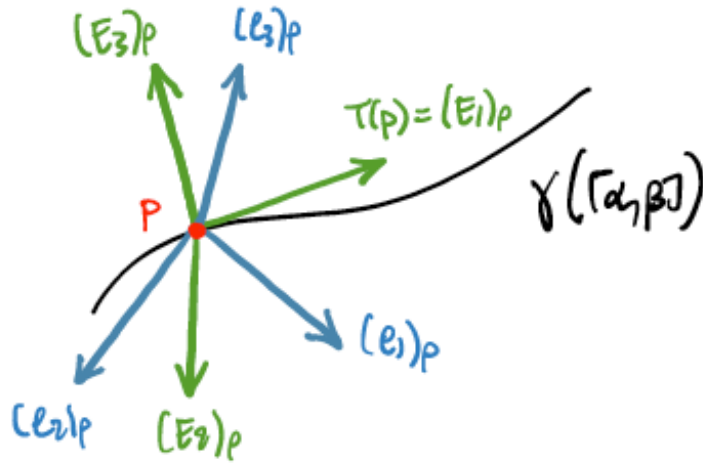
$$d\lambda(v) := \det(v, B, N) = \det \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ N^1 & N^2 & N^3 \end{pmatrix},$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο  $v \in T_p\gamma$  με  $p \in \gamma([\alpha, \beta])$ . Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} d\lambda(v) &= v^1 \det \begin{pmatrix} B^2 & B^3 \\ N^2 & N^3 \end{pmatrix} - v^2 \det \begin{pmatrix} B^1 & B^3 \\ N^1 & N^3 \end{pmatrix} + v^3 \det \begin{pmatrix} B^1 & B^2 \\ N^1 & N^2 \end{pmatrix} \\ &= v^1 \det \begin{pmatrix} B^2 & B^3 \\ N^2 & N^3 \end{pmatrix} + v^2 \det \begin{pmatrix} B^3 & B^1 \\ N^3 & N^1 \end{pmatrix} + v^3 \det \begin{pmatrix} B^1 & B^2 \\ N^1 & N^2 \end{pmatrix} \\ &= v^1 (B \times N)^1 + v^2 (B \times N)^2 + v^3 (B \times N)^3 \\ &= dx^1(v)T^1 + dx^2(v)T^2 + dx^3(v)T^3 \\ &= (T^1 dx^1 + T^2 dx^2 + T^3 dx^3)(v), \end{aligned}$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο  $v \in T_p\gamma([\alpha, \beta])$  με  $p \in \gamma([\alpha, \beta])$ , το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. Εδώ, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $T = B \times N$  το οποίο προκύπτει από το  $B = N \times T$ .

(2) Για κάθε  $p \in \gamma([\alpha, \beta])$ , επιλέγουμε μία άλλη ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}_p^3$  την οποία συμβολίζουμε με  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  τέτοια ώστε  $(E_1)_p := T(p)$ , βλέπε Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Η νέα βάση  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  του  $\mathbb{R}_p^3$  σε σχέση με την συνήθη  $\{(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p\}$ . Έχουμε  $(E_1)_p := T(p)$ , για κάθε  $p \in \gamma([\alpha, \beta])$ .

Η νέα αυτή βάση επάγει την νέα βάση  $\{(dX^1)_p, (dX^2)_p, (dX^3)_p\}$  του  $(\mathbb{R}_p^3)^*$  η οποία είναι προσαρμοσμένη σε αυτήν, δηλαδή  $(dX^i)_p((E_j)_p) = \delta_j^i$ , για κάθε  $i, j = 1, 2, 3$ . Το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο  $p \mapsto T(p)$  εφαπτόμενο στην καμπύλη  $\gamma$  δίνεται ως προς αυτήν την βάση ως  $T(p) = (E_1)_p$  και συνεπώς, ως προς αυτές τις νέες συντεταγμένες, έχουμε

$$T^1(p) = 1, \quad T^2(p) = T^3(p) = 0, \quad (d\lambda)_p = (dX^1)_p.$$

Έστω  $\omega$  μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  και  $v$  το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από αυτήν μέσω της (1.7). Τότε, μπορούμε να εκφράσουμε τα  $T$ ,  $v$  και  $\omega$  ως προς την νέα βάση και έχουμε

$$T(p) = (E_1)_p, \quad v(p) = \sum_{j=1}^3 v^j(p)(E_j)_p, \quad \omega(p) = \sum_{j=1}^3 v^j(p)(dX^j)_p.$$

Επειδή η βάση  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  είναι ορθοκανονική, έχουμε

$$\langle v(p), T(p) \rangle = v^1(p).$$

Τώρα, για κάθε  $Z_p \in T_p\gamma([\alpha, \beta])$  (δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του  $(E_1)_p$ ), έχουμε  $(dX^2)_p(Z_p) = (dX^3)_p(Z_p) = 0$  και ως εκ τούτου παίρνουμε

$$\omega(p)(Z_p) = v^1(p)(dX^1)_p(Z_p).$$

Έτσι, καταλήγουμε στην σχέση

$$\langle v(p), T(p) \rangle (d\lambda)_p(Z_p) = v^1(p)(dX^1)_p(Z_p) = \omega(p)(Z_p),$$

για κάθε  $Z_p \in T_p\gamma([\alpha, \beta])$ , την οποία και γράφουμε ως

$$\langle v(p), T(p) \rangle (d\lambda)_p = (\omega|_{T\gamma([\alpha, \beta])})(p),$$

για κάθε  $p \in \gamma([\alpha, \beta])$  το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Άσκηση 3.4.2** (Στοιχείο εμβαδού σε επιφάνεια). Έστω  $V \subset \mathbb{R}^3$  ένα συμπαγές τρισδιάστατο χωρίο με λείο σύνορο  $\Sigma := \partial V$ . Έστω ακόμα  $p \in \Sigma \mapsto N(p) := N^1(p)(e_1)_p + N^2(p)(e_2)_p + N^3(p)(e_3)_p$  το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο κάθετο στην επιφάνεια  $\Sigma$ . Εδώ,  $\{(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p\}$  είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}_p^3$  η οποία επάγει την συνήθης βάση  $\{(dx^1)_p, (dx^2)_p, (dx^3)_p\}$  του  $(\mathbb{R}_p^3)^*$ .

(1) Να δείξετε ότι το στοιχείο εμβαδού στην επιφάνεια  $\Sigma$  γράφεται ως

$$dA = N^1 dx^2 \wedge dx^3 + N^2 dx^3 \wedge dx^1 + N^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

(2) Για κάθε  $p \in \Sigma$ , επιλέγουμε μία άλλη ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}_p^3$  την οποία συμβολίζουμε με  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  τέτοια ώστε  $(E_1)_p, (E_2)_p \in T_p\Sigma$  και  $(E_3)_p := N(p)$ . Έστω  $\omega$  μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  και  $v$  το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από αυτήν μέσω της (1.7). Τότε, έχουμε

$$((\star\omega)|_{T\Sigma})(p) = \langle v(p), N(p) \rangle (dA)_p.$$

*Απόδειξη.* (1) Έξ ορισμού, βλέπε Κεφάλαιο 2.6, το στοιχείο εμβαδού στην επιφάνεια  $\Sigma$  ορίζεται ως  $dA := \iota_N dV$ , όπου  $dV$  είναι το στοιχείο όγκου, δηλαδή

$$dA(v, w) := \det(v, w, N) = \det \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \\ N^1 & N^2 & N^3 \end{pmatrix},$$

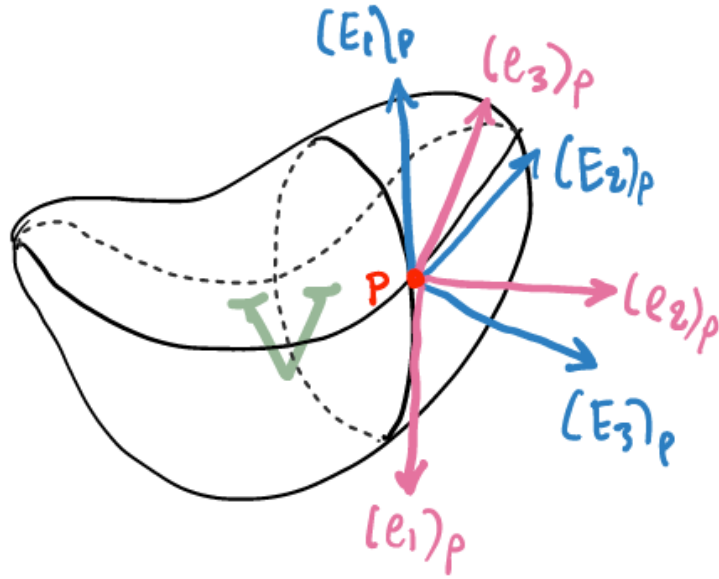
για κάθε διανυσματικά πεδία  $v, w \in T_p\Sigma$  με  $p \in \Sigma$ . Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 3ης γραμμής, βρίσκουμε

$$dA(v, w) = N^1 \det \begin{pmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{pmatrix} - N^2 \det \begin{pmatrix} v^1 & v^3 \\ w^1 & w^3 \end{pmatrix} + N^3 \det \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= N^1 \det \begin{pmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{pmatrix} + N^2 \det \begin{pmatrix} v^3 & v^1 \\ w^3 & w^1 \end{pmatrix} + N^3 \det \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{pmatrix} \\
&= N^1 \det \begin{pmatrix} dx^2(v) & dx^3(v) \\ dx^2(w) & dx^3(w) \end{pmatrix} + N^2 \det \begin{pmatrix} dx^3(v) & dx^1(v) \\ dx^3(w) & dx^1(w) \end{pmatrix} \\
&+ N^3 \det \begin{pmatrix} dx^1(v) & dx^2(v) \\ dx^1(w) & dx^2(w) \end{pmatrix} \\
&= N^1(dx^2 \wedge dx^3)(v, w) + N^2(dx^3 \wedge dx^1)(v, w) + N^3(dx^1 \wedge dx^2)(v, w) \\
&= (N^1 dx^2 \wedge dx^3 + N^2 dx^3 \wedge dx^1 + N^3 dx^1 \wedge dx^2)(v, w),
\end{aligned}$$

για κάθε διανυσματικά πεδία  $v, w \in T_p \Sigma$ , το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(2) Για κάθε  $p \in \Sigma$ , επιλέγουμε μία άλλη ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}_p^3$  την οποία συμβολίζουμε με  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  τέτοια ώστε  $(E_1)_p, (E_2)_p \in T_p \Sigma$  και  $(E_3)_p := N(p)$ , βλέπε Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Η νέα βάση  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  του  $\mathbb{R}_p^3$  σε σχέση με την συνήθη  $\{(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p\}$ . Έχουμε  $(E_1)_p, (E_2)_p \in T_p \Sigma$  και  $(E_3)_p := N(p)$  για κάθε  $p \in \Sigma := \partial V$ .

Η νέα αυτή βάση επάγει την νέα βάση  $\{(dX^1)_p, (dX^2)_p, (dX^3)_p\}$  του  $(\mathbb{R}_p^3)^*$  η οποία είναι προσαρμοσμένη σε αυτήν, δηλαδή  $(dX^i)_p((E_j)_p) = \delta_j^i$ , για κάθε  $i, j = 1, 2, 3$ . Το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο  $p \mapsto N(p)$  κάθετο στην επιφάνεια  $\Sigma$  δίνεται ως προς αυτήν την βάση ως  $N(p) = (E_3)_p$  και συνεπώς, ως προς αυτές τις νέες συντεταγμένες, έχουμε

$$N^1(p) = N^2(p) = 0, \quad N^3(p) = 1, \quad (dA)_p = (dX^1)_p \wedge (dX^2)_p.$$

Έστω  $\omega$  μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$  και  $v$  το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από αυτήν μέσω της (1.7). Τότε, μπορούμε να εκφράσουμε τα  $N$ ,  $v$  και  $\omega$  ως προς την νέα βάση και έχουμε

$$N(p) = (E_3)_p, \quad v(p) = \sum_{j=1}^3 v^j(p)(E_j)_p, \quad \omega(p) = \sum_{j=1}^3 v^j(p)(dX^j)_p.$$

Επειδή η βάση  $\{(E_1)_p, (E_2)_p, (E_3)_p\}$  είναι ορθοκανονική, έχουμε

$$\langle v(p), N(p) \rangle = v^3(p).$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} (\star\omega)_p &= v^1(p) \star (dX^1)_p + v^2(p) \star (dX^2)_p + v^3(p) \star (dX^3)_p \\ &= v^1(p)(dX^2)_p \wedge (dX^3)_p + v^2(p)(dX^3)_p \wedge (dX^1)_p + v^3(p)(dX^1)_p \wedge (dX^2)_p. \end{aligned}$$

Τώρα, για κάθε  $Z_p \in T_p\Sigma$  (δηλαδή είναι γραμμικός συνδιασμός μόνο των  $(E_1)_p$  και  $(E_2)_p$ ), έχουμε  $(dX^3)_p(Z_p) = 0$  και ως εκ τούτου παίρνουμε

$$(\star\omega)_p(Z_p) = v^3(p)((dX^1)_p \wedge (dX^2)_p)(Z_p).$$

Έτσι, καταλήγουμε στην σχέση

$$\langle v(p), N(p) \rangle (dA)_p(Z_p) = v^3(p)((dX^1)_p \wedge (dX^2)_p)(Z_p) = (\star\omega)_p(Z_p),$$

για κάθε  $Z_p \in T_p\Sigma$ , την οποία και γράφουμε ως

$$\langle v(p), N(p) \rangle (dA)_p = ((\star\omega)|_{T\Sigma})(p),$$

για κάθε  $p \in \Sigma$  το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Άσκηση 3.4.3** (Βασικά θεωρήματα διανυσματικού λογισμού). Να αποδείξετε ότι το θεώρημα του Stokes περιλαμβάνει όλους τους ακόλουθους κανόνες ολοκλήρωσης του διανυσματικού λογισμού:

(1) **(Θεώρημα Gauss)** Έστω  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα λείο διανυσματικό πεδίο,  $U$  ένα τρισδιάστατο και συμπαγές χωρίο του  $\mathbb{R}^3$  με λείο σύνορο  $\partial U$ ,  $N$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια  $\partial U$  (με φορά προς τα έξω),  $dA$  στο στοιχείο εμβαδού και  $dV$  στο στοιχείο όγκου. Τότε,

$$\int_U (\operatorname{div} F) dV = \int_{\partial U} \langle F, N \rangle dA.$$

(2) **(Θεώρημα Stokes)** Έστω  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα λείο διανυσματικό πεδίο,  $S$  μία συμπαγής δισδιάστατη επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  με λείο σύνορο  $\partial S$ ,  $N$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια  $S$  (με φορά προς τα έξω),  $T$  είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στην καμπύλη  $\partial S$ ,  $dA$  στο στοιχείο εμβαδού και  $d\lambda$  στο στοιχείο μήκους. Τότε,

$$\int_S \langle \operatorname{curl} F, N \rangle dA = \int_{\partial S} \langle F, T \rangle d\lambda,$$

(3) **(Θεώρημα Green)** Έστω  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ένα λείο διανυσματικό πεδίο,  $D$  ένα συμπαγές δισδιάστατο χωρίο του  $\mathbb{R}^2$  με λείο σύνορο  $\partial D$ ,  $dA$  στο στοιχείο εμβαδού και  $d\lambda$  στο στοιχείο μήκους. Τότε,

$$\int_D (\operatorname{curl} G) dA = \int_{\partial D} \langle G, T \rangle d\lambda.$$

*Απόδειξη.* (1) Έστω  $U$  ένα τρισδιάστατο και συμπαγές χωρίο του  $\mathbb{R}^3$  με λείο σύνορο  $\partial U$  και  $N$  το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια  $\partial U$ . Έστω  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα διανυσματικό πεδίο και  $\omega$  η 1-μορφή που προκύπτει από αυτήν μέσω της (1.7). Αφενός, η Άσκηση 1.9.2 (β) μας δίνει

$$d(\star\omega) = (\operatorname{div} v) dV.$$

Αφετέρου, η Άσκηση 3.4.2 (2) μας δίνει

$$(\star\omega)|_{T(\partial U)} = \langle F, N \rangle dA$$

Τώρα, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Stokes στην 2-μορφή  $\star\omega$  του  $\mathbb{R}^3$  και παίρνουμε ότι

$$\int_U (\operatorname{div} F) dV = \int_U d(\star\omega) = \int_{\partial U} \star\omega = \int_{\partial U} \langle F, N \rangle dA,$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(2) Έστω  $S$  μία συμπαγής δισδιάστατη επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  με λείο σύνορο  $\partial S$  και  $N$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια  $S$ . Έστω  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα διανυσματικό πεδίο και  $\omega$  η 1-μορφή που προκύπτει από αυτήν μέσω της (1.7). Αφενός, ο Ορισμός 1.9.7 μας δίνει

$$\star(d\omega) = \operatorname{curl} F$$

και εφαρμόζοντας τον τελεστή Hodge μία ακόμα φορά (βλέπε Λήμμα 1.8.5) και την Άσκηση 3.4.2 (2), βρίσκουμε

$$d\omega = \star(\operatorname{curl} F) = \langle \operatorname{curl} F, N \rangle dA.$$

Αφετέρου, η Άσκηση 3.4.1 (2) μας δίνει

$$\omega|_{\partial S} = \langle F, T \rangle d\lambda.$$

Τώρα, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Stokes στην 1-μορφή  $\omega$  στην πολλαπλότητα  $S$  και παίρνουμε ότι

$$\int_S \langle \operatorname{curl} F, N \rangle dA = \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega = \int_{\partial S} \langle F, T \rangle d\lambda,$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και χωρίς την χρήση της Άσκησης 3.4.1 (2). Πράγματι, εάν  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \gamma([t_0, t_1]) = \partial S \subset \mathbb{R}^2$  είναι μία αναπαραμέτρηση του συνόρου  $\partial S$  με  $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t))$ , τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \omega &= \int_{\gamma([t_0, t_1])} \omega = \int_{[t_0, t_1]} \gamma^* \omega \\ &= \int_{[t_0, t_1]} \gamma^*(F^1 dx^1 + F^2 dx^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[t_0, t_1]} F^1(\gamma(t)) dx^1(t) + F^2(\gamma(t)) dx^2(t) \\
&= \int_{[t_0, t_1]} \left[ F^1(\gamma(t)) \frac{dx^1(t)}{dt} + F^2(\gamma(t)) \frac{dx^2(t)}{dt} \right] dt \\
&= \int_{[t_0, t_1]} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\
&= \int_{[t_0, t_1]} \langle F(\gamma(t)), T(t) \rangle |\dot{\gamma}(t)| dt \\
&= \int_{\partial D} \langle F, T \rangle d\lambda,
\end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(3) Έστω  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ένα λείο διανυσματικό πεδίο,  $D$  ένα συμπαγές δισδιάστατο χωρίο του  $\mathbb{R}^2$  με λείο σύνορο  $\partial D$ ,  $dA$  στο στοιχείο εμβαδού και  $d\lambda$  στο στοιχείο μήκους. Έστω ακόμα  $\omega$  η 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^2$  που προκύπτει από το διανυσματικό πεδίο  $G$  μέσω της (1.7). Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned}
G &= G^1 e_1 + G^2 e_2, \\
\omega &= G^1 dx^1 + G^2 dx^2, \\
d\omega &= dG^1 \wedge dx^1 + dG^2 \wedge dx^2 \\
&= \frac{\partial G^1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial G^2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \\
&= \left( \frac{\partial G^2}{\partial x^1} - \frac{\partial G^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\
&= (\text{curl } G) dA,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον Ορισμό 1.9.7 στην τελευταία γραμμή. Τώρα, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Stokes στην 1-μορφή  $\omega$  στην πολλαπλότητα  $S$  και παίρνουμε ότι

$$\int_D (\text{curl } G) dA = \int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \langle G, T \rangle d\lambda,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 3.4.1 (2) στην τελευταία ισότητα, το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και χωρίς την

χρήση της Άσκησης 3.4.1 (2). Πράγματι, εάν  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \gamma([t_0, t_1]) = \partial D \subset \mathbb{R}^2$  είναι μία αναπαραμέτρηση του συνόρου  $\partial D$  με  $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t))$ , τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} \omega &= \int_{\gamma([t_0, t_1])} \omega = \int_{[t_0, t_1]} \gamma^* \omega \\
 &= \int_{[t_0, t_1]} \gamma^*(G^1 dx^1 + G^2 dx^2) \\
 &= \int_{[t_0, t_1]} G^1(\gamma(t)) dx^1(t) + G^2(\gamma(s)) dx^2(t) \\
 &= \int_{[t_0, t_1]} \left[ G^1(\gamma(t)) \frac{dx^1(t)}{dt} + G^2(\gamma(t)) \frac{dx^2(t)}{dt} \right] dt \\
 &= \int_{[t_0, t_1]} \langle G(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\
 &= \int_{[t_0, t_1]} \langle G(\gamma(t)), T(t) \rangle |\dot{\gamma}(t)| dt \\
 &= \int_{\partial D} \langle G, T \rangle d\lambda,
 \end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. □

## Κεφάλαιο 4

### Εφαρμογές

#### 4.1 Εφαρμογές στην Διαφορική Γεωμετρία

**Άσκηση 4.1.1** (Αγκλύλη Lie διανυσματικών πεδίων). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα και  $v$  και  $w$  δύο διανυσματικά πεδία σε αυτήν. Η **αγκλύλη Lie** (Lie bracket) αυτών ορίζεται ως το διανυσματικό πεδίο  $[v, w]$  που δίνεται από

$$[v, w](\cdot) := v(w(\cdot)) - w(v(\cdot)).$$

(1) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της αγκλύλης Lie δίνονται από

$$[v, w] = \sum_{i=1}^n ([v, w])^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad ([v, w])^i = \sum_{j=1}^n \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right).$$

(2) Έστω  $\omega$  μία 1-μορφή στην πολλαπλότητα. Να αποδείξετε ότι

$$(d\omega)(v, w) = v(\omega(w)) - w(\omega(v)) - \omega([v, w]).$$

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε τοπικές συντεταγμένες. Έστω  $(U, \varphi)$  ένα (τοπικό) σύστημα συντεταγμένων με  $p \in U$  και  $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$ . Έτσι, για κάθε  $p \in U$ , ο εφαπτόμενος χώρος  $T_p U$  αποκτά την βάση  $\{(\partial/\partial x^i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}$  και ο δυϊκός χώρος  $(T_p U)^*$  αποκτά την βάση  $\{(dx^i)_p : i = 1, 2, \dots, n\}$ . Παραλείπουμε την εξάρτηση ως προς  $p$ . Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε τα  $v$ ,  $w$  και  $\omega$  ως

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad w = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \omega = \sum_{l=1}^n \omega_l dx^l.$$

(1) Για κάθε σημείο στο σύνολο  $U$ , υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
[v, w] &= v(w) - w(v) \\
&= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \sum_{i,j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n v^i \left( \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + w^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) - \sum_{i,j=1}^n w^j \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n v^j \left( \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + w^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \right) - \sum_{i,j=1}^n w^j \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^n v^j w^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} - \sum_{i,j=1}^n v^i w^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^n v^j w^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} - \sum_{i,j=1}^n v^j w^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^n v^j w^i \left( \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \left( v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x^i},
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

για κάθε λεία συνάρτηση  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Έτσι, αποδείξαμε το ζητούμενο.

(2) Για κάθε σημείο στο σύνολο  $U$ , ισχυριζόμαστε ότι το δεξί μέλος  $v(\omega(w)) - w(\omega(v)) - \omega([v, w])$  ισούται με

$$\sum_{j,l=1}^n \left[ v^j \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega_l w^l) - w^j \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega_l v^l) \right] - \sum_{l=1}^n \omega_l ([v, w])^l.$$

Πράγματι, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\omega(w) &= \sum_{l=1}^n \omega_l dx^l(w) = \sum_{l=1}^n \omega_l w^l, \\
v(\omega(w)) &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\omega(w)) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sum_{l=1}^n \omega_l w^l \right) = \sum_{i,l=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\omega_l w^l), \\
\omega(v) &= \sum_{l=1}^n \omega_l dx^l(v) = \sum_{l=1}^n \omega_l v^l, \\
w(\omega(v)) &= \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\omega(v)) = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sum_{l=1}^n \omega_l v^l \right) = \sum_{j,l=1}^n w^j \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega_l v^l), \\
\omega([v, w]) &= \sum_{l=1}^n \omega_l dx^l([v, w]) = \sum_{l=1}^n \omega_l ([v, w])^l.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τους συντελεστές  $([v, w])^l$  από την (1) στην έκφραση που μόλις αποδείξαμε και, μετά από έναν εκτενή υπολογισμό, βρίσκουμε ότι οι παράγωγοι των  $v^i$  και  $w^j$  ακυρώνονται μεταξύ τους (επαληθεύστε τον υπολογισμό αυτό!). Συγκεκριμένα, μετά την αντικατάσταση, παίρνουμε

$$v(\omega(w)) - w(\omega(v)) - \omega([v, w]) = \sum_{j,l=1}^n (v^j w^l - w^j v^l) \frac{\partial \omega_l}{\partial x^j}.$$

Για κάθε σημείο στο σύνολο  $U$ , ισχυριζόμαστε ότι

$$(d\omega)(v, w) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \left( \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} \right) (v^k w^l - w^k v^l).$$

Πράγματι, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{l=1}^n d\omega_l \wedge dx^l = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} dx^k \right) \wedge dx^l = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l \\
&= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k=l}}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k > l}}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l + \sum_{\substack{l,k=1 \\ l > k}}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^k \\
&= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l - \sum_{\substack{l,k=1 \\ l > k}}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} dx^k \wedge dx^l \\
&= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \left( \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} \right) dx^k \wedge dx^l, \\
(d\omega)(v, w) &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \left( \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} \right) dx^k \wedge dx^l(v, w) \\
&= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \left( \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} \right) \det \begin{pmatrix} dx^k(v) & dx^k(w) \\ dx^l(v) & dx^l(w) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \left( \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} \right) \det \begin{pmatrix} v^k & w^k \\ v^l & w^l \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Επομένως, για να αποδείξουμε την ζητούμενη σχέση πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{j,l=1}^n (v^j w^l - w^j v^l) \frac{\partial \omega_l}{\partial x^j} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n \left( \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} \right) (v^k w^l - w^k v^l).$$

το οποίο προκύπτει με απλές αλγεβρικές πράξεις (επαληθεύστε τον υπολογισμό αυτό!) και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Άσκηση 4.1.2** (Παράγωγος Lie μορφών). Έστω  $\mathcal{M}$  μία πολλαπλότητα,  $\omega$  μία 1-μορφή σε αυτήν και  $v$  ένα διανυσματικό πεδίο. Η **ροή** του  $v$  είναι η (μοναδική) απεικόνιση  $\Phi : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathcal{M}$  με  $t \mapsto \Phi_t$  που προκύπτει ως λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(p) = v(\Phi_t(p)), \quad \Phi_0(p) = p,$$

για κάθε  $p \in \mathcal{M}$ . Αυτή επάγει την απεικόνιση  $\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  η οποία ουσιαστικά μετακινεί τα σημεία  $p$  της πολλαπλότητας ακολουθώντας το διανυσματικό πεδίο  $v$ . Η pull-back απεικόνιση μετατρέπει την 1-μορφή  $\omega$  στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$  στην 1-μορφή  $\Phi_t^*(\omega)$  στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ . Ορίζουμε **την παράγωγο Lie** της  $\omega$  στην κατεύθυνση του  $v$  ως την 1-μορφή  $\mathcal{L}_v(\omega)$  που δίνεται από

$$(\mathcal{L}_v\omega)_p((v)_p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ (\Phi_t^*(\omega))_p((v)_p) \right].$$

Ζητούνται τα εξής:

(1) Να αποδείξετε ότι

$$\Phi_{t+\epsilon}(p) = (\Phi_t \circ \Phi_\epsilon)(p), \quad \Phi_{t+\epsilon}^*(\omega) = \Phi_t^*(\omega) \circ \Phi_\epsilon^*(\omega),$$

για κάθε  $t, \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$  και  $p \in \mathcal{M}$ .

(2) Να αποδείξετε ότι

$$\left( \frac{d}{dt} \Phi_t^* \right) (\omega) = \Phi_t^*(\mathcal{L}_v\omega),$$

για κάθε  $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ .

(3) Έστω ότι τα  $v$  και  $\omega$  έχουν τις τοπικές εκφράσεις

$$v = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i.$$

Να αποδείξετε ότι η δράση της παραγώγου Lie δίνεται από

$$(\mathcal{L}_v\omega)(X) = \sum_{i,j=1}^n \left( X^j \omega_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + X^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} v^j \right),$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο  $X$  στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ .

(4) Να αποδείξετε ότι η δράση της παραγώγου Lie δίνεται από

$$(\mathcal{L}_v\omega)(X) = v(\omega(X)) - \omega([v, X]),$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο  $X$  στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ , όπου  $[\cdot, \cdot]$  είναι η αγκύλη Lie, βλέπε Άσκηση 4.1.1.

(5) Να αποδείξετε τον **τύπο του Cartan**:

$$\mathcal{L}_v(\omega) = d(\iota_v \omega) + \iota_v(d\omega),$$

όπου  $\iota_v$  είναι η ίωση του  $v$ , βλέπε Ορισμό 2.6.1.

*Απόδειξη.* (1) Έστω  $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$  και  $p \in \mathcal{M}$ . Θα αποδείξουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις  $t \mapsto \Psi_t(p) := \Phi_{t+\epsilon}(p)$  και  $t \mapsto X_t(p) := \Phi_t(\Phi_\epsilon(p))$  ικανοποιούν το ίδιο πρόβλημα αρχικών τιμών. Αφενός, έχουμε  $\Psi_0(p) = \Phi_\epsilon(p)$  και, θέτοντας  $\tau := t + \epsilon$ , παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\Psi_t(p) = \frac{d}{dt}\Phi_{t+\epsilon}(p) = \frac{d}{d\tau}\Phi_\tau(p) = v(\Phi_\tau(p)) = v(\Phi_{t+\epsilon}(p)) = v(\Psi_t(p)).$$

Αφετέρου, έχουμε  $X_0(p) := \Phi_0(\Phi_\epsilon(p)) = \Phi_\epsilon(p)$  και, θέτοντας  $q := \Phi_\epsilon(p)$ , παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}X_t(p) = \frac{d}{dt}\Phi_t(\Phi_\epsilon(p)) = \frac{d}{dt}\Phi_t(q) = v(\Phi_t(q)) = v(\Phi_t(\Phi_\epsilon(p))) = v(X_t(p)).$$

Αφού το πρόβλημα αρχικών τιμών αυτό έχει μοναδική λύση, προκύπτει η ισότητα. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 1.5.1 (γ) και την ισότητα που μόλις αποδείξαμε.

(2) Έστω  $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ . Παραλείπουμε την εξάρτηση ως προς  $v_1(p), \dots, v_k(p)$ . Χρησιμοποιώντας το (1), την γραμμικότητα της απεικόνισης pull-back, βλέπε Λήμμα 1.5.1 (α), και τον ορισμό της παραγώγου Lie, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\Phi_t^*\right)(\omega) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Phi_{t+\epsilon}^*(\omega) - \Phi_t^*(\omega)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Phi_t^*(\Phi_\epsilon^*(\omega)) - \Phi_t^*(\Phi_0^*(\omega))] \\ &= \Phi_t^* \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Phi_\epsilon^*(\omega) - \Phi_0^*(\omega)] \right) = \Phi_t^* \left( \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \Phi_\epsilon^*(\omega) \right) \\ &= \Phi_t^*(\mathcal{L}_v(\omega)), \end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(3) Έστω  $X$  ένα διανυσματικό πεδίο στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ . Εξ ορισμού, το

$\mathcal{L}_v(\omega)$  είναι μία 1-μορφή. Εξ ορισμού της παραγώγου Lie , για κάθε διανυσματικό πεδίο  $X$ , έχουμε

$$(\mathcal{L}_v\omega)_p(X_p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[(\Phi_t^*(\omega))_p(X_p)] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[\omega_{\Phi_t(p)}((d\Phi_t)_p(X_p))].$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (d\Phi_t)_p(X_p) &= (d\Phi_t)_p\left(\sum_{j=1}^n X^j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^n X^j(p)(d\Phi_t)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) \\ &= \sum_{j=1}^n X^j(p) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_t^i(p)}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\Phi_t(p)}, \\ \omega_{\Phi_t(p)}((d\Phi_t)_p(X_p)) &= \left(\sum_{l=1}^n \omega_l(\Phi_t(p))(dx^l)_{\Phi_t(p)}\right) \left(\sum_{i,j=1}^n X^j(p) \frac{\partial \Phi_t^i(p)}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\Phi_t(p)}\right) \\ &= \sum_{i,j,l=1}^n X^j(p) \frac{\partial \Phi_t^i(p)}{\partial x^j} \omega_l(\Phi_t(p)) ((dx^l)_{\Phi_t(p)}) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\Phi_t(p)}\right) \\ &= \sum_{i,j,l=1}^n X^j(p) \frac{\partial \Phi_t^i(p)}{\partial x^j} \omega_l(\Phi_t(p)) \delta_i^l \\ &= \sum_{i,j=1}^n X^j(p) \frac{\partial \Phi_t^i(p)}{\partial x^j} \omega_i(\Phi_t(p)). \end{aligned}$$

Τώρα, από τον ορισμό της ροής, έχουμε

$$\Phi_0(p) = p, \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t(p) = v(\Phi_t(p))\Big|_{t=0} = v(\Phi_0(p)) = v(p)$$

και συνεπώς, αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το  $t = 0$ , βρίσκουμε ότι υπάρχει κάποια θετική σταθερά  $C > 0$ , τέτοια ώστε για κάθε  $-C \leq t \leq C$ , έχουμε

$$\Phi_t(p) = p + tv(p) + \mathcal{O}(t^2).$$

Από αυτό προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \Phi_t^i(p)}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (x^i + tv^i(p) + \mathcal{O}(t^2)) = \delta_j^i + t \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^j} + \mathcal{O}(t^2),$$

$$\begin{aligned}
\omega_i(\Phi_t(p)) &= \omega_i(\Phi_0(p)) + t \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_i(\Phi_t(p)) + \mathcal{O}(t^2) \\
&= \omega_i(\Phi_0(p)) + t \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_i(\Phi_0(p))}{\partial x^l} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_t^l(p) + \mathcal{O}(t^2) \\
&= \omega_i(\Phi_0(p)) + t \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_i(\Phi_0(p))}{\partial x^l} v^l(\Phi_0(p)) + \mathcal{O}(t^2) \\
&= \omega_i(p) + t \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x^l} v^l(p) + \mathcal{O}(t^2).
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\omega_{\Phi_t(p)}((d\Phi_t)_p(X_p)) &= \sum_{i,j=1}^n X^j(p) \frac{\partial \Phi_t^i(p)}{\partial x^j} \omega_i(\Phi_t(p)) \\
&= \sum_{i,j=1}^n X^j(p) \left( \delta_j^i + t \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^j} + \mathcal{O}(t^2) \right) \left( \omega_i(p) + t \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x^l} v^l(p) + \mathcal{O}(t^2) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n X^j(p) \left( \omega_i(p) \delta_j^i + t \left( \omega_i(p) \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^j} + \delta_j^i \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x^l} v^l(p) \right) + \mathcal{O}(t^2) \right)
\end{aligned}$$

Και συνεπώς

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_v \omega)_p(X_p) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[ \omega_{\Phi_t(p)}((d\Phi_t)_p(X_p)) \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^n X^j(p) \left( \omega_i(p) \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^j} + \delta_j^i \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x^l} v^l(p) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n X^j(p) \omega_i(p) \frac{\partial v^i(p)}{\partial x^j} + \sum_{i,l=1}^n X^i(p) \frac{\partial \omega_i(p)}{\partial x^l} v^l(p),
\end{aligned}$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο.

(4) Αυτό προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο ερώτημα (3) και την Άσκηση 4.1.1 (1). Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$v(\omega(X)) - \omega([v, X]) = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sum_{i=1}^n \omega_i X^i \right) - \sum_{i=1}^n \omega_i ([v, X])^i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sum_{i=1}^n \omega_i X^i \right) - \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n \left( v^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} - X^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n v^j \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^i + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \omega_i v^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n \omega_i X^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \omega_i X^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} v^j = (\mathcal{L}_v \omega)(X),
\end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(5) Από την υπόθεση, η  $\omega$  είναι μία 1-μορφή και συνεπώς το  $\iota_v \omega$  είναι μία 0-μορφή (δηλαδή συνάρτηση), το  $d(\iota_v \omega)$  είναι μία 1-μορφή, το  $d\omega$  είναι μία 2-μορφή και τέλος το  $\iota_v(d\omega)$  είναι μία 1-μορφή, βλέπε Ορισμό 2.6.1. Συνεπώς, ο τύπος του Cartan στην προκειμένη περίπτωση είναι μία ισότητα μεταξύ δύο 1-μορφών. Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι

$$(\mathcal{L}_v \omega)(X) = (d(\iota_v \omega))(X) + (\iota_v(d\omega))(X),$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο  $X$  στην πολλαπλότητα  $\mathcal{M}$ . Έχουμε<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
\iota_v \omega &= \omega(v), \\
(d(\iota_v \omega))(X) &= X(\omega(v)) = X(\omega(v)), \\
(\iota_v(d\omega))(X) &= (d\omega)(v, X).
\end{aligned}$$

Επομένως, η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(\mathcal{L}_v \omega)(X) = X(\omega(v)) + (d\omega)(v, X).$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (2) της Άσκησης 4.1.1, αυτή είναι με την σειρά της ισοδύναμη με την σχέση

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_v \omega)(X) &= X(\omega(v)) + v(\omega(X)) - X(\omega(v)) - \omega([v, X]) \\
&= v(\omega(X)) - \omega([v, X]),
\end{aligned}$$

το οποίο και αποδείξαμε ήδη στο προηγούμενο ερώτημα (3). Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη.  $\square$

---

<sup>1</sup>Πιο αναλυτικά, στην πρώτη γραμμή, δείχνουμε ότι το  $\iota_v \omega$  είναι συνάρτηση και συγκεκριμένα η  $\iota_v \omega = \omega(v)$ . Ας την πούμε αυτήν  $f$ . Στην δεύτερη γραμμή, χρησιμοποιούμε τον ορισμό  $df(X) = X(f)$  του διαφορικού μίας λείας συνάρτησης. Στην τρίτη γραμμή, χρησιμοποιούμε τον Ορισμό 2.6.1.

## 4.2 Εφαρμογές στην Ανάλυση

**Άσκηση 4.2.1** (Θεώρημα Green). Έστω  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  και  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  δύο λείες συναρτήσεις και  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  ένα συμπαγές χωρίο με λείο σύνορο. Τότε, έχουμε

$$(a) \quad \int_U \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle dV + \int_U f \Delta h dV = \int_{\partial U} f \langle \text{grad } h, N \rangle dA,$$

$$(b) \quad \int_U (f \Delta h - h \Delta f) dV = \int_{\partial U} (f \langle \text{grad } h, N \rangle - h \langle \text{grad } f, N \rangle) dA,$$

όπου  $N$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια  $\partial U$  και  $dV$  και  $dA$  είναι τα στοιχεία όγκου και εμβαδού αντίστοιχα.

*Απόδειξη.* Το (a) προκύπτει από την Άσκηση 3.4.3 (1) για  $F := f \text{grad } h$ . Πράγματι, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι

$$\begin{aligned} \text{div } (f \text{grad } h) &= f \text{div } (\text{grad } h) + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle \\ &= f \Delta h + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τον Ορισμό 1.9.5 στην τελευταία ισότητα. Επαληθεύστε τον ισχυρισμό αυτό χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.9.2. Έτσι, από την σχέση

$$\int_U (\text{div } (f \text{grad } h)) dV = \int_{\partial U} \langle f \text{grad } h, N \rangle dA.$$

συνεπάγεται ότι

$$\int_U [f \Delta h + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle] dV = \int_{\partial U} f \langle \text{grad } h, N \rangle dA$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο. Το (b) προκύπτει από το (a). Πράγματι, από το (a) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_U [f \Delta h + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle] dV &= \int_{\partial U} f \langle \text{grad } h, N \rangle dA, \\ \int_U [h \Delta f + \langle \text{grad } h, \text{grad } f \rangle] dV &= \int_{\partial U} h \langle \text{grad } f, N \rangle dA \end{aligned}$$

και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε το ζητούμενο, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Άσκηση 4.2.2** (Αρμονικές συναρτήσεις). Μία λεία συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **αρμονική** σε ένα χωρίο  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  εάν και μόνο εάν  $(\Delta f)(p) = 0$ , για κάθε  $p \in V$ . Έστω  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  ένα φραγμένο χωρίο με λείο σύνορο. Συμβολίζουμε με  $N$  το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια  $\partial U$  και με  $dA$  το στοιχείο εμβαδού στην επιφάνεια  $\partial U$ . Να αποδείξετε τα εξής:

- (1) Εάν  $f_1$  και  $f_2$  είναι δύο αρμονικές συναρτήσεις στο  $U$  τέτοιες ώστε  $f_1 = f_2$  στο  $\partial U$ , τότε  $f_1 = f_2$  στο  $\overline{U}$ .
- (2) Εάν  $f$  είναι μία αρμονική συνάρτηση στο  $U$  τέτοια ώστε  $df(N) = 0$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $f = c$  στο  $U$ .
- (3) Εάν  $f_1$  και  $f_2$  είναι δύο αρμονικές συναρτήσεις στο  $U$  τέτοιες ώστε  $df_1(N) = df_2(N)$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $f_1 = f_2 + c$  στο  $U$ .
- (4) Εάν  $f$  είναι μία αρμονική συνάρτηση στο  $U$ , τότε

$$\int_{\partial U} df(N) dA = 0.$$

- (5) Εάν  $f$  είναι μία αρμονική συνάρτηση στην κλειστή μπάλα  $\overline{B}_R(p_0) := \{p \in \mathbb{R}^3 : |p - p_0| \leq R\}$ , τότε

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(p_0)} f dA,$$

όπου  $S_R(p_0) := \partial \overline{B}_R(p_0)$  είναι η σφαίρα ακτίνας  $R$ . Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται **θεώρημα μέσης τιμής**.

- (6) Εάν  $f$  είναι μία μη-σταθερή, αρμονική συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , τότε η  $f$  λαμβάνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του συνόρου  $\partial U$ . Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται **αρχή μεγίστου**.

*Απόδειξη.* (1) Έστω  $f_1$  και  $f_2$  δύο αρμονικές συναρτήσεις στο  $U$  τέτοιες ώστε  $f_1 = f_2$  στο  $\partial U$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Green, βλέπε Άσκηση 4.2.1 (1), για  $h := f_1 - f_2$  και παίρνουμε

$$\int_U \langle \text{grad}(f_1 - f_2), \text{grad}(f_1 - f_2) \rangle dV + \int_U (f_1 - f_2) \Delta(f_1 - f_2) dV$$

$$= \int_{\partial U} (f_1 - f_2) \langle \text{grad } (f_1 - f_2), N \rangle dA.$$

Επειδή  $f_1 = f_2$  στο  $\partial U$ , το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος μηδενίζεται. Επίσης, επειδή ο τελεστής Laplace είναι γραμμικός και οι  $f_1$  και  $f_2$  είναι αρμονικές συναρτήσεις στο  $U$ , έχουμε  $(\Delta(f_1 - f_2))(p) = 0$ , για κάθε  $p \in U$ . Έτσι, το δεύτερο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος μηδενίζεται. Συνεπώς, έχουμε

$$\int_U |\text{grad } (f_1 - f_2)|^2 dV = \int_U \langle \text{grad } (f_1 - f_2), \text{grad } (f_1 - f_2) \rangle dV = 0,$$

από το οποίο παίρνουμε ότι  $(\text{grad } (f_1 - f_2))(p) = 0$ , για κάθε  $p \in U$ . Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $f_1 - f_2 = c$  στο  $U$ . Επειδή  $f_1 = f_2$  στο  $\partial U$ , αυτή η σταθερά είναι αναγκαστικά  $c = 0$ . Έτσι, οι σχέσεις  $f_1 = f_2$  στο  $U$  (που μόλις αποδείξαμε) και  $f_1 = f_2$  στο  $\partial U$  (από την υπόθεση) μας δίνουν  $f_1 = f_2$  στο  $\bar{U}$  το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

(2) Έστω  $f$  μία αρμονική συνάρτηση στο  $U$  τέτοια ώστε  $df(N) = 0$ . Υπενθυμίζουμε από τον Ορισμό 1.9.3, ότι  $df(N) := \langle \text{grad } f, N \rangle$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Green, βλέπε Άσκηση 4.2.1 (1), για  $h := f$  και παίρνουμε

$$\int_U \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle dV + \int_U f \Delta f dV = \int_{\partial U} f \langle \text{grad } f, N \rangle dA.$$

Επειδή η  $f$  είναι αρμονική στο  $U$ , έχουμε  $(\Delta f)(p) = 0$ , για κάθε  $p \in U$ . Έτσι, το δεύτερο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος μηδενίζεται. Επίσης, επειδή  $df(N) := \langle \text{grad } f, N \rangle = 0$  από την υπόθεση, το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος μηδενίζεται. Συνεπώς, παίρνουμε

$$\int_U |\text{grad } f|^2 dV = \int_U \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle dV = 0$$

το οποίο συνεπάγεται ότι  $(\text{grad } f)(p) = 0$ , για κάθε  $p \in U$ . Αυτό με την σειρά του μας δίνει ότι υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $f = c$  στο  $U$  το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(3) Αυτό προκύπτει άμεσα από το (2) επειδή οι τελεστές  $f \mapsto \Delta(f)$  και  $f \mapsto df(N)$  είναι γραμμικοί.

(4) Έστω ότι  $f$  είναι μία αρμονική συνάρτηση στο  $U$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα

του Green, βλέπε Άσκηση 4.2.1 (2), για  $h := 1$  και παίρνουμε

$$\int_U \Delta f dV = \int_{\partial U} \langle \text{grad } f, N \rangle dA.$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $df(N) := \langle \text{grad } f, N \rangle$ . Επειδή η  $f$  είναι αρμονική στο  $U$ , έχουμε  $(\Delta f)(p) = 0$ , για κάθε  $p \in U$ . Έτσι, το ολοκλήρωμα αριστερό μέλος μηδενίζεται το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

(5) Έστω  $f$  μία αρμονική συνάρτηση στην κλειστή μπάλα  $\overline{B}_r := \{p \in \mathbb{R}^3 : |p - p_0| \leq R\}$ . Επιλέγουμε  $0 < \rho < R$  και ορίζουμε την περιοχή  $U := \overline{B}_R(p_0) \setminus \overline{B}_\rho(p_0)$ . Υπενθυμίζουμε από την Άσκηση 1.10.5, ότι η συνάρτηση

$$F(p) := \frac{1}{r(p)}, \quad r(p) := r(x^1, x^2, x^3) := ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}$$

είναι αρμονική στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Green, βλέπε Άσκηση 4.2.1 (2), για  $h := 1/r$  και παίρνουμε

$$\int_{\partial U} \left( f \left\langle \text{grad } \frac{1}{r}, N \right\rangle - \frac{1}{r} \langle \text{grad } f, N \rangle \right) dA = \int_U \left( f \Delta \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta f \right) dV.$$

Επειδή, οι συναρτήσεις  $f$  και  $h := 1/r$  είναι αρμονικές, παίρνουμε

$$\int_{\partial U} \left( f \left\langle \text{grad } \frac{1}{r}, N \right\rangle - \frac{1}{r} \langle \text{grad } f, N \rangle \right) dA = 0.$$

Επίσης, το σύνορο  $\partial U$  της περιοχής  $U$  δίνεται από  $\partial U = S_R \cup S_\rho$  με θετικό προσανατολισμό για την  $S_R$  και αρνητικό προσανατολισμό για την  $S_\rho$ . Επομένως, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{S_R(p_0)} \left( f \left\langle \text{grad } \frac{1}{r}, N \right\rangle - \frac{1}{r} \langle \text{grad } f, N \rangle \right) dA = \\ \int_{S_\rho(p_0)} \left( f \left\langle \text{grad } \frac{1}{r}, N \right\rangle - \frac{1}{r} \langle \text{grad } f, N \rangle \right) dA \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα και ως εξής

$$\int_{S_R(p_0)} f \left\langle \text{grad } \frac{1}{r}, N \right\rangle dA - \int_{S_\rho(p_0)} f \left\langle \text{grad } \frac{1}{r}, N \right\rangle dA =$$

$$\frac{1}{R} \int_{S_R(p_0)} \langle \text{grad } f, N \rangle dA - \frac{1}{\rho} \int_{S_\rho(p_0)} \langle \text{grad } f, N \rangle dA.$$

Τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος μηδενίζονται λόγω του (δ): ολοκληρώνουμε συναρτήσεις της μορφής  $df(N)$  σε σύνορο με την  $f$  να είναι αρμονική από την υπόθεση. Τα ολοκληρώματα στο αριστερό μέλος εμπεριέχουν την ποσότητα  $\langle \text{grad } (1/r), N \rangle$  η οποία υπολογίζεται. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.9.4 και το γεγονός ότι  $N(p) = N(x^1, x^2, x^3) = (x^1/r)e_1 + (x^2/r)e_2 + (x^3/r)e_3$ , υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \text{grad } \frac{1}{r} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{r} \right) e_i = \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^i} e_i = \sum_{i=1}^3 \frac{-x^i}{r^3} e_i, \\ \left\langle \text{grad } \frac{1}{r}, N \right\rangle &= \frac{-1}{r^4} \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = \frac{-1}{r^4} r^2 = \frac{-1}{r^2}. \end{aligned}$$

Έτσι, καταλήγουμε στην σχέση

$$\int_{S_R(p_0)} f \frac{-1}{r^2} dA - \int_{S_\rho(p_0)} f \frac{-1}{r^2} dA = 0$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(p_0)} f dA = \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_{S_\rho(p_0)} f dA.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε  $R > 0$  και  $\rho > 0$  με  $0 < \rho < R$ . Τέλος, επιτρέπουμε στο  $\rho$  να τείνει στο μηδέν και βρίσκουμε

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(p_0)} f dA = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_{S_\rho(p_0)} f dA = f(p_0),$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

(6) Έστω  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο και  $f$  μία μη-σταθερή και αρμονική συνάρτηση σε αυτό. Επειδή το  $U$  ένα κλειστό, έχουμε  $\partial U \subseteq U$ . Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  λαμβάνει την μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του συνόρου  $\partial U$ . Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή η  $f$  λαμβάνει την μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του εσωτερικού το οποίο δίνεται από  $U \setminus \partial U$ . Με άλλα λόγια,

υποθέτουμε ότι υπάρχει  $p_* \in U \setminus \partial U$  τέτοιο ώστε  $f(p_*) > f(p)$ , για κάθε  $p \in U \setminus \{p_*\}$ . Επειδή το  $p_*$  είναι εσωτερικό σημείο, υπάρχει  $R > 0$  τέτοιο ώστε  $B_R(p_*) \subset U$ . Τότε, από το θεώρημα μέσης τιμής, βλέπε υποερώτημα (5), παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(p_*) &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(p_0)} f dA < \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(p_0)} f(p_*) dA \\ &= f(p_*) \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(p_0)} dA = f(p_*) \frac{1}{4\pi R^2} \text{Area}(S_R(p_0)) = f(p_*), \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, αποδείξαμε ότι μία μη-σταθερή και αρμονική συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο δεν μπορεί να λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στο εσωτερικό. Το αποτέλεσμα για την ελάχιστη τιμή προκύπτει με παρόμοιο τρόπο (ή πιο απλά, αντικαθιστώντας  $-f$  αντί της  $f$ ), το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## 4.3 Εφαρμογές στην Ρευστομηχανική

**Άσκηση 4.3.1** (Αστρόβια ροή ρευστού σε κυλινδρικό σωλήνα). Έστω ιδανικό, ασυμπίεστο, ιξώδες ρευστό που ρέει σταθερά μέσα σε ένα άπειρο κυλινδρικό σωλήνα  $C_R$  ακτίνας  $R > 0$  γύρω από τον άξονα  $x^3$  του  $\mathbb{R}^3$  με ταχύτητα της μορφής

$$v(x^1, x^2, x^3) := f(r)(-x^2, x^1, 0),$$

όπου  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$  και  $r \mapsto f(r)$  είναι μία λεία συνάρτηση που εκφράζει την περιστροφή του ρευστού γύρων από τον άξονα  $x^3$ . Δίνεται ότι  $f(1) = 1$ . Ζητούνται τα εξής:

- (1) Εκφράστε την ταχύτητα ως μία 1-μορφή  $\omega$ .
- (2) Υπολογίστε την μορφή  $\star\omega$ . Δείξτε ότι, για κάθε συνάρτηση περιστροφής  $f = f(r)$ , η ροή του ρευστού να είναι ασυμπίεστη, δηλαδή  $\text{div}(v) = 0$ .
- (3) Υπολογίστε το διαφορικό  $d\omega$ . Βρείτε τις περιστροφές  $f = f(r)$  ώστε η 1-μορφή  $\omega$  να είναι κλειστή. Τι σημαίνει αυτό για την ταχύτητα  $v$  του ρευστού; Προκύπτει η ταχύτητα του ρευστού από κάποιο δυναμικό;

- (4) Υπολογίστε την κυκλοφορία του ρεστού γύρω από τον κύκλο  $K := \{(x^1, x^2, x^3) : (x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2, x^3 = \alpha\}$ . Πόση είναι η κυκλοφορία του ρεστού όταν ο στροβιλισμός του  $v$  είναι μηδενικός; Είναι το αποτέλεσμα αυτό παράδοξο ή όχι;

Απόδειξη. (1) Κάθε διανυσματικό πεδίο  $v$  αντιστοιχεί σε μία 1-μορφή  $\omega$  η οποία δίνεται από την (1.8). Στην περίπτωση μας, έχουμε

$$v = f(r)(-x^2 e_1 + x^1 e_2) \implies \omega = f(r)(-x^2 dx^1 + x^1 dx^2).$$

(2) Η  $\omega$  είναι μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$ . Επομένως, η  $\star\omega$  θα είναι μία 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^3$ . Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \omega &= -x^2 f(r) dx^1 + x^1 f(r) dx^2, \\ \star\omega &= -x^2 f(r) \star dx^1 + x^1 f(r) \star dx^2 \\ &= -x^2 f(r) dx^2 \wedge dx^3 - x^1 f(r) dx^1 \wedge dx^3, \\ d(\star\omega) &= -d(x^2 f(r) dx^2 \wedge dx^3) - d(x^1 f(r) dx^1 \wedge dx^3) \\ &= -d(x^2 f(r)) \wedge dx^2 \wedge dx^3 - d(x^1 f(r)) \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &= -\left(\frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^3} dx^3\right) \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad -\left(\frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^3} dx^3\right) \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &= -\frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &= -\frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(-\frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^1} + \frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(-\frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^1} + \frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^2}\right) dV, \end{aligned}$$

όπου  $dV$  είναι στο στοιχείο όγκου του  $\mathbb{R}^3$ . Από το Λήμμα 1.9.2, έχουμε  $d(\star\omega) = (\operatorname{div} v) dV$ . Ως εκ τούτου, παίρνουμε

$$\operatorname{div} v = -\frac{\partial(x^2 f(r))}{\partial x^1} + \frac{\partial(x^1 f(r))}{\partial x^2} = -x^2 \frac{df(r)}{dr} \frac{r}{\partial x^1} + x^1 \frac{df(r)}{dr} \frac{r}{\partial x^2}$$

$$= -x^2 \frac{df(r)}{dr} \frac{x^1}{r} + x^1 \frac{df(r)}{dr} \frac{x^2}{r} = 0.$$

(3) Υπολογίζουμε το διαφορικό της  $\omega$  ως εξής

$$\begin{aligned} d\omega &= d(-f(r)x^2 dx^1 + f(r)x^1 dx^2) = -d(f(r)x^2 dx^1) + d(f(r)x^1 dx^2) \\ &= -d(f(r)x^2) \wedge dx^1 + d(f(r)x^1) \wedge dx^2 \\ &= -\left(\frac{\partial(f(r)x^2)}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial(f(r)x^2)}{\partial x^2} dx^2\right) \wedge dx^1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial(f(r)x^1)}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial(f(r)x^1)}{\partial x^2} dx^2\right) \wedge dx^2 \\ &= -\frac{\partial(f(r)x^2)}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial(f(r)x^1)}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{\partial(f(r)x^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(f(r)x^1)}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x^2} x^2 + f(r) + \frac{\partial f(r)}{\partial x^1} x^1 + f(r)\right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x^2} x^2 + \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x^1} x^1 + 2f(r)\right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{df(r)}{dr} \frac{x^2}{r} x^2 + \frac{df(r)}{dr} \frac{x^1}{r} x^1 + 2f(r)\right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r)\right) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Η 1-μορφή  $\omega$  είναι κλειστή εάν και μόνο εάν  $d\omega = 0$  το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) = 0.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που ορίζεται από την πρώτη τάξης διαφορική εξίσωση αυτή και την δοθείσα αρχική συνθήκη  $f(1) = 1$  δίνεται από

$$f(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Προφανώς, αυτή ορίζεται μόνο για  $r > 0$ . Με βάση τον Ορισμό 1.9.7, αυτό σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο  $v$  έχει μηδενικό στροβιλισμό, δηλαδή  $\text{curl } v :=$

$\star(d\omega) = 0$ . Επίσης, με βάση την Άσκηση 1.10.5 (είτε το  $(\alpha)$ , είτε το  $(\beta)$ ), αυτό σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο  $v$  προκύπτει τοπικά από ένα δυναμικό, δηλαδή υπάρχει ανοικτή περιοχή  $V \subset \mathbb{R}^3$  με  $p \in V \subseteq C_R$  και ένα δυναμικό  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $v(p) = (\text{grad}(F))_p$ , για κάθε  $p \in V$ . Έστω  $p = (x^1, x^2, x^3)$ . Με βάση το Λήμμα 1.9.4, έχουμε

$$(\text{grad } f)(p) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} (e_i)_p$$

και συνεπώς το δυναμικό αυτό δίνεται από

$$v(p) = (\text{grad}(F))_p \iff \begin{cases} \frac{\partial F(p)}{\partial x^1} = -f(r)x^2 = -\frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ \frac{\partial F(p)}{\partial x^2} = f(r)x^1 = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ \frac{\partial F(p)}{\partial x^3} = 0. \end{cases}$$

Η τρίτη εξίσωση μας δίνει  $F = F(x^1, x^2)$ . Ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς  $x^1$ , παίρνουμε

$$F(p) = - \int \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} dx^1 + G(x^2) = -\arctan\left(\frac{x^1}{x^2}\right) + G(x^2),$$

όπου  $G = G(x^2)$  είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση του  $x^2$  και μόνο. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην δεύτερη εξίσωση, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(p)}{\partial x^2} = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} &\iff \frac{d}{dx^2} \left( -\arctan\left(\frac{x^1}{x^2}\right) \right) + \frac{dG(x^2)}{dx^2} = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ &\iff \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} + \frac{dG(x^2)}{dx^2} = \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ &\iff \frac{dG(x^2)}{dx^2} = 0 \iff G(x^2) = c, \end{aligned}$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$  είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, καταλήγουμε στο δυναμικό

$$F(p) = -\arctan\left(\frac{x^1}{x^2}\right) + c,$$

το οποίο πράγματι ορίζεται μόνο τοπικά, δηλαδή για  $p \in V := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \neq 0\}$ .

(4) Έστω  $d\lambda = (dx^1, dx^2, dx^3)$  το στοιχείο μήκους. Η κυκλοφορία του ρεστού γύρω από τον κύκλο  $K$  δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\Gamma = \int_K \langle v, d\lambda \rangle = \int_K \sum_{j=1}^3 v^j dx^j = \int_K \omega.$$

Ο κύκλος  $K$  είναι το σύνορο του δίσκου  $D := \{(x^1, x^2, x^3) : (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq R^2, x^3 = \alpha\}$ , δηλαδή  $K = \partial D$ . Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stokes, βρίσκουμε

$$\int_K \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Εισάγουμε τις πολικές συντεταγμένες  $x^1 = x^1(r, \vartheta) = r \cos(\vartheta)$  και  $x^2 = x^2(r, \vartheta) = r \sin(\vartheta)$  για κάθε  $(r, \vartheta) \in T := [0, R] \times [0, 2\pi]$ . Με αυτόν τον τρόπο, ορίζεται μία συνάρτηση  $h : T \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$  με  $h(r, \vartheta) = (x^1(r, \vartheta), x^2(r, \vartheta))$ . Η 2-μορφή ως προς τις πολικές συντεταγμένες δίνεται από

$$\begin{aligned} h^*(d\omega) &= h^* \left[ \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) dx^1 \wedge dx^2 \right] \\ &= \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) dx^1(r, \vartheta) \wedge dx^2(r, \vartheta) \\ &= \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) \left( \frac{\partial x^1}{\partial r} dr + \frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \wedge \left( \frac{\partial x^2}{\partial r} dr + \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \\ &= \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) \left( \frac{\partial x^1}{\partial r} \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} dr \wedge d\vartheta + \frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} \frac{\partial x^2}{\partial r} d\vartheta \wedge dr \right) \\ &= \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) \left( \frac{\partial x^1}{\partial r} \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} \frac{\partial x^2}{\partial r} \right) dr \wedge d\vartheta \\ &= \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) (r \cos^2(\vartheta) + r \sin^2(\vartheta)) dr \wedge d\vartheta \\ &= \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) r dr \wedge d\vartheta. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_D d\omega &= \int_T h^*(d\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) r dr d\vartheta \\
&= 2\pi \int_0^R \left( r \frac{df(r)}{dr} + 2f(r) \right) r dr = 2\pi \int_0^R \left( r^2 \frac{df(r)}{dr} + 2rf(r) \right) dr \\
&= 2\pi \int_0^R \frac{d}{dr} (r^2 f(r)) dr = 2\pi R^2 f(R).
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, η ζητούμενη κυκλοφορία είναι

$$\Gamma = \int_K \langle v, d\lambda \rangle = 2\pi R^2 f(R).$$

Όταν ο στροβιλισμός του  $v$  είναι μηδενικός, από το ερώτημα (3), έχουμε  $f(r) = 1/r^2$ . Τότε, η κυκλοφορία του ρεστού είναι  $\Gamma = 2\pi$  και είναι μάλιστα ανεξάρτητη του  $R$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας προκύπτει μόνο τοπικά από το δυναμικό  $F$  και όχι ολικά (δηλαδή σε όλο το σύνολο  $C_R$ ) και αυτό λόγω του πεδίου ορισμού της πολικής γωνίας  $\vartheta = \arctan(x^1/x^2)$  απο την οποία εκφράζεται το  $F$ . Η συνάρτηση  $(x^1, x^2) \mapsto \arctan(x^1/x^2)$  δεν μπορεί να οριστεί σε όλο το  $\mathbb{R}^2$  ως συνεχής συνάρτηση καθώς έχει ασυνέχεια στο  $x^2 = 0$ . Εάν όμως το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας προέκυπτε (όχι μόνο τοπικά αλλά) ολικά από το δυναμικό  $F$ , τότε η κυκλοφορία γύρω από οποιοδήποτε κλειστό βρόχο (όπως ο κύκλος  $K$ ) θα ήταν μηδενική, διότι, στην περίπτωση αυτή, ο κανόνας αλυσίδας μας δίνει

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \int_K \langle v, d\lambda \rangle = \int_K \langle \text{grad } F, d\lambda \rangle = \int_K \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x^j} dx^j \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F(\gamma(t))}{\partial x^j} \frac{dx^j(t)}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt \\
&= F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0,
\end{aligned}$$

όπου  $t \mapsto \gamma(t) = (x^1(t), x^2(t)) = (\cos t, \sin t)$  είναι μία αναπαραμέτρηση του κύκλου  $K$ . Αυτό όμως δεν συμβαίνει εδώ. Έχουμε μηδενικό στροβιλισμό (για  $r > 0$ ) αλλά μη-μηδενική και σταθερή κυκλοφορία. Συνεπώς, μπορούμε να πούμε

ότι το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας έχει όλο τον μη-μηδενικό στροβιλισμό του συγκεντρωμένο σε ένα και μόνο σημείο (στο  $r = 0$ ) με συνολική ένταση  $I = 2\pi$ . Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός ιδανικού στροβίλου στην ρευστομηχανική.  $\square$

**Άσκηση 4.3.2** (Οι εξισώσεις Euler). Έστω ότι ένα ιδανικό ρευστό ρέει μέσα σε ένα χωρίο του  $\mathbb{R}^n$ . Συμβολίζουμε με  $v = v(t, x)$  το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητάς του και με  $P = P(t, x)$  την συνάρτηση πίεσής του. Ζητούνται τα εξής:

- (1) Να αποδείξετε ότι οι **εξισώσεις Euler** για ένα ιδανικό ρευστό

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle \cdot, \text{grad} \cdot \rangle \right) v = -\text{grad} P$$

μπορούν να εκφραστούν με διαφορικές μορφές ως εξής

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_v \right) \omega = -dQ,$$

όπου  $\omega$  είναι η 1-μορφή που προκύπτει από τη ταχύτητα μέσω της (1.7),  $\mathcal{L}_v$  είναι η παράγωγος Lie, βλέπε Άσκηση 4.1.2, και  $Q$  είναι η συνολική ενέργεια, δηλαδή

$$Q := P - V, \quad V := \frac{1}{2}|v|^2.$$

- (2) Να αποδείξετε το **θεώρημα Kelvin**: σε ένα ιδανικό ρευστό με συντηρητικές δυνάμεις σώματος, η κυκλοφορία γύρω από κάθε κλειστή διαδρομή που ρέει μαζί με το ρευστό διατηρείται σταθερή στο χρόνο.

*Απόδειξη.* (1) Έστω  $v$  ένα διανυσματικό πεδίο και  $\omega$  η 1-μορφή που προκύπτει από αυτή μέσω της (1.7). Έστω ακόμα  $\{e_j : j = 1, 2, \dots, n\}$  και  $\{dx^l : l = 1, 2, \dots, n\}$  οι βάσεις των  $\mathbb{R}_p^n$  και  $(\mathbb{R}_p^n)^*$  αντίστοιχα για κάποιο  $p \in \mathbb{R}^n$ . Τότε,

$$v = \sum_{j=1}^n v^j e_j, \quad \omega = \sum_{l=1}^n \omega_l dx^l, \quad \omega_l := v^l.$$

Υπενθυμίζουμε από την Άσκηση 4.1.2 (3) ότι

$$(\mathcal{L}_v \omega)(X) = \sum_{i,j=1}^n \left( X^j \omega_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + X^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} v^j \right),$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο  $X$ , η οποία για  $\omega_i := v^i$  γίνεται

$$(\mathcal{L}_v \omega)(X) = \sum_{i,j=1}^n \left( X^j v^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + X^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} v^j \right).$$

Για τον πρώτο όρο, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{1}{2} |v|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v^i)^2 \right) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j}, \\ \sum_{i,j=1}^n X^j v^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} &= \sum_{j=1}^n X^j \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial V}{\partial x^j} = \langle X, \text{grad } V \rangle. \end{aligned}$$

Για τον δεύτερο όρο, παρατηρήστε ότι, επειδή το  $v$  είναι διάνυσμα, το  $\text{grad } v$  είναι πίνακας με συνιστώσες  $\partial v^i / \partial x^j$  (αυτό αποτελεί γενίκευση του Λήμματος 1.9.4 από συναρτήσεις  $f$  σε διανύσματα  $v$ ). Έτσι, το  $\langle \text{grad } v, v \rangle$  είναι το διάνυσμα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα  $\text{grad } v$  με το διάνυσμα  $v$  και  $\langle X, \langle \text{grad } v, v \rangle \rangle$  είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος  $X$  με το διάνυσμα  $\langle \text{grad } v, v \rangle$ . Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } v, v \rangle &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) e_i, \\ \langle X, \langle \text{grad } v, v \rangle \rangle &= \sum_{i=1}^n X^i \left( \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^n X^i v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v \omega)(X) &= \langle X, \langle \text{grad } v, v \rangle \rangle + \langle X, \text{grad } V \rangle \\ &= \langle X, \langle \text{grad } v, v \rangle + \text{grad } V \rangle. \end{aligned}$$

Επιπλέον, επειδή  $\omega_l := v^l$ , έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial v^l}{\partial t} e_l, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial t} dx^l = \sum_{l=1}^n \frac{\partial v^l}{\partial t} dx^l, \\ \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) (X) &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial v^l}{\partial t} X^l = \left\langle X, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle.\end{aligned}$$

Επομένως, εφαρμόζοντας την 1-μορφή

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{L}_v \omega + dQ$$

σε ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο  $X$ , χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler και τον ορισμό  $Q := P - V$ , βρίσκουμε

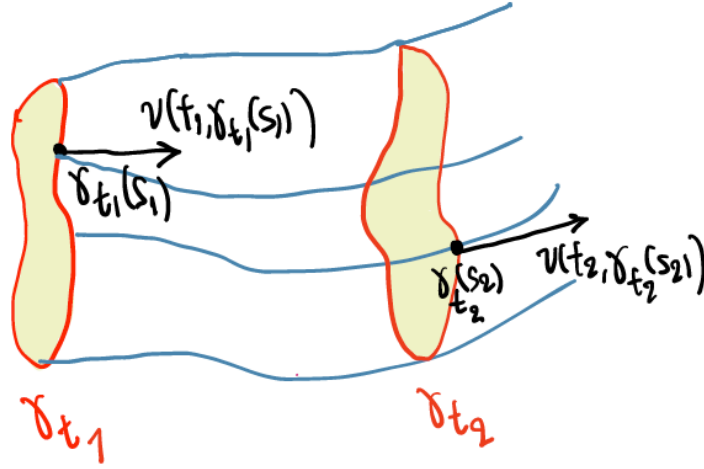
$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{L}_v \omega + dQ \right) (X) &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) (X) + (\mathcal{L}_v \omega)(X) + dQ(X) \\ &= \left\langle X, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle + \langle X, \langle \text{grad } v, v \rangle + \text{grad } V \rangle + \langle X, \text{grad } Q \rangle \\ &= \left\langle X, \frac{\partial v}{\partial t} + \langle \text{grad } v, v \rangle + \text{grad } V + \text{grad } Q \right\rangle \\ &= \langle X, -\text{grad } P + \text{grad } V + \text{grad } Q \rangle = 0,\end{aligned}$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(2) Έστω ότι το ρευστό κινείται με ταχύτητα  $v = v(t, x)$ . Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία κλειστή διαδρομή  $\gamma_t$  που ρέει μαζί με το ρευστό. Για κάθε σταθερό  $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ , αυτή είναι μία κλειστή καμπύλη  $s \mapsto \gamma_t(s)$ , με παράμετρο το  $s \in (\alpha, \beta)$ . Όταν το  $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$  μεταβάλλεται, η εξέλιξή της δίνεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d}{dt} \gamma_t(s) = v(t, \gamma_t(s)), \quad \gamma_0(s) = \gamma(s),$$

για κάθε  $s \in (\alpha, \beta)$ , βλέπε Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Η καμπύλη  $\gamma_t$  είναι μία κλειστή διαδρομή που ρέει μαζί με το ρευστό. Για κάθε σταθερό  $t$ , η καμπύλη  $s \mapsto \gamma_t(s)$  έχει παράμετρο το  $s \in (\alpha, \beta)$ . Όταν το  $t$  μεταβάλλεται, από  $t = t_1$  προς  $t = t_2$ , η  $\gamma_t$  εξελίσσεται προς την κατεύθυνση του ρευστού, δηλαδή στην κατεύθυνση του  $v(t, x)$  για  $x = \gamma_t(s)$ .

Η κυκλοφορία γύρω από την κλειστή διαδρομή  $\gamma_t$  δίνεται από

$$\Gamma(t) := \int_{\gamma_t} \omega,$$

όπου  $\omega$  είναι η 1-μορφή που αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο  $v$  μέσω της (1.7), δηλαδή  $\omega := \langle v, \cdot \rangle$ . Επομένως, θέλουμε να αποδείξουμε ότι  $d\Gamma(t)/dt = 0$ , για κάθε  $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ . Η καμπύλη  $\gamma_t$  δημιουργεί την ροή  $\Phi_t$  του διανυσματικού πεδίου  $v$  (βλέπε Άσκηση 4.1.2) που ορίζεται ως  $\gamma_t = \Phi_t(\gamma_0)$ . Η απεικόνιση  $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  επάγει την pull-back απεικόνιση  $\Phi_t^*$  η οποία μετατρέπει την 1-μορφή  $\omega$  στην 1-μορφή  $\Phi_t^*\omega$ . Χρησιμοποιούμε αυτήν για να αλλάζουμε μεταβλητές στο ολοκλήρωμα. Έχουμε

$$\Gamma(t) := \int_{\gamma_t} \omega = \int_{\Phi_t(\gamma_0)} \omega = \int_{\gamma_0} \Phi_t^*\omega.$$

Τώρα, η παράγωγος ως προς  $t$  είναι

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_0} \Phi_t^*\omega = \int_{\gamma_0} \frac{d}{dt} (\Phi_t^*\omega).$$

Όπως στην Άσκηση 4.1.2 (3), μπορεί κανείς να δείξει (επαληθεύστε τον υπολογισμό αυτό!) ότι, όταν η 1-μορφή  $\omega$  εξαρτάται από τον χρόνο (όπως στην περίπτωση αυτή, αφού  $v = v(t, x)$ ), τότε

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* \omega) = \left( \frac{d}{dt} \Phi_t^* \right) \omega + \Phi_t^* \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)$$

και, αφού από την Άσκηση 4.1.2 (2) έχουμε

$$\left( \frac{d}{dt} \Phi_t^* \right) \omega = \Phi_t^* (\mathcal{L}_v \omega),$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \int_{\gamma_0} \frac{d}{dt} (\Phi_t^* \omega) = \int_{\gamma_0} \left( \Phi_t^* (\mathcal{L}_v \omega) + \Phi_t^* \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \right) \\ &= \int_{\gamma_0} \Phi_t^* \left( \mathcal{L}_v \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = \int_{\Phi_t(\gamma_0)} \left( \mathcal{L}_v \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \\ &= \int_{\gamma_t} \left( \mathcal{L}_v \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Από το πρώτο υποερώτημα, οι εξισώσεις Euler εκφρασμένες με διαφορικές μορφές μας δίνουν

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \int_{\gamma_t} \left( \mathcal{L}_v \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = - \int_{\gamma_t} dQ.$$

Τέλος, με βάση το Θεώρημα Stokes, βρίσκουμε

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = - \int_{\gamma_t} dQ = - \int_{\partial \gamma_t} Q = - [Q(\gamma_t(\beta)) - Q(\gamma_t(\alpha))] = 0,$$

επειδή η καμπύλη  $\gamma_t$  είναι κλειστή και συνεπώς το τελικό της σημείο  $\gamma_t(\beta)$  είναι ίδιο με το αρχικό  $\gamma_t(\alpha)$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Άσκηση 4.3.3** (Θεώρημα Αρχιμήδη). Ένα ρευστό σταθερής πυκνότητας  $\gamma > 0$  εμπεριέχεται στο χωρίο  $Q := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^3 < 0\}$  και η (προς τα πάνω) πίεσή του δίνεται από το διανυσματικό πεδίο

$$F(x^1, x^2, x^3) := \gamma x^3 e_3,$$

για κάθε  $(x^1, x^2, x^3) \in U$ . Υποθέτουμε ότι το ρευστό ασκεί ίση πίεση προς όλες τις κατευθύνσεις. (α) Να υπολογιστεί η **άνωση** που δέχεται μία συμπαγής, τρισδιάστατη πολλαπλότητα  $U$  με λείο σύνορο  $\partial U$  τοποθετημένη μέσα στο χωρίο  $U$ . (β) Τι συμβαίνει εάν η πολλαπλότητα  $U$  δεν είναι πλήρως βυθισμένη μέσα στο  $Q$ ;

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι μία συμπαγής και τρισδιάστατη πολλαπλότητα  $U$  με λείο σύνορο  $\partial U$  τοποθετείται μέσα στο χωρίο  $Q$ , δηλαδή έχουμε  $U \subset Q$ . Έστω ακόμα  $N$  το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην δισδιάστατη επιφάνεια  $\partial U$  (με φορά προς τα έξω). (α) Η άνωση που δέχεται η πολλαπλότητα  $U$  λόγω του ρευστού ισούται με την συνολική ποσότητα της πίεσης στο σύνορο  $\partial U$  στην κατεύθυνση του  $N$ , δηλαδή

$$\mathcal{A} := \int_{\partial U} \langle F, N \rangle dA.$$

Με βάση το Θεώρημα Gauss (που προκύπτει από το Θεώρημα Stokes, βλέπε Άσκηση 3.4.3), έχουμε

$$\mathcal{A} = \int_U (\operatorname{div} F) dV = \int_U \frac{\partial F^3}{\partial x^3} dV = \gamma \int_U dV = \gamma \operatorname{Vol}(U).$$

Εδώ, χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 1.9.2 (α) για να υπολογίσουμε την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου  $F$ . (β) Εάν η πολλαπλότητα  $U$  δεν είναι πλήρως βυθισμένη μέσα στο  $Q$ , τότε το μόνο μέρος της πολλαπλότητας που δέχεται πίεση από το ρευστό είναι αυτό που βρίσκεται εντός του  $Q$ . Έτσι, παίρνουμε ότι η άνωση στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$\mathcal{A} = \gamma \operatorname{Vol}(U \cap Q),$$

δηλαδή όσο μεγαλύτερο μέρος του σώματος είναι βυθισμένο, τόσο μεγαλύτερη είναι η άνωση.  $\square$

## 4.4 Εφαρμογές στον Ηλεκτρομαγνητισμό

**Άσκηση 4.4.1** (Οι εξισώσεις Maxwell). Ο χωροχρόνος Minkowski ορίζεται ως το σύνολο  $\mathbb{R}^4$  με συντεταγμένες  $(t := x^0, x^1, x^2, x^3)$  εφοδιασμένο με την

μετρική

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i,j=1} \eta_{ij} X^i Y^j, \quad \eta := (\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

για κάθε διανυσματικά πεδία  $X = X^0 e_0 + X^1 e_1 + X^2 e_2 + X^3 e_3$  και  $Y = Y^0 e_0 + Y^1 e_1 + Y^2 e_2 + Y^3 e_3$ . Η εισαγωγή νέου εσωτερικού γινομένου αλλάζει τον Ορισμό 1.8.1 του τελεστή Hodge ως εξής:

$$\star(dx^I) = \text{sgn}(\sigma) \left( \prod_{\alpha \in J} \eta^{\alpha\alpha} \right) dx^J,$$

όπου συμβολίζουμε με  $\eta^{ij}$  τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα  $\eta^{-1}$ . Το **ηλεκτρομαγνητικό πεδίο**  $F$  είναι η 2-μορφή που δίνεται από

$$F := E \wedge dt + B,$$

όπου το **ηλεκτρικό πεδίο** και το **μαγνητικό πεδίο** δίνονται αντίστοιχα από

$$\begin{aligned} E &:= E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3, \\ B &:= B_{12} dx^1 \wedge dx^2 + B_{13} dx^1 \wedge dx^3 + B_{23} dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned}$$

για κάποιες λείες συναρτήσεις  $E_i = E_i(t, x^1, x^2, x^3)$  και  $B_{ij} = B_{ij}(t, x^1, x^2, x^3)$ . Επίσης, η **πυκνότητα ρεύματος**  $J$  είναι η 1-μορφή που δίνεται από

$$J := \rho dt + \sum_{l=1}^3 \tilde{J}_l dx^l,$$

για κάποιες λείες συναρτήσεις  $\rho = \rho(t, x^1, x^2, x^3)$  και  $\tilde{J}_l := \tilde{J}_l(t, x^1, x^2, x^3)$ . Η πρώτη συνιστώσα  $\rho = \rho(t, x^1, x^2, x^3)$  αυτής ονομάζεται **πυκνότητα φορτίου**. Ζητούνται τα εξής:

(1) Να αποδείξετε ότι η **1η εξίσωση Maxwell**

$$dF = 0$$

είναι ισοδύναμη τους ακόλουθους νόμους στην διαφορική τους μορφή:

(α) Νόμος του Faraday:

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

(β) Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

$$\operatorname{div} B = 0.$$

(2) Να αποδείξετε ότι η **2η εξίσωση Maxwell**

$$d(\star F) = \star J$$

είναι ισοδύναμη με τους ακόλουθους νόμους στην διαφορική τους μορφή:

(α) Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$-\operatorname{div} E = \rho,$$

(β) Νόμος του Ampere:

$$\operatorname{curl} B = \tilde{J} + \frac{\partial E}{\partial t}.$$

(3) Να αποδείξετε ότι η **3η εξίσωση Maxwell**

$$d(\star J) = 0$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση συνέχειας φορτίου:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{J} = 0.$$

(4) Να αποδείξετε ότι το θεώρημα του Stokes περιλαμβάνει όλους τους ακόλουθους νόμους στην ολοκληρωτική τους μορφή:

(α) Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$-\int_{\partial U} \langle E, N \rangle dA = \int_U \rho dV,$$

(β) Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

$$\int_{\partial U} \langle B, N \rangle dA = 0,$$

(γ) Νόμος του Faraday:

$$\int_{\partial S} \langle E, T \rangle d\lambda = -\frac{d}{dt} \int_S \langle B, N \rangle dA,$$

(δ) Νόμος του Ampere:

$$\int_{\partial S} \langle B, T \rangle d\lambda = \int_S \langle \tilde{J}, N \rangle dA + \frac{d}{dt} \int_S \langle E, N \rangle dA.$$

(ε) Εξίσωση συνέχειας φορτίου:

$$\frac{d}{dt} \int_U \rho dV = - \int_{\partial U} \langle \tilde{J}, N \rangle dA.$$

Εδώ,  $U$  είναι ένα τρισδιάστατο και συμπαγές χωρίο του  $\mathbb{R}^4$  με λείο σύνορο  $\partial U$ ,  $S$  μία δισδιάστατη επιφάνεια του  $\mathbb{R}^4$ ,  $N$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στις επιφάνειες  $\partial U$  και  $S$ ,  $T$  είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στην καμπύλη  $\partial S$ ,  $d\lambda$  στο στοιχείο εμβαδού,  $dA$  στο στοιχείο εμβαδού και  $dV$  στο στοιχείο όγκου

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η 2-μορφή  $F$  στον  $\mathbb{R}^4$  δίνεται όπως παραπάνω. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του διαφορικού μορφών, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} dE \wedge dt &= d \left( \sum_{i=1}^3 E_i dx^i \wedge dt \right) = \sum_{i=1}^3 d(E_i dx^i \wedge dt) \\ &= \sum_{i=1}^3 dE_i \wedge dx^i \wedge dt = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^i \wedge dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq i, 0}}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^i \wedge dt. \end{aligned}$$

$\Gamma \mid i = 1$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq 1,0}}^3 \frac{\partial E_1}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^1 \wedge dt = \left( \sum_{\lambda \in \{2,3\}} \frac{\partial E_1}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^1 \wedge dt \\
& = \left( \frac{\partial E_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 \wedge dt \\
& = \frac{\partial E_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dt + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dt \\
& = -\frac{\partial E_1}{\partial x^2} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

$\Gamma \mid i = 2$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq 2,0}}^3 \frac{\partial E_2}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^2 \wedge dt = \left( \sum_{\lambda \in \{1,3\}} \frac{\partial E_2}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^2 \wedge dt \\
& = \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial E_2}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 \wedge dt \\
& = \frac{\partial E_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dt + \frac{\partial E_2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 \wedge dt \\
& = \frac{\partial E_2}{\partial x^1} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

$\Gamma \mid i = 3$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq 3,0}}^3 \frac{\partial E_3}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^3 \wedge dt = \left( \sum_{\lambda \in \{1,2\}} \frac{\partial E_3}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^3 \wedge dt \\
& = \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} dx^2 \right) \wedge dx^3 \wedge dt \\
& = \frac{\partial E_3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 \wedge dt + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt \\
& = \frac{\partial E_3}{\partial x^1} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

Έτσι, ο πρώτος όρος είναι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq i}}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \wedge dx^i \wedge dt &= \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &+ \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) dt \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Παρομοίως, ο δεύτερος όρος είναι (επαληθεύστε τον υπολογισμό αυτό!)

$$\begin{aligned} dB &= \left( \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \frac{\partial B_{12}}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B_{13}}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &+ \frac{\partial B_{23}}{\partial t} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Τοποθετώντας αυτά τα δύο μαζί στον τύπο  $dF = dE \wedge dt + dB$ , βρίσκουμε

$$\begin{aligned} dF &= \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &+ \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{13}}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &+ \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{23}}{\partial t} \right) dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \left( \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Αυτή είναι μία 3-μορφή στον  $\mathbb{R}^4$ . Ο τελεστής Hodge την μετατρέπει σε μία 1-μορφή  $\star dF$  στον  $\mathbb{R}^4$ . Επειδή η απεικόνιση  $\omega \mapsto \star \omega$  είναι γραμμική, έχουμε

$$\begin{aligned} \star dF &= \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial t} \right) \star (dt \wedge dx^1 \wedge dx^2) \\ &+ \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{13}}{\partial t} \right) \star (dt \wedge dx^1 \wedge dx^3) \\ &+ \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{23}}{\partial t} \right) \star (dt \wedge dx^2 \wedge dx^3) \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} \right) \star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3).$$

Ας υπολογίσουμε το  $\star(dt \wedge dx^1 \wedge dx^2)$ . Εδώ, έχουμε  $I = \{0, 1, 2\}$  και το συμπλήρωμα του είναι  $J = \{3\}$ . Συνεπώς, έχουμε την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

η οποία είναι προφανώς άρτια. Έτσι,  $\text{sgn}(\sigma) = +1$ . Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην εκφώνηση, έχουμε

$$\star(dt \wedge dx^1 \wedge dx^2) = \text{sgn}(\sigma) \eta^{33} dx^3 = (+1)(+1) dx^3 = dx^3.$$

Για το  $\star(dt \wedge dx^1 \wedge dx^3)$ , έχουμε  $I = \{0, 1, 3\}$  και το συμπλήρωμα του είναι  $J = \{2\}$ . Συνεπώς, έχουμε την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

η οποία είναι προφανώς περιττή. Έτσι,  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ . Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην εκφώνηση, έχουμε

$$\star(dt \wedge dx^1 \wedge dx^3) = \text{sgn}(\sigma) \eta^{22} dx^2 = (-1)(+1) dx^2 = -dx^2.$$

Για το  $\star(dt \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ , έχουμε  $I = \{0, 2, 3\}$  και το συμπλήρωμα του είναι  $J = \{1\}$ . Συνεπώς, έχουμε την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

η οποία είναι προφανώς άρτια. Έτσι,  $\text{sgn}(\sigma) = +1$ . Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην εκφώνηση, έχουμε

$$\star(dt \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \text{sgn}(\sigma) \eta^{11} dx^1 = (+1)(+1) dx^1 = dx^1.$$

Αυτά είναι τα ίδια αποτελέσματα με αυτά που θα έπαιρνε κανείς εάν δεν άλλαζε το εσωτερικό γινόμενο και είχαμε το Ευκλείδιο. Η μόνη διαφορά είναι στον όρο

$\star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ . Εδώ, έχουμε  $I = \{1, 2, 3\}$  και το συμπλήρωμα του είναι  $J = \{0\}$ . Συνεπώς, έχουμε την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

η οποία είναι προφανώς περιττή. Έτσι,  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ . Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην εκφώνηση, έχουμε

$$\star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \text{sgn}(\sigma)\eta^{00}dx^0 = (-1)(-1)dx^0 = dt.$$

Αντικαθιστώντας αυτά στον προηγούμενο υπολογισμό, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \star dF &= \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial t} \right) dx^3 - \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{13}}{\partial t} \right) dx^2 \\ &+ \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{23}}{\partial t} \right) dx^1 + \left( \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} \right) dt. \end{aligned}$$

Αυτή είναι μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^4$ . Την ταυτίζουμε με ένα διανυσματικό πεδίο, έστω  $X$ , μέσω της (1.7). Συγκεκριμένα, αυτό δίνεται από

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial t} \right) e_3 - \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{13}}{\partial t} \right) e_2 \\ &+ \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{23}}{\partial t} \right) e_1 + \left( \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} \right) e_0 \end{aligned}$$

και χωρίζουμε τους όρους του ως εξής

$$\begin{aligned} X &= \underbrace{\left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) e_3 - \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3} \right) e_2 + \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) e_1}_{\text{πρώτος όρος}} \\ &+ \underbrace{\left( \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1} \right) e_0}_{\text{δεύτερος όρος}} + \underbrace{\left( \frac{\partial B_{12}}{\partial t} e_3 - \frac{\partial B_{13}}{\partial t} e_2 + \frac{\partial B_{23}}{\partial t} e_1 \right)}_{\text{τρίτος όρος}}. \end{aligned}$$

Απομένει να ερμηνεύσουμε τους τρεις αυτούς όρους. Ο πρώτος είναι ο στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου. Πράγματι, μετατρέπουμε την 1-μορφή  $E := E_1 dx^1 +$

$E_2 dx^2 + E_3 dx^3$  μέσω της (1.7) στο διανυσματικό πεδίο  $E := E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3$ . Με βάση το Λήμμα 1.9.8 (α), έχουμε

$$\operatorname{curl} E = \left( \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) e_1 + \left( \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} \right) e_2 + \left( \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) e_3$$

το οποίο και ταυτίζεται με τον πρώτο όρο. Ο δεύτερος είναι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου. Πράγματι, το μαγνητικό πεδίο είναι η 2-μορφή

$$B = B_{12} dx^1 \wedge dx^2 + B_{13} dx^1 \wedge dx^3 + B_{23} dx^2 \wedge dx^3.$$

Για να υπολογίσουμε την απόκλιση του  $B$ , πρέπει πρώτα να το μετατρέψουμε σε διανυσματικό πεδίο. Αυτό επιτυγχάνεται με το να εφαρμόσουμε τον τελεστή Hodge ο οποίος μετατρέπει την 2-μορφή  $B$  του  $\mathbb{R}^3$  στην 1-μορφή  $\star B$  του  $\mathbb{R}^3$  ως εξής

$$\begin{aligned} \star B &= B_{12} \star (dx^1 \wedge dx^2) + B_{13} \star (dx^1 \wedge dx^3) + B_{23} \star (dx^2 \wedge dx^3) \\ &= B_{12} dx^3 - B_{13} dx^2 + B_{23} dx^1. \end{aligned}$$

Εδώ, χρησιμοποιήσαμε το Παράδειγμα 1.8.4 στην δεύτερη γραμμή όπου υπολογίσαμε αναλυτικά ότι  $\star(dx^1 \wedge dx^2) = dx^3$ ,  $\star(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^2$  και  $\star(dx^2 \wedge dx^3) = dx^1$ . Τώρα, ταυτίζουμε την 1-μορφή  $\star B$  με ένα διανυσματικό πεδίο, έστω  $\beta$ , μέσω της (1.7) και παίρνουμε

$$\beta = B_{12} e_3 - B_{13} e_2 + B_{23} e_1.$$

Έτσι, η απόκλιση του  $B$  ορίζεται ως η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου  $\beta$  και το Λήμμα 1.9.2 (α) μας δίνει ότι

$$\operatorname{div} B := \operatorname{div} \beta := \frac{\partial B_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x^1}. \quad (4.2)$$

Παρομοίως, ο τρίτος όρος είναι

$$\frac{\partial B}{\partial t} := \frac{\partial \beta}{\partial t} := \frac{\partial B_{12}}{\partial t} e_3 - \frac{\partial B_{13}}{\partial t} e_2 + \frac{\partial B_{23}}{\partial t} e_1.$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$X = \sum_{j=1}^3 \left( \operatorname{curl} E + \frac{\partial B}{\partial t} \right)^j e_j + (\operatorname{div} B) e_0$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο, δηλαδή

$$dF = 0 \iff \star dF = 0 \iff X = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{div} B = 0. \end{cases}$$

(2) Το  $F$  είναι μία 2-μορφή στον  $\mathbb{R}^4$  και ο τελεστής Hodge το μετατρέπει στην 2-μορφή  $\star F$  στον  $\mathbb{R}^4$ . Αυτή δίνεται από

$$\begin{aligned} \star F &= \star(E \wedge dt) + \star B \\ &= \star((E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dt) \\ &\quad + B_{12} \star(dx^1 \wedge dx^2) + B_{13} \star(dx^1 \wedge dx^3) + B_{23} \star(dx^2 \wedge dx^3) \\ &= \star(E_1 dx^1 \wedge dt + E_2 dx^2 \wedge dt + E_3 dx^3 \wedge dt) \\ &\quad + B_{12} \star(dx^1 \wedge dx^2) + B_{13} \star(dx^1 \wedge dx^3) + B_{23} \star(dx^2 \wedge dx^3) \\ &= E_1 \star(dx^1 \wedge dt) + E_2 \star(dx^2 \wedge dt) + E_3 \star(dx^3 \wedge dt) \\ &\quad + B_{12} \star(dx^1 \wedge dx^2) + B_{13} \star(dx^1 \wedge dx^3) + B_{23} \star(dx^2 \wedge dx^3). \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $x^0 = t$ . Για το  $\star(dx^1 \wedge dt)$ , έχουμε  $I = \{0, 1\}$  και το συμπλήρωμα του είναι  $J = \{2, 3\}$ . Συνεπώς, έχουμε την μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

η οποία είναι προφανώς περιττή. Έτσι,  $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ . Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην εκφώνηση, έχουμε

$$\star(dx^1 \wedge dt) = \operatorname{sgn}(\sigma) \eta^{22} \eta^{33} dx^2 \wedge dx^3 = (-1)(+1)(+1) dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^3.$$

Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα. Εν τέλει, έχουμε

$$\star F = -E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^1 \wedge dx^3 - E_3 dx^1 \wedge dx^2 \quad (4.3)$$

$$- B_{12} dt \wedge dx^3 + B_{13} dt \wedge dx^2 - B_{23} dt \wedge dx^1. \quad (4.4)$$

Στην συνέχεια, το διαφορικό θα μετατρέψει την 2-μορφή  $\star F$  στην 3-μορφή  $d(\star F)$ . Συγκεκριμένα, έχουμε

$$d(\star F) = -d(E_1 dx^2 \wedge dx^3) + d(E_2 dx^1 \wedge dx^3) - d(E_3 dx^1 \wedge dx^2)$$

$$\begin{aligned}
& -d(B_{12}dt \wedge dx^3) + d(B_{13}dt \wedge dx^2) - d(B_{23}dt \wedge dx^1) \\
& = -dE_1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dE_2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - dE_3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
& - dB_{12} \wedge dt \wedge dx^3 + dB_{13} \wedge dt \wedge dx^2 - dB_{23} \wedge dt \wedge dx^1 \\
& = -\left(\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial E_1}{\partial x^\lambda} dx^\lambda\right) \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left(\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial E_2}{\partial x^\lambda} dx^\lambda\right) \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
& - \left(\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial E_3}{\partial x^\lambda} dx^\lambda\right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \left(\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial B_{12}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda\right) \wedge dt \wedge dx^3 \\
& + \left(\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial B_{13}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda\right) \wedge dt \wedge dx^2 - \left(\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial B_{23}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda\right) \wedge dt \wedge dx^1 \\
& = -\frac{\partial E_1}{\partial t} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial E_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \frac{\partial E_2}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
& - \frac{\partial E_3}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
& - \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} dx^1 \wedge dt \wedge dx^3 - \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} dx^2 \wedge dt \wedge dx^3 \\
& + \frac{\partial B_{13}}{\partial x^1} dx^1 \wedge dt \wedge dx^2 + \frac{\partial B_{13}}{\partial x^3} dx^3 \wedge dt \wedge dx^2 \\
& - \frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} dx^2 \wedge dt \wedge dx^1 - \frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} dx^3 \wedge dt \wedge dx^1 \\
& = -\frac{\partial E_1}{\partial t} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial E_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \frac{\partial E_2}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \frac{\partial E_2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& - \frac{\partial E_3}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E_3}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^1} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B_{13}}{\partial x^3} dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& - \frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} dt \wedge dx^1 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

Ομαδοποιώντας τους όρους, καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned}
d(\star F) = & \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial t} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
& + \left( \frac{\partial B_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial t} \right) dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
& + \left( -\frac{\partial E_2}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Αυτή είναι μία 3-μορφή στον  $\mathbb{R}^4$ . Η τελεστής Hodge την μετατρέπει σε μία 1-μορφή  $\star d(\star F)$  στον  $\mathbb{R}^4$ . Αυτή δίνεται από

$$\begin{aligned}
\star d(\star F) = & \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial t} \right) \star (dt \wedge dx^1 \wedge dx^2) \\
& + \left( \frac{\partial B_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial t} \right) \star (dt \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\
& + \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} \right) \star (dt \wedge dx^1 \wedge dx^3) \\
& + \left( -\frac{\partial E_2}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) \star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3).
\end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στο υποερώτημα (α) υπολογίσαμε  $\star(dt \wedge dx^1 \wedge dx^2) = dx^3$ ,  $\star(dt \wedge dx^2 \wedge dx^3) = dx^1$ ,  $\star(dt \wedge dx^1 \wedge dx^3) = -dx^2$ , και  $\star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = dt$ . Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\star d(\star F) = & \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial t} \right) dx^3 + \left( \frac{\partial B_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial t} \right) dx^1 \\
& - \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} \right) dx^2 + \left( -\frac{\partial E_2}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) dt.
\end{aligned}$$

Αυτή είναι μία 1-μορφή στον  $\mathbb{R}^4$ . Την ταυτίζουμε με ένα διανυσματικό πεδίο, έστω  $Y$ , μέσω της (1.7). Συγκεκριμένα, αυτό δίνεται από

$$Y = \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial t} \right) e_3 + \left( \frac{\partial B_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial t} \right) e_1$$

$$- \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} \right) e_2 + \left( -\frac{\partial E_2}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) e_0.$$

και χωρίζουμε τους όρους του ως εξής

$$Y = \underbrace{\left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial B_{13}}{\partial x^1} \right) e_3 + \left( \frac{\partial B_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} \right) e_1 - \left( -\frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} \right) e_2}_{\text{πρώτος όρος}} - \underbrace{\left( \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) e_0}_{\text{δεύτερος όρος}} - \underbrace{\left( \frac{\partial E_3}{\partial t} e_3 + \frac{\partial E_1}{\partial t} e_1 + \frac{\partial E_2}{\partial t} e_2 \right)}_{\text{τρίτος όρος}}.$$

Απομένει να ερμηνεύσουμε τους τρεις αυτούς όρους. Ο πρώτος είναι ο στροβιλισμός του μαγνητικού πεδίου. Πράγματι, το μαγνητικό πεδίο είναι η 2-μορφή

$$B = B_{12} dx^1 \wedge dx^2 + B_{13} dx^1 \wedge dx^3 + B_{23} dx^2 \wedge dx^3.$$

Για να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό του  $B$ , πρέπει πρώτα να το μετατρέψουμε σε διανυσματικό πεδίο. Αυτό επιτυγχάνεται με το να εφαρμόσουμε τον τελεστή Hodge ο οποίος μετατρέπει την 2-μορφή  $B$  του  $\mathbb{R}^3$  στην 1-μορφή  $\star B$  του  $\mathbb{R}^3$  ως εξής

$$\begin{aligned} \star B &= B_{12} \star (dx^1 \wedge dx^2) + B_{13} \star (dx^1 \wedge dx^3) + B_{23} \star (dx^2 \wedge dx^3) \\ &= B_{12} dx^3 - B_{13} dx^2 + B_{23} dx^1. \end{aligned}$$

Εδώ, χρησιμοποιήσαμε το Παράδειγμα 1.8.4 στην δεύτερη γραμμή όπου υπολογίσαμε αναλυτικά ότι  $\star(dx^1 \wedge dx^2) = dx^3$ ,  $\star(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^2$  και  $\star(dx^2 \wedge dx^3) = dx^1$ . Τώρα, ταυτίζουμε την 1-μορφή  $\star B$  με ένα διανυσματικό πεδίο, έστω  $\beta$ , μέσω της (1.7) και παίρνουμε

$$\beta = B_{12} e_3 - B_{13} e_2 + B_{23} e_1.$$

Έτσι, ο στροβιλισμός του  $B$  ορίζεται ως ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου  $\beta$  και το Λήμμα 1.9.8 (α) μας δίνει ότι

$$\text{curl } B = \text{curl } \beta = \left( \frac{\partial B_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial(-B_{13})}{\partial x^3} \right) e_1$$

$$+ \left( \frac{\partial B_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial B_{12}}{\partial x^1} \right) e_2 + \left( \frac{\partial(-B_{13})}{\partial x^1} - \frac{\partial B_{23}}{\partial x^2} \right) e_3$$

το οποίο ταυτίζεται με τον πρώτο όρο. Ο δεύτερος είναι η απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου. Πράγματι, μετατρέπουμε την 1-μορφή  $E := E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$  μέσω της (1.7) στο διανυσματικό πεδίο  $E := E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3$ . Με βάση το Λήμμα 1.9.2 (a), έχουμε

$$\operatorname{div} E := \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3}. \quad (4.6)$$

Παρομοίως, ο τρίτος όρος είναι

$$\frac{\partial B}{\partial t} := \frac{\partial \beta}{\partial t} := \frac{\partial B_{12}}{\partial t} e_3 - \frac{\partial B_{13}}{\partial t} e_2 + \frac{\partial B_{23}}{\partial t} e_1.$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$Y = \sum_{j=1}^3 \left( \operatorname{curl} B - \frac{\partial E}{\partial t} \right)^j e_j - (\operatorname{div} E) e_0.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι<sup>2</sup>

$$\star \star J = J.$$

Πράγματι, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} J &= \rho dt + \tilde{J}_1 dx^1 + \tilde{J}_2 dx^2 + \tilde{J}_3 dx^3, \\ \star J &= \rho \star dt + \tilde{J}_1 \star dx^1 + \tilde{J}_2 \star dx^2 + \tilde{J}_3 \star dx^3 \\ &= -\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \tilde{J}_1 dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \tilde{J}_2 dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \tilde{J}_3 dt \wedge dx^1 \wedge dx^2, \\ \star \star J &= -\rho \star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) + \tilde{J}_1 \star (dt \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\ &\quad - \tilde{J}_2 \star (dt \wedge dx^1 \wedge dx^3) + \tilde{J}_3 \star (dt \wedge dx^1 \wedge dx^2) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Σημειώνουμε ότι, εάν  $\omega$  είναι μία  $k$ -μορφή στον  $\mathbb{R}^n$ , το Λήμμα 1.8.5 μας δίνει  $\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \omega$ . Ωστόσο, αυτό ισχύει μόνο με το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο. Ανατρέξτε στην απόδειξη του Λήμματος 1.8.5 και επαληθεύστε τον ισχυρισμό αυτό. Εάν αλλάξουμε το εσωτερικό γινόμενο όπως εδώ, τότε μπορεί κανείς να αποδείξει ότι  $\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)+1} \omega$ . Επομένως, το αποτέλεσμα αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το Λήμμα 1.8.5, απλά αποτελεί παραλλαγή του για διαφορετικό εσωτερικό γινόμενο.

$$= -\rho(-dt) + \tilde{J}_1 dx^1 - \tilde{J}_2(-dx^2) + \tilde{J}_3 dx^3 = J.$$

Συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο  $J := J_0 e_0 + J_1 e_1 + J_2 e_2 + J_3 e_3$  το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από την 1-μορφή  $J := J_0 dx^0 + J_1 dx^1 + J_2 dx^2 + J_3 dx^3$  μέσω της (1.7). Τέλος, τοποθετώντας αυτά τα αποτελέσματα μαζί παίρνουμε το ζητούμενο, δηλαδή

$$d(\star F) = \star J \iff \star d(\star F) = \star \star J \iff Y = J \iff \begin{cases} \text{curl } B - \frac{\partial E}{\partial t} = \tilde{J}, \\ -\text{div } E = \rho. \end{cases}$$

το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

(3) Το ζητούμενο προκύπτει με έναν απλό υπολογισμό όπως τους παραπάνω. Πράγματι, στο ερώτημα (2) υπολογίσαμε ότι

$$\begin{aligned} \star J &= -\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \tilde{J}_1 dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \tilde{J}_2 dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \tilde{J}_3 dt \wedge dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Συνεχίζοντας από εδώ, έχουμε

$$\begin{aligned} d(\star J) &= -d\rho \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + d\tilde{J}_1 \wedge dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - d\tilde{J}_2 \wedge dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + d\tilde{J}_3 \wedge dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= -\left(\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x^\mu} dx^\mu\right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left(\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial x^\mu} dx^\mu\right) \wedge dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \left(\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial x^\mu} dx^\mu\right) \wedge dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \left(\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial x^\mu} dx^\mu\right) \wedge dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dt \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial x^1} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial x^2} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial x^3} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

$$= - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial x^3} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Όπως και παραπάνω, μετατρέπουμε την 1-μορφή  $\tilde{J} := \tilde{J}_1 dx^1 + \tilde{J}_2 dx^2 + \tilde{J}_3 dx^3$  μέσω της (1.7) στο διανυσματικό πεδίο  $\tilde{J} := \tilde{J}_1 e_1 + \tilde{J}_2 e_2 + \tilde{J}_3 e_3$ . Με βάση το Λήμμα 1.9.2 (a), έχουμε

$$\operatorname{div} \tilde{J} := \frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial x^3}$$

και συνεπώς καταλήγουμε στην έκφραση

$$d(\star J) = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{J} \right) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

το οποίο και αποδεικνύει το ζητούμενο.

(4) Κάθε υποερώτημα, προκύπτει άμεσα από τα υποερωτήματα (1), (2) και (3) εφαρμόζοντας την Άσκηση 3.4.3, η οποία προκύπτει από το Θεώρημα Stokes. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \langle E, N \rangle dA &= \int_U (\operatorname{div} E) dV = - \int_U \rho dV, \\ \int_{\partial U} \langle B, N \rangle dA &= \int_U (\operatorname{div} B) dV = 0, \\ \int_{\partial S} \langle E, T \rangle d\lambda &= \int_S \langle \operatorname{curl} E, N \rangle dA = - \int_S \left\langle \frac{\partial B}{\partial t}, N \right\rangle dA = \\ &\quad - \frac{d}{dt} \int_S \langle B, N \rangle dA, \\ \int_{\partial S} \langle B, T \rangle d\lambda &= \int_S \langle \operatorname{curl} B, N \rangle dA = \int_S \left\langle \tilde{J} + \frac{\partial E}{\partial t}, N \right\rangle dA \\ &= \int_S \langle \tilde{J}, N \rangle dA + \frac{d}{dt} \int_S \langle E, N \rangle dA, \\ \int_{\partial U} \langle \tilde{J}, N \rangle dA &= \int_U (\operatorname{div} \tilde{J}) dV = - \int_U \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \frac{d}{dt} \int_U \rho dV, \end{aligned}$$

τα οποία και ολοκληρώνουν την απόδειξη. □



# Βιβλιογραφία

- [1] Chris J. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*. World Scientific, Singapore, 1999.
- [2] Dimitrios Koutroufiotis. *Differential Geometry*. Ioannina University Press, 1990.
- [3] Harley Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover, New York, 1989.
- [4] John C. Baez and Javier P. Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [5] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, 2 edition, 2013.
- [6] Manfredo P. do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Springer, New York, 1994.
- [7] Michael D. Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. W. A. Benjamin, Menlo Park, California, 1965.
- [8] Michael Stone and Paul Goldbart. *Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 3 edition, 2011.