Αρμονική Ανάλυση

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2022

Περιεχόμενα

1	Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue	1
2	Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue	25
3	Χώροι L^p	37
4	Τριγωνομετρικά πολυώνυμα	63
5	Σειρές Fourier	77
6	Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα	91
7	L_2-σύγκλιση σειρών Fourier	107
8	Μετασχηματισμός Fourier	123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue

1. (α) *Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.*

(β) *Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)^d$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \leqslant \ell((-\alpha, \alpha)^d) = (2\alpha)^d < +\infty.$$

(β) Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = \ell(I) > 0.$$

2. (α) *Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).*

(β) *Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε*

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) *Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.*

(δ) *Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Από την $\lambda(A \triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\lambda(A \setminus B) = 0$ και $\lambda(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\lambda(B) = [\lambda(A) - \lambda(A \setminus B)] + \lambda(B \setminus A) = \lambda(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A \setminus B$, B είναι ξένα και $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

(γ) Από την $B = A \cup (B \setminus A)$ παίρνουμε $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$, διότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Αν $A = [1, +\infty)$ και $B = [0, +\infty)$, τότε $A \subseteq B$, $\lambda(A) = \lambda(B) = +\infty$ και $B \setminus A = [0, 1)$, δηλαδή $\lambda(B \setminus A) = 1 > 0$.

3. (α) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t > 0$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(tA) = t\,\lambda^*(A)$.*

(β) *Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Αποδείξτε ότι*

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^\infty$, όπου $J_n = tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) = t\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = t\ell(I)$ για κάθε διάστημα (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\lambda^*(tA) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \ell(tI_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n\right\} \\
&= \inf\left\{t\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n\right\} = t\,\lambda^*(A).
\end{aligned}$$

(β) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) \leqslant C\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n) : f(A)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n\right\}\leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}C\,\ell(I_n) : A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}\\ &= C\,\lambda^*(A).\end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A\cap[-n,n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n)=0$ και ότι η $f(x)=x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n))\leqslant 2n\lambda(A_n)=0$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A))=\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}f(A_n)\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(f(A_n))=0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A))=0$.

4. *Έστω $A,B\subseteq\mathbb{R}$ με*

$$\mathrm{dist}(A,B)=\inf\{|x-y| :\, x\in A, y\in B\}>0.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lambda^*(A\cup B)=\lambda^*(A)+\lambda^*(B).$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα $\lambda^*(A\cup B)\leqslant\lambda^*(A)+\lambda^*(B)$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A\cup B)<\infty$. Έστω $\varepsilon>0$ και έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του $A\cup B$ από ανοικτά διαστήματα. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1},\ldots,J_{n,k_n}$ με μήκος μικρότερο από $\delta/2$, όπου $\delta=\mathrm{dist}(A,B)$, ώστε $I_n\subseteq J_{n,1}\cup\cdots\cup J_{n,k_n}$ και $\ell(I_n)<\sum_{s=1}^{k_n}\ell(J_{n,s})+\frac{\varepsilon}{2^n}$ (αν $I_n=(a_n,b_n)$, θεωρήστε το κλειστό διάστημα $\left[a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ και χωρίστε το σε k_n διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$). Τότε, η $\{J_{n,s} : n\in\mathbb{N}, 1\leqslant s\leqslant k_n\}$ είναι κάλυψη του $A\cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k_n}\ell(J_{n,s})+\varepsilon.$$

Αν $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $A\cap J_{n,s}\neq\varnothing$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $B\cap J_{n,s}\neq\varnothing$, τότε $A\subseteq\bigcup_{s=1}^{\infty}U_s$, $B\subseteq\bigcup_{s=1}^{\infty}V_s$ και $U_s\cap V_m=\varnothing$ για κάθε s,m: για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $y\in U_s\cap V_m$ τότε υπάρχουν $a\in A\cap U_s$ και $b\in B\cap V_m$ ώστε $|y-a|<\ell(U_s)<\delta/2$ και $|y-b|<\ell(V_m)<\delta/2$, οπότε $\mathrm{dist}(A,B)\leqslant|a-b|\leqslant|a-y|+|y-b|<\delta$, το οποίο είναι άτοπο. Με άλλα λόγια, καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $J_{n,s}$ ανήκει σε μία το πολύ από τις $\{U_s\}_{s=1}^\infty$ και $\{V_s\}_{s=1}^\infty$. Τότε,

$$\begin{aligned}\lambda^*(A)+\lambda^*(B) &\leqslant \sum_{s=1}^\infty \ell(U_s)+\sum_{s=1}^\infty \ell(V_s)\\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty\sum_{s=1}^{k_n}\ell(J_{n,s})\\ &< \sum_{n=1}^\infty \ell(I_n)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ του $A\cup B$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A)+\lambda^*(B)\leqslant \lambda^*(A\cup B)+\varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\lambda^*(A)+\lambda^*(B)\leqslant \lambda^*(A\cup B)$.

5. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\Gamma=\{(x,f(x)):a\leqslant x\leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $x,y\in[a,b]$ και $|x-y|\leqslant\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε το $[a,b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1,\dots,I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ. Τότε, για κάθε $j=1,\dots,k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma=\bigcup_{j=1}^k\{(x,f(x)):x\in I_j\}\subseteq\bigcup_{j=1}^k I_j\times f(I_j)\subseteq\bigcup_{j=1}^k I_j\times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma)\leqslant\sum_{j=1}^k\lambda(I_j\times T_j)=\sum_{j=1}^k\ell(I_j)\ell(T_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^k\ell(I_j)=\varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^k\ell(I_j)=\ell([a,b])=b-a.$$

6. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι μετρήσιμο.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κλειστό $F\subseteq\mathbb{R}$ με $F\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus F)<\varepsilon$.*

(iii) *Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma\subseteq A$ και $\lambda^*\big(A\setminus\Gamma\big)=0$.*

Υπόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon>0$. Το A είναι μετρήσιμο, άρα το A^c είναι μετρήσιμο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G ώστε $A^c\subseteq G$ και $\lambda^*(G\setminus A^c)=\lambda(G\setminus A^c)<\varepsilon$. Θέτουμε $F=G^c$. Τότε, το F είναι κλειστό, $F\subseteq A$, και $A\setminus F=G\setminus A^c$. Συνεπώς,

$$\lambda^*(A\setminus F)=\lambda^*(G\setminus A^c)<\varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_k \subseteq \mathbb{R}$ με $F_k \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F_k) < 1/k$. Ορίζουμε $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Το Γ είναι F_σ-σύνολο και $\Gamma \subseteq A$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^*(A \setminus \Gamma) \leqslant \lambda^*(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda^*(A \setminus \Gamma) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$. Το $A \setminus \Gamma$ είναι μετρήσιμο (έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο). Το Γ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων). Άρα, το Γ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = \Gamma \cup (A \setminus \Gamma)$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

7. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.*

(α) *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.*

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, n]) = \lambda(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, -n]) = \lambda(\varnothing) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A \cap (-\infty, n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A \cap (-\infty, -n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A \cap (-\infty, -1]) \leqslant \lambda(A) < \infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\lambda(A)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \lambda(A),$$

υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x]) = \frac{\lambda(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F = A \cap (-\infty, x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

8. (α) *Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geqslant n_0(x)\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) *Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:*

(i) *Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.*

(ii) $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$ *και αν* $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ *τότε*

$$\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n).$$

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, *τότε* $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geqslant n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k.

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

(β) (i) Αφού κάθε A_n είναι μετρήσιμο σύνολο, από τις

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

είναι φανερό ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα).

(ii) Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$. Άρα,

$$\lambda(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $B_n \subseteq A_n$ άρα $\lambda(B_n) \leqslant \lambda(A_n)$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$.

Όμοια, θέτουμε $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (C_n) είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(C_1) < +\infty$, άρα,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $A_n \subseteq C_n$ άρα $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n)$.

(iii) Με τον συμβολισμό του (ii), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(\limsup A_n) \leqslant \lambda(C_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) = 0.$$

Έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

9. *Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lambda_k(\limsup A_n) > 0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing$.

10. *Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω A το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0,$$

άρα $\lambda(A)=0$. Για κάθε $q\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$B_{n,q}=\bigcup_{p=-nq}^{nq}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^{2+\varepsilon}},\frac{p}{q}-\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}\right).$$

Τότε,

$$A_n\subseteq\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{q=k}^{\infty}B_{n,q}=\limsup_q B_{n,q}.$$

Έχουμε

$$\lambda(B_{n,q})\leqslant\sum_{p=-nq}^{nq}\frac{2}{q^{2+\varepsilon}}=\frac{4n}{q^{1+\varepsilon}}+\frac{2}{q^{2+\varepsilon}},$$

άρα

$$\sum_{q=1}^{\infty}\lambda(B_{n,q})\leqslant 4n\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\varepsilon}}+2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}<\infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda(A_n)\leqslant\lambda(\limsup_q B_{n,q})=0$.

11. *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:*

(i) *Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ και $\lambda^*(A)=0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.*

(ii) *Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A)>0$.*

(iii) *Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $\lambda^*(A)<+\infty$, $B\subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B)=\lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Έστω $A\subseteq[a,b]$. Τότε, $\lambda^*(A)=0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)<+\infty$ και κάθε $x\in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.*

(v) *Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ τότε $\lambda(A)=0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. (i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: κάθε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A)=0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A\subseteq G_n$ και $\lambda(G_n)<\frac{1}{n}+\lambda^*(A)$. Ορίζουμε $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, οπότε $B\subseteq A\subseteq G$ και

$$\lambda(G\setminus B)=\lambda(G)-\lambda(B)<\frac{1}{n},$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N=G\setminus B$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Τότε, γράφοντας $A=B\cup(A\cap N)$ βλέπουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Αληθής: αν $\lambda^*(A)=0$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^{ε}) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n^{\varepsilon})<\varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m}:=J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Αντίστροφα, έστω (I_n) κάλυψη του A από ανοικτά διαστημάτων με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και έστω $\varepsilon > 0$ Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Αφού κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} I_n$. Τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $\lambda^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: αν $\lambda(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα, και αν $\lambda(A) > 0$, τότε έχουμε δείξει ότι το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

12. (α) *Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

(β) *Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.*

Υπόδειξη. (α) Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda(A) > 0$.

(β) Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0, 1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \varnothing$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0, 1)) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda(F_m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

13. *Για κάθε $x \in [0, 1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A_1 = \{x \in [0, 1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) \mid \text{για κάθε } \ n = 1,2,\ldots, \ x_n \neq 5\}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$

Συνεπώς, $\lambda(A_1) = \frac{9}{10}$.

(β) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0,1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0,1/10), [1/10,2/10), \ldots, [9/10,1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10,6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0,1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10,(k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/100$. Συνεπώς,

$$\lambda(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

(γ) Συνεχίζοντας αυτόν τον συλλογισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο

$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \ldots, x_n \neq 5\}$$

έχει μέτρο

$$\lambda(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1,2,\ldots, \ x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

14. *Έστω $\vartheta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\vartheta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_ϑ «τύπου Cantor». Αποδείξτε ότι:*

(α) *Το C_ϑ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.*

(β) *Το C_ϑ είναι υπεραριθμήσιμο.*

(γ) *Το C_ϑ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\vartheta) = 1 - \vartheta > 0$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\vartheta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\vartheta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\vartheta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\vartheta}{3^2} = 1 - \frac{\vartheta}{3} - 2\frac{\vartheta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\vartheta}{3} - 2\frac{\vartheta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\vartheta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\vartheta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\vartheta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \vartheta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1 - \vartheta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1 - \vartheta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_ϑ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

15. *Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε*

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) *Αποδείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.*

(β) *Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ αποδείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.*

(γ) *Αποδείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.*

(δ) *Αποδείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leqslant \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leqslant q_n \leqslant 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A(1/j) \subseteq [-1/j, 1+1/j]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty}[-1/j, 1+1/j] = [0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(A(1/j)) \leqslant 2/j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A) = 0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A(1/j)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j) = A$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = A \cup ([0,1] \setminus A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty}([0,1] \setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

16. *Δώστε παράδειγμα ανοικτού υποσυνόλου G του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: το σύνορο του $\overline{G}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο D τύπου Cantor το οποίο έχει θετικό μέτρο (για παράδειγμα, το σύνολο C_ϑ της Άσκησης 17. Ένα ανοικτό υποσύνολο G του $[0,1]$ με την ιδιότητα $\lambda(\partial(\overline{G})) > 0$ είναι η ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «περιττά» βήματα της κατασκευής (το πρώτο, το τρίτο, κλπ). Για να το δούμε αυτό, ονομάζουμε U την ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «άρτια» βήματα της κατασκευής. Έχουμε $[0,1] = G \cup (D \cup U)$, και τα τρία αυτά σύνολα είναι ξένα. Τώρα, αποδείξτε τα εξής:

(i) $\overline{G} = G \cup D$. Το $G \cup D$ είναι κλειστό, διότι το $[0,1] \setminus (G \cup D) = U$ είναι ανοικτό σύνολο. Επίσης, $G \subseteq G \cup D$, αρκεί λοιπόν να δείξετε ότι κάθε $x \in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του G (αυτό είναι απλό: μιμηθείτε την απόδειξη του ότι κάθε $x \in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του D).

(ii) $\partial(G \cup D) = D$.

Έπεται ότι $\lambda(\partial(\overline{G})) = \lambda(D) > 0$.

17. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a,b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Δηλαδή, $(a,b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

18. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) *Αποδείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;*

(β) *Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, αποδείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.*

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f.

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(x \in A : f(x) > t_n) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\lambda(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\lambda(x \in A : f(x) > t) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t) \overset{\lambda(A)<\infty}{\iff} \lambda(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leqslant \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty} \lambda(x \in A : f_k(x) > t) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lambda(x \in A : f(x) > t) = \omega_f(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

19. (α) *Αποδείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.*

(β) *Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι το $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε φ την επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\varphi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\varphi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \varphi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

20. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) *Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.*

(β) *Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a,b]$ σε κλειστά. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a,b]$, επειδή το $[a,b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^\infty f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.
Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

21. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x,y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x,y)$ είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x,y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$E_n(\alpha) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x,y) > \alpha\right\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο

$$\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$$

είναι μετρήσιμο. Έπεται ότι το $E_n(\alpha)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x,y) \to f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n} \to x$ καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x,y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \to f^y(x) = f(x,y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

22. *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)|\, d\lambda < \infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο και $M > 0$ ώστε $\lambda([0,1] \setminus A) < \varepsilon$ και, για κάθε $x \in A$, $\sup_n |f_n(x)| \leqslant M$.*

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = \sup_n |f_n(x)|$ είναι μετρήσιμη, διότι οι f_n είναι μετρήσιμες. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n = \{x \in [0,1] : f(x) > n\}.$$

Αφού $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ για κάθε $x \in [0,1]$, βλέπουμε ότι η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$. Από τη συνέχεια του μέτρου Lebesgue έχουμε $\lambda(E_n) \to 0$. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$. Θέτοντας $A = [0,1] \setminus E_{n_0}$ και $M = n_0$, έχουμε

$$\lambda([0,1] \setminus A) = \lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$$

και, για κάθε $x \in A$,

$$\sup_n |f_n(x)| = f(x) \leqslant n_0 = M.$$

23. *Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$. Συμβολίζουμε με f_n την δείκτρια συνάρτηση του I_n.*

(α) *Αν $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.*

(β) *Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. (α) Αν για κάποιο $x \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν συγκλίνει στο 0, τότε το x ανήκει σε άπειρα από τα I_n. Δηλαδή,

$$\{x \in [0,1] : f_n(x) \not\to 0\} \subseteq \limsup_{n\to\infty} I_n.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} I_n\right) = 0$, άρα $\lambda(\{x \in [0,1] : f_n(x) \not\to 0\}) = 0$. Έπεται ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Όχι. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$ με $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$, τέτοια η $f_n(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$, $I_3 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1\right]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4}<1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2>4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2}\frac{1}{n}>1$. Καλύπτουμε τότε το $[0,1]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα $I_4,I_5,\dots,I_{n_2}$ για τα οποία έχουμε ότι $\lambda(I_k)\leqslant\frac{1}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων I_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $\lambda(I_n)\leqslant\frac{1}{n}$, οποιαδήποτε δύο διαδοχικά από τα I_n έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, και $\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}I_i=[0,1]$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε σημείο $x\in[0,1]$ ανήκει σε άπειρα από τα I_n, αλλά όχι σε όλα τελικά τα I_n, επομένως η $f_n(x)$ δεν συγκλίνει.

24. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}f\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{\{f\geqslant 1/n\}}f\,d\lambda.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x)=f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x\in[-n,n]$ άρα $g_n(x)=f(x)\to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n}f=\int f\chi_{[-n,n]}=\int g_n\to\int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x)=f(x)\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f\geqslant 1/n\}\subseteq\{f\geqslant 1/(n+1)\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ έχουμε τελικά $f(x)\geqslant 1/n$ άρα $h_n(x)=f(x)\to f(x)$, ενώ αν $f(x)=0$ έχουμε $h_n(x)=0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x)\to 0=f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geqslant 1/n\}}f=\int f\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}=\int h_n\to\int f.$$

25. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{\{f\leqslant n\}}f\,d\lambda.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x)=f(x)\chi_{\{f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f\leqslant n\}\subseteq\{f\leqslant n+1\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(x)<\infty$ έχουμε τελικά $f(x)\leqslant n$ άρα $g_n(x)=f(x)\to f(x)$. Δηλαδή, αν $E=\{f<\infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E\nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leqslant n\}}f=\int f\chi_{\{f\leqslant n\}}=\int g_n=\int g_n\chi_E\to\int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\lambda(E^c)=0$ και $\int f\chi_{E^c}=0$. Έπεται ότι

$$\int f=\int f\chi_E+\int f\chi_{E^c}=\int f\chi_E=\lim_{n\to\infty}\int_{\{f\leqslant n\}}f.$$

26. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε*

$$\int_E f\,d\lambda > \int f\,d\lambda - \varepsilon.$$

Επιπλέον, αποδείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leqslant f \leqslant n\} \subseteq \{1/(n+1) \leqslant f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ και $f(x) \leqslant n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leqslant f \leqslant n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n\int f < +\infty.$$

27. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f\,d\lambda < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leqslant n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leqslant \int_E f_n + \int (f - f_n) \leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

28. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda = \int f\,d\lambda < \infty.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\left(\int f_n - \int_E f_n\right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty}\left(-\int f_n\right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_E f_n\right) = -\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

29. *Έστω* (f_n), (g_n) *και* g *ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι* $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ *(όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι* $\int g_n\,d\lambda \to \int g\,d\lambda$. *Αποδείξτε ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη και ότι* $\int f_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda$.

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leqslant g_n$ έχουμε $-g_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geqslant 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f+g) \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int (f_n + g_n) = \liminf_{n\to\infty}\int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \to \int g$). Άρα,

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g-f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

30. *Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Αποδείξτε ότι $\int |f_n - f|\, d\lambda \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n|\, d\lambda \to \int |f|\, d\lambda$.*

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leqslant \int \big|\, |f_n| - |f|\, \big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big|\, |f_n - f| - |f_n|\, \big| \leqslant |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

31. *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\, d\lambda < +\infty$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.*

(β) *Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.
(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqslant F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

32. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f \, d\lambda \geqslant \delta$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \left\{ x \in A : f(x) < \frac{1}{n} \right\}$. Η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του A, και $\bigcap_n A_n = \varnothing$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(A) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $lim_n \lambda(A_n) = 0$.

Έστω $t > 0$. Επιλέγουμε $n(t)$ ώστε $\lambda(A_{n(t)}) < \frac{t}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq A$ με $\lambda(E) > t$, έχουμε

$$\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \lambda(E) - \lambda(A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f \, d\lambda \geqslant \int_{E \setminus A_{n(t)}} f \, d\lambda \geqslant \frac{1}{n(t)} \lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2n(t)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(t) = \frac{t}{2n(t)}$.

33. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f(x) \, d\lambda(x) = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n \to \infty} \lambda(A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $B = \{f \leqslant 0\}$ και $B_k = \left\{ f < \frac{1}{k} \right\}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, η (B_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$, και $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B$, άρα

$$\lim_{k \to \infty} \lambda(B_k) = \lambda(B) = 0.$$

Επομένως, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\lambda(B_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{A_n} f\,d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2k_0}.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$, αφού $f \geqslant \frac{1}{k_0}$ στο $[0,1] \setminus B_{k_0}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \lambda(A_n \cap B_{k_0}) + \lambda(A_n \cap ([0,1] \setminus B_{k_0})) \leqslant \lambda(B_{k_0}) + k_0 \int_{A_n \cap ([0,1]\setminus B_{k_0})} \frac{1}{k_0}\,d\lambda \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + k_0 \int_{A_n} f\,d\lambda \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lambda(A_n) \to 0$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι το $[0,1]$ έχει πεπερασμένο μέτρο χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά. Αν θεωρήσουμε την $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $[1,\infty)$, τότε η f είναι γνήσια θετική και αν θέσουμε $A_n = [n, n+1]$ έχουμε

$$\int_{A_n} f\,d\lambda \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0,$$

όμως $\lambda(A_n) = 1 \not\to 0$.

34. *Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)|\,d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\,d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)|\,d\lambda(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Άρα, η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. Ειδικότερα, $f_n(t) - f(t) \to 0$ σχεδόν παντού.

35. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) *Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.*

(β) *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\int_{[0,1]} f_n g\,d\lambda \to 0.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \to 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η h είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E h \, d\lambda < \varepsilon$.

Έστω A Borel υποσύνολο του $[0,1]$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές K και ανοικτό $U \subset [0,1]$ ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Urysohn βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g(x) = 1$ για κάθε $x \in K$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus U$. Τώρα γράφουμε

$$\int_A f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_n(\chi_A - g) \, d\lambda,$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1]} f_n(\chi_A - g) \, d\lambda \right| &\leqslant \int_{[0,1]} |f_n| \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{[0,1]} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \\ &= \int_{U \setminus K} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{U \setminus K} h \, d\lambda < \varepsilon, \end{aligned}$$

διότι $\chi_A - g \equiv 0$ στο K και στο $[0,1] \setminus U$, $|\chi_A - g| \leqslant 1$ στο $U \setminus K$, και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left| \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right| + \varepsilon = \varepsilon,$$

διότι $\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0$ από την υπόθεση. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

36. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \leqslant \left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right)^2$, άρα

$$n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leqslant 2n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leqslant 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln\left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leqslant \frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, έχουμε $|g_n| \leqslant 2|f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)| = n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leqslant n\frac{|f(x)|^2}{n^2} = \frac{|f(x)|^2}{n} \to 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n \to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x) \to 0.$$

37. *Έστω $f : [0,1] \to [1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι*

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha = \int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g = f/\alpha$. Παρατηρούμε ότι $(y-1)\ln y \geqslant 0$ για κάθε $y > 0$ (αν $y \leqslant 1$ τότε $y - 1 \leqslant 0$ και $\ln y \leqslant 0$, ενώ αν $y > 1$ τότε $y - 1 > 0$ και $\ln y > 0$). Συνεπώς, $y \ln y \geqslant \ln y$ για κάθε $y > 0$. Αφού η g παίρνει θετικές τιμές, έχουμε $g \ln g \geqslant \ln g$ στο $[0,1]$, άρα

$$\int_{[0,1]} g \ln g \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} \ln g \, d\lambda.$$

Αφού $g = f/\alpha$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha}(\ln f - \ln \alpha) \, d\lambda &= \int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha} \ln \frac{f}{\alpha} \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} \ln \frac{f}{\alpha} \, d\lambda \\ &\geqslant \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \int_{[0,1]} \ln \alpha \, d\lambda = \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \ln \alpha,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\alpha} \int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda - \frac{\int_{[0,1]} f \, d\lambda}{\alpha} \ln \alpha \geqslant \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \ln \alpha,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \alpha \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda = \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. *Αποδείξτε το Λήμμα* 2.2.4.

Υπόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και κάθε διαμέριση Q του $[a,b]$ ισχύει

$$V(\varphi) = \sup\{V(\varphi, P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b], \ P \supseteq Q\}.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$V(\varphi) = \sup\{V(\varphi, P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\} \geqslant \sup\{V(\varphi, P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b], \ P \supseteq Q\}$$

αφού

$$\{P \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b]\} \supseteq \{P \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b], \ P \supseteq Q\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε τυχούσα διαμέριση P του $[a,b]$ και την διαμέριση $P_1 = P \cup Q \supseteq Q$. Από το Λήμμα 2.2.2 έχουμε

$$V(\varphi, P) \leqslant V(\varphi, P_1) \leqslant \sup\{V(\varphi, P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b], \ P \supseteq Q\},$$

και παίρνοντας supremum ως προς P παίρνουμε

$$V(\varphi) \leqslant \sup\{V(\varphi, P) \mid P \ \text{ διαμέριση του } \ [a,b], \ P \supseteq Q\}.$$

2. (α) *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $\varphi(x) = x \sin \frac{1}{x}$ *αν* $x \neq 0$ *και* $\varphi(0) = 0$ *είναι συνεχής αλλά έχει άπειρη κύμανση.*

(β) *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $\psi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ *αν* $x \neq 0$ *και* $\psi(0) = 0$ *έχει φραγμένη κύμανση.*

Υπόδειξη. (α) Η φ είναι προφανώς συνεχής στο $(0,1]$. Είναι επίσης συνεχής στο 0, αφού

$$|\varphi(x)-\varphi(0)| = |\varphi(x)| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$$

για κάθε $x\in(0,1]$, οπότε $|\varphi(x)-\varphi(0)|\to 0$ καθώς το $x\to 0^+$.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P=\{0<y_n<x_n<y_{n-1}<x_n<\cdots<y_1<x_1<1\}$$

όπου $x_k=\frac{1}{2\pi k}$ και $y_k=\frac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(x_k)=0$ και $\varphi(y_k)=y_k$, συνεπώς

$$V(\varphi,P_n)\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)-\varphi(y_k)|=\sum_{k=1}^{n}y_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}}\to\infty$$

καθώς το $n\to\infty$. Άρα, $V(\varphi\mid 0,1)=+\infty$.

(β) Παρατηρούμε ότι $\psi'(0)=0$ και για κάθε $0<x\leqslant 1$ έχουμε $\psi'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, δηλαδή η ψ' είναι φραγμένη. Έπεται ότι η ψ είναι Lipschitz συνεχής, άρα έχει φραγμένη κύμανση.

3. (α) *Έστω (φ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε φ_n έχει φραγμένη κύμανση και ότι υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $V(\varphi_n\mid a,b)\leqslant M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν $\varphi_n\to\varphi$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η φ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\varphi\mid a,b)\leqslant M$.*

(β) *Η υπόθεση $V(\varphi_n\mid a,b)\leqslant M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ στο (α) είναι ουσιαστική. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων*

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\geqslant\frac{1}{2n\pi}\\ 0, & 0\leqslant x<\frac{1}{2n\pi}\end{cases}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση φ της Άσκησης 2 (α) και ότι κάθε φ_n έχει φραγμένη κύμανση (ενώ η φ όχι).

Υπόδειξη. (α) Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Έχουμε

$$V(\varphi_n,P)=\sum_{k=0}^{n-1}|\varphi_n(x_{k+1})-\varphi_n(x_k)|\longrightarrow\sum_{k=0}^{n-1}|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)|=V(\varphi,P)$$

και $V(\varphi_n,P)\leqslant V(\varphi_n\mid a,b)\leqslant M$ για κάθε n, άρα

$$V(\varphi,P)=\lim_{n\to\infty}V(\varphi_n,P)\leqslant M.$$

Παίρνοντας supremum ως προς P συμπεραίνουμε ότι $V(\varphi\mid a,b)\leqslant M<\infty$.

(β) Στο διάστημα $\left[\frac{1}{2n\pi},1\right]$ έχουμε $\varphi_n'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, άρα $|\varphi_n'(x)|\leqslant 1+\frac{1}{x}\leqslant 1+2n\pi$. Έπεται ότι η φ_n είναι Lipschitz συνεχής σε αυτό το διάστημα, και συμπεραίνουμε ότι $V\left(\varphi_n,\frac{1}{2n\pi},1\right)<+\infty$. Στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{2n\pi}\right]$ έχουμε $\varphi_n\equiv 0$ άρα, προφανώς, $V\left(\varphi_n,0,\frac{1}{2n\pi}\right)=0<+\infty$. Από την προσθετικότητα της κύμανσης,

$$V(\varphi_n,0,1)=V\left(\varphi_n,0,\frac{1}{2n\pi}\right)+V\left(\varphi_n,\frac{1}{2n\pi},1\right)<+\infty.$$

Για να δείξουμε ότι $\varphi_n \to \varphi$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ παρατηρούμε ότι $\varphi_n = \varphi$ στο $\left[\frac{1}{2n\pi}, 1\right]$, άρα

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi\|_\infty &= \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)| : 0 \leqslant x \leqslant 1/(2n\pi)\} = \sup\{|\varphi(x)| : 0 \leqslant x \leqslant 1/(2n\pi)\}\\ &= \frac{1}{2n\pi} \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Τέλος, στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι η φ έχει άπειρη κύμανση.

4. *Έστω (φ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$ και έχουν φραγμένη κύμανση. Αν $\varphi_n \to \varphi$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι*

$$V(\varphi \mid a,b) \leqslant \liminf_{n\to\infty} V(\varphi_n \mid a,b).$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\liminf_{n\to\infty} V(\varphi_n \mid a,b) = s < \infty$, αλλιώς το ζητούμενο προφανώς ισχύει. Υπάρχει υπακολουθία (φ_{k_n}) της (φ_n) τέτοια ώστε $V(\varphi_{k_n} \mid a,b) \to s$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $V(\varphi_{k_n} \mid a,b) \leqslant s + \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

Αφού $\varphi_{k_n} \to \varphi$ κατά σημείο, εφαρμόζοντας το (α) της προηγούμενης άσκησης για την $(\varphi_{k_n})_{n\geqslant n_0}$ με $M = s+\varepsilon$, συμπεραίνουμε ότι η φ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\varphi \mid a,b) \leqslant s+\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$V(\varphi \mid a,b) \leqslant s = \liminf_{n\to\infty} V(\varphi_n \mid a,b).$$

5. *Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, $V(\varphi \mid a+\varepsilon, b) \leqslant M$.*

(α) *Αποδείξτε ότι $V(\varphi \mid a,b) < +\infty$.*

(β) *Ποιά επιπλέον υπόθεση για την φ μας εξασφαλίζει ότι $V(\varphi \mid a,b) \leqslant M$;*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι η φ είναι φραγμένη. Έστω $x \in (a,b)$. Θεωρώντας τη διαμέριση $P_x := \{x < b\}$ του $[x,b]$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση έχουμε

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(b)| + |\varphi(x) - \varphi(b)| = |\varphi(b)| + V(\varphi, P_x) \leqslant |\varphi(b)| + V(\varphi \mid x,b) \leqslant |\varphi(b)| + M.$$

Άρα, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε $|\varphi(x)| \leqslant A$, όπου $A = \max\{|\varphi(a)|, |\varphi(b)| + M\}$.

Έστω τώρα $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ τυχούσα διαμέριση του $[a,b]$. Θεωρούμε τη διαμέριση $Q = \{x_1 < \cdots < x_n\}$ του $[x_1,b]$ αι παρατηρούμε ότι

$$V(\varphi,P) = |\varphi(x_1) - \varphi(a)| + V(\varphi,Q) \leqslant |\varphi(x_1)| + |\varphi(a)| + V(\varphi \mid x_1,b) \leqslant 2A + M.$$

Παίρνοντας supremum ως προς P συμπεραίνουμε ότι $V(\varphi \mid a,b) \leqslant 2A + M < \infty$.

(β) Μια υπόθεση που εξασφαλίζει το ζητούμενο είναι η συνέχεια της φ στο a. Από την προσθετικότητα της κύμανσης έχουμε ότι: για κάθε $a < x < b$,

$$V(\varphi,a,b) = V(\varphi,a,x) + V(\varphi,x,b) = v_\varphi(x) + V(\varphi,x,b) \leqslant v_\varphi(x) + M.$$

Συνεπώς, αν $\lim\limits_{x\to a^+} v_\varphi(x) = 0$ θα έχουμε ότι $V(\varphi,a,b) \leqslant M$. Από το Λήμμα 2.2.12 έχουμε ότι η v_φ είναι συνεχής από δεξιά σε κάποιο $\gamma \in [a,b]$ αν και μόνο αν η φ είναι συνεχής από δεξιά στο γ. Αν λοιπόν η φ είναι συνεχής στο a τότε η v_φ είναι συνεχής στο a, το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{x\to a^+} v_\varphi(x) = v_\varphi(a) = 0$.

6. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $I(x) = 0$ *αν* $x < 0$ *και* $I(x) = 1$ *αν* $x \geqslant 0$. *Έστω* (c_n) *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ *και έστω* (x_n) *ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του* $(a, b]$. *Αν*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n), \quad x \in [a, b]$$

δείξτε ότι $\varphi \in BV[a, b]$ *και*

$$V(\varphi \mid a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

Υπόδειξη.

7. *Έστω* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής και κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση. Για κάθε* $y \in \mathbb{R}$ *ορίζουμε* $N(y)$ *το πλήθος των ριζών της εξίσωσης* $\varphi(x) = y$ *στο* $[a, b]$. *Αν* $m = \min\{\varphi(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$ *και* $M = \max\{\varphi(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$, *αποδείξτε ότι*

$$V(\varphi \mid a, b) = \int_m^M N(y) d\lambda(y).$$

Υπόδειξη.

8. *Βρείτε, αν υπάρχει, συνεχή συνάρτηση* $\varphi \in BV[a, b]$ *η οποία δεν είναι Lipschitz συνεχής.*

Υπόδειξη.

9. *Έστω* $a, b > 0$. *Ορίζουμε*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f *έχει φραγμένη κύμανση στο* $[0, 1]$ *αν και μόνο αν* $a > b$. *Παίρνοντας* $a = b$, *κατασκευάστε (για κάθε* $0 < \alpha < 1$*) μια συνάρτηση που ικανοποιεί την Lipschitz συνθήκη τάξης* α

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|^\alpha$$

για κάποια σταθερά $A > 0$, *αλλά δεν έχει φραγμένη κύμανση.*

Υπόδειξη.

10. *Θεωρούμε την συνάρτηση* $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$, *και* $f(0) = 0$. *Αποδείξτε ότι η* $f'(x)$ *υπάρχει για κάθε* x, *αλλά η* f' *δεν είναι ολοκληρώσιμη στο* $[-1, 1]$.

Υπόδειξη.

11. *Αποδείξτε (με βάση τον ορισμό) ότι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue δεν είναι απολύτως συνεχής.*

Υπόδειξη.

12. *Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η*

$$D^+(g)(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Υπόδειξη.

13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Η f απεικονίζει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.*

(β) *Η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι απολύτως συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $n \geqslant 1$ και (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant n$ είναι ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$ με $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ τότε $\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Αφού $\lambda(A) = 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq G$ και $\lambda(G) < \delta$. Το G γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $G = \cup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων και έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \lambda(G) < \delta.$$

Η f είναι συνεχής, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή M_k και m_k στο $[a_k, b_k]$, σε κάποια σημεία t_k και s_k αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} |t_k - s_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ άρα $\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(s_k)| < \varepsilon$. Αφού $f((a_k, b_k)) \subseteq [m_k, M_k]$, έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(f(a_k, b_k)) < \varepsilon.$$

Αφού $f(G) \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} f((a_k, b_k))$, αφήνοντας το $n \to \infty$ στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\lambda(f(A)) \leqslant \lambda(f(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f(a_k, b_k)) \leqslant \varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι $\lambda(f(A)) = 0$.

(β) Έχει συζητηθεί στην Άσκηση 1.21. Έστω E μετρήσιμο μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $E = A \cup N$. Τότε, $f(E) = f(A) \cup f(N)$. Αλλά, από την Άσκηση 1.21 (α) το $f(A)$ είναι F_σ σύνολο, ενώ από το (α) το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(E)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

14. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής, αύξουσα συνάρτηση με $f(a) = A$ και $f(b) = B$. Έστω $g : [A, B] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.*

(α) *Αποδείξτε ότι η $g(f(x))f'(x)$ είναι μετρήσιμη στο $[a, b]$.*

(β) *Αποδείξτε ότι αν η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[A,B]$ τότε η $g(f(x))f'(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_A^B g(y)d\lambda(y) = \int_a^b g(f(x))f'(x)d\lambda(x).$$

Υπόδειξη.

15. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ απολύτως συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι η fg είναι απολύτως συνεχής, και*

$$\int_a^b f'(x)g(x)d\lambda(x) = -\int_a^b f(x)g'(x)d\lambda(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι καμία από τις f και g δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η fg είναι απολύτως συνεχής. Αφού οι f και g είναι απολύτως συνεχείς, είναι συνεχείς άρα φραγμένες στο $[a,b]$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$ και βρίσκουμε $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $(a_k,b_k)\subseteq[a,b]$ είναι ξένα ανοικτά διαστήματα και $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ τότε

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^n |g(b_k)-g(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}.$$

Έστω τώρα $(a_k,b_k)\subseteq[a,b]$ ξένα ανοικτά διαστήματα με $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n |f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)| \\
&\qquad = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}|(f(b_k)-f(a_k))(g(b_k)+g(a_k)) + (f(b_k)+f(a_k))(g(b_k)-g(a_k))| \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}|f(b_k)-f(a_k)|\,|g(b_k)+g(a_k)| + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}|f(b_k)+f(a_k)|\,|g(b_k)-g(a_k)| \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|\,\|g\|_\infty + \sum_{k=1}^n \|f\|_\infty\,|g(b_k)-g(a_k)| \\
&\qquad \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty}\|g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}\|f\|_\infty = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, η fg είναι απολύτως συνεχής.

Τώρα γνωρίζουμε ότι οι f',g' και $(fg)'$ υπάρχουν σχεδόν παντού στο $[a,b]$ και ισχύει

$$(fg)' = fg' + f'g$$

σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Επίσης, από το Θεώρημα 2.4.7, η $(fg)'$ είναι ολοκληρώσιμη και το ίδιο ισχύει για τις f',g' και συνεπώς για τις $f'g$ και fg' αφού οι f,g είναι συνεχείς (και φραγμένες). Έπεται ότι

$$\int_a^b f'(x)g(x)d\lambda(x) + \int_a^b f(x)g'(x)d\lambda(x) = \int_a^b (fg)'(x)d\lambda(x).$$

Τέλος, πάλι από το Θεώρημα 2.4.7,

$$\int_a^b (fg)'(x)d\lambda(x) = f(b)g(b) - f(a)g(b).$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε το ζητούμενο.

Ομάδα Β′

16. *Εστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c>0$ ώστε*

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|^d} \quad \textit{για κάθε } |x|\geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. Αφού $f\neq 0$ έχουμε $\|f\|_1>0$ και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να βρούμε $M>0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{B(R)} |f(x)|\,dx > 0,$$

όπου $B(s)=\{y:|y|\leqslant s\}$, $s>0$. Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}^d$ με $|x|\geqslant 1$ έχουμε $B(R)\subseteq B(x,R+|x|)=\{y:|y-x|\leqslant R+|x|\}$, άρα

$$\begin{aligned} f^*(x) &\geqslant \frac{1}{m(B(x,R+|x|)}\int_{B(x,R+|x|)}|f(y)|\,dy = \frac{R^d}{(R+|x|)^d}\,\frac{1}{m(B(R))}\int_{B(x,R+|x|)}|f(y)|\,dy \\ &\geqslant \frac{R^d}{((R+1)|x|)^d}\,\frac{1}{m(B(R))}\int_{B(R)}|f(y)|\,dy = \frac{c}{|x|^d}, \end{aligned}$$

όπου $c=\frac{R^d}{(R+1)^d m(B(R))}\int_{B(R)}|f(y)|\,dy>0$.

Τώρα, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες, βλέπουμε ότι

$$\int_{|x|\geqslant 1} f^*(x)\,dx \geqslant c\int_{|x|\geqslant 1}\frac{dx}{|x|^d} = c|S^{n-1}|\int_1^\infty \frac{dr}{r} = \infty.$$

Άρα, η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

17. *Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\log 1/|x|)^2} \quad \textit{αν } |x|\leqslant 1/2$$

και $f(x)=0$ αλλιώς. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε επίσης ότι υπάρχει $c>0$ ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|(\log 1/|x|)} \quad \textit{για κάθε } |x|\leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. Για κάθε $0\leqslant x\leqslant 1/2$ έχουμε

$$\int_{-x}^x |f(t)|dt = 2\int_0^x \frac{1}{t\log^2 t}dt = -\frac{2}{\log x} = \frac{2}{\log\frac{1}{x}}.$$

Ειδικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,dt = \frac{2}{\log 2},$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, για κάθε $|x| \leqslant 1/2$ έχουμε

$$f^*(x) \geqslant \frac{1}{2|x|}\int_{-|x|}^{|x|} |f(t)|\,dt = \frac{1}{|x|\log\frac{1}{|x|}},$$

απ' όπου βλέπουμε ότι, για κάθε $0 < \varepsilon < 1/2$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^*(x)\,dx &\geqslant 2\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{x\log\frac{1}{x}} = -2\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{x\log x} \\
&= -2\log|\log x|\Big|_{0^+}^{\varepsilon} = -2\log|\log\varepsilon| + 2\lim_{x\to 0^+}\log|\log x| \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Άρα, η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

18. *Έστω $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$f_+^*(x) = \sup_{h>0}\int_x^{x+h} |f(y)|\,d\lambda(y).$$

Για κάθε $\alpha > 0$ θέτουμε $E_\alpha^+ = \{x\in\mathbb{R} : f_+^*(x) > \alpha\}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(E_\alpha^+) = \frac{1}{\alpha}\int_{E_{\alpha+}} |f(y)|d\lambda(y).$$

[Υπόδειξη. Εφαρμόστε το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου για την $F(x) = \int_a^x |f(y)|d\lambda(y) - \alpha x$.]

Υπόδειξη.

19. *Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση*

$$\delta(x) = d(x,F) = \inf\{|x-y| : y\in F\}.$$

Ελέγξτε ότι $\delta(x+y)\leqslant |y|$ για κάθε $x\in F$ και για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, ισχυρότερα, ισχύει το εξής:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\delta(x+y)}{|y|} = 0 \ \ \textit{σχεδόν για κάθε } x\in F.$$

Υπόδειξη. Η υπόθεση ότι το F είναι κλειστό δεν είναι απαραίτητη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το F είναι απλώς μετρήσιμο. Αρχικά, αφού η δ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1 και $\delta(x) = 0$ για κάθε $x\in F$, έχουμε $\delta(x+y) = |\delta(x+y) - \delta(x)| \leqslant |y|$ για κάθε $x\in F$ και για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Πρώτος τρόπος. Η δ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1, άρα έχει φραγμένη κύμανση σε κάθε διάστημα $[a,b]$. Από το Θεώρημα 2.3.1 έπεται ότι η δ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού. Ειδικότερα, η $\delta'(x)$ υπάρχει σχεδόν για κάθε $x\in F$. Όμως, η δ είναι μη αρνητική συνάρτηση και $\delta(x) = 0$ για κάθε $x \in F$, δηλαδή έχει τοπικό ελάχιστο στο x. Άρα, σχεδόν για κάθε $x \in F$ έχουμε ότι η $\delta'(x)$ υπάρχει και είναι ίση με 0. Για κάθε τέτοιο x έχουμε

$$0 = |\delta'(x)| = \lim_{y\to 0}\left|\frac{\delta(x+y)-\delta(x)}{y}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\delta(x+y)}{|y|}.$$

Δεύτερος τρόπος. Θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος παραγώγισης του Lebesgue. Γνωρίζουμε ότι σχεδόν κάθε $y \in F$ είναι σημείο πυκνότητας του F. Θεωρούμε $x \in F$ που είναι σημείο πυκνότητας του F και θα δείξουμε ότι

$$\lim_{t\to x}\frac{\delta(t)}{|t-x|} = 0,$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο (θέτουμε $t = x+y$ και έχουμε $t \to x$ αν και μόνο αν $y \to 0$). Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Αφού το x είναι σημείο πυκνότητας του F, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν I είναι διάστημα που περιέχει το x και $\lambda(I) < \delta$ τότε $\lambda(F \cap I) > (1-\varepsilon)\lambda(I)$.

Έστω $t \in \mathbb{R}$ με $|t-x| < \delta$. Παίρνουμε σαν I το κλειστό διάστημα με άκρα τα t και x. Τότε, $\lambda(I) = |t-x| < \delta$, άρα $\lambda(F\cap I) > (1-\varepsilon)|t-x|$. Αυτό σημαίνει ότι $\lambda(F^c \cap I) < \varepsilon|t-x|$, άρα μπορούμε να βρούμε $z \in F\cap I$ τέτοιο ώστε $|z-t| < \varepsilon|t-x|$ (εξηγήστε γιατί). Όμως τότε,

$$\delta(t) \leqslant |t-z| < \varepsilon|t-x|.$$

Δείξαμε έτσι ότι αν $t \neq x$ και $|t-x| < \delta$ τότε

$$\frac{\delta(t)}{|t-x|} < \varepsilon.$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον ορισμό του ορίου.

20. *Κατασκευάστε μια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: η f είναι ασυνεχής στο x αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\chi_{[q_n,\infty)}(x).$$

Αν $f_n(x) = \frac{1}{2^n}\chi_{[q_n,\infty)}(x)$, τότε η f_n είναι αύξουσα και $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$. Από το κριτήριο του Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ομοιόμορφη, και από το γεγονός ότι όλες οι f_n είναι αύξουσες συμπεραίνουμε ότι η $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι αύξουσα.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι αν ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι άρρητος τότε η f είναι συνεχής στο ξ. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $1/2^{n_0-1} < \varepsilon$. Αφού $\xi \notin \{q_1,\ldots,q_{n_0}\}$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $q_1,\ldots,q_{n_0} \notin (\xi-\delta,\xi+\delta)$. Τότε, αν $x \in (\xi-\delta,\xi+\delta)$ για κάθε $n = 1,\ldots,n_0$ έχουμε είτε $q_n \leqslant \xi-\delta < x,\xi$ ή $q_n \geqslant \xi+\delta > x,\xi$, το οποίο σημαίνει ότι $f_n(x) = f_n(\xi)$ για κάθε $n = 1,\ldots,n_0$. Έπεται ότι

$$|f(x)-f(\xi)| = \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(\xi)\right| \leqslant 2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\|f_n\|_\infty = 2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε το ζητούμενο.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε q_m. Παρατηρούμε ότι αν $x < q_m < y$ τότε $f_m(x) = 0$ και $f_m(y) = \frac{1}{2^m}$, ενώ για κάθε $n \neq m$ έχουμε επίσης $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ αφού η f_n είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$f(y) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(y) - f_n(x)) \geqslant f_m(y) - f_m(x) = \frac{1}{2^m}.$$

Άρα,

$$\lim_{y \to q_m^+} f(y) - \lim_{x \to q_m^-} f(x) \geqslant \frac{1}{2^m} > 0,$$

και αυτό σημαίνει ότι η f δεν είναι συνεχής στο q_m.

21. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $D^+(f)(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα.*

Υπόδειξη.

22. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a,b)$ και $|f'(x)| \leqslant M$, αποδείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [a,b]$ και ότι η f είναι απολύτως συνεχής.*

Υπόδειξη.

23. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με*

$$\liminf_{\substack{\lambda(B) \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)d\lambda(y) = \infty$$

για κάθε $x \in E$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να βρούμε ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(G_n) < \frac{1}{2^n}$ και $E \subseteq G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{G_n}.$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη: από το θεώρημα Beppo-Levi,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{G_n} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Έστω $x \in E$. Αφού τα σύνολα G_n είναι ανοικτά και $x \in G_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ανοικτή μπάλα B_n τέτοια ώστε $x \in B_n$ και $B_n \subseteq G_n$. Θεωρούμε τώρα τυχούσα ανοικτή μπάλα B με $x \in B$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_B f(y)d\lambda(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\chi_B(y)d\lambda(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{G_n}(y)\chi_B(y)d\lambda(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{G_n \cap B}(y)d\lambda(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n \cap B) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n \cap B).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(B_n\cap B)}{\lambda(B)}.$$

Σταθεροποιούμε $N\in\mathbb{N}$. Το σύνολο $B_1\cap\cdots\cap B_N$ είναι ανοικτό και περιέχει το x, άρα μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτή μπάλα B με $x\in B$ και $\lambda(B)<\delta$ ισχύει

$$B\subseteq B_1\cap\cdots\cap B_N.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε μπάλα B με $x\in B$ και $\lambda(B)<\delta$ ισχύει

$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) \geqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda(B_n\cap B)}{\lambda(B)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda(B)}{\lambda(B)} = N.$$

Άρα,

$$\liminf_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) \geqslant N.$$

Αφού το $N\in\mathbb{N}$ ήταν τυχόν, έχουμε το ζητούμενο.

24. *Έστω $E\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(E)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αύξουσα, απολύτως συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $D_+(f)(x)=D_-(f)(x)=\infty$ για κάθε $x\in E$.*

Υπόδειξη.

25. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$$

για κάποια σταθερά $M>0$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η f είναι απολύτως συνεχής και $|f'(x)|\leqslant M$ σχεδόν για κάθε x.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο υποδιαστημάτων (a_k,b_k), $1\leqslant k\leqslant n$ του $\mathbb{R}$ με $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\varepsilon/M$ ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\varepsilon.$$

Άρα, η f είναι απολύτως συνεχής. Γνωρίζουμε τότε ότι η $f'(x)$ υπάρχει σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε x στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, από τη συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$|f'(x)| = \lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leqslant M.$$

Άρα, $|f'(x)|\leqslant M$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Αντίστροφα, αν η f είναι απολύτως συνεχής και έχει φραγμένη παράγωγο σχεδόμ παντού, δηλαδή $|f'(x)|\leqslant M$ σχεδόν για κάθε x, από το Θεώρημα 2.4.7, για κάθε $x<y$ στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$|f(y)-f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)d\lambda(t)\right| \leqslant \int_x^y |f'(t)|d\lambda(t) \leqslant \int_x^y M d\lambda(t) = M(y-x).$$

Λόγω συμμετρίας, η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά M.

26. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε τα εξής:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και απολύτως συνεχής, σε κάθε κλειστό διάστημα $[\gamma,\delta]\subset(a,b)$.*

(γ) *Η $f'(x)$ υπάρχει σε όλα, εκτός από αριθμήσιμα το πλήθος, τα $x\in(a,b)$, η $f'=D^+(f)$ είναι ολοκληρώσιμη, και*
$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)d\lambda(t)$$
για κάθε $x<y$ στο (a,b).

(δ) *Αντίστροφα, αν η $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε για κάθε $\gamma\in(a,b)$ η $f(x)=\int_\gamma^x g(t)d\lambda(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση στο (a,b).*

Υπόδειξη.

27. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x\in(a,b)$ και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι η f είναι απολύτως συνεχής και*
$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)d\lambda(x).$$

Υπόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χώροι L^p

Ομάδα Α΄

1. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L^p(E)$ αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_{\{|f| \geqslant \alpha\}} \alpha^p d\lambda(x) = \alpha^p \lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}).$$

2. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι $f \in L^p(E)$ αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : n-1 \leqslant |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant n^p \lambda(E_n).$$

Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f|^p \, d\lambda$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L^p(E)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^p \lambda(E_n) &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \lambda(E_n) \\ &\leqslant 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant 2^p \int_E |f|^p \, d\lambda < \infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \, d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} n^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty,\end{aligned}$$

άρα $f \in L^p(E)$.

3. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L^p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, αποδείξτε ότι*

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,| \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \to 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 (γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned}|f_n - f|^p &\leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2\max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \to g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L^1(E)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L^1(E)$) και

$$\int_E |g_n| \, d\lambda = 2^p \left(\int_E |f_n|^p \, d\lambda + \int_E |f|^p \, d\lambda \right) \to 2^{p+1} \int_E |f|^p \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda,$$

διότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \to 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E |f_n - f|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \to 0$.

4. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L^p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L^q(E)$, αποδείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L^1(E)$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leqslant \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Hölder. Επίσης, αφού

$$|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0,$$

έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n. Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$, άρα

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant M\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0.$$

5. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.*

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Αποδείξτε ότι $L^q(E) \subseteq L^p(E)$.

(γ) Αποδείξτε ότι $L^q(E) \neq L^p(E)$.

Υπόδειξη. (α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L^q(E)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \cdot \mathbf{1}\, d\lambda &\leqslant \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{p/q} \left(\int_E \mathbf{1}\, d\lambda\right)^{1-p/q} \\ &= \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-p/q},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ' όπου έπεται ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

(γ) Έστω $1 \leqslant p < q < \infty$. Θα ορίσουμε $f \in L^p(E) \setminus L^q(E)$. Αφού $0 < \lambda(E) < \infty$ μπορούμε να βρούμε ξένα μετρήσιμα $E_n \subset E$ με $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$ και $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{E_n}(x),$$

όπου $a_n > 0$ που θα επιλεγούν κατάλληλα. Έχουμε

$$\|f\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^q \quad \text{και} \quad \|f\|_p^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^p.$$

Αν ορίσουμε

$$a_n = 2^{n/q}$$

τότε

$$\|f\|_q^q = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \infty$$

ενώ

$$\|f\|_p^p = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{np/q} = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-p/q)}} < \infty$$

(έχουμε $\delta = 1 - p/q > 0$ διότι $p < q$, και η γεωμετρική σειρά με λόγο $2^{-(1-p/q)} = 2^{-\delta} < 1$ συγκλίνει).

6. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Αποδείξτε ότι κάθε $f \in L^q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L^p(E)$ και $h \in L^r(E)$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |g|^p d\lambda &= \int_E |f|^p \chi_B \, d\lambda = \int_B |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_B |f|^q \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L^q(E)$. Άρα, $g \in L^p(E)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{E\setminus B}$, και $|h(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in E \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leqslant |h(x)|^q$ για κάθε $x \in E \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |h|^r d\lambda &= \int_E |f|^r \chi_{E\setminus B} \, d\lambda = \int_{E\setminus B} |f|^r \, d\lambda \leqslant \int_{E\setminus B} |f|^q \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L^q(E)$. Άρα, $h \in L^r(E)$.

7. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Αποδείξτε ότι: αν $f \in L^p(E) \cap L^r(E)$ τότε $f \in L^q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Ψπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^q\,d\lambda = \int_E |f|^{(1-t)p}|f|^{tr}\,d\lambda &\leqslant \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)p}\right)^{\frac{1}{1-t}} d\lambda\right)^{1-t} \left(\int_E \left(|f|^{tr}\right)^{\frac{1}{t}} d\lambda\right)^t \\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1-t} \left(\int_E |f|^r d\lambda\right)^t = \|f\|_p^{(1-t)p}\|f\|_r^{tr} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L^q(E)$.

8. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L^p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι*

$$\ln \|f\|_p \geqslant \int_E \ln |f|\,d\lambda.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\ln \|f\|_p = \ln \left[\left(\int_E |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p}\right] = \frac{1}{p}\ln\left(\int_E |f|^p\,d\lambda\right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln\left(\int_E |f|^p\,d\lambda\right) \geqslant p\int_E \ln|f|\,d\lambda = \int_E p\ln|f|\,d\lambda = \int_E \ln(|f|^p)\,d\lambda.$$

Θέτοντας $g = |f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g \in L^1(E)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_E g\,d\lambda\right) \geqslant \int_E \ln g, d\lambda.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_E e^h\,d\lambda\right) \geqslant \int_E h\,d\lambda.$$

Ορίζουμε

$$t_0 = \int_E h\,d\lambda.$$

Υποθέτουμε ότι $t_0 \in \mathbb{R}$ (αν $t_0 = -\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0 < \infty$ διότι $h = \ln g \leqslant g - 1$ και η $g - 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο E). Η συνάρτηση $u(t) := e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t - e^{t_0} = u(t) - u(t_0) \geqslant u'(t)(t - t_0) = e^{t_0}(t - t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)} - e^{t_0} \geqslant e^{t_0}(h(x) - t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο E και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lambda(E) = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_E e^{h(x)}\,d\lambda(x) - \int_E e^{t_0}\,d\lambda(x) &\geqslant e^{t_0}\left[\int_E h(x)\,d\lambda(x) - \int_E t_0\,d\lambda(x)\right] \\ &= e^{t_0}\left[t_0 - t_0\lambda(E)\right] = 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_E e^{h(x)}\,d\lambda(x) \geqslant \int_E e^{t_0}\,d\lambda(x) = e^{t_0},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\ln\left(\int_E e^{h(x)}\,d\lambda(x)\right) \geqslant t_0 = \int_E h\,d\lambda.$$

9. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1,\ldots,c_m>0$ με $c_1+\cdots+c_m=1$. Αποδείξτε ότι: αν $f_1,\ldots,f_m : E\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\int_E\left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right)d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m\left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}.$$

Υπόδειξη. Αν $\int_E |f_i|\,d\lambda=0$ για κάποιο $i=1,\ldots,m$, τότε $f_i=0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}=0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_E |f_i|\,d\lambda>0$ για κάθε $i=1,\ldots,m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_E |f_i|\,d\lambda} f_i, \quad i=1,\ldots,m.$$

Τότε, $\int_E |g_i|\,d\lambda = 1$ για κάθε $i=1,\ldots,m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x\mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j=1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)|>0$ για κάθε $i=1,\ldots,m$)

$$\begin{aligned}\ln(|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m}) &= c_1\ln(|g_1(x)|)+c_2\ln(|g_2(x)|)+\cdots+c_m\ln(|g_m(x)|)\\ &\leqslant \ln(c_1|g_1(x)|+c_2|g_2(x)|+\cdots+c_m|g_m(x)|),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1|g_1(x)|+c_2|g_2(x)|+\cdots+c_m|g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x)=0$ για κάποιο i. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_E\left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i}\right)d\lambda \leqslant c_1\int_E |g_1|\,d\lambda+\cdots+c_m\int_E |g_m|\,d\lambda = c_1+\cdots+c_m=1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m\left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_E\left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right)d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m\left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}.$$

10. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p,q\geqslant 1$. Αν $t\in(0,1)$ και $r=tp+(1-t)q$ αποδείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f:E\to\mathbb{R}$ ισχύει*

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp}\|f\|_q^{(1-t)q}.$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα αποδείχθηκε για την Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{tp}$ και $|f|^{(1-t)q}$ με εκθέτες $\frac{1}{t}$ και $\frac{1}{1-t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^r\,d\lambda &= \int_E |f|^{tp}|f|^{(1-t)q}\,d\lambda \leqslant \left(\int_E \left(|f|^{tp}\right)^{\frac{1}{t}}\,d\lambda\right)^t \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)q}\right)^{\frac{1}{1-t}}\,d\lambda\right)^{1-t} \\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^t \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{1-t} = \|f\|_p^{tp}\|f\|_r^{(1-t)q}.\end{aligned}$$

11. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L^p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, αποδείξτε ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.*

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \to |f|^p$ σχεδόν παντού στο E, από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p\,d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n|^p\,d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p\,d\lambda \leqslant 1,$$

διότι

$$\int_E |f_n|^p\,d\lambda = \|f_n\|_p^p \leqslant 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

12. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L^1(\mathbb{R})$ με $\int f_n\,d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\,d\lambda = 0.$$

Αποδείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{[-\delta,\delta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}(2\delta)^{1/q}\|f_n\|_p &= \left(\int |g_\delta|^q\,d\lambda\right)^{1/q} \|f_n\|_p \geqslant \left|\int f_n g_\delta\,d\lambda\right| \\ &= \int_{\{x:|x|\leqslant\delta\}} f_n\,d\lambda = \int f_n\,d\lambda - \int \{x:|x|>\delta\} f_n\,d\lambda \\ &= 1 - \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\,d\lambda.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση υπάρχει $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\,d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0(\delta)$ έχουμε

$$\|f_n\|_p > \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\delta)^{1/q}}.$$

Έπεται ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\delta)^{1/q}}$$

για κάθε $\delta > 0$, και αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ παίρνουμε $\liminf_n \|f_n\|_p = +\infty$. Άρα, $\|f_n\|_p \to 0$.

13. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L^p(E)$. Αποδείξτε ότι*

$$\int_E |f|^p \, d\lambda = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda_1(t).$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty p t^{p-1} \chi_{[0,|f(x)|)}(t) \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) \chi_{[0,|f(x)|)}(t) \, d\lambda(x) \right) p t^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{x \in E : |f(x)| > t\}}(x) \, d\lambda(x) \right) p t^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) p t^{p-1} \, d\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

14. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L^p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρ- τήσεων στο E με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο E. Αποδείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $g_n \to g$ σχεδόν παντού, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|g\|_\infty \leqslant M$ (υπάρχει $Z \subset E$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in E \setminus Z$ ισχύουν οι $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και $g_n(x) \to g(x)$, άρα για κάθε $x \in E \setminus Z$ έχουμε $|g(x)| \leqslant M$).

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L^p(E)$ και $v \in L^\infty(E)$ τότε $uv \in L^p(E)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_E |u|^p |v|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |u|^p \|v\|_\infty^p \, d\lambda = \|v\|_\infty^p \|u\|_p^p.$$

δηλαδή

$$\|uv\|_p \leqslant \|v\|_\infty \|u\|_p.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_ng_n - fg\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leqslant \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\ &\leqslant \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \to 0$, άρα $M\|f_n - f\|_p \to 0$. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p|g_n - g|^p \leqslant |f|^p(|g_n| + |g|)^p \leqslant (2M)^p|f|^p$$

σχεδόν παντού, και η $(2M)^p|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L^p(E)$ (ως $\|\cdot\|_p$-όριο των $f_n \in L^p(E)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, διότι $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού και $g_n(x) - g(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_E |f(g_n - g)|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \to 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_ng_n - fg\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \to 0.$$

15. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x + t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι:*

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim\limits_{t \to 0} \int |f - f_t| = 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα την $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Έχουμε $f_t(x) = \chi_E(x + t) = \chi_{-t+E}(x)$, άρα $f_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και

$$\int f_t \, d\lambda = \lambda(-t + E) = \lambda(E) = \int f \, d\lambda.$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν φ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\varphi_t \in L^1(\mathbb{R}^d$ και

$$\int \varphi_t \, d\lambda = \int \varphi \, d\lambda.$$

Έστω τώρα $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $f \geqslant 0$. Θεωρούμε ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων φ_n με $\varphi_n \nearrow f$. Έστω $t \in \mathbb{R}^d$. Έχουμε $(\varphi_n)_t \in L^1(\mathbb{R}^d$, $(\varphi_n)_t \nearrow f_t$, και

$$\int (\varphi_n)_t \, d\lambda = \int \varphi_n \, d\lambda.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int f_t \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int (\varphi_n)_t \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Έτσι βλέπουμε ότι $f_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

Στη γενική περίπτωση, όπου $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f^+ και f^-.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$, άρα μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ώστε $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $K = \mathrm{supp}(g)$. Η g είναι συνεχής, με φορέα το συμπαγές K, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x-y| < \delta$ τότε $|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}$. Τότε, για κάθε $|t| < \delta$ έχουμε

$$\|g - g_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) = \int_{K\cup(K-t)} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\|f - f_t\|_1 \leqslant \|f - g\|_1 + \|g - g_t\|_1 + \|g_t - f_t\|_1 < 3\varepsilon,$$

χρησιμοποιώντας και την $\|f-g\|_1 = \|f_t - g_t\|_1$, η οποία ισχύει για κάθε t από το (α).

16. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*

Υπόδειξη. Έστω $0 \neq f \in L^\infty(E)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p\, d\lambda \leqslant \int_E \|f\|_\infty^p d\lambda = \|f\|_\infty^p \lambda(E) < \infty,$$

άρα $f \in L^p(E)$. Επίσης,

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty [\lambda(E)]^{1/p} \to \|f\|_\infty$$

καθώς το $p \to \infty$, άρα $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d\, d\lambda \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \lambda(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p\to\infty} [\lambda(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. *Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $f \in L^p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L^p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L^p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p = p_0$.

Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^{-a}|\ln x|^b$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 < p < p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p \leqslant p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p \geqslant p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p < p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p > p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$.

18. *Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.*

(α) *Αποδείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. Δηλαδή, το $E - F$ έχει μη κενό εσωτερικό.*

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned} |(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)]\chi_F(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε $\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y) = f(z+(x-y)) = f_{x-y}(z)$ με την ορολογία της Άσκησης 15. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Έπεται ότι

$$\lim_{y\to x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{x\to y} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{x-y}|\, d\lambda = 0$$

από την Άσκηση 15 (β).

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε

$$\lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Θέτουμε $F_1 = F + x_0$. Η συνάρτηση

$$f(x) := (\chi_{-E} * \chi_{F_1})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x - z)\chi_{F_1}(z)\, d\lambda(z) = \lambda((x + E) \cap F_1)$$

είναι συνεχής, από το πρώτο ερώτημα. Όμως,

$$f(0) = \lambda(E \cap F_1) = \lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|u| < \varepsilon$ τότε

$$f(u) = \lambda((E + u) \cap (F + x_0)) > 0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $|u| < \varepsilon$ έχουμε $E \cap (F + x_0 - u) = -u + (E + u) \cap (F + x_0) \neq \varnothing$, και θέτοντας $x = x_0 - u$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ με $|x - x_0| < \varepsilon$ ισχύει $E \cap (F + x) \neq \varnothing$.

Ομάδα Β′

19. *Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και*

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\; dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Αποδείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x - t) f_n(t)\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x - t)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x - t)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g\|_1\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|g_n\|_1 \leqslant \|g\|_1 < +\infty.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\|g_n - g\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g_t - g\|_1\, d\lambda(t),$$

όπου $g_t(x) = g(x - t)$. Πράγματι,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x - t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t),$$

άρα

$$\begin{aligned}
\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 15 (β) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $\|g_t - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,1/n]} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) \\
&< \varepsilon \int_{[0,1/n]} f_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

και έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$.

20. *Έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Αποδείξτε ότι: αν $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ τότε $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ και*

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $a = 1 - \frac{p}{r}$ και $b = 1 - \frac{q}{r}$. Παρατηρούμε ότι $r \geqslant p$ και $r \geqslant q$ λόγω των υποθέσεων ότι $p, r, q \geqslant 1$ και $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Ορίζουμε $p_1 = \frac{pr}{r-p}$ και $p_2 = \frac{rq}{r-q}$. Τότε, $p_1, p_2 \geqslant 1$ και $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$. Γράφουμε

$$|(f * g)(x)| = \left| \int f(x-y) g(y)\, d\lambda(y) \right| \leqslant \int (|f(x-y)|^{1-a} |g(y)|^{1-b}) |f(x-y)|^a |g(y)|^b d\lambda(y).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9 έχουμε

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &\leqslant \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r} |g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \left(\int |f(x-y)|^{ap_1} d\lambda(y) \right)^{1/p_1} \\
&\quad \times \left(\int |g(y)|^{bp_2} d\lambda(y) \right)^{1/p_2} \\
&= \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r} |g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \|f\|_{ap_1}^a \|g\|_{bp_2}^b.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-a)r = p$ και $(1-b)r = q$. Υψώνοντας στην r και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_r^r &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \left[\int \left(\int |f(x-y)|^p d\lambda(x) \right) |g(y)|^q d\lambda(y) \right] \\
&\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \|f\|_p^p \|g\|_q^q.
\end{aligned}$$

Όμως, $ap_1 = p$ και $bp_2 = q$. Άρα,

$$\|f * g\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{p+ar} \|g\|_q^{q+br} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r,$$

δηλαδή, $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

21. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Αποδείξτε ότι $f \in L^r(E)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

Υπόδειξη. Έστω $q \leqslant r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^r \, d\lambda(x) &= \int_0^\infty rt^{r-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 rt^{r-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda(t) \\
&+ \int_1^\infty rt^{r-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda(t) \\
&\leqslant \int_0^1 rt^{r-1} \lambda(E) \, d\lambda(t) + \int_1^\infty rt^{r-1} \frac{c}{t^p} \, d\lambda(t) \\
&= \lambda(E) \int_0^1 rt^{r-1} d\lambda(t) + Cr \int_1^\infty t^{r-p-1} \, d\lambda(t) \\
&= \lambda(E) + \frac{Cr}{p-r} < \infty,
\end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^\infty t^{r-p-1} \, d\lambda(t) = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p} \right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r - p < 0$.

Έπεται ότι $f \in L^r(E)$.

22. *Έστω $r > 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_0^1 |f|^r \, d\lambda \leqslant \liminf \int_0^1 |f_n|^r \, d\lambda \leqslant M^r,$$

διότι $\|f\|_r \leqslant m$ για κάθε n. Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r \, d\lambda \leqslant \int_0^1 2^r (|f_n|^r + |f|^r) \, d\lambda \leqslant 2^{r+1} M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1-\delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Για τυχόν $1 \leqslant p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_{E^c} |f_n - f|^r \right)^{\frac{p}{r}} \\ &< \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_0^1 |f_n - f|^r \right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \to 0$.

23. *Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\varphi_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $\|\varphi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\varphi_h(f) - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, d\lambda(t) \right|^2 &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \left(\int_{x-h}^{x+h} \mathbf{1}^2 \, d\lambda(t) \right) \\ &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \cdot (2h) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|\varphi_h(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, d\lambda(t) \right|^2 d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) f^2(t)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[t-h, t+h](x)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t)(2h)\, d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(t)\, d\lambda(t) = \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|\varphi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε πρώτα ότι αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\varphi_h(g) \to g$ ομοιόμορφα καθώς το $h \to 0$ και $\|\varphi_h(g) - g\|_2 \to 0$ αφού $\varphi_h(g) - g \equiv 0$ έξω από κάποιο κλειστό διάστημα (αν π.χ. $0 < h < 1$). Κατόπιν, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχή, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $\varphi_h(f-g) = \varphi_h(f) - \varphi_h(g)$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|\varphi_h(f) - f\|_2 &\leqslant \|\varphi_h(f) - \varphi_h(g)\|_2 + \|\varphi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\
&= \|\varphi_h(f-g)\|_2 + \|\varphi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\
&\leqslant \|\varphi_h(g) - g\|_2 + 2\|g - f\|_2 < \|\varphi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\varphi_h(f) - f\|_2 \leqslant \lim_{h\to 0^+} \|\varphi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\varphi_h(f) - f\|_2 = 0,$$

δηλαδή $\|\varphi_h(f) - f\|_2 \to 0$.

24. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι $n \cdot \left(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\right) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\chi_E(x) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z).$$

Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}|n(\chi_E * \chi_{[0,1/n]})(x) - \chi_E(x)| &= \left| n \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(x)]\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{1/n} \int_{[0,1/n]} |\chi_E(x-z) - \chi_E(x)| d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{[x-1/n,x]} |\chi_E(t) - \chi_E(x)| d\lambda(t) \to \chi_E(x)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(\chi_E)$, δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

25. *Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Αποδείξτε ότι $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geqslant n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \mathrm{sign}(g(x)) \chi_{A_n}(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x),$$

και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi, ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Όμως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) |g(x)|\, d\lambda(x) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

26. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f) \chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ *και* $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f \, d\lambda$. *Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x) - 2^n a_{n,k}(f)|^p \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (f(x) - f(y)) \, d\lambda(y) \right|^p \, d\lambda(x) \\
ls &\sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \cdot 2^{-np/q} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} 2^p (|f(x)|^p + |f(y)|^p) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n 2^p \cdot 2\lambda(J_{n,k}) \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \|f\|_p^p \leqslant 4^p \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν η g είναι συνεχής και αν ορίσουμε αντίστοιχα τις g_n, τότε $\|g - g_n\|_p \to 0$. Πράγματι, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in [0, 1]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ να έχουμε $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $1/2^{n_0} \leqslant \delta$, και για κάθε $n \geqslant n_0$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g - g_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |g(x) - 2^n a_{n,k}(g)|^p \; d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (g(x) - g(y))\, d\lambda(y) \right|^p \; d\lambda(x) \\
&ls \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |g(x) - g(y)|^p \, d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \lambda(J_{n,k}) \varepsilon^p \, 2^{-np/q} \, d\lambda(x) \\
&= 2^n 2^{np} (2^{-n})^2 \varepsilon^p \, 2^{-np/q} = \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

δηλαδή $\|g - g_n\|_p \leqslant \varepsilon$.

Θεωρούμε τώρα $f \in L^p[0,1]$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε συνεχή g με $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $a_{k,n}(f - g) = a_{k,n}(f) - a_{k,n}(g)$, άρα $(f - g)_n = f_n - g_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p &\leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|g_n - f_n\|_p \\
&\leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|(g_n - f_n) - (g - f)\|_p + \|g - f\|_p \\
&= \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|(g - f)_n - (g - f)\|_p + \|g - f\|_p \\
&\leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + 4\|g - f\|_p + \|g - f\|_p \\
&\leqslant 6\varepsilon + \|g - g_n\|_p.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_p + 6\varepsilon = 6\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

δηλαδή $\|f - f_n\|_p \to 0$.

27. *Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L^p[0, \infty)$. Αποδείξτε ότι*

$$\left| \int_0^x f(t) \; d\lambda(t) \right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t) \; d\lambda(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| &\leqslant \int_0^x |f(t)|\,d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)|\chi_{[0,x]}(t)\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \|f\|_p\|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q\,d\lambda\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}\,d\lambda\right)^{1/q} = [\lambda([0,x])]^{1/q} = x^{1/q}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιον α, διότι $|f|^p\chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \to \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_0^\infty |f|^p\,d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p\,d\lambda\right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*)\qquad \frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t) &\leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\|\chi_{[\alpha,x]}\|_q\\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p < \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\\ &\leqslant \|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p < \varepsilon\end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η $(*)$ δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

28. *Υποθέτουμε ότι $f \in L^p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$ και επιπλέον ότι*

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Αποδείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda \leqslant M^p$$

για κάθε $p \in [1,2)$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant M^{2-1/n}.$$

Από το λήμμα του Fatou και από το γεγονός ότι $|f|^{2-1/n} \to |f|^2$ σχεδόν παντού, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant \liminf M^{2-1/n} = M^2 < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{p\to 2^-} \|f\|_p = \|f\|_2$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p_n \in [1,2)$ με $p_n \uparrow 2$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} = \|f\|_2.$$

Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

Κατόπιν, θα έχουμε

$$\|f\|_{p_n} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p_n}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$$

διότι $\frac{1}{p_n} \to \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n = |f|^2 \chi_{\{|f|<1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f|\geqslant 1\}}$ και $g_n = |f|^2 \chi_{\{|f|\geqslant 1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f|<1\}}$, και παρατηρούμε ότι:

(α) $f_n \leqslant |f|^{p_n} \leqslant g_n$ για κάθε n, άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda.$$

(β) Η (f_n) είναι αύξουσα (διότι η (p_n) είναι αύξουσα) και $f_n \nearrow |f|^2$ σχεδόν παντού, άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

(γ) Η (g_n) είναι φθίνουσα και $g_n \searrow |f|^2$ σχεδόν παντού. Επίσης, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} g_1 \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_1} \, d\lambda \leqslant M^2 + M^{p_1} < \infty,$$

άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την $(g_1 - g_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

Από τα (α), (β), (γ) και από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

29. *Έστω $f \in L^1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε*

$$\int_A |f| \; d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Αποδείξτε ότι $f \in L^p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L^2[0,1]$;

Υπόδειξη. Από την υπόθεση και από την ανισότητα Markov, αν $A_t = \{|f| \geqslant t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leqslant \int_{A_t} |f| \, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή

$$\lambda(A_t) \leqslant \frac{C^2}{t^2}.$$

Έστω $1 \leqslant p < 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f|^p &= \int_0^{\infty} pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geqslant t\}) \, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geqslant t\}) \, d\lambda(t) + \int_1^{\infty} pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geqslant t\}) \, d\lambda(t) \\
&\leqslant \int_0^1 pt^{p-1} d\lambda(t) + \int_1^{\infty} pt^{p-1} + C^2 p \int_1^{\infty} t^{p-3} d\lambda(t) < \infty
\end{aligned}$$

διότι $p - 3 < -1$. Άρα, $f \in L^p([0,1])$.

30. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει*

$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right) \; d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = supp(f)$. *Αποδείξτε ότι* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *για κάθε* $1 \leqslant p < \infty$ *και* $\|f\|_p \leqslant Cp$, *όπου* $C > 0$ *μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης* f *που ικανοποιεί την* $(*)$ *αλλά* $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t^p e^{-t}$, $t > 0$. Έχουμε $g'(t) = (pt^{p-1} - t^p)e^{-t}$, άρα η g έχει μέγιστο στο $t_0 = p$. Δηλαδή,

$$t^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} e^t$$

για κάθε $t > 0$. Τότε,

$$\int |f|^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} \int \exp(|f(x)|)\, d\lambda(x) = \frac{p^p}{e^p},$$

άρα

$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{e} p.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η $f(x) = c + \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$ στο $(0,1)$, όπου το $c \in \mathbb{R}$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\int_0^1 e^{f(x)} d\lambda(x) = e^c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = e^c \cdot 2 = 1.$$

Η f δεν είναι φραγμένη, αφού $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

31. *Έστω* $f \in L^1((0,1))$. *Για* $x \in (0,1)$ *ορίζουμε*

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t).$$

Αποδείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ *και*

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(x)|\, d\lambda(x) &= \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 |f(t)|\, d\lambda(t) = \|f\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli. Άρα, $g \in L^1((0,1))$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και, ακολουθώντας την ίδια πορεία, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\,d\lambda(x) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,d\lambda(t)\right) d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\chi_{(x,1)}(t)\,d\lambda(t)\,d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t)\,d\lambda(x)\right) d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\lambda(\{x : 0 < x < t\})\,d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 f(t)\,d\lambda(t) = \int_0^1 f(x)\,d\lambda(x).
\end{aligned}$$

32. *Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0,1)$.*

Υπόδειξη. Αφού $|f(x)| < \infty$ για κάθε $x \in (0,1)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A = \{x \in (0,1) : |f(x)| \leqslant m] \subseteq (0,1)$ να έχει θετικό μέτρο. Θέτουμε $B = \{x \in (0,1) : |(x)| > m\}$. Τότε, αν $(x,y) \in B \times A$, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - |f(y)| \geqslant |f(x)| - m > 0.$$

Από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)\times(0,1)} |f(x) - f(y)|\,d\lambda(x,y) &\geqslant \int_{B\times A} |f(x) - f(y)|\,d\lambda(x,y) \\
&\geqslant \int_{B\times A} (|f(x)| - m)\,d\lambda(x,y) \\
&= \int_B \int_A (|f(x)| - m)\,d\lambda(y)\,d\lambda(x) \\
&= \lambda(A)\int_B (|f(x)| - m)\,d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_B |f(x)|\,d\lambda(x) \leqslant \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) < \infty.$$

Αφού $f \leqslant m$ στο A, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} |f(x)|\,d\lambda(x) &= \int_A |f(x)|\,d\lambda(x) + \int_B |f(x)|\,d\lambda(x) \leqslant m\lambda(A) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) \\
&= m(\lambda(A) + \lambda(B)) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} = m + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} < \infty.
\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

33. *Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) συζυγή εκθέτη q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0, \infty]$ αποδείξτε ότι*

$$\int fg \, d\lambda \geqslant \left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\lambda \right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p \, d\lambda \right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και $s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int f^p \, d\lambda &= \int (fg)^p g^{-p} \, d\lambda \\ &\leqslant \left(\int fg \, d\lambda \right)^p \left(\int (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} \\ &= \left(\int fg \, d\lambda \right)^p \left(\int g^q \right)^{-\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1 - p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int fg \, d\lambda \right)^p \leqslant \left(\int f^p \, d\lambda \right) \left(\int g^q \right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη γράφουμε

$$\left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda \right)^{1/q} \leqslant \int f(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda$$

και

$$\left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda \right)^{1/q} \leqslant \int g(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\left[\left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p} \right] \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda \right)^{1/q} \\ &\qquad \leqslant \int (f+g)(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda = \int (f+g)^p \, d\lambda. \end{aligned}$$

Αφού $-(1-p)q = p$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p} &\leqslant \left(\int (f+g)^p \, d\lambda \right)^{1-1/q} \\ &= \left(\int (f+g)^p \, d\lambda \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

34. *Αποδείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L^q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L^p[0,1]$.*

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ τότε $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Άρα, για κάθε $f \in L^q[0,1]$ έχουμε $f \in L^p[0,1]$. Δηλαδή, $L^q[0,1] \subseteq L^p[0,1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L^p[0,1] : \|f\|_q \leqslant n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L^q[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L^p[0,1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p-$κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n, δηλαδή $\|f_k\|_q \leqslant n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αν $\|f_k - f\|_p \to 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q \leqslant n$: αφού $f_k \xrightarrow{L^p} f$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\lambda(|f_k - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-p}\|f_k - f\|_p^p,$$

άρα $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s} \to f$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι $|f_{k_s}|^q \to |f|^q$ και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int |f|^q \, d\lambda \leqslant \liminf_{s\to\infty} \int |f_{k_s}|^q \, d\lambda \leqslant n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q \leqslant n$. Άρα, $f \in F_n$.

(β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f \in F_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(f,\varepsilon) = \{g \in L^p[0,1] : \|f - g\|_p < \varepsilon\} \nsubseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f \in F_n$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\alpha \in (1/q, 1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\varepsilon(1-\alpha p)^{1/p}}{2t^{\alpha}},$$

η οποία ανήκει στον $L^p[0,1] \setminus L^q[0,1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f + h \in L^p[0,1]$ και μάλιστα $f + h \in B(f,\varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$, αλλά $f + h \notin F_n$, αφού $h \notin L^q[0,1]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Ομάδα Α΄

1. (α) *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει* $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$ *για κάθε* $n = 0,1,2,\ldots$, *αποδείξτε ότι* $f \equiv 0$.

(β) *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει* $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$ *για κάθε* $n = 0,1,2,\ldots$, *αποδείξτε ότι* $f \equiv 0$.

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο [0,1]. Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $fp_n \to f^2$ ομοιόμορφα. Άρα,

$$\int_0^1 (f(t))^2\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t)f(t)\,dt.$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 p_n(t)f(t)\,dt$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των $\int_0^1 t^n f(t)\,dt$ τα οποία είναι ισα με μηδέν από την υπόθεση. Άρα, $\int_0^1 p_n(t)f(t)\,dt = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όποτε $\int_0^1 f^2 = 0$. Από την τελευταία σχέση έπεται ότι $f \equiv 0$ (εξηγήστε γιατί).

(β) *1η Απόδειξη.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$. Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$. Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$. Θέτοντας $q_n(x) = p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n - f\|_\infty \leqslant 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση. Άρα, η (q_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Έπεται ότι $fq_n \to f^2$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Τότε,

$$\int_0^1 f(x)q_n(x)\,dx \to \int_0^1 (f(x))^2\,dx.$$

Από την υπόθεση έχουμε $\int_0^1 q_n(x)f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί), άρα έχουμε το συμπέρασμα.

2η Απόδειξη. Έστω F η *άρτια επέκταση* της f στο $[-1,1]$ δηλαδή, $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(-x), & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Τότε, η F είναι συνεχής. Επιπλέον είναι άρτια, οπότε ισχύει

$$\int_{-1}^{1} x^{2n-1}F(x)\,dx = 0$$

για $n = 1, 2, \ldots$ (εξηγήστε γιατί) και ακόμη

$$\int_{-1}^{1} x^{2n}F(x)\,dx = 2\int_0^1 x^{2n}F(x)\,dx = 2\int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ από την υπόθεση. Άρα, η F ικανοποιεί τις υποθέσεις της Άσκησης 2, οπότε είναι ταυτοτικά μηδέν. Ειδικότερα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

2. (α) *Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.*

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x}$ για κάθε $x \in [0,1]$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού οι f, g είναι συνεχείς και $g(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $g(x) - f(x) \geqslant m$ για κάθε $x \in [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Καθώς, η $\frac{f+g}{2}$ είναι συνεχής, από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|p - \frac{f+g}{2}\|_\infty < \frac{m}{4}$. Τότε, για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει:

$$f(x) < \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{m}{4} < p(x) < \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{m}{4} < g(x).$$

(β) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0,1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Έστω $x \in (0,1]$. Τότε, έχουμε

$$\int_0^x e^t\,dt < \int_0^x p(t)\,dt < 2\int_0^x e^{2t}\,dt$$

δηλαδή,

$$e^x < \int_0^x p(t)\,dt + 1 < e^{2x}$$

για κάθε $x \in (0,1]$. Έπεται, ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x},$$

όπου $q(x) = \int_0^x p(t)\,dt + 1$. Παρατηρούμε ότι το q είναι πολυώνυμο, άρα έχουμε το ζητούμενο.

3. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_\infty < \varepsilon$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = \int_0^x q(t)\,dt + f(0)$. Τότε, ισχύει $p'(x) = q(x)$ και ακόμη αν $x \in [0,1]$ έχουμε

$$|p(x) - f(x)| = \left| \int_0^x q(t)\,dt - \int_0^x f'(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x |f'(t) - q(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x \leqslant \varepsilon.$$

Άρα, $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

4. *Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.*

Υπόδειξη. Έστω $0 < a < b < 1$. Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[0,1]$ σε μια συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$ ως εξής: στο $[0,a]$ την ορίζουμε γραμμική με άκρα τα $(0,0)$ και $(a, f(a))$ και ομοίως στο $[b,1]$. Θεωρούμε την ακολουθία πολυωνύμων

$$P_n(g)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} \right\rfloor x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Τα $P_n(g)$ έχουν ακέραιους συντελεστές και έχουν την ιδιότητα $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ (άρα $P_n(g) \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, το οποίο είναι το ζητούμενο). Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\|P_n(g) - B_n(g)\|_\infty \to 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |B_n(g)(x) - P_n(g)(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} - \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} \right\rfloor \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\binom{n}{k} \geqslant n$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και στην τελευταία ότι $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$. Άρα, $\|B_n(g) - P_n(g)\|_\infty \leqslant 1/n$ για κάθε $n \geqslant 2$. Έπεται ότι $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

5. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.*

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \ldots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}([0,1])$. Πράγματι· αν (p_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_k[x]$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $(a_0^n), (a_1^n), \ldots, (a_k^n)$ ώστε $p_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \ldots + a_k^n x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 1, 2, \ldots$. Υποθέτουμε ότι η $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία (a_i^n), $i = 0, 1, \ldots, k$ συγκλίνει σε κάποιο $a_i \in \mathbb{R}$ και άρα η f είναι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$. Θεωρούμε $k+1$ σημεία $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ (τυχαία αλλά σταθερά) στο διάστημα $[0,1]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{cases} a_0^n + a_1^n t_0 + \ldots + a_k^n t_0^k = p_n(t_0) \\ a_0^n + a_1^n t_1 + \ldots + a_k^n t_1^k = p_n(t_1) \\ \quad \vdots \\ a_0^n + a_1^n t_k + \ldots + a_k^n t_k^k = p_n(t_k) \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k+1)\times(k+1)$ με αγνώστους τα a_j^n, $j=0,1,\dots,k$. Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^k \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & t_k & \dots & t_k^k \end{vmatrix},$$

η οποία γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant k}(t_j-t_i)$$

και δεν είναι μηδενική από την επιλογή των t_j. Οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a_0^n,a_1^n,\dots,a_k^n)$, η οποία δίνεται ως $a_j^n=\frac{D_j}{D}$ για $j=0,1,\dots,k$. Κάθε D_j είναι *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των t_j^i και $p_n(t_j)$ για $i,j=0,1,\dots,k$ (δηλαδή ακολουθία ως προς n). Επειδή δε, $p_n(t_j)\to f(t_j)$ για $j=0,1,\dots,k$ έχουμε ότι κάθε $(a_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{D}\lim_{n\to\infty}D_j$. Παρατηρήστε ότι χρειαστήκαμε μόνο την κατά σημείο σύγκλιση της (p_n) στην f. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε υπάρχει (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών και $m\in\mathbb{N}$ ώστε $\deg(p_{k_n})\leqslant m$ για $n=1,2,\dots$. Τότε, η ακολουθία (p_{k_n}) περιέχεται στο κλειστό $\mathbb{R}_m[x]$ και συγκλίνει (ομοιόμορφα) στην f. Άρα, η f είναι πολυώνυμο (βαθμού το πολύ m), άτοπο.

6. *Έστω $T(x)=\lambda_0+\sum_{k=1}^n(\lambda_k\cos kx+\mu_k\sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k=0$ για κάθε $k=0,1,\dots,n$.*

(β) *Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k=0$ για κάθε $k=1,\dots,n$.*

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k=1,\dots,n$,

$$\nu_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\cos kx\,d\lambda(x).$$

Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\cos kx\,d\lambda(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(-y)\cos(-ky)\,d\lambda(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-T(y)\cos ky]\,d\lambda(y)\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(y)\cos ky\,d\lambda(y)=-\nu_k.\end{aligned}$$

Από την $\nu_k=-\nu_k$ έπεται ότι $\nu_k=0$. Για $k=0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\nu_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\,d\lambda(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(-y)\,d\lambda(y)\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(y)\,d\lambda(y)=-\nu_0,\end{aligned}$$

άρα, $\nu_0=0$.

(β) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, d\lambda(x).$$

Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx \, d\lambda(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(-y) \sin(-ky) \, d\lambda(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [T(y)(-\sin ky)] \, d\lambda(y) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(y) \sin ky \, d\lambda(y) = -\mu_k. \end{aligned}$$

Από την $\mu_k = -\mu_k$ έπεται ότι $\mu_k = 0$.

7. *Αποδείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Έχουμε $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = p_1(\cos x)$, όπου $p_1(t) = 1 - t^2$, πολυώνυμο βαθμού 2.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_k(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p_k(\cos x)$. Τότε,

$$\sin^{2k+2} x = \sin^{2k} x \cdot \sin^2 x = p_k(\cos x) p_1(\cos x).$$

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) p_1(t) = p_k(t)(1 - t^2)$$

έχει βαθμό $2k + 2$ και $\sin^{2k+2} x = p_{k+1}(\cos x)$.

8. (α) *Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.*

(β) *Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις*

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \ldots, e^{i\mu_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι μ_j είναι θετικοί;

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \cdots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

Τότε, για κάθε $s = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x} \left(\sum_{j=1}^{n} t_j e^{ik_j x} \right) d\lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} d\lambda(x) \\ &= 2\pi t_s, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} d\lambda(x) = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$. Έπεται ότι $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\mu_1, \ldots, \mu_n$ είναι διακεκριμένοι. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n$ ισχύει

$$t_1 e^{i\mu_1 x} + t_2 e^{i\mu_2 x} + \cdots + t_n e^{i\mu_n x} \equiv 0.$$

Παραγωγίζοντας $n-1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\ \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_n t_n &= 0 \\ \mu_1^2 t_1 + \mu_2^2 t_2 + \cdots + \mu_n^2 t_n &= 0 \\ \cdots\cdots& \\ \mu_1^{n-1} t_1 + \mu_2^{n-1} t_2 + \cdots + \mu_n^{n-1} t_n &= 0. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$.

9. *Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $p(x) = q(x)$ για κάθε x σε ένα $A \subseteq [0, 2\pi)$ με πληθάριθμο $|A| \geqslant 2N+1$, αποδείξτε ότι $a_k = b_k$ για κάθε $|k| \leqslant n$.*

Υπόδειξη.

10. *Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n. Αποδείξτε ότι το $p(x)$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές αν και μόνο αν για κάθε $|k| \leqslant n$ ισχύει $a_{-k} = \overline{a_k}$.*

Υπόδειξη.

11. (α) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικές f_e και f_o τέτοιες ώστε: η f_e είναι άρτια, η f_o είναι περιττή, και $f = f_e + f_o$.*

(β) *Έστω $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k] coskx + b_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.*

(γ) *Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.*

Υπόδειξη.

12. *Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-m}^{m} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $r(x) = p(x)q(x)$ αποδείξτε ότι το $r(x)$ είναι επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο και εκφράστε τους συντελεστές του συναρτήσει των συντελεστών a_k, b_k των $p(x)$ και $q(x)$.*

Υπόδειξη.

13. *Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και $m \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $q(x) = p(x)e^{imx}$ είναι μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε τους συντελεστές του.*

Υπόδειξη.

14. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,*

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y-2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y-2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x - 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y+2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y+2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + a$ παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)$$

από την 2π-περιοδικότητα της f, άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) + \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)\\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) + \int_{-\pi}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y).\end{aligned}$$

15. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 d\lambda(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 d\lambda(x) < \varepsilon^2/3.$$

Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} &\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \\ &+ \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \\ &+ \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \\ &+ 2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \\ &< \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} + \frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, λόγω της 2π-περιοδικότητας της $f-g$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)|^2 d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 d\lambda(x)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει λοιπόν $t_0 > 0$ ώστε: αν $|t| < t_0$ τότε $|g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $|t| < t_0$ έχουμε

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9 \cdot 2\pi} d\lambda(x)\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} < \varepsilon$$

για κάθε $|t| < t_0$. Άρα,

$$\lim_{t\to 0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} = 0,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

16. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Αποδείξτε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση F που ορίζεται από την παραπάνω σχέση είναι περιοδική. Αποδείξτε επίσης ότι

$$\int_0^1 F\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda.$$

Υπόδειξη.

Ομάδα Β΄

17. (α) *Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Αποδείξτε ότι: αν $k > m$ *τότε*

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) *Αν* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, *αποδείξτε ότι*

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ *και για κάθε* $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $k > m$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} A_k(x) - A_m(x) &= \sum_{j=m+1}^{k} \sin(jx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \sin(x/2)\sin(jx) \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \left[\cos\big(j-1/2\big)x - \cos\big(j+1/2\big)x\right] \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \left[\cos\big(m+1/2\big)x - \cos\big(k+1/2\big)x\right]. \end{aligned}$$

Από την $|\cos t| \leqslant 1$ έπεται ότι

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{2}{2|\sin(x/2)|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε άθροιση κατά μέρη: είναι

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin(jx) &= \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j (A_j(x) - A_{j-1}(x)) \\ &= \lambda_k A_k(x) - \lambda_{m+1} A_m(x) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) A_j(x) \\ &= \lambda_k (A_k(x) - A_m(x)) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})(A_j(x) - A_m(x)), \end{aligned}$$

διότι

$$\lambda_{m+1} A_m(x) = \left[\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \right] A_m(x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m+1}^{k}\lambda_j\sin(jx)\right| &\leqslant \lambda_k|A_k(x)-A_m(x)| + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})|A_j(x)-A_m(x)|\\ &\leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}\left(\lambda_k+\sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})\right)\\ &= \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}.\end{aligned}$$

18. *Έστω $n\in\mathbb{N}$ και $M>0$. Αν $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$ και $k\lambda_k\leqslant M$ για κάθε $k=1,\dots,n$, αποδείξτε ότι*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx\right|\leqslant(\pi+1)M$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0<x<\pi$. Γράψτε, αν θέλετε,

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin kx+\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx,$$

όπου $m=\min\{N,\lfloor\pi/x\rfloor\}$.]

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<x<\pi$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin kx+\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx,$$

όπου $m=\min\{n,\lfloor\pi/x\rfloor\}$. Για το πρώτο άθροισμα έχουμε

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin(kx)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{M\sin kx}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{Mkx}{k}=Mmx\leqslant M\pi.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση: είναι

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx\right|\leqslant\frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)}\leqslant\frac{M}{(m+1)\sin(x/2)}\leqslant M,$$

διότι $m+1>\pi/x$, άρα

$$(m+1)\sin(x/2)\geqslant\frac{\pi}{x}\frac{2x}{2\pi}=1$$

από την $\sin y\geqslant\frac{2y}{\pi}$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$.

19. (Λήμμα του Stečkin). *Έστω $T(x)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\cos kx+\mu_k\sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0\in\mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$f(x_0)=\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in\mathbb{R}\}.$$

Αποδείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ *τότε*

$$f(x_0+t) \geqslant \|f\|_\infty \cos(nt).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \|f\|_\infty$ και ορίζουμε

$$g(t) = f(x_0+t) - A\cos(nt).$$

Αν υποθέσουμε ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, τότε υπάρχει $0 < |s| \leqslant \frac{\pi}{n}$ ώστε $g(s) < 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 < t_0 < \frac{\pi}{n}$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, 2n$ θέτουμε $t_k = \frac{k\pi}{n}$ και έχουμε

$$g(t_k) = f(x_0+t_k) - A\cos(k\pi).$$

Παρατηρούμε ότι $f(t_0) = f(x_0) = 0$, $f(s) < 0$ και για κάθε $k = 1, \ldots, 2n$ έχουμε $g(t_k) \geqslant 0$ αν ο k είναι περιττός και $g(t_k) \leqslant 0$ αν ο k είναι άρτιος. Έπεται ότι η $g(y) = 0$ έχει τουλάχιστον $2n+1$ ρίζες στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αυτό είναι άτοπο: ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ $2n$ ρίζες στο $[0, 2\pi)$ (εξηγήστε γιατί: η διάσταση του χώρου αυτών των πολυωνύμων είναι $2n+1$).

20. (Ανισότητα του Bernstein). *Έστω* $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι*

$$\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Παίρνοντας αν χρειαστεί το $-f$ στη θέση του f, θεωρούμε x_0 τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι $f(x_0) = 0$. Από την προηγούμενη άσκηση, για κάθε $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ έχουμε

$$f'(x_0+t) \geqslant \|f'\|_\infty \cos(nt).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right) - f\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right) &= \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} f'(x_0+t)d\lambda(t) \geqslant \|f'\|_\infty \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos(nt)d\lambda(t) \\ &= \|f'\|_\infty \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{n}\|f'\|_\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|f'\|_\infty &\leqslant \frac{n}{2}\left(\left|f\left(x_0+\frac{\pi}{2n}\right)\right| + \left|f\left(x_0-\frac{\pi}{2n}\right)\right|\right) \\ &\leqslant \frac{n}{2}\cdot 2\|f\|_\infty = n\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

21. *Έστω* $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το* T *παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο* Q *ώστε*

$$T(x) = |Q(x)|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $c_n \neq 0$. Παρατηρήστε ότι $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και ότι

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, d\lambda(x) > 0.$$

Θεωρούμε το μιγαδικό πολυώνυμο

$$P(z) = z^n \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = c_{-n} + c_{1-n} z + \cdots + c_n z^{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\overline{P(1/\overline{z}} = \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{z}^{-n-k}} &= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} z^{-n-k} \\
= \sum_{k=-n}^{n} c_{-k} z^{-n-k} &= \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m-n} = z^{-2n} \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m+n} \\
= z^{-2n} P(z).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $P(z) = 0$ αν και μόνο αν $P(1/\overline{z}) = 0$. Επίσης, $P(0) \neq 0$ και $P(w) \neq 0$ για κάθε $w \in \mathbb{T}$, διότι αν $w = e^{ix}$ τότε $P(w) = e^{inx} T(x) \neq 0$ από την υπόθεση ότι το T δεν μηδενίζεται. Άρα, οι ρίζες του P είναι n ζεύγη $z_k, 1/\overline{z_k}$ με $0 < |z_k| < 1$. $(k = 1, \ldots, n)$. Δηλαδή, υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ ώστε

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right).$$

Θέτουμε $P_1(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
P_2(z) := \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right) &= \frac{1}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} z \left(z_k - \frac{1}{z} \right) \\
&= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} z \left(\frac{1}{z} - z_k \right) \\
&= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} P_1 \left(\frac{1}{z} \right).
\end{aligned}$$

Άρα, αν $|z| = 1$ έχουμε

$$|P_2(z)| = |\overline{P_2(z)}| = \left| \frac{(-1)^n \overline{z}^n}{z_1 \cdots z_n} P_1 \left(\frac{1}{\overline{z}} \right) \right| = \frac{|P_1(z)|}{|z_1 \cdots z_n|}.$$

Τώρα γράφουμε

$$T(x) = |T(x)| = |e^{-inx} P(e^{ix})| = |a P_1(e^{ix}) P_2(e^{ix})| = |a| \cdot |P_1(e^{ix})| \cdot \frac{|P_1(e^{ix})|}{|z_1 \cdots z_n|},$$

και αν ορίσουμε

$$Q(x) = \left(\frac{|a|}{|z_1 \cdots z_n|} \right)^{1/2} P_1(e^{ix})$$

έχουμε

$$T(x) = |Q(x)|^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σειρές Fourier

1. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:*

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Υπόδειξη. (α) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y) = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-f(y))e^{-iky}d\lambda(y) = -\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(γ) Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αν ο k είναι περιττός.

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x) \\ &= \widehat{f}(-k). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-ikx}d\lambda(x) = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x)} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Το γράφημα της τ_a είναι μεταφορά του γραφήματος της f κατά a. Το σημείο $(x, f(x))$ μεταφέρεται στο $(x+a, \tau_a(x+a)) = (x+a, f(x))$. Έχουμε

$$\tau_a(x+2\pi) = f(x-a+2\pi) = f(x-a) = \tau_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η τ_a είναι 2π-περιοδική. Τέλος,

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ik(x-a)}d\lambda(x) \\ &= e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{-ika}\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

3. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Η g_m έχει περίοδο $2\pi/m$ (άρα και 2π) και το γράφημά της είναι το γράφημα της f συμπιεσμένο: σε ένα διάστημα μήκους 2π «επαναλαμβάνεται» m-φορές. Αν $m \mid k$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(y)e^{-iky/m}$ είναι 2π-περιοδική, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi m}^{\pi m} f(y)e^{-iky/m}d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i(k/m)y}d\lambda(y) = \widehat{f}(k/m).\end{aligned}$$

Αν ο m δεν διαιρεί τον k, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(my)e^{-iky}$ είναι 2π-περιοδική γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my+2\pi)e^{-ik(y+2\pi/m)}d\lambda(y)\\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(my)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= e^{-i2k\pi/m}\widehat{g_m}(k).\end{aligned}$$

Αφού ο m δεν διαιρεί τον k, έχουμε $e^{-i2k\pi/m} \neq 1$, άρα $\widehat{g_m}(k) = 0$.

4. *Έστω $f, f_n \in L_1(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)e^{-ikx}d\lambda(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x) - f(x))e^{-ikx}d\lambda(x) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\,|e^{-ikx}|\,d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\,d\lambda(x) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

5. *Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$S(f,x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Υπόδειξη. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x)\sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}
b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin kx\,d\lambda(x) \\
&= \left[-2\frac{(\pi - x)\cos kx}{\pi k} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k}\,d\lambda(x) \\
&= \frac{2\pi}{\pi k} + \left[\frac{2\sin kx}{\pi k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{k}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

6. *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι*

$$S(f,x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f(0)=f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi,\pi]$. Έχουμε $f(x)=(\pi-x)^2$ αν $0<x<\pi$ και $f(x)=f(x+2\pi)=(-\pi-x)^2=(\pi+x)^2$ αν $-\pi<x<0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x)=(\pi-x)^2=f(x)$$

για κάθε $0<x<\pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi,\pi]$. Συνεπώς,

$$b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,d\lambda(x)=0$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2d\lambda(x)=\left[\frac{-(\pi-x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi}=\frac{2\pi^3}{6\pi}=\frac{\pi^2}{3}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k\geqslant 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}
a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,d\lambda(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos kx\,d\lambda(x)\\
&=\left[\frac{2(\pi-x)^2\sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(\pi-x)\sin kx}{k}\,d\lambda(x)\\
&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin kx}{k}\,d\lambda(x)\\
&=\left[-\frac{4(\pi-x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\\
&=\frac{4\pi}{\pi k^2}=\frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x)=a_0(f)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|+|b_k(f)|)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

7. *Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \textit{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx-\pi)\,d\lambda(x) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x), \end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της f. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-\pi/k)]\cos(kx)\,d\lambda(x),$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-\pi/k)|\,|\cos(kx)|\,d\lambda(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^{\alpha} d\lambda(x) = \frac{C}{k^{\alpha}},$$

όπου $C = M\pi^{\alpha}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leqslant C/k^{\alpha}$.

8. *Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0)=0$. Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(kx)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k}+\frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,d\lambda(x)\\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-\frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,d\lambda(x)\\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-i\frac{(-1)^k\pi}{k}+\frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{-ikx}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}(e^{ikx}-e^{-ikx})\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)x),\end{aligned}$$

διότι $(-1)^k-1=0$ αν ο k είναι άρτιος, και

$$2i[(-1)^k-1](e^{i(2k+1)x}-e^{-i(2k+1)x}) = -4i(2i\sin((2k+1)x)) = 8\sin((2k+1)x).$$

9. *Έστω $0<\delta<\pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x)=\begin{cases} 1-\frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x|\leqslant\delta\\ 0 & \text{αν } \delta\leqslant |x|\leqslant\pi\end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x)=\frac{\delta}{2\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta}\cos kx.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)d\lambda(x)=\frac{\delta}{2\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)e^{-ikx}d\lambda(x)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(kx)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\cos(kx)\,d\lambda(x)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{x\sin(kx)}{\delta k}-\frac{\cos(kx)}{\delta k^2}\right]_0^{\delta}\\
&= \frac{\sin(k\delta)}{\pi k}-\frac{\delta\sin(k\delta)}{\pi\delta k}+\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\\
&= \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
S(f,x) &= \frac{\delta}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}e^{ikx} = \frac{\delta}{2\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx})\\
&= \frac{\delta}{2\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\cos(kx).
\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \frac{\delta}{2\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. *Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(kx)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}+\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}e^{ikx} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx})\\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^k-1]}{\pi k^2}\cos(kx)\\ &= \frac{\pi}{2}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \frac{\pi}{2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k+1)^2},$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

11. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$.*

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x) = 0.$$

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, d\lambda(x) = -\int_0^{2\pi} f\big(x+\frac{\pi}{n}\big)\sin nx \, d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, d\lambda(x) = 0.$$

Υπόδειξη. (α). Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής. Εφόσον, είναι και 2π-περιοδική θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\varepsilon > 0$ τυχόν, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, αν $0 < |t| < \delta$ τότε,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(t)| \, d\lambda(x) < \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon \, dt = 2\pi\varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι συνεχής. Στην γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και f_ε συνεχή 2π-περιοδική ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} |f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Τότε, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, d\lambda(x) &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f_\varepsilon(x+t)| \, d\lambda(x) \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)| \, d\lambda(x) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \, d\lambda(x) \\ &= 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \, d\lambda(x) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)| \, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι,

$$\limsup_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, d\lambda(x) \leqslant 2\varepsilon + \limsup_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)| \, d\lambda(x) = 2\varepsilon.$$

Καθώς, το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν το ζητούμενο έπεται.

(β) Με την αλλαγή μεταβλητής $x = y + \pi/n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) \, d\lambda(x) &= \int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)\sin(\pi + ny) \, d\lambda(y) \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin(nx) \, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) \, d\lambda(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right| \, d\lambda(x).$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από το (α) για $t = \pi/n \to 0$.

12. *(α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ δείξτε ότι*

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Επεκτείνουμε την $f : [\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x\pi \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση σ' όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, είναι $a_k(f) = 0$, αφού f περιττή και

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \, d\lambda(x) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \sin kx \, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(k-1)x + \sin(k+1)x]\, d\lambda(x). \end{aligned}$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $b_k = 0$ ενώ αν ο $k = 2s$ τότε

$$b_{2s}(f) = \frac{8}{\pi}\frac{s}{4s^2-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Αφού η σειρά $S(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και η $f|_{(0,\pi)}$ είναι συνεχής, έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι αν $0 < x < \pi$ τότε

$$\cos x = f|_{(0,\pi)}(x) = S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Για το (β) δουλεύουμε ανάλογα.

13. *Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$S(f,x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S(f)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f,x)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\lambda(x) = \frac{b-a}{2\pi}.$$

Αν $k \neq 0$, έχουμε
$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{ik}.$$
Έπεται ότι
$$S(f,x) = \widehat{f}(0) + \sum_{k\neq 0}\widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\,e^{ikx}.$$
Η $S(f,x)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Θα έπρεπε να συγκλίνει η σειρά
$$\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0}\frac{|e^{-ika}-e^{-ikb}|}{2\pi|k|} = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0}\frac{|e^{ik(b-a)}-1|}{2\pi|k|}.$$
Η σειρά αυτή αποκλίνει: αν ο $\frac{b-a}{2\pi}$ είναι ρητός τότε η ακολουθία $\{e^{ik(b-a)}\}_k$ παίρνει πεπερασμένες το πλήθος τιμές, όλες διαφορετικές από 1, ενώ αν ο $\frac{b-a}{2\pi}$ είναι άρρητος τότε η ακολουθία $\{e^{ik(b-a)}\}_k$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στη μοναδιαία περιφέρεια, και αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος των $|k| \leqslant N$ για τους οποίους $|e^{ik(b-a)}-1| \geqslant \frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από c_1N για κάποια σταθερά $c_1 > 0$, άρα
$$\sum_{k=-N}^{N}\frac{|e^{ik(b-a)}-1|}{2\pi|k|} \geqslant c_2\log N \to \infty.$$

14. *(α) Έστω $0<\delta<\pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$,*
$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{και} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$
(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k \to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0,2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi-\delta]$, όπου $0<\delta<\pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,2\pi)$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $A_n(x) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a\cos b = \sin(a-b)+\sin(a+b)$ ως εξής:
$$2\sin(x/2)A_n(x) = \sin(x/2) + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{x}{2}-kx\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+kx\right)\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$
Για κάθε $x \in (0,2\pi)$ είναι $\sin(x/2) > 0$, άρα
$$A_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin(x/2)}.$$
Αν $0<\delta<\pi$ τότε για κάθε $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ ισχύει $\sin(x/2) \geqslant \sin(\delta/2)$. Επομένως, έχουμε $|A_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. Για το άλλο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b)$ και εργαζόμαστε ανάλογα.

(β) Για να δείξουμε την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy για σειρές πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Dirichlet: Αν (ε_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\varepsilon_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

σειρά πραγματικών αριθμών με φραγμένα μερικά αθροίσματα, δηλαδή υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $|u_1 + \cdots + u_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ συγκλίνει.

Τώρα, το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συγκλίνουσα είναι άμεση συνέπεια του (α) σε συνδυασμό με το κριτήριο Dirichlet. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n αρκεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n και ως προς $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Μια άλλη, πιο άμεση απόδειξη (η οποία όμως ακολουθεί την ίδια ιδέα) θα ήταν η εξής: Έστω $x \in (0, 2\pi)$ τυχόν αλλά σταθερό. Θεωρούμε την σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$. Παρατηρήστε από το (α) ότι $\cos kx = A_k(k) - A_{k-1}(x)$ με $A_0(x) \equiv \frac{1}{2}$. Τότε, αν $1 \leqslant n < m$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k (A_k(x) - A_{k-1}(x))\right| \\ &= \left|-t_{n+1}A_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})A_k(x) + t_m A_m(x)\right| \\ &\leqslant t_{n+1}|A_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})|A_k(x)| + t_m|A_m(x)| \\ &\leqslant 2t_{n+1} \max_{n+1 \leqslant k \leqslant m} |A_k(x)| \leqslant \frac{t_{n+1}}{\sin(x/2)},\end{aligned}$$

από το (α). Καθώς, $t_k \to 0$ έπεται από το κριτήριο του Cauchy ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, τότε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| \leqslant \frac{t_n}{\sin(\delta/2)},$$

ομοιόμορφα ως προς x, επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Αφού έχουμε σειρά συνεχών συναρτήσεων, έπεται ότι άθροισμά της είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Επειδή το $\delta \in (0, \pi)$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συνεχής. Για την άλλη σειρά εργαζόμαστε ανάλογα.

15. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\, d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, ολοκληρώνουμε την απόδειξη ως εξής: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε τέτοιο ώστε $\|f-p_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)-p_\varepsilon(x)|\,|g(x)|\,d\lambda(x) \\
&\qquad+ \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + |\widehat{p_\varepsilon}(0)-\widehat{f}(0)|\,|\widehat{g}(0)| \\
&\qquad\leqslant \|f-p_\varepsilon\|_1\|g\|_\infty + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + \|p_\varepsilon - f\|_1|\widehat{g}(0)| \\
&\qquad\leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|) + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right|,
\end{aligned}$$

και αφήνοντας το $n\to\infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| \leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|).$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| = 0.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, και λόγω γραμμικότητας του ζητούμενου ως προς f μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x)=e^{ikx}$ για κάποιον $k\in\mathbb{Z}$. Αν $k=0$ είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(nx)d\lambda(x) &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} g(y)d\lambda(y) = \frac{1}{n}\cdot n\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(y)d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(y)d\lambda(y) = \widehat{g}(0)
\end{aligned}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, λόγω της περιοδικότητας της g. Μένει να δείξουμε ότι, για κάθε $k\neq 0$,

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ikx}g(nx)d\lambda(x) = 0.$$

Παρόμοιο επιχείρημα με το αρχικό δείχνει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση ελέγχουμε την $(*)$ με απλές πράξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

1. *Έστω* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε* $s_n = c_1 + \cdots + c_n$*. Δείξτε ότι:*

(α) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *συγκλίνει στον* s*, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον* s*.*

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ *είναι Cesàro αθροίσιμη στον* s*, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον* s*.*

Υπόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Θέτοντας $s_0 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})r^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - r\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $s_n = c_1 + \cdots + c_n \to 0$. Επειδή η (s_k) είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_k| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|s_k| < \varepsilon$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| &\leqslant (1-r)\sum_{k=`}^{k_0} |s_k| r^k + (1-r)\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |s_k| r^k \\ &\leqslant (1-r) M r \frac{1-r^{k_0}}{1-r} + \varepsilon(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \\ &\leqslant M(1-r^{k_0}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $r_0 \in (0,1)$ ώστε $M(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$, τότε για κάθε $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| < 2\varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to 0$ καθώς $r \to 1^-$.

Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας την $(*)$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s) r^k + (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(s_k - s) r^k + (1-r) s \cdot \frac{r}{1-r} \\ &\to 0 + s = s.\end{aligned}$$

Για το (β): αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(**) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

Έχουμε ότι $\sigma_{k+1} = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_k}{k+1}$. Άρα, θέτοντας $\sigma_0 = 0$ έχουμε $s_k = (k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k$ για $k = 0, 1, \ldots$. Τότε, χρησιμοποιώντας και την πρώτη ταυτότητα από το (α), έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k] r^k \\ &= (1-r)\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k\right] \\ &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - s)kr^k + (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} skr^k \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - s)kr^k + rs,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, έχουμε $\sigma_k - s \to 0$. Ειδικότερα, η $(\sigma_k - s)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $B > 0$ ώστε $|\sigma_k - s| \leqslant B$ για κάθε k. Αφού $\sigma_k - s \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|\sigma_k - s| < \varepsilon$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k - s\right| &\leqslant (1-r)^2\sum_{k=1}^{k_0}|\sigma_k - s|kr^k + (1-r)^2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|\sigma_k - s|kr^k + |s - rs| \\ &\leqslant (1-r)k_0B(1-r^{k_0}) + \varepsilon r + (1-r)|s|.\end{aligned}$$

Έστω $r_0 \in (0,1)$ ώστε $Bk_0(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$ και $(1-r_0)|s| < \varepsilon$. Τότε, αν $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon r + (1-r)|s| < 3\varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to s$ καθώς $r \to 1^-$.

2. *Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι $s_n(f) = (f * D_n)$ και ότι η πράξη $*$ της συνέλιξης είναι προσεταιριστική και μεταθετική:

$$s_n(f) * g = (f * D_n) * g = f * (D_n * g) = f * (g * D_n) = f * s_n(g).$$

Όμοια δείχνουμε και την άλλη ισότητα.

3. *Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,*

$$\lim_{\delta\to 0}\|K_\delta\|_p = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Για κάθε $0 < \eta < \pi$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\eta = \chi_{[-\eta,\eta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$(\eta/\pi)^{1/q}\|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_\eta(t)|^q\,d\lambda(t)\right)^{1/q}\|K_\delta\|_p \geqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\delta(x)g_\eta(x)\,d\lambda(x)\right|.$$

Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες των καλών πυρήνων παίρνουμε

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\delta(x)g_\eta(x)\,d\lambda(x)\right| = \left|1 - \frac{1}{2\pi}\int_{\eta<|x|\leqslant\pi}K_\delta(x)\,d\lambda(x)\right|.$$

Έστω $M > 0$. Υπάρχει $\eta \in (0,\pi)$ ώστε $(\pi/\eta)^{1/q} > 2M$. Επιπλέον, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\eta<|x|\leqslant\pi}K_\delta(x)\,d\lambda(x)\right| < 1/2$ (εξηγήστε γιατί). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε

$$\|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $\|K_\delta\|_p \to +\infty$ καθώς $\delta \to 0$.

4. *Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε το n-οστό μερικό άθροισμα Cesàro της f τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma_{2n-1}(f,0) = \frac{1}{2n}\sum_{m=0}^{2n-1}s_m(f,0) \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{m=n}^{2n-1}s_m(f,0) \geqslant \frac{1}{2}s_n(f,0),$$

διότι $s_m(f,0) = a_0/2 + a_1 + \cdots + a_m$ και $a_k \geqslant 0$ για κάθε k, άρα $s_m(f,0) \geqslant s_n(f,0)$ για κάθε $m = n, n+1, \ldots, 2n-1$. Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι

$$|\sigma_{2n-1}(f,x)| \leqslant \|f * F_{2n-1}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\|F_{2n-1}\|_1 = \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι άνω φραγμένα:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant 2s_n(f,0) \leqslant 4\|f\|_\infty,$$

που αποδεικνύει τη σύγκλιση της σειράς.

5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την*

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι η* f *είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η g είναι 2π-περιοδική, και $g(x) = g(x + 2\sqrt{2}\pi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x-2\sqrt{2}\pi)e^{-ik(x-2\sqrt{2}\pi)}d\lambda(x) \\
&= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\
&= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

Αν $k \neq 0$ έχουμε $e^{ik2\sqrt{2}\pi} \neq 1$, άρα $\widehat{g}(k) = 0$. Έπεται ότι $g(x) = \widehat{g}(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι σταθερή. Άρα, και η f είναι σταθερή.

6. *Έστω* $f \in L_1(\mathbb{T})$ *συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο* $x \in \mathbb{R}$ *υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x-0) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \textit{και} \quad f(x+0) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ *της* f *είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο* x*: πιο συγκεκριμένα,*

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-}(f * P_r)(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x-0)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η P_r είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}
(f * P_r)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)f(x-y)\,d\lambda(y) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\,d\lambda(y) \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y) - f(x-0)]\,d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\,d\lambda(y)\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\,d\lambda(y) \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\,d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\,d\lambda(y) &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,d\lambda(y) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\,d\lambda(y) = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x+0)|\,d\lambda(y) &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,(|f(x-y)|+|f(x+0)|\,d\lambda(y)\\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,d\lambda(y)\to 0\end{aligned}$$

καθώς το $r\to 1^-$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $r_0\in(0,1)$ ώστε, για κάθε $r_0\leqslant r<1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x+0)|\,d\lambda(y)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x+0)]\,d\lambda(y)\to 0$$

καθώς το $r\to 1^-$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y)-f(x-0)]\,d\lambda(y)\to 0$$

καθώς το $r\to 1^-$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

7. *Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$Q_n(t)=\alpha_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\,d\lambda(t)=1.$$

Δείξτε ότι: αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f*Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγι- στικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_n(t)d\lambda(t)=1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0<\delta<\pi$,

$$\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_n(t)d\lambda(t)=2\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t)\to 0\quad\text{όταν } n\to\infty.$$

Έστω $0<\delta<\pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2}\leqslant\frac{1+\cos\delta}{2}<1$ για κάθε $t\in[\delta,\pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t)\leqslant 2\pi\alpha_n\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leqslant 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim_{n\to\infty}(n+1)\vartheta^n = 0$ για $\vartheta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n = 2\int_0^{\pi}\cos^{2n}(t/2)d\lambda(t) = 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} y\, d\lambda(y).$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0,\pi/2]$ και $f(0)=1$, $f(\pi/2)=0$. Συνεπώς, $\cos y \geqslant 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0,\pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geqslant 4\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{2y}{\pi}\right)^{2n} d\lambda(y) = 2\pi\int_0^1 (1-s)^{2n} ds = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leqslant \frac{2n+1}{2}$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$G_n(x) = F_n(x)\sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

Υπόδειξη. Τα δύο μέλη της ισότητας $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ είναι γραμμικά ως προς T, αρκεί λοιπόν να την επαληθεύσουμε για όλες τις συναρτήσεις $T_k(x) = e^{ikx}$, $|k| \leqslant n$. Έχουμε

$$T_k'(x) = ike^{ikx}$$

και

$$\begin{aligned}
(T_k * G_n)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_k(x-y)G_n(y)\,d\lambda(y)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}F_n(y)\sin(ny)\,d\lambda(y)\\
&= \sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}e^{isy}\sin(ny)\,d\lambda(y)\\
&= e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)y}\frac{e^{iny}-e^{-iny}}{2i}\,d\lambda(y)\\
&= \frac{1}{2i}e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{i(s-k+n)y}-e^{i(s-k-n)y}]\,d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k+n)y}d\lambda(y)=0$$

εκτός αν $s=k-n$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k-n)y}d\lambda(y)=0$$

εκτός αν $s=n+k$. Το πρώτο μπορεί να συμβεί μόνο αν $k>0$ και το δεύτερο μόνο αν $k<0$. Συνεπώς, αν $0<k<n$ έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = \frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1-\frac{n-k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Αν $-n<k<-1$, έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = -\frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1-\frac{n+k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $k\neq 0$ παίρνουμε

$$(*)\qquad T_k'(x) = -2n(T_k * G_n)(x).$$

Αν πάλι $k=0$, τα δύο μέλη της $(*)$ είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, έχουμε αποδείξει την $T'(x) = -2n(T*G_n)(x)$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n.

Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|T'(x)| &= 2n|(T*G_n)(x)| \leqslant 2n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T(x-y)|\,|F_n(y)\sin ny|\,d\lambda(y)\\
&\leqslant 2n\|T\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)\,d\lambda(y) = 2n\|T\|_\infty.
\end{aligned}$$

9. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}=0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g_n := s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)$. Χρησιμοποιώντας την $\sigma_n = \frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n}$ και την υπόθεση, θα δείξουμε ότι $g_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)| &= \frac{|(s_0 - s_n) + (s_1 - s_n) + \cdots (s_{n-1} - s_n)|}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} 1\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k \cos kx + b_k \sin kx|.
\end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη ανισότητα $|a\cos\vartheta + b\sin\vartheta| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $\vartheta \in \mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε:

$$\|s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$. Από το θεώρημα του Fejér ξέρουμε $\|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \to 0$. Από την τριγωνική ανισότητα

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \|\sigma_{n+1}(f) - s_n(f)\|_\infty$$

έπεται το ζητούμενο.

10. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα*

$$\|T\| := \sup\{\|T(g)\|_1 : \|g\|_1 \leqslant 1\} = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\|T(g)\|_1 = \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής και $\|T\| \leqslant \|f\|_1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\|F_n\|_1 = 1$, άρα

$$\|T\| \geqslant \|T(F_n)\|_1 = \|F_n * g\|_1 = \|\sigma_n(g)\|_1.$$

Αφού $\|\sigma_n(g) - g\|_1 \to 0$, έχουμε $\|\sigma_n(g)\|_1 \to \|g\|_1$. Συνεπώς,

$$\|T\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(g)\|_1 = \|g\|_1.$$

11. *Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx} \quad \text{και} \quad s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Άρα,

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Αφού $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε k, έπεται ότι

$$\begin{aligned} |s_n(f,x)| &\leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)| + \sum_{k=-n}^{n}\frac{|k\widehat{f}(k)|}{n+1}|e^{ikx}| \leqslant \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \frac{(2n+1)A}{n+1} \\ &\leqslant \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + 2A. \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty = \|f * F_{n+1}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|F_{n+1}\|_1 = \|f\|_\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

12. *Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Για κάθε $k \neq 0$ και $n \geqslant |k|$ έχουμε

$$(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = -\frac{|k|}{n}\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{n}{|k|}\,|(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k)| \leqslant \frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f) - f\|_1 \leqslant \frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f) - f\|_p.$$

Από την $n\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ έπεται ότι

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{|k|}\cdot n\|\sigma_n(f) - f\|_p \to \frac{1}{|k|}\cdot 0 = 0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(k) = 0$. Έπεται ότι $f \equiv \widehat{f}(0)$ (όλοι οι συντελεστές Fourier της $f - \widehat{f}(0)$ είναι ίσοι με μηδέν, και $f - \widehat{f}(0) \in L_p(\mathbb{T})$).

13. *Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}\widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(\widehat{g - g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - (\widehat{g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k)\widehat{f_n}(k) = \widehat{g}(k)(1 - \widehat{f_n}(k)).$$

Άρα,

$$|\widehat{g}(k)|\,|1 - \widehat{f_n}(k)| = |(\widehat{g - g * f_n})(k)| \leqslant \|g - g * f_n\|_1 \to 0.$$

Θεωρώντας την $g(x) = e^{ikx}$ (για την οποία $\widehat{g}(k) = 1$) παίρνουμε $|1 - \widehat{f_n}(k)| \to 0$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$.

14. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά*

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\,d\lambda(t)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t) = \int_A \left(\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \right) d\lambda(t) = \int_A s_n(f,t)\,d\lambda(t).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &:= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} S_m = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \int_A s_m(f,t)\,d\lambda(t) \\ &= \int_A \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} s_m(f,t) \right) d\lambda(t) = \int_A \sigma_{n+1}(f,t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \to 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_A \sigma_{n+1}(f,t) d\lambda(t) - \int_A f(t) d\lambda(t) \right| &\leqslant \int_A |\sigma_{n+1}(f,t) - f(t)|\,d\lambda(t) \\ &\leqslant \|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\sigma_{n+1} \to \int_A f(t)\,d\lambda(t)$, δηλαδή η σειρά $\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\,d\lambda(t)$.

15. *Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*) \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$ του ιδίου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r = f^{-1}(I_r)$, $r = 1, \ldots, m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ του $[-\pi, \pi]$, όπου $[b_s, b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s = \inf\{f(x) : b_s \leqslant x \leqslant b_{s+1}\}$, τότε $|f(x) - t_s| \leqslant \frac{1}{m}$ στο (b_s, b_{s+1}). Επίσης, $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα. Αν ορίσουμε $g_m(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής $(*)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)| \leqslant M$, τότε από την $(**)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |k\widehat{f}(k)| &\leqslant |k\widehat{g_m}(k)| + |k||\widehat{f}(k) - \widehat{g_m}(k)| \\ &\leqslant M + |k| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant M + |k| \frac{1}{m} \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m \to \infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)| \leqslant M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$: αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{b_s}^{b_{s+1}} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi i k}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$,

$$\begin{aligned} 2\pi i k \widehat{g}(k) &= \sum_{s=1}^N t_s (e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}) \\ &= t_1 e^{-ib_1 x} - t_N e^{-ib_{N+1} x} + \sum_{s=2}^N e^{-ikb_s}(t_s - t_{s-1}). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 2\pi |k\widehat{g}(k)| &\leqslant |t_1| + |t_N| + \sum_{k=2}^N (t_s - t_{s-1}) = |t_1| + |t_N| + (t_N - t_1) \\ &\leqslant 4\|f\|_\infty, \end{aligned}$$

διότι $t_N - t_1 \leqslant \|f\|_\infty - (-\|f\|_\infty) = 2\|f\|_\infty$. Έπεται το ζητούμενο, με $M = 2\|f\|_\infty/\pi$.

16. *Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi + 1}{1 - \alpha} \frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ *τότε*

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant 2\pi A\,\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $\alpha = 1$ (η περίπτωση $0 < \alpha < 1$ είναι παρόμοια). Αν $F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)}\right)^2$ ο πυρήνας του Fejér τότε μπορούμε να γράψουμε $\sigma_n(f)(x) = (f * F_n)(x)$. Επομένως, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f,x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t) - f(x)]F_n(t)\,d\lambda(t)\right| \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|F_n(t)\,d\lambda(t) \\ &\leqslant \frac{M}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t|}{|\sin(t/2)|}\frac{\sin^2(nt)}{|\sin(t/2)|}\,d\lambda(t), \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την συνθήκη Lipschitz για την f και το ότι η $\{F_n\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων που παίρνει θετικές τιμές. Καθώς, η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{\sin(t/2)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\pi)$, παίρνουμε $|\frac{t}{\sin(t/2)}| \leqslant \pi$ για κάθε $|t| \leqslant \pi$. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{M}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right|\,d\lambda(t),$$

διότι $|\sin nt| \leqslant 1$. Τέλος, αν μιμηθούμε την απόδειξη της

$$\|D_n\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,d\lambda(t) \leqslant C\log n,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right|\,d\lambda(t) \leqslant C\log n$$

και το συμπέρασμα έπεται. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(t/2) > t/\pi$ για $0 < t < \pi$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right|\,d\lambda(t) &\leqslant 2\pi\int_0^{\pi}\frac{|\sin(nt)|}{t}\,d\lambda(t) \\ &\leqslant 2\pi\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,d\lambda(t) \\ &\leqslant 2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,d\lambda(t) + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,d\lambda(t) \\ &\leqslant 2\pi^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{k\pi}\,d\lambda(t) \\ &\leqslant 2\pi^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}|\sin t|\,d\lambda(t) \\ &\leqslant 2\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant c\log n \end{aligned}$$

για κάποια αριθμητική σταθερά $c > 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant c' M \frac{\log n}{n}.$$

17. *Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,*

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $b_n = a_{n-1} - a_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) = a_0 < \infty.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} n b_{n+1} = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, F_n(x).$$

Αφού $F_n \geqslant 0$ και $\int_{\mathbb{T}} F_n(x) d\lambda(x) = 2\pi$ για κάθε $n \geqslant 1$, από το θεώρημα Beppo-Levi έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{N} n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} b_n - N b_{N+1} \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Τέλος, υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N}(k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=|k|}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \\
&= \sum_{n=|k|}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}) - |k| \sum_{n=|k|}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = |k| b_{|k|} + \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n - |k| b_{|k|} \\
&= \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n = a_{|k|}.
\end{aligned}$$

18. *(α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$*, τότε η τριγωνομετρική σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ *δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την απολύτως συνεχή συνάρτηση $F(t) = (-i)\int_0^t f(s)ds$. Η F είναι 2π-περιοδική, διότι $\widehat{f}(0) = 0$ από την υπόθεση, άρα $F(2\pi) = 0 = F(0)$. Έχουμε

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\frac{e^{-ikx}}{k}d\lambda(x) = \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

για κάθε $k \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\sigma_{n+1}(F,0) = \widehat{F}(0) + \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\frac{\widehat{f}(k)}{k} \to F(0).$$

Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\frac{\widehat{f}(k)}{k} = \lim_{n\to\infty}\left(2\sum_{k=1}^{n}\frac{\widehat{f}(k)}{k} - \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widehat{f}(k)\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k)$ και $\widehat{f}(0) = 0$. Όμως, $\widehat{f}(k) \to 0$ άρα

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widehat{f}(k) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widehat{f}(k) \to 0.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Τότε, $\widehat{2if}(k) = a_k$. Οι συντελεστές Fourier της $g = 2if$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του (α), άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k} < +\infty.$$

19. *Έστω* $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε* $|f(x)| \leqslant M$ *για κάθε* $x \in [-\pi,\pi]$ *και* $b_k(f) \geqslant 0$ *για κάθε* $k \geqslant 1$*. Δείξτε ότι*

$$|s_n(f,x)| \leqslant 5M$$

για κάθε $n \geqslant 1$ *και για κάθε* $x \in [-\pi,\pi]$*.*

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} kb_k.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $|\sigma_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty \leqslant M$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$|\sigma_n(f,x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|F_n(t)\,d\lambda(t) \leqslant M\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,d\lambda(t) = M.$$

Επιπλέον, είναι $\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})b_k \sin kx$. Οπότε, για $x_n = \pi/(4n)$ και $2n$ αντί n παίρνουμε

$$M \geqslant \sigma_{2n+1}(f,x_n) = \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right) b_k \sin(kx_n) \geqslant \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right) b_k \frac{k}{2n},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\sin x > (2/\pi)x$ για $0 < x < \pi/2$ και το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Συνεπώς, είναι

$$2nM \geqslant \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right) kb_k \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}kb_k,$$

χρησιμοποιώντας ακόμη μια φορά το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k \leqslant 4nM.$$

Συνδυάζοντας με τα παραπάνω βρίσκουμε:

$$|s_n(f,x)| \leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} kb_k \leqslant M + \frac{4nM}{n+1} < 5M,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

L_2-σύγκλιση σειρών Fourier

1. *(α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\qquad \textit{και}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x(\pi-x)$ στο $[0,\pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}\qquad \textit{και}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,d\lambda(x)=\frac{\pi}{2}.$$

Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)\,d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(kx)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0) = 0$. Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(kx)\, d\lambda(x) \\
&= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k} + \frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\, d\lambda(x) \\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - \frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\, d\lambda(x) \\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - i\frac{(-1)^k\pi}{k} + \frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k\neq 0} \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^6} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 x^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^4}{30}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{64}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. *Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i\pi\alpha}e^{-ix(\alpha+k)}d\lambda(x) \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin \pi\alpha}\left[\frac{-e^{-ix(\alpha+k)}}{i(k+\alpha)}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin \pi\alpha}\frac{1-e^{-2\pi i\alpha}}{i(k+\alpha)} \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i(k+\alpha)\sin \pi\alpha} = \frac{2i\sin \pi\alpha}{2i(k+\alpha)\sin \pi\alpha} \\
&= \frac{1}{k+\alpha}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)},$$

αφού $|f(x)| = \frac{\pi}{|\sin(\pi\alpha)|}$ για κάθε x.

3. *Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.*
(α) Δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.
(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \textit{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

Υπόδειξη. (α) Για $k = 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathbf{1}\, d\lambda(x) = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \cos(kx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{a} \cos(kx)\, d\lambda(x) \\ &= \left[\frac{\sin(kx)}{\pi k} \right]_0^a = \frac{\sin(ka)}{\pi k}.\end{aligned}$$

(β) Αν $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα

$$f(x) = S(f, x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Θέτοντας $x = 0$ στην ισότητα του (β) έχουμε

$$1 = f(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} = \frac{a}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{\pi k},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\pi} \right) = \frac{\pi - a}{2}.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Parseval: έχουμε $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ για κάθε k, άρα

$$\|f\|_2^2 = |\widehat{f}(0)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{a^2}{\pi^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{\pi^2 k^2}.$$

Αφού

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathbf{1}^2 d\lambda(x) = \frac{a}{\pi},$$

τελικά έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2} \right) = \frac{\pi a}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S(f)$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και κατόπιν supremum πάνω απ' όλα τα $x \in \mathbb{R}$, καταλήγουμε στην

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f': $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k} \right) \\
&\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(f')|^2 \right)^{1/2} \right] \\
&\leqslant \sqrt{2/n} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γενονός ότι

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}$$

και την στοιχειώδη ανισότητα $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a+b}$. Επομένως,

$$\sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sqrt{2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2}.$$

Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2)$ συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται.

5. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

Υπόδειξη. Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(k)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|\widehat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

Έπεται το (β) (και από αυτό, το (α)): αφού η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\lim_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0.$$

Για το (γ), από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\neq 0} |\widehat{f}(k)|\right)^2 &= \left(\sum_{k\neq 0} (k|\widehat{f}(k)|)\frac{1}{k}\right)^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0} k^2|\widehat{f}(k)|^2\right) < +\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

6. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχώς παραγωγίσιμη* 2π*-περιοδική συνάρτηση με*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f *και* f' *δείξτε ότι*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 d\lambda(x),$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ *για κάποιους* $a, b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Από την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2d\lambda(x) = \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2 \\ = \sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k\neq 0}\frac{|\widehat{f'}(k)|^2}{k^2} \\ \leqslant \sum_{k\neq 0}|\widehat{f'}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2d\lambda(x).\end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)d\lambda(x) = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi} = 0$$

από την 2π-περιοδικότητα της f. Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα αν

$$f(x) = \widehat{f}(1)e^{ix} + \widehat{f}(-1)e^{-ix}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

7. *(α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\,d\lambda(t) = 0$. Δείξτε ότι*

$$\left|\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\,d\lambda(t)\right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi}|f(t)|^2d\lambda(t)\int_0^{2\pi}|g'(t)|^2d\lambda(t).$$

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b|f(t)|^2d\lambda(t) \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b|f'(t)|^2d\lambda(t).$$

Υπόδειξη. (α) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left|\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\,d\lambda(t)\right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi}|f(t)|^2d\lambda(t)\int_0^{2\pi}|g(t)|^2d\lambda(t).$$

Αφού $\int_0^{2\pi} g(t)d\lambda(t) = 0$, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\int_0^{2\pi}|g(t)|^2d\lambda(t) \leqslant \int_0^{2\pi}|g'(t)|^2d\lambda(t),$$

και έπεται το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $[a, b] = [0, \pi]$. Αφού $f(0) = f(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\lambda(t) = 0$, θέτοντας $f(x) = -f(-x)$ για $x \in [-\pi, 0]$. Η επέκταση της f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το (α) με $g = f$, παίρνουμε

$$\left|\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,d\lambda(t)\right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi}|f(t)|^2d\lambda(t)\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2d\lambda(t).$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η f είναι περιττή, συμπεραίνουμε ότι

$$(*) \qquad \int_0^\pi |f(t)|^2\, d\lambda(t) \leqslant \int_0^\pi |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Αν το $[a,b]$ είναι τυχόν, θεωρούμε την $F:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ με $F(x)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}x\right)$. Τότε, η $(*)$ ισχύει για την F, δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left|f\left(a+\frac{b-a}{\pi}x\right)\right|^2 d\lambda(x) &= \int_0^\pi |F(x)|^2\, d\lambda(x) \leqslant \int_0^\pi |F'(x)|^2 d\lambda(x)\\ &= \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_0^\pi \left|f'\left(a+\frac{b-a}{\pi}x\right)\right|^2 d\lambda(x).\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t=a+\frac{b-a}{\pi}x$, παίρνουμε

$$\int_a^b |f(t)|^2\, d\lambda(t) \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

8. *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_n(x)|^2 d\lambda(x)=0,$$

αλλά για κάθε $x\in[0,2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{I_n\}$ υποδιαστημάτων του $[0,2\pi]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x\in[0,2\pi]$, τα σύνολα $A_x=\{n\in\mathbb{N}: x\in I_n\}$ και $B_x=\{n\in\mathbb{N}: x\notin I_n\}$ είναι άπειρα.

(ii) $\ell(I_n)\to 0$, όπου $\ell(I)$ είναι το μήκος ενός διαστήματος I.

Ένας τρόπος να ορίσουμε μια τέτοια ακολουθία είναι ο εξής: παίρνουμε $I_1=[0,2\pi]$, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0,2\pi]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα I_2 και I_3 μήκους π, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0,2\pi]$ σε τέσσερα διαδοχικά διαστήματα $I_4,\dots,I_7$ μήκους $\pi/2$ και ούτω καθεξής.

Ορίζουμε $f_n=\chi_{I_n}$, $n=1,2,\dots$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_n(x)|^2 d\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(I_n)}{2\pi}=0.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x\in[0,2\pi]$ έχουμε ότι τα A_x και B_x είναι άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, άρα μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών (k_n) και (r_n) στα A_x και B_x αντίστοιχα. Τότε,

$$f_{k_n}(x)=\chi_{I_{k_n}}(x)=1\to 1 \ \text{ και } \ f_{r_n}(x)=\chi_{I_{r_n}}(x)=0\to 0,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

9. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, d\lambda(t)=\frac{\pi}{2}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα του n-οστού πυρήνα του Dirichlet στο $[-\pi,\pi]$ είναι ίσο με 2π. Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,d\lambda(t) = 2\pi.$$

Γράφουμε

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\,d\lambda(t) + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,d\lambda(t),$$

όπου $g(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}$. Παρατηρούμε ότι η g μπορεί να οριστεί στο 0 ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,d\lambda(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin(nt)\,d\lambda(t)\\ &\quad+\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos(nt)\,d\lambda(t) \to 0\end{aligned}$$

όταν $n\to\infty$, από το Λήμμα Riemann–Lebesgue για τις συνεχείς συναρτήσεις $g(t)\cos(t/2)$ και $g(t)\sin(t/2)$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\,d\lambda(t) = 2\pi.$$

Όμως,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\,d\lambda(t) = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{2\sin x}{x}\,d\lambda(x).$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,d\lambda(x) \to \frac{\pi}{2}$$

όταν $n\to\infty$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,d\lambda(x) = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} \frac{\sin x}{x}\,d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

10. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz*

$$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $K>0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t>0$ ορίζουμε $g_t(x)=f(x+t)-f(x-t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant K^2t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g_t}(k)|^2.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της g_t: είναι

$$\widehat{g_t}(k) = \widehat{f(x+t)}(k) - \widehat{f(x-t)}(k) = e^{ikt}\widehat{f}(k) - e^{-ikt}\widehat{f}(k) = (2i\sin kt)\widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 d\lambda(x)\\ &\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} K^2(2t)^2 d\lambda(x) = K^2t^2.\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $t = \pi/2^{p+1}$ έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leqslant \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geqslant \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| < +\infty$. Χρησιμοποιώντας το (β) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\frac{K\pi}{\sqrt{2}2^p} = \frac{K\pi}{\sqrt{2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^p} < +\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1}|\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

11. *Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 10. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$ και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+t) - f(x-t)|^2 d\lambda(x)\\ &\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}K^2(2t)^{2\alpha}d\lambda(x) = K^2 t^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leqslant \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geqslant \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{2K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^{\alpha p+\alpha}} = \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^\alpha}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)p}} < +\infty,\end{aligned}$$

διότι $\alpha - \frac{1}{2} > 0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1}|\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

12. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)f(x)\,d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.$$

Υπόδειξη. Για την $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\pi-x$ έχουμε $\widehat{g}(0)=0$ και $\widehat{g}(k)=\frac{(-i)}{k}$ για κάθε $k\neq 0$. Έχουμε $f,g\in L_2(\mathbb{T})$, άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)f(x)\,d\lambda(x) = \langle g, f\rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i}{k}(\widehat{f}(k)-\widehat{f}(-k)) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i}{k}(-i)b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.\end{aligned}$$

13. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Υποθέτουμε ότι $a_0 = 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Επεκτείνουμε την $\ln(2\sin\frac{x}{2})$ σε μια άρτια 2π-περιοδική συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$. Εξηγήστε πρώτα ότι, γενικά, αν $f,g\in L_2(\mathbb{T})$ και οι f,g παίρνουν πραγματικές τιμές, τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)d\lambda(x) = \frac{1}{2}a_0(f)a_0(g)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)a_k(g)+b_k(f)b_k(g)).$$

Αφού η g είναι άρτια, έχουμε $b_k(g)=0$ για κάθε $k\geqslant 1$. Άρα,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)a_k(g).$$

Τέλος, για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_k(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \cos kx \, d\lambda(x) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \ln(2\sin\frac{x}{2}) \cos kx \, d\lambda(x) \\
&= -\frac{2}{k\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin kx \cos\frac{x}{2}}{2\sin(x/2)} \, d\lambda(x) \\
&= -\frac{1}{k\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(k+1/2)x + \sin(k-1/2)x}{2\sin(x/2)} \, d\lambda(x) \\
&= -\frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_k(x) + D_{k-1}(x)}{2} \, d\lambda(x) = -\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

14. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [w_1(f,\pi/n)]^2 < \infty,$$

όπου

$$w_1(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)| \, d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Riesz-Fisher αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$ συγκλίνει. Έστω $0 \neq k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f(\cdot + \pi/k)}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t+\pi/k) e^{-ikt} d\lambda(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-iks} ds = -\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$2|\widehat{f}(k)| = |\widehat{f(\cdot + \pi/k)}(k) - \widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t+\pi/k) - f(t)| \, d\lambda(t) = w_1(f,\pi/k).$$

Χρησιμοποιώντας και την $w_1(f,x) = w_1(f,-x)$ (η οποία προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής $s = x + t$ στο $\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)| \, d\lambda(t)$) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{w_1(f,\pi/|k|)}{2}$$

για κάθε $k \neq 0$. Επίσης, $|\widehat{f}(0)| \leqslant \|f\|_1$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant |\widehat{f}(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[w_1(f,\pi/k)]^2}{4} \leqslant \|f\|_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} [w_1(f,\pi/k)]^2 < \infty$$

από την υπόθεση.

15. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε*

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ *και* $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$. *Ειδικότερα,* $F(x) < \infty$ *σχεδόν παντού στο* $\mathbb{T}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|^2}{n(n+1)^2} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \sum_{n=|k|}^{N} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=|k|}^{N} \frac{1}{n(n+1)^2} &= \sum_{n=|k|}^{N} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&\leqslant \sum_{n=|k|}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=|k|+1}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{|k|} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{|k|+1} + \frac{1}{N+2} \\
&\leqslant \frac{1}{|k|(|k|+1)} \leqslant \frac{1}{|k|^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\, d\lambda(x) \leqslant \sum_{k=-N}^{N} |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \frac{1}{|k|^2} = \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|F\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n} \right) d\lambda(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\, d\lambda(x) \leqslant \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

16. *Έστω* $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geqslant 0$. *Δείξτε ότι*

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $\varphi : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ με $\varphi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{k+1}$ για κάθε $k \geqslant 0$ και $\|\varphi\|_\infty = \pi$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\,|y_m|\,\widehat{\varphi}(n+m)\\ &= \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\,|y_m|\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \varphi(t)e^{-i(n+m)t}d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|e^{-int}\right)\left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|e^{-imt}\right)\varphi(t)\,d\lambda(t).\end{aligned}$$

Δηλαδή, αν ορίσουμε $\alpha_N(t) = \sum_{n=0}^{N} |x_n|e^{-int}$ και $\beta_N(t) = \sum_{m=0}^{N} |y_m|e^{-imt}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \alpha_n(t)\beta_n(t)\varphi(t)d\lambda(t)\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\alpha_N(t)|\,|\beta_N(t)|\,\|\varphi\|_\infty d\lambda(t)\\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty \|\alpha_N\|_2\|\beta_N\|_2\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού

$$\|\alpha_N\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \quad \text{και} \quad \|\beta_N\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2},$$

παίρνουμε

$$\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \|\varphi\|_\infty \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Αφού $\|\varphi\|_\infty = \pi$, έπεται ότι

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Ειδικότερα, έχουμε το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μετασχηματισμός **Fourier**

1. (α) *Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $f(z) = e^{-\pi z^2}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy για το ορθογώνιο με κορυφές $-R, R, R+ix, -R+ix$ δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t x} dt = e^{-\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = e^{-\pi x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

(β) *Έστω $G(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (α) Η $f(z) = e^{-\pi z^2}$ είναι ακέραια, άρα, για κάθε $R > 0$ και για κάθε $x > 0$,

$$\int_{[-R+ix, R+ix]} f(z)dz + \int_{[R+ix, R]} f(z)dz + \int_{[R,-R]} f(z)dz + \int_{[-R,-R+ix]} f(z)dz = 0.$$

Έχουμε

$$\int_{[-R+ix, R+ix]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{-\pi(t+ix)^2} dt = e^{\pi x^2} \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t x} dt$$

και

$$\int_{[R,-R]} f(z)dz = \int_{R}^{-R} e^{\pi t^2} dt = -\int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2} dt \to -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = -1$$

καθώς το $R \to \infty$. Παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_{[-R,-R+ix]} f(z)dz \right| = \left| \int_0^x e^{-\pi(-R+it)^2} dt \right| = e^{-\pi R^2} \int_0^x e^{\pi t^2} dt \to 0$$

καθώς το $R \to \infty$. Όμοια,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[R+ix, R]} f(z)dz = 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\lim_{R\to\infty} e^{\pi x^2} \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t x} dt = 1,$$

δηλαδή
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t x} dt = e^{-\pi x^2}.$$
Θέτοντας $s = -t$ παίρνουμε
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi s^2} e^{2\pi i s x} ds = e^{-\pi x^2}.$$
Θέτοντας $y = -x$ βλέπουμε ότι οι δύο τελευταίες ισότητες ισχύουν και για $x < 0$.

(β) Για $\xi \neq 0$ γράφουμε
$$\widehat{G}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-2\pi i t \xi} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t \xi} dt = G(\xi)$$
χρησιμοποιώντας το (α) – αν $\xi = 0$ έχουμε
$$\widehat{G}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1 = G(0).$$

2. (α) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε ότι η f είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και για κάθε $0 \leqslant j \leqslant k$ ισχύει $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι*
$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$
και
$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{c(k,f)}{|\xi|^k}, \qquad \xi \neq 0$$
όπου η σταθερά $c(k,f)$ εξαρτάται από το k και την f (αλλά όχι από το ξ).

(β) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f'' είναι συνεχής και ότι $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε αρχικά ότι $k = 1$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και, αφού $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, βρίσκουμε $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \notin [-M, M]$. Έστω $\xi \in \mathbb{R}$. Για κάθε $s > M$ έχουμε
$$\int_{-s}^{s} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = f(x) e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-s}^{s} + (2\pi i \xi) \int_{-s}^{s} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$
Άρα,
$$\left| \int_{-s}^{s} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - (2\pi i \xi) \int_{-s}^{s} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq |f(s)| + |f(-s)| < 2\varepsilon.$$
Έπεται ότι
$$\limsup_{s \to \infty} \left| \int_{-s}^{s} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - (2\pi i \xi) \int_{-s}^{s} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq 2\varepsilon,$$
και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,
$$\lim_{s \to \infty} \left| \int_{-s}^{s} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - (2\pi i \xi) \int_{-s}^{s} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| = 0.$$
Άρα,
$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = (2\pi i \xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = (2\pi i \xi) \widehat{f}(\xi).$$

Αν υποθέσουμε ότι $k>1$, μπορούμε να εφαρμόσουμε k φορές το ίδιο επιχείρημα (για τις $f^{(j)}$ και $f^{(j+1)}$, $j=0,1,\dots,k-1$). Έπεται ότι

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi)=(2\pi i\xi)\widehat{f^{(k-1)}}(\xi)=\cdots=(2\pi i\xi)^k\widehat{f}(\xi).$$

Τώρα, για κάθε $\xi\neq 0$ έχουμε

$$|\widehat{f}(\xi)|=\frac{|\widehat{f^{(k)}}(\xi)|}{|(2\pi i\xi)^k|}\leq\frac{\|f^{(k)}\|_1}{(2\pi)^k}\,\frac{1}{|\xi|^k}=\frac{c(k,f)}{|\xi|^k},$$

όπου $c(k,f)=\frac{\|f^{(k)}\|_1}{(2\pi)^k}$.

(β) Από το (α) με $k=2$ έχουμε $|\widehat{f}(\xi)|\leq C/|\xi|^2$ για $|\xi|\geq 1$ (όπου $C=\|\widehat{f''}\|_1/4\pi^2$) και, όπως πάντα, $|\widehat{f}(\xi)|\leq\|f\|_1$ για $|\xi|\leq 1$. Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|\,d\xi\leq 2\|f\|_1+2C\int_1^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^2}=2\|f\|_1+2C<\infty.$$

Δηλαδή, $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.

3. *Έστω $f\in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $g(x)=xf(x)$. Αν $g\in L^1(\mathbb{R}$, δείξτε ότι η $\widehat{f}$ είναι παραγωγίσιμη και*

$$\left(\widehat{f}\right)'(\xi)=-2\pi i\widehat{g}(\xi).$$

Υπόδειξη. Για κάθε $\xi\in\mathbb{R}$ γράφουμε

$$\frac{\widehat{f}(\xi+t)-\widehat{f}(\xi)}{t}=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\frac{e^{-2\pi ixt}-1}{t}\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{e^{-2\pi ixt}-1}{t}\right|=\frac{2|\sin(\pi xt)|}{t}\leq 2\pi|x|$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα

$$\left|f(x)e^{-2\pi ix\xi}\frac{e^{-2\pi ixt}-1}{t}\right|\leq 2\pi|xf(x)|=2|g(x)|.$$

Αφού η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{t\to 0}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\frac{e^{-2\pi ixt}-1}{t}=-2\pi ixf(x)e^{-2\pi ix\xi},$$

το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει ότι

$$\lim_{t\to 0}\frac{\widehat{f}(\xi+t)-\widehat{f}(\xi)}{t}=-2\pi i\int_{\mathbb{R}}xf(x)e^{-2\pi ix\xi}dx,$$

δηλαδή

$$\left(\widehat{f}\right)'(\xi)=-2\pi i\int_{\mathbb{R}}g(x)e^{-2\pi ix\xi}dx=-2\pi i\widehat{g}(\xi).$$

4. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = f(x+t) - f(x)$ δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{g}$ της g έχει άπειρες ρίζες.*

Υπόδειξη. Αν $t = 0$ τότε $g \equiv 0$, άρα $\widehat{g} \equiv 0$ και το ζητούμενο ισχύει προφανώς. Για $t \neq 0$ έχουμε

$$\widehat{g}(\xi) = e^{2\pi i t\xi}\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\left(e^{2\pi i t\xi} - 1\right).$$

Τότε, $\widehat{g}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in \left\{\frac{k}{t} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{g}$ της g έχει άπειρες ρίζες.

5. *Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)\,d\xi.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι ορθομοναδιαίος, έχουμε

$$\langle f, \overline{g}\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\overline{g}}\rangle$$

για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{\overline{g}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g}(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi i\langle x,-\xi\rangle}dx},$$

άρα

$$\overline{\widehat{\overline{g}}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi i\langle x,-\xi\rangle}dx = \widehat{g}(-\xi).$$

Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\overline{g}(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\overline{g}}(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)\,d\xi.$$

6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{αν } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} \qquad \text{και} \qquad \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2,$$

με τη σύμβαση $\widehat{f}(0) = 2$ και $\widehat{g}(0) = 1$.

Υπόδειξη. Για την f γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= \left[\frac{-e^{-2\pi i x\xi}}{2\pi i\xi}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{2\pi i\xi}-e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i\xi} \\ &= \frac{2i\sin(2\pi\xi)}{2\pi i\xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.\end{aligned}$$

Όμοια, για την g έχουμε

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Αφού η $1-|x|$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= 2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi x\xi)dx \\ &= 2\left[\frac{(1-x)\sin(2\pi x\xi)}{2\pi\xi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(2\pi x\xi)}{2\pi\xi}dx \\ &= \left[\frac{-2\cos(2\pi x\xi)}{4(\pi\xi)^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1-\cos(2\pi\xi)}{2(\pi\xi)^2} \\ &= \left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2.\end{aligned}$$

7. *Υπολογίστε το*

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

Υπόδειξη. Από την ταυτότητα του Plancherel έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^4 d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\|f\|_2^2 = 2\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x=\pi\xi$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x\mapsto \frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια, παίρνουμε

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^4 d\xi = \frac{2}{3},$$

άρα

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx = \frac{\pi}{3}.$$

8. (α) *Δείξτε ότι: αν* $0 < \varepsilon < t < \infty$ *τότε*

$$\left|\int_\varepsilon^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| \leqslant 4.$$

(β) *Έστω* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *περιττή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν* $0 < \varepsilon < t < \infty$ *τότε*

$$\left|\int_\varepsilon^t \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| \leqslant 4\|f\|_1.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $0 < \varepsilon < t < \infty$ ισχύει

$$\int_\varepsilon^t \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi = \int_\varepsilon^t \frac{1}{\xi^2}(1-\cos\xi)' d\xi = \frac{1-\cos t}{t} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^t \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} d\xi.$$

Ειδικότερα, αν $t > \varepsilon \geq 2\pi$ έχουμε

$$(1) \qquad \left|\int_\varepsilon^t \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi\right| \leq \frac{1-\cos t}{t} + \int_{2\pi}^t \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} d\xi \leq \frac{1-\cos t}{t} + \int_{2\pi}^t \frac{2}{\xi^2} d\xi \leq \frac{2}{t} + \frac{2}{2\pi} \leq \frac{2}{\pi}.$$

Θα δείξουμε ότι αν $0 < \varepsilon < t \leq 2\pi$ τότε

$$(2) \qquad \left|\int_\varepsilon^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| \leq \pi.$$

Από τις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο: αν $0 < \varepsilon < t \leq 2\pi$ είναι άμεσο από την (2), αν $2\pi \leq \varepsilon < t$ είναι άμεσο από την (1), και αν $0 < \varepsilon < 2\pi < t$ τότε συνδυάζοντας τις (1) και (2) γράφουμε

$$\left|\int_\varepsilon^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| \leq \left|\int_\varepsilon^{2\pi} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| + \left|\int_{2\pi}^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| \leq \pi + \frac{2}{\pi} \leq 4.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την (2). Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) Αν $0 < \varepsilon < t \leq \pi$ τότε, λόγω της $\sin\xi \leq \xi$, έχουμε

$$\left|\int_\varepsilon^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| = \int_\varepsilon^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi \leq \int_\varepsilon^t \frac{\xi}{\xi}\, d\xi = t - \varepsilon \leq \pi.$$

(ii) Αν $\pi \leq \varepsilon < t \leq 2\pi$ γράφουμε

$$\left|\int_\varepsilon^t \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| = \left|\int_{\varepsilon-\pi}^{t-\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{y+\pi}\, dy\right| = \int_{\varepsilon-\pi}^{t-\pi} \frac{\sin y}{y+\pi}\, dy \leq \int_{\varepsilon-\pi}^{t-\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy \leq \pi,$$

χρησιμοποιώντας την προηγούμενη περίπτωση και την $\sin(y+\pi) = -\sin y$.

(iii) Αν $0 < \varepsilon < \pi < t \leq 2\pi$ παρατηρούμε (από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις) ότι

$$0 \leq A_\varepsilon := \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi \leq \pi$$

και

$$-\pi \leq B_t := \int_\pi^t \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi \leq 0,$$

οπότε

$$\left|\int_{\varepsilon}^{t} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| = |A_\varepsilon + B_t| \leq \pi.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ περιττή συνάρτηση. Τότε,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\sin(2\pi x\xi)dx.$$

Άρα, αν $0 < \varepsilon < t < \infty$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\varepsilon}^{t} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi\right| &= 2\left|\int_{\varepsilon}^{t}\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin(2\pi x\xi)}{\xi}dxd\xi\right| \\
&= 2\left|\int_0^{\infty} f(x)\left(\int_{\varepsilon}^{t} \frac{\sin(2\pi x\xi)}{\xi}d\xi\right)\, dx\right| \\
&\leq 2\int_0^{\infty} |f(x)|\left|\int_{\varepsilon}^{t} \frac{\sin(2\pi x\xi)}{\xi}d\xi\right|\, dx \\
&= 2\int_0^{\infty} |f(x)|\left|\int_{2\pi\varepsilon x}^{2\pi t x} \frac{sinu}{u}\, du\right|\, dx \\
&\leq 2\int_0^{\infty} 4|f(x)|\, dx = 4\|f\|_1.
\end{aligned}$$

9. *Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ η συνάρτηση $F(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\varepsilon}}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^{\infty} K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta,$$

όπου $K_\delta(x) = \delta^{-n/2}e^{-\pi|x|^2/\delta}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\infty} \delta^{-n/2}e^{-\pi|x|^2/\delta}e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta\, dx \\
&= \int_0^{\infty} \delta^{-n/2}e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2/\delta}dx\right)\, d\delta \\
&= \int_0^{\infty} \delta^{-n/2}e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\cdot\delta^{n/2}d\delta \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, διότι $e^{\pi\delta} \geq \delta^k/k!$ για κάθε $\delta > 0$, άρα

$$e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1} \leq k!\delta^{\varepsilon-(k+1)} \leq C(\varepsilon)/\delta^2$$

αν επιλέξουμε $k = \lceil 1/\varepsilon\rceil$. Αυτό δείχνει ότι

$$\int_1^{\infty} e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta \leq \int_1^{\infty}\frac{C(\varepsilon)}{\delta^2}d\delta = C(\varepsilon) < \infty,$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta < \infty.$$

Τώρα, υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f: έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx \\ &= \int_0^\infty \delta^{-n/2}e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2/\delta}e^{-2\pi i\langle x/\sqrt{\delta},\sqrt{\delta}\xi\rangle}dx\right)d\delta \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2}e^{-2\pi i\langle y,\sqrt{\delta}\xi\rangle}dy\right)d\delta \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}e^{-\pi\delta|\xi|^2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y+\sqrt{\delta}\xi|^2}dy\right)d\delta \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta.\end{aligned}$$

Θέτοντας $t = \pi\delta(1+|\xi|^2)$ παίρνουμε

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^\varepsilon}\frac{1}{\pi^\varepsilon}\int_0^\infty t^{\varepsilon-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\pi^\varepsilon(1+|\xi|^2)^\varepsilon}.$$

Άρα,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^\varepsilon}$$

αν θέσουμε $g(x) = \frac{\pi^\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon)}f(x)$.

10. (α) *Εξετάστε αν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με την ιδιότητα*

$$f * f = f.$$

(β) *Εξετάστε αν υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με την ιδιότητα*

$$f * g = f \ \text{ για κάθε } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Υπόδειξη. (α) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με $f * f = f$. Τότε, $(\widehat{f})^2 = \widehat{f * f} = \widehat{f}$. Αφού η $\widehat{f}$ είναι συνεχής συνάρτηση, έπεται ότι $\widehat{f} \equiv 0$ ή $\widehat{f} \equiv 1$. Το δεύτερο ενδεχόμενο αποκλείεται διότι $\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi) = 0$. Άρα, $\widehat{f} = 0$ και γνωρίζουμε ότι αυτό συνεπάγεται την $f \equiv 0$.

(β) Αν η $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί την $f * g = f$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε $g * g = g$ και από το (α) συμπεραίνουμε ότι $g \equiv 0$. Όμως τότε, θα είχαμε $0 = f * 0 = f$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, το οποίο είναι άτοπο.

11. (α) *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι:*

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = |\det T|^{-1}(\widehat{f} \circ T^{-t})(\xi).$$

(β) *Μια συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ λέγεται ακτινικά συμμετρική αν υπάρχει $G : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $g(x) = G(|x|)$. Ισοδύναμα, αν $g(Ux) = g(x)$ για κάθε ορθογώνιο γραμμικό μετασηματισμό*

U του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν η $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι ακτινικά συμμετρική τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι επίσης ακτινικά συμμετρική συνάρτηση.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\det T|^{-1}(\widehat{f}\circ T^{-t})(\xi) &= |\det T|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x, T^{-t}\xi\rangle}dx \\ &= |\det T|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle T^{-1}x, \xi\rangle}dx \\ &= |\det T|^{-1}|\,\frac{1}{|\det T^{-1}|}\int_{\mathbb{R}^n} f(Ty)e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}dy \\ &= |\det T|^{-1}|\det T|\int_{\mathbb{R}^n}(f\circ T)(y)e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}dy \\ &= \widehat{f\circ T}(\xi). \end{aligned}$$

(β) Έστω f ακτινικά συμμετρική συνάρτηση και έστω $U \in O(n)$. Αφού $U^{-t} = U$, $|\det U| = 1$ και $f\circ U = f$, από το (α) παίρνουμε

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f\circ U}(\xi) = |\det U|^{-1}(\widehat{f}\circ U^{-t})(\xi) = (\widehat{f}\circ U)(\xi)$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, η $\widehat{f}$ είναι ακτινικά συμμετρική.

12. *Έστω $A \subset L^1(\mathbb{R})$. Συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή του θήκη: $g \in \overline{A}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $f \in A$ ώστε $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε με T_f το σύνολο όλων των συναρτήσεων της μορφής*

$$g(x) = \sum_{k=1}^n a_k f(x+b_k).$$

Δηλαδή, το T_f αποτελείται από όλους τους πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς μεταφορών της f.

(α) *Δείξτε ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάποιο ξ, τότε $\widehat{g}(\xi) = 0$ για κάθε $g \in \overline{T_f}$.*

(β) *Δείξτε ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\overline{T_f} = L^1(\mathbb{R})$ τότε $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω ότι $\widehat{f}(u) = 0$ για κάποιο u. Για κάθε $g = \sum_{k=1}^n a_k f(\cdot + b_k) \in T_f$ έχουμε

$$\widehat{g}(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k \widehat{f(\cdot+b_k)}(\xi) = \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{2\pi i b_k\xi}\right)\widehat{f}(\xi).$$

Άρα $\widehat{g}(u) = 0$ για κάθε $g \in T_f$. Τώρα, αν $g \in \overline{T_f}$ μπορούμε να βρούμε $g_n \in T_f$ ώστε $\|g-g_n\|_1 \to 0$. Έπεται ότι

$$|\widehat{g}(u)| = |\widehat{g}(u) - \widehat{g_n}(u)| = |\widehat{g-g_n}(u)| \leq \|g-g_n\|_1 \to 0.$$

Άρα, $\widehat{g}(u) = 0$ για κάθε $g \in \overline{T_f}$.

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\overline{T_f} = L^1(\mathbb{R})$ και έστω ότι $\widehat{f}(u) = 0$ για κάποιο $u \in \mathbb{R}$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι $\widehat{g}(u) = 0$ για κάθε $g \in \overline{T_f} = L^1(\mathbb{R})$. Όμως, υπάρχει $g_0 \in L^1(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα $\widehat{g_0}(\xi) \neq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ (για παράδειγμα, η $g_0 = f$ της Άσκησης 24). Αυτό είναι άτοπο.

13. Δείξτε ότι υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε: $\widehat{g}(\xi) > 0$ αν $\xi > 0$ και $\widehat{g}(\xi) = 0$ αν $\xi \leqslant 0$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $g(x) = \frac{1}{(1+ix)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη.

14. (α) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos(nx)}{nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n * f - f\|_1 = 0.$$

(β) *Δείξτε ότι, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ο μετασχηματισμός Fourier της $g_n * f$ έχει συμπαγή φορέα, άρα οι $h \in L^1(\mathbb{R})$ που έχουν μετασχηματισμό Fourier με συμπαγή φορέα σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $L^1(\mathbb{R})$.*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι η $(g_n)_{1/n}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων. Στην Άσκηση 21 (α) είδαμε ότι για την $u(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ ισχύει

$$\widehat{u}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2.$$

Από τον τύπο αντιστροφής,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi)\, d\xi = u(0) = 1.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\xi = \frac{nx}{2\pi}$ βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}}\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2 d\xi = 1.$$

Αφού $g_n \geq 0$, μένει να ελέγξουμε την τρίτη ιδιότητα. Θεωρούμε $\eta > 0$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\eta} |g_n(x)|\, dx &= \frac{2}{\pi}\int_\eta^\infty \frac{1-\cos nx}{nx^2}\, dx \leq \frac{2}{\pi n}\int_\eta^\infty \frac{2}{x^2}\, dx \\ &= \frac{4}{\eta\pi n} \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι η $(g_n)_{1/n}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων, και έχουμε δεί ότι τότε $\|g_n * f - f\|_1 \to 0$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(β) Παρατηρούμε ότι η $\widehat{g_n}$ έχει συμπαγή φορέα: έχουμε

$$g_n(x) = \frac{n}{2\pi}\widehat{u}\left(\frac{nx}{2\pi}\right),$$

άρα

$$\widehat{g_n}(\xi) = u\left(-\frac{2\pi\xi}{n}\right) = \left(1 - \frac{2\pi|\xi|}{n}\right)\chi_{[-1,1]}\left(\frac{2\pi\xi}{n}\right),$$

δηλαδή $\widehat{g_n}(\xi) = 0$ αν $\xi \notin \left[-\frac{n}{2\pi}, \frac{n}{2\pi}\right]$.

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για την $f_n = f * g_n$ έχουμε $\|f_n - f\|_1 \to 0$ από το (α), και $\widehat{f_n} = \widehat{f * g_n} = \widehat{f}\cdot\widehat{g_n}$, άρα η $\widehat{f_n}$ έχει συμπαγή φορέα (μηδενίζεται έξω από το $\left[-\frac{n}{2\pi}, \frac{n}{2\pi}\right]$).

15. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα: υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) = 0$ αν $|x| > M$. Δείξτε ότι

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1 \cdot e^{2\pi M|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη.

16. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_a^b x^2|f(x)|^2 dx \geqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx$$

και

$$\int_c^d \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Δείξτε ότι

$$(b-a)(d-c) \geqslant \frac{1}{2\pi}.$$

Υπόδειξη.

17. Θεωρούμε τον *τελεστή του Hermite* $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ που ορίζεται από την σχέση

$$L(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f.$$

Στον $S(\mathbb{R})$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\langle L(f), f\rangle \geqslant \langle f, f\rangle$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

(β) Θεωρούμε τους τελεστές A και A^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A(f) = \frac{df}{dx} + xf \qquad \text{και} \qquad A^*(f) = -\frac{df}{dx} + xf.$$

Δείξτε ότι, για κάθε $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

(i) $\langle A(f), g\rangle = \langle f, A^*(g)\rangle$.

(ii) $\langle A(f), A(f)\rangle = \langle A^*A(f), f\rangle \geqslant 0$.

(iii) $A^*A = L - I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

(γ) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τους τελεστές A_t και A_t^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A_t(f) = \frac{df}{dx} + txf \qquad \text{και} \qquad A_t^*(f) = -\frac{df}{dx} + txf.$$

Δείξτε ότι $\langle A_t^* A_t(f), f\rangle \geqslant 0$ και με βάση αυτήν την παρατήρηση δώστε μια δεύτερη απόδειξη της αρχής της αβεβαιότητας: αν $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, τότε

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{df}{dx}\right|^2 dx\right) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Υπόδειξη.

18. Ο *n-οστός πυρήνας του Landau* είναι η συνάρτηση

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n} & \text{αν } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{αν } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

όπου η σταθερά $c_n > 0$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x)\, dx = 1.$$

Δείξτε ότι η $\{L_n\}_{n\geqslant 0}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα δείξτε ότι, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1/2, 1/2]$, τότε η ακολουθία $\{f * L_n\}$ είναι ακολουθία πολυωνύμων στο $[-1/2, 1/2]$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Υπόδειξη.

19. Οι *αριθμοί Bernoulli* B_n ορίζονται από την

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

(α) Δείξτε ότι $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ και $B_5 = 0$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_j.$$

(γ) Δείξτε ότι $B_k = 0$ αν ο k είναι περιττός και $k > 1$.

(δ) Έστω $t > 0$. Εφαρμόζοντας τον τύπο άθροισης του Poisson για την $f(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ και την $\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|k|}.$$

(ε) Η *συνάρτηση ζήτα* ορίζεται από την σχέση

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \qquad s > 1.$$

Για κάθε $t>0$ δείξτε τις ταυτότητες

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+k^2}=\frac{1}{\pi t}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\zeta(2m)t^{2m-1}$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi t|k|}=\frac{2}{1-e^{-2\pi t}}-1.$$

(στ) Χρησιμοποιώντας την

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m}$$

δείξτε ότι, για κάθε $m\geqslant 1$,

$$2\zeta(2m)=(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}.$$

Υπόδειξη.

20. Οι *συναρτήσεις Hermite* $h_k(x)$, $k\geqslant 0$, ορίζονται ως εξής:

$$h_k(x)=(-1)^k e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^k(e^{-x^2}).$$

(α) Δείξτε ότι $h_0(x)=e^{-x^2/2}$ και $h_1(x)=2xe^{-x^2/2}$.

(β) Δείξτε ότι $h_k(x)=P_k(x)e^{-x^2/2}$, όπου P_k είναι πολυώνυμο βαθμού k και συμπεράνατε ότι $h_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(γ) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}h_k(x)\frac{t^k}{k!}=e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}.$$

(δ) Δείξτε ότι *η οικογένεια* $\{h_k\}_{k\geqslant 0}$ *είναι πλήρης*: αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$\langle f,h_k\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)h_k(x)\,dx=0$$

για κάθε $k\geqslant 0$, τότε $f\equiv 0$ (χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8).

(ε) Ορίζουμε $h_k^*(x)=h_k(\sqrt{2\pi}x)$. Δείξτε ότι

$$\widehat{h_k^*}(\xi)=(-i)^k h_k^*(\xi).$$

Δηλαδή, οι h_k^* είναι ιδιοσυναρτήσεις του μετασχηματισμού Fourier.

(στ) Αν $L(f)=-\frac{d^2f}{dx^2}+x^2f$, δείξτε ότι

$$L(h_k)=(2k+1)h_k$$

για κάθε $k\geqslant 0$. Συμπεράνατε ότι οι h_k είναι ορθογώνιες ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ του Schwartz.

(ζ) Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}[h_k(x)]^2dx=\sqrt{\pi}2^k k!.$$

Υπόδειξη.