Εθνικο και Καποδιστριακο Πανεπιστημιο
Αθηνων

Μαθηματική Στατιστική

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
2020

"There are three kinds of lies: lies, damned lies and Statistics."

Mark Twain

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στη Μαθηματική Στατιστική έχουμε κάποιο δείγμα παρατηρήσεων στα χέρια μας. Οι παρατηρήσεις αυτές θεωρούμε ότι είναι πραγματοποιήσεις από κάποια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας με μία ή περισσότερες παραμέτρους, εκ των οποίων τουλάχιστον μία παίρνει κάποια τιμή η οποία μας είναι άγνωστη. Οι παράμετροι αυτές θεωρούμε ότι είναι κάποιες άγνωστες σταθερές. Βασικός στόχος μας είναι να βρούμε τρόπους για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την πραγματική τιμή αυτών των αγνώστων παραμέτρων ή συναρτήσεων αυτών των αγνώστων παραμέτρων με βάση το συγκεκριμένο δείγμα που έχουμε στα χέρια μας.

Για παράδειγμα, αν βάλουμε 30 παιδιά να ρίξουν από 2 όμοια νομίσματα το καθένα και καταγράψουμε το πλήθος από "Κ" που έφερε το κάθε παιδί, τότε θα έχουμε στα χέρια μας ένα δείγμα από 30 παρατηρήσεις. Οι παρατηρήσεις αυτές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι όλες προέρχονται από τη Διωνυμική κατανομή με γνωστό πλήθος δοκιμών (ίσο με 2) και άγνωστη πιθανότητα επιτυχίας p. Στόχος μας είναι με βάση αυτές τις 30 παρατηρήσεις να εκτιμήσουμε την πραγματική πιθανότητα p που έχει καθένα από αυτά τα όμοια νομίσματα να φέρει "Κ".

Η ύλη του μαθήματος μπορεί να χωριστεί στα παρακάτω τέσσερα βασικά κεφάλαια:

- Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (Ε.Ο.Κ.),
- Σημειακή Εκτιμητική,
- Διαστήματα Εμπιστοσύνης,
- Στατιστικοί Έλεγχοι Υποθέσεων.

Οι παρούσες σημειώσεις καλύπτουν την ύλη που έχουν παραδώσει οι καθηγητές Παπαγεωργίου Χαράλαμπος, Τρέβεζας Σάμης, Βαγγελάτου Ευτυχία, Παπαδάτος Νικόλαος και Σιάννης Φώτιος κατά τα ακαδημαϊκά έτη 2014 - 2019 στο τμήμα Μαθηματικών του πανεπιστημίου Αθηνών. Τους ευχαριστούμε για την προσφορά τους στον τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας του τμήματος όλα αυτά τα χρόνια.

Οι σημειώσεις περιέχουν ένα εισαγωγικό κεφάλαιο με μία πολύ γρήγορη σύνοψη των βασικών στοιχείων του μαθήματος "Πιθανότητες Ι" που απαιτούνται για να παρακολουθήσει κάποιος επιτυχώς το μάθημα. Προτείνεται κάποιος να αποκτήσει μία οικειότητα με τις βασικές κατανομές και τις ιδιότητές τους πριν ασχοληθεί περαιτέρω με το μάθημα.

Σε κάθε κεφάλαιο παραθέτουμε την απαιτούμενη θεωρία, συνοδευόμενη από παραδείγματα που καλύπτουν ολόκληρο το φάσμα των εφαρμογών του μαθήματος. Ενδιάμεσα, παρεμβάλλουμε αρκετές παρατηρήσεις και σημειώσεις που στοχεύουν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών που παρουσιάζονται. Οι περισσότερες αποδείξεις θεωρημάτων και προτάσεων παραλείπονται, καθώς είναι εύκολα διαθέσιμες στην ελληνική βιβλιογραφία και θεωρήσαμε ότι δεν προσφέρουν σημαντικά στη μεγαλύτερη εμβάθυνση.

Στο τέλος των σημειώσεων, παραθέτουμε κάποιες επαναληπτικές ασκήσεις μαζί με λυμένα θέματα εξετάσεων από τα ακαδημαϊκά έτη 2010 - 2019.

Ανδρεόυ Πάνος
Κατσιάνος Βασίλης

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Πιθανοτήτων

1.1 Διακριτές Κατανομές

Ορισμός 1.1. (Συνάρτηση Πιθανότητας)

$$f_X(x) = P(X = x), \quad x \in S = \{x_0, x_1, \dots\}.$$

Πρόταση 1.1. (Ιδιότητες Συνάρτησης Πιθανότητας)

i. $0 \leqslant f_X(x) \leqslant 1$, $x \in S = \{x_0, x_1, \dots\}$,

ii. $\sum\limits_{x \in S} f_X(x) = 1$.

Ορισμός 1.2. (Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής)

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{y \leqslant x} P(X = y) = \sum_{y \leqslant x} f_X(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 1.3. (Μέση Τιμή) Αν $\sum\limits_{x \in S} |x| f_X(x) < \infty$, τότε

$$E(X) = \sum_{x \in S} x f_X(x).$$

Ορισμός 1.4. (Δείκτρια Τυχαία Μεταβλητή)

$$X = I_A(Y) = \begin{cases} 1, & Y \in A \\ 0, & Y \notin A \end{cases}.$$

Ισχύει ότι $E(X) = 1 \cdot P(Y \in A) + 0 \cdot P(Y \notin A) = P(Y \in A)$.

Ορισμός 1.5. (Διασπορά) Αν $\sum_{x\in S} x^2 f_X(x) < \infty$, τότε

$$\operatorname{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 .$$

Θεώρημα 1.1. (Τύπος Αφηρημένου Στατιστικού)

$$E\left[g(X)\right] = \sum_{x\in S} g(x) f_X(x).$$

Ορισμός 1.6. (Ανεξαρτησία)

$$\begin{aligned} X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B),\ \forall A, B\subseteq \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y),\ \forall x\in S_X,\ \forall y\in S_Y. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.7. (Ροπογεννήτρια)

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x\in S} e^{tx} f_X(x).$$

Ειδικές Διακριτές Κατανομές

Κατανομή Bernoulli - Bernoulli(p), $p\in(0,1)$: Επιτυχία - Αποτυχία σε 1 δοκιμή

$$f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x\in\{0,1\},$$

$$E(X) = p, \quad \operatorname{Var}(X) = p(1-p),$$

$$M_X(t) = pe^t + 1 - p, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$X, Y \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim \text{Bin}(2, p).$$

Διωνυμική Κατανομή - Bin(n,p), $n\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$: Πλήθος επιτυχιών σε n δοκιμές

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x\in\{0,1,\ldots,n\},$$

$$E(X) = np, \quad \operatorname{Var}(X) = np(1-p),$$

$$M_X(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$X \sim \text{Bin}(n,p), Y\sim\text{Bin}(m,p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X+Y\sim \text{Bin}(n+m, p).$$

Γεωμετρική Κατανομή - Geom(p), $p\in(0,1)$: Πλήθος δοκιμών ως την πρώτη επιτυχία

$$f_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x\in\{1,2,\ldots\},$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{p^2},$$

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X, Y \sim \mathrm{Geom}(p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{NegBin}(2,p).$$

Γεωμετρική Κατανομή - Geom(p), $p \in (0,1)$: Πλήθος αποτυχιών ως την πρώτη επιτυχία

$$f_X(x) = p(1-p)^x, \quad x \in \{0,1,\dots\},$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$

$$M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X, Y \sim \mathrm{Geom}(p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{NegBin}(2,p).$$

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή - NegBin(n,p), $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$: Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία

$$f_X(x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, \quad x \in \{n, n+1, \dots\},$$

$$E(X) = \frac{n}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n}{p^2},$$

$$M_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^n, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X \sim \mathrm{NegBin}(n,p), Y \sim \mathrm{NegBin}(m,p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{NegBin}(n+m,p).$$

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή - NegBin(n,p), $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$: Πλήθος αποτυχιών ως την n-οστή επιτυχία

$$f_X(x) = \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^{x}, \quad x \in \{0,1,\dots\},$$

$$E(X) = \frac{n(1-p)}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n(1-p)}{p^2},$$

$$M_X(t) = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^n, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X \sim \mathrm{NegBin}(n,p), Y \sim \mathrm{NegBin}(m,p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{NegBin}(n+m,p).$$

Κατανομή Poisson - Poisson(λ), $\lambda > 0$: Πλήθος γεγονότων σε σταθερό χρονικό διάστημα

$$f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0,1,\dots\},$$

$$E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda,$$

$$M_X(t) = \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\},$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda), Y \sim \text{Poisson}(\mu) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu).$$

1.2 Συνεχείς Κατανομές

Ορισμός 1.8. (Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας)

$$f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ με } P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx.$$

Ορισμός 1.9. (Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής)

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 1.2. (Ιδιότητες Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας και Κατανομής)

i. $f_X(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$,

ii. $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$,

iii. $\int_a^b f_X(x)dx = P(a < X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b)$,

iv. $P(X = x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

v. $f_X(x) = F'_X(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

vi. F_X γνησίως αύξουσα στο σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$.

Ορισμός 1.10. (Μέση Τιμή) Αν $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx < \infty$, τότε

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx.$$

Πρόταση 1.3. Αν $X \geqslant 0$, δηλαδή $f_X(x) = 0$, $\forall x < 0$, τότε

$$E\left(X^n\right) = \int_0^{\infty} n x^{n-1} \left[1 - F_X(x)\right] dx.$$

Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$E\left(X\right) = \int_0^{\infty} \left[1 - F_X(x)\right] dx.$$

Ορισμός 1.11. (Διασπορά) Αν $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx < \infty$, τότε

$$\text{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2.$$

Θεώρημα 1.2. (Τύπος Αφηρημένου Στατιστικού)

$$E\left[g(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx.$$

Ορισμός 1.12. (Ανεξαρτησία)

$$\begin{aligned} X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B), \ \forall A, B \subseteq \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.13. (Ροπογεννήτρια)

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx.$$

Ορισμός 1.14. (Συνάρτηση Γάμμα)

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0.$$

Πρόταση 1.4. (Ιδιότητες Συνάρτησης Γάμμα)

i. $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$, $a > 1$,

ii. $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$.

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

Συνεχής Ομοιόμορφη Κατανομή - $U[a,b]$, $a < b$: Τυχαία επιλογή αριθμού στο $[a,b]$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b],$$

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a,b],$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases},$$

$$X \sim U[a,b] \Rightarrow U = \frac{X-a}{b-a} \sim U[0,1],$$

$$U \sim U[0,1] \Rightarrow X = (b-a)U + a \sim U[a,b].$$

Εκθετική Κατανομή - $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$: Χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda,$$

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \Rightarrow bX \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{\lambda}{b}\right), \quad b > 0,$$

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\mu) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow \min\{X, Y\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda + \mu),$$

$$X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Gamma}(2, \lambda).$$

Κατανομή Γάμμα - $\mathrm{Gamma}(a, \lambda)$, $a > 0$, $\lambda > 0$,

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$E(X) = \frac{a}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2},$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a, \quad t < \lambda,$$

$$X \sim \mathrm{Gamma}(a, \lambda) \Rightarrow bX \sim \mathrm{Gamma}\left(a, \frac{\lambda}{b}\right), \quad b > 0,$$

$$X \sim \mathrm{Gamma}(a, \lambda), Y \sim \mathrm{Gamma}(b, \lambda) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Gamma}(a + b, \lambda).$$

Κανονική Κατανομή - $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$E(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2,$$

$$M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

$$Z \sim N(0, 1) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2),$$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Κατανομή Βήτα - $\mathrm{Beta}(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1 - x)^{b-1}, \quad x \in (0, 1),$$

$$E(X) = \frac{a}{a + b}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{ab}{(a + b + 1)(a + b)^2},$$

$$X \sim \mathrm{Beta}(a, b) \Rightarrow 1 - X \sim \mathrm{Beta}\,(b, a)\,,$$

$$X \sim \mathrm{Beta}(a,1) \Rightarrow Y = -\log X \sim \mathrm{Exp}(a),$$

$$X \sim \mathrm{Beta}(1,a) \Rightarrow Y = -\log(1-X) \sim \mathrm{Exp}(a),$$

$$Y \sim \mathrm{Exp}(a) \Rightarrow X_1 = e^{-Y} \sim \mathrm{Beta}(a,1) \quad \text{και} \quad X_2 = 1 - e^{-Y} \sim \mathrm{Beta}(1,a).$$

1.3 Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός 1.15. (Συνδιακύμανση) Αν $E(XY) < \infty$, τότε

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X - E(X))\,(Y - E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Πρόταση 1.5. (Ιδιότητες Μέσης Τιμής)

i. $E(aX+b) = aE(X) + b$,

ii. $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$,

iii. X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$,

iv. $a \leqslant X \leqslant b \Rightarrow a \leqslant E(X) \leqslant b$,

v. $X \leqslant Y \Rightarrow E(X) \leqslant E(Y)$.

Πρόταση 1.6. (Ιδιότητες Διασποράς)

i. $\mathrm{Var}(X) \geqslant 0$,

ii. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$,

iii. $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$,

iv. X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y)$,

v. X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathrm{Var}(XY) = E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) - [E(X)E(Y)]^2$.

Πρόταση 1.7. (Ιδιότητες Συνδιακύμανσης)

i. $\mathrm{Cov}(X,a) = 0$,

ii. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$,

iii. $\mathrm{Cov}(Y,X) = \mathrm{Cov}(X,Y)$,

iv. $\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\mathrm{Cov}(X,Y)$,

v. $\mathrm{Cov}(X+Y, Z+W) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,W) + \mathrm{Cov}(Y,Z) + \mathrm{Cov}(Y,W)$,

vi. X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Ορισμός 1.16. (Δεσμευμένη Μέση Τιμή της X δοθέντος ότι $Y = y$)

$$m_{X|Y}(y) = E(X|Y = y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in S_X} x f_{X|Y}(x|y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y) dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}.$$

Ορισμός 1.17. (Δεσμευμένη Μέση Τιμή της X δοθείσης της Y)

$$E(X|Y) = m_{X|Y}(Y).$$

Θεώρημα 1.3. (Διπλής Μέσης Τιμής)

$$E(X) = E\left[E(X|Y)\right] = E\left[m_{X|Y}(Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{y \in S_Y} m_{X|Y}(y) f_Y(y), & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{\mathbb{R}} m_{X|Y}(y) f_Y(y) dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}.$$

Πρόταση 1.8. (Ιδιότητες Ροπογεννητριών)

i. $M_X(t) = M_Y(t), \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X, Y$ ισόνομες (προέρχονται από την ίδια κατανομή με τις ίδιες τιμές παραμέτρων),

ii. $M_X(0) = 1$,

iii. $M_X^{(n)}(0) = E\left(X^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$,

iv. X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

Πρόταση 1.9. (Βασικές Ανισότητες)

i. **Ανισότητα Markov**: $X \geqslant 0 \Rightarrow P(X > a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$, $a > 0$.

ii. **Ανισότητα Chebyshev**: $P\left(|X - E(X)| > a\right) \leqslant \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$, $a > 0$.

iii. **Ανισότητα Cauchy - Schwarz**: $[E(XY)]^2 \leqslant E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right)$.

iv. **Ανισότητα Συνδιακύμανσης**: $[\text{Cov}(X, Y)]^2 \leqslant \text{Var}\,(X)\, \text{Var}\,(Y)$.

v. **Ανισότητα Jensen**: f κυρτή $\Rightarrow f\left(E(X)\right) \leqslant E\left[f(X)\right]$.

Παρατήρηση 1.1. Ένας εύκολος τρόπος να θυμάται κάποιος τη φορά της ανισότητας Jensen είναι μέσω των ιδιοτήτων της διασποράς μίας τυχαίας μεταβλητής X. Ισχύει ότι

$$\text{Var}(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 \geqslant 0 \Rightarrow [E(X)]^2 \leqslant E\left(X^2\right) \Rightarrow f\left(E(X)\right) \leqslant E\left[f(X)\right],$$

όπου $f(x) = x^2$ κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 2

Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

2.1 Εισαγωγή

Η Εκθετική Οικογένεια Κατανομών είναι μία κλάση κατανομών η οποία περιέχει πολλές από τις βασικές κατανομές (διακριτές **και** συνεχείς) που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Η χρησιμότητά της έγκειται στο γεγονός ότι οι κατανομές - μέλη της χαρακτηρίζονται από γενικές ιδιότητες, πράγμα το οποίο μας επιτρέπει να διατυπώσουμε διάφορες προτάσεις με ισχύ για όλες αυτές τις κατανομές. Σαν ειδικές περιπτώσεις αυτών των αποτελεσμάτων μπορούν να προκύψουν πολλά από τα γνωστά αποτελέσματα για αυτές τις κατανομές.

Ορισμός 2.1. Το σύνολο Θ πάνω στο οποίο παίρνει τιμές η άγνωστη παράμετρος $\underline{\vartheta}$ κάποιας κατανομής καλείται παραμετρικός χώρος.

Ορισμός 2.2. Το σύνολο $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x};\underline{\vartheta}) > 0\}$ καλείται στήριγμα της κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{x};\underline{\vartheta})$.

2.2 Μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ.

Ορισμός 2.3. Μία κατανομή με άγνωστη παράμετρο ϑ και συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\vartheta)$ ανήκει στη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. αν το στήριγμά της είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(x;\vartheta) = h(x)\exp\{Q(\vartheta)T(x) - A(\vartheta)\}, \quad x \in S, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Λέμε ότι βρίσκεται σε κανονική μορφή αν $Q(\vartheta) = \vartheta$.

Σημείωση 2.1. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι οι εξής κατανομές ανήκουν στη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ.: Bernoulli, Διωνυμική με γνωστό πλήθος δοκιμών, Γεωμετρική, Αρνητική Διωνυμική με γνωστό πλήθος δοκιμών, Poisson και Εκθετική.

Πρόταση 2.1. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\vartheta) = h(x)\exp\{\vartheta T(x) - A(\vartheta)\}$ σε κανονική μορφή, τότε

$$E[T(X)] = A'(\vartheta), \quad \mathrm{Var}[T(X)] = A''(\vartheta) \quad \text{και}$$

$M_T(u) = E\left[e^{uT(X)}\right] = \exp\{A(u+\vartheta) - A(\vartheta)\}$ η ροπογεννήτρια της $T(X)$.

Σημείωση 2.2. Αν $Q(\vartheta) \neq \vartheta$ και $Q : \Theta \to \mathbb{R}$ αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε με την αναπαραμέτρηση $\eta = Q(\vartheta)$ η Ε.Ο.Κ. έρχεται σε κανονική μορφή.

Παράδειγμα 2.1. (Διωνυμική με γνωστό πλήθος δοκιμών N)

$$\begin{aligned}
f(x;p) &= \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} = \binom{N}{x}\exp\{x\log p + (N-x)\log(1-p)\} \\
&= \binom{N}{x}\exp\{x[\log p - \log(1-p)] + N\log(1-p)\} \\
&= \binom{N}{x}\exp\left\{x\log\frac{p}{1-p} - N\log\frac{1}{1-p}\right\}, \quad x \in S = \{0,1,\dots,N\}, \quad \text{όπου}
\end{aligned}$$

$$h(x) = \binom{N}{x}, \quad Q(p) = \log\frac{p}{1-p}, \quad T(x) = x, \quad A(p) = N\log\frac{1}{1-p}.$$

$$\text{Θέτουμε } \eta = Q(p) = \log\frac{p}{1-p} \Rightarrow (1-p)e^\eta = p \Rightarrow p = \frac{e^\eta}{e^\eta+1} = \frac{1}{1+e^{-\eta}} \Rightarrow$$

$$f(x;\eta) = \binom{N}{x}\exp\left\{\eta x - N\log\frac{1+e^{-\eta}}{e^{-\eta}}\right\} = \binom{N}{x}\exp\{\eta x - N\log(e^\eta+1)\},$$

$$\text{όπου} \quad A(\eta) = N\log(e^\eta+1) \Rightarrow E[T(X)] = E(X) = A'(\eta) = N\cdot\frac{e^\eta}{1+e^\eta} = Np,$$

$$\mathrm{Var}[T(X)] = \mathrm{Var}(X) = A''(\eta) = N\cdot\frac{e^{-\eta}}{(1+e^{-\eta})^2} = N\cdot\frac{1}{1+e^{-\eta}}\cdot\frac{e^{-\eta}}{1+e^{-\eta}} = Np(1-p)$$

$$\begin{aligned}
\text{και} \quad M_T(u) = M_X(u) &= E\left(e^{uX}\right) = \exp\{A(u+\eta) - A(\eta)\} \\
&= \exp\left\{N\log\left(e^{u+\eta}+1\right) - N\log(e^\eta+1)\right\} = \exp\left\{N\log\frac{e^{u+\eta}+1}{e^\eta+1}\right\} \\
&= \left(\frac{e^u e^\eta + 1}{e^\eta+1}\right)^N = \left(\frac{e^\eta}{e^\eta+1}e^u + \frac{1}{e^\eta+1}\right)^N = (pe^u + 1 - p)^N. \quad \square
\end{aligned}$$

2.3 Πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ.

Ορισμός 2.4. Μία κατανομή με άγνωστη διανυσματική παράμετρο $\underline{\vartheta}$ (διάνυσμα με περισσότερες από μία άγνωστες παραμέτρους) και συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\underline{\vartheta})$ ανήκει στην πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ. αν το στήριγμά της είναι ανεξάρτητο του $\underline{\vartheta}$ και

$$f(x;\underline{\vartheta}) = h(x)\exp\{\underline{Q}(\underline{\vartheta})\cdot\underline{T}(x) - A(\underline{\vartheta})\}, \quad x \in S, \quad \underline{\vartheta} \in \Theta,$$

όπου οι συναρτήσεις $\underline{Q}(\underline{\vartheta})$, $\underline{T}(x)$ είναι διανυσματικές και $\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{T}(x)$ είναι το εσωτερικό γινόμενό τους. Λέμε ότι βρίσκεται σε κανονική μορφή αν $\underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \underline{\vartheta}$.

Σημείωση 2.3. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι οι εξής κατανομές ανήκουν στη διπαραμετρική Ε.Ο.Κ.: Κανονική, Γάμμα και Βήτα. Σε αντιδιαστολή, η συνεχής ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ βλέπουμε ότι **δεν** ανήκει στην Ε.Ο.Κ. αφού το στήριγμά της, $S = [\vartheta_1, \vartheta_2]$, εξαρτάται από την παράμετρο $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Παράδειγμα 2.2. (Βήτα) Για $x \in S = (0,1)$, $a > 0$ και $b > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x; a, b) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \\ &= \exp\left\{(a-1)\log x + (b-1)\log(1-x) - \log\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\right\}, \quad \text{όπου} \end{aligned}$$

$$h(x) = 1,\ \underline{Q}(a,b) = (a-1, b-1),\ \underline{T}(x) = (\log x, \log(1-x)),\ A(a,b) = \log\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Άρα, η κατανομή Βήτα ανήκει στη διπαραμετρική Ε.Ο.Κ. □

Παράδειγμα 2.3. (Weibull) Για $x > 0$, $a > 0$ και $\lambda > 0$, έχουμε

$$f(x; a, \lambda) = a\lambda x^{a-1} e^{-\lambda x^a} = \exp\left\{(a-1)\log x - \lambda x^a + \log(a\lambda)\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος λx^a δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μίας συνάρτησης μόνο του $\underline{\vartheta} = (a, \lambda)$ και μίας συνάρτησης μόνο του x. Επομένως, η κατανομή Weibull με διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων $\underline{\vartheta} = (a, \lambda)$ **δεν** ανήκει στην Ε.Ο.Κ. Αν, όμως, a γνωστή σταθερά, τότε για $x > 0$ και $\lambda > 0$ έχουμε

$$f(x; \lambda) = a\lambda x^{a-1} e^{-\lambda x^a} = a x^{a-1} \exp\left\{-\lambda x^a - \log\frac{1}{\lambda}\right\}, \quad \text{όπου}$$

$$h(x) = a x^{a-1}, \quad Q(\lambda) = -\lambda, \quad T(x) = x^a, \quad A(\lambda) = \log\frac{1}{\lambda}.$$

Άρα, η κατανομή Weibull με a γνωστό ανήκει στη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. □

Πρόταση 2.2. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x; \underline{\vartheta}) = h(x)\exp\{\underline{\vartheta} \cdot \underline{T}(x) - A(\underline{\vartheta})\}$ σε κανονική μορφή, τότε για $i, j = 1, 2, \ldots, s$, όπου s το πλήθος των αγνώστων παραμέτρων, ισχύει:

$$E[T_i(X)] = \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i}, \quad \mathrm{Var}[T_i(X)] = \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_i^2}, \quad \mathrm{Cov}[T_i(X), T_j(X)] = \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \quad \text{και}$$

$M_{\underline{T}}(\underline{u}) = E\left[e^{\underline{u} \cdot \underline{T}(\underline{X})}\right] = \exp\left\{A(\underline{u} + \underline{\vartheta}) - A(\underline{\vartheta})\right\}$ η ροπογεννήτρια της $\underline{T}(\underline{X})$.

Σημείωση 2.4. Αν $\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \neq \underline{\vartheta}$ και $\underline{Q} : \Theta \to \mathbb{R}^s$ αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε με την αναπαραμέτρηση $\underline{\eta} = \underline{Q}(\underline{\vartheta})$ η Ε.Ο.Κ. έρχεται σε κανονική μορφή.

Παράδειγμα 2.4. (Κανονική με μέση τιμή ϑ_1 και διασπορά ϑ_2)

$$\begin{aligned} f(x;\underline{\vartheta}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta_2}} \exp\left\{-\frac{(x-\vartheta_1)^2}{2\vartheta_2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}x - \frac{1}{2\vartheta_2}x^2 - \frac{\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} - \frac{\log\vartheta_2}{2}\right\}, \quad x \in S = \mathbb{R}, \quad \text{όπου} \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2}\right),\ \underline{T}(x) = \left(x, x^2\right),\ A(\underline{\vartheta}) = \frac{\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} + \frac{\log\vartheta_2}{2}.$$

Θέτουμε $\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2}\right) = \underline{Q}(\underline{\vartheta}) \Rightarrow \vartheta_2 = -\frac{1}{2\eta_2}$ και $\vartheta_1 = -\frac{\eta_1}{2\eta_2} \Rightarrow$

$$f(x;\underline{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\eta_1 x + \eta_2 x^2 + \frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{\log(-2\eta_2)}{2}\right\},\ \underline{\eta} \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0), \quad \text{όπου}$$

$$A(\underline{\eta}) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} - \frac{\log(-2\eta_2)}{2} \Rightarrow E\left[T_1(X)\right] = E\left(X\right) = \frac{\partial A}{\partial \eta_1} = -\frac{\eta_1}{2\eta_2} = \vartheta_1,$$

$$E\left[T_2(X)\right] = E\left(X^2\right) = \frac{\partial A}{\partial \eta_2} = \frac{\eta_1^2}{4\eta_2^2} - \frac{1}{2\eta_2} = \vartheta_1^2 + \vartheta_2,$$

$$\operatorname{Var}\left[T_1(X)\right] = \operatorname{Var}\left(X\right) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1^2} = -\frac{1}{2\eta_2} = \vartheta_2,$$

$$\operatorname{Var}\left[T_2(X)\right] = \operatorname{Var}\left(X^2\right) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_2^2} = -\frac{\eta_1^2}{2\eta_2^3} + \frac{1}{2\eta_2^2} = 4\vartheta_1^2\vartheta_2 + 2\vartheta_2^2 \quad \text{και}$$

$$\operatorname{Cov}\left[T_1(X), T_2(X)\right] = \operatorname{Cov}\left(X, X^2\right) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = \frac{\eta_1}{2\eta_2^2} = 2\vartheta_1\vartheta_2. \quad \square$$

Ορισμός 2.5. Μία πολυδιάστατη κατανομή με άγνωστη διανυσματική παράμετρο $\underline{\vartheta}$ και από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(\underline{x};\underline{\vartheta})$ ανήκει στην πολυδιάστατη πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ. αν το στήριγμά της είναι ανεξάρτητο του $\underline{\vartheta}$ και

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x}) \exp\left\{\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{T}(\underline{x}) - A(\underline{\vartheta})\right\}, \quad \underline{x} \in S, \quad \underline{\vartheta} \in \Theta.$$

Πρόταση 2.3. Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από κατανομή που ανήκει στη μονοδιάστατη πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ. με

$$f(x;\underline{\vartheta}) = h(x) \exp\{\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{T}(x) - A(\underline{\vartheta})\}, \quad x \in S, \quad \underline{\vartheta} \in \Theta,$$

τότε η από κοινού κατανομή του διανύσματος $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ανήκει στην n-διάστατη πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ με

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h^*(\underline{x}) \exp\left\{\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{T}^*(\underline{x}) - A^*(\underline{\vartheta})\right\}, \quad \underline{x} \in S, \quad \underline{\vartheta} \in \Theta, \quad \text{όπου}$$

$$h^*(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n h(x_i), \quad \underline{T}^*(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \underline{T}(x_i), \quad A^*(\underline{\vartheta}) = n \cdot A(\underline{\vartheta}).$$

Κεφάλαιο 3

Σημειακή Εκτιμητική

3.1 Εισαγωγή

Ορισμός 3.1. Η n-διάστατη τυχαία μεταβλητή $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ καλείται δείγμα μεγέθους n.

Ορισμός 3.2. Η n-διάστατη τυχαία μεταβλητή $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ καλείται τυχαίο δείγμα (τ.δ.) μεγέθους n αν, επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (προέρχονται δηλαδή από την ίδια κατανομή με τις ίδιες τιμές παραμέτρων, άγνωστες ή μη).

Ορισμός 3.3. Μία συνάρτηση $T = T(\underline{X}) = T(X_1, \ldots, X_n)$ μόνο του δείγματος $\underline{X}$ καλείται στατιστική συνάρτηση. Δηλαδή, μία στατιστική συνάρτηση δε γίνεται να περιέχει στον τύπο της κάποια άγνωστη παράμετρο.

Ορισμός 3.4. Μία στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ καλείται εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ αν $T(\underline{X}) \in g(\Theta)$.

Όπως γίνεται κατανοητό από τον παραπάνω ορισμό, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$ μία οποιαδήποτε αυθαίρετη συνάρτηση του δείγματος $\underline{X}$, αρκεί μόνο αυτή η συνάρτηση να παίρνει τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο Θ. Αυτό από μόνο του δεν αρκεί στην πράξη για να μας δώσει μία καλή εκτίμηση για την πραγματική τιμή του $\underline{\vartheta}$. Για τον λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί διάφορα κριτήρια για να κρίνουμε αν μία εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$ είναι "καλή" ή όχι. Το παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθεί κυρίως με την παρουσίαση αυτών των κριτηρίων "καλών" εκτιμητριών, όπως η αμεροληψία, το κριτήριο μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Μ.Τ.Σ.), η επάρκεια, η αποτελεσματικότητα (αποδοτικότητα) και η συνέπεια. Στο τέλος του κεφαλαίου, θα μελετήσουμε τις δύο πιο διαδεδομένες μεθόδους εύρεσης εκτιμητριών - τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας και τη μέθοδο των ροπών.

3.2 Αμεροληψία

Ορισμός 3.5. Η εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ καλείται αμερόληπτη εκτιμήτρια (α.ε.) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ αν $E_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta}), \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Ορισμός 3.6. Η συνάρτηση $b_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = E_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right] - g(\underline{\vartheta})$ ονομάζεται μεροληψία της $T(\underline{X})$ ως προς $g(\underline{\vartheta})$.

Σημείωση 3.1. Για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ μπορεί να μην υπάρχει καμία αμερόληπτη εκτιμήτρια, μπορεί να υπάρχει μοναδική αμερόληπτη εκτιμήτρια ή μπορεί να υπάρχουν και πολλές αμερόληπτες εκτιμήτριες. Σε επόμενες παραγράφους, θα ασχοληθούμε με ένα κριτήριο επιλογής της ''καλύτερης'' εκτιμήτριας μεταξύ των πολλών πιθανών αμερόληπτων εκτιμητριών του $g(\underline{\vartheta})$.

Ορισμός 3.7. Η στατιστική συνάρτηση $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ καλείται δειγματική μέση τιμή.

Ορισμός 3.8. Ορίζουμε τη στατιστική συνάρτηση

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

Η στατιστική συνάρτηση S^2 καλείται δειγματική διασπορά.

Παράδειγμα 3.1. Έστω τυχαίο δείγμα $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Θεωρούμε τις παραμετρικές συναρτήσεις $g_1(\underline{\vartheta}) = E_{\underline{\vartheta}}(X_1)$ και $g_2(\underline{\vartheta}) = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1)$. Τότε, $\overline{X}$ α.ε. του $g_1(\underline{\vartheta})$ και S^2 α.ε. του $g_2(\underline{\vartheta})$.
Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, έχουμε τα εξής

$$E_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n}E_{\underline{\vartheta}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\underline{\vartheta}}(X_i) \overset{\text{ισον.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\underline{\vartheta}}(X_1) = E_{\underline{\vartheta}}(X_1) = g_1(\underline{\vartheta}),$$

$$\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_i) \overset{\text{ισον.}}{=} \frac{1}{n}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1),$$

$$E_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}^2\right) = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right) + \left[E_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right)\right]^2 = \frac{1}{n}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) + \left[E_{\underline{\vartheta}}(X_1)\right]^2 \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned}
E_{\underline{\vartheta}}\left(S^2\right) &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E_{\underline{\vartheta}}\left(X_i^2\right) - nE_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}^2\right)\right] \\
&= \frac{n\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) + n\left[E_{\underline{\vartheta}}(X_1)\right]^2 - \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) - n\left[E_{\underline{\vartheta}}(X_1)\right]^2}{n-1} \\
&= \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) = g_2(\underline{\vartheta}).
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.2. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από τη Διωνυμική κατανομή με γνωστό πλήθος δοκιμών N και άγνωστη πιθανότητα επιτυχίας $p \in (0,1)$. Από τις Πιθανότητες Ι, γνωρίζουμε ότι $E_p(X_1) = Np$ και $\mathrm{Var}_p(X_1) = Np(1-p)$. Από την παραπάνω πρόταση, προκύπτει ότι $E_p(\overline{X}) = Np$ και $E_p\left(S^2\right) = Np(1-p)$. Παρατηρούμε ότι

$$E_p\left(\frac{\overline{X}}{N}\right) = p, \quad E_p\left(\frac{S^2}{N}\right) = p(1-p).$$

Επομένως, η $\frac{\overline{X}}{N}$ αποτελεί μία α.ε. του p, ενώ η $\frac{S^2}{N}$ αποτελεί μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(p) = p(1-p)$. □

3.3 Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα

Ορισμός 3.9. Η ποσότητα $\mathrm{MT\Sigma}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = E_{\underline{\vartheta}}[(T(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta}))^2]$ ονομάζεται μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Μ.Τ.Σ.) της εκτιμήτριας $T(\underline{X})$ ως προς $g(\underline{\vartheta})$.

Κριτήριο Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος: Μία εκτιμήτρια $T_1(\underline{X})$ του $g(\underline{\vartheta})$ θα θεωρείται "καλύτερη" σύμφωνα με το κριτήριο Μ.Τ.Σ. από κάποια άλλη εκτιμήτρια $T_2(\underline{X})$ του $g(\underline{\vartheta})$ αν $\mathrm{MT\Sigma}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T_1(\underline{X})\right] \leqslant \mathrm{MT\Sigma}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T_2(\underline{X})\right]$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Πρόταση 3.1. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μπορεί να πάρει την εξής μορφή

$$\mathrm{MT\Sigma}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right] + b^2_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right].$$

Παρατήρηση 3.1. Παρατηρούμε ότι, αν $b_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = 0$, δηλαδή αν η $T(\underline{X})$ είναι α.ε. του $g(\underline{\vartheta})$, τότε $\mathrm{MT\Sigma}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right]$. Επομένως, αν περιοριστούμε στις αμερόληπτες εκτιμήτριες του $g(\underline{\vartheta})$, τότε "καλύτερη" μεταξύ αυτών σύμφωνα με το κριτήριο Μ.Τ.Σ. θα είναι αυτή που επιτυγχάνει τη μικρότερη δυνατή διασπορά. Αυτή η α.ε. που επιτυγχάνει τη μικρότερη δυνατή διασπορά ονομάζεται αμερόληπτη εκτιμήτρια (ομοιόμορφα) ελάχιστης διασποράς (Α.Ε.Ε.Δ.) και στην παράγραφο 3.6 θα παρουσιάσουμε κάποιους τρόπους εύρεσής της.

3.4 Επάρκεια

Ορισμός 3.10. Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται επαρκής για την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ αν η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ δεδομένου ότι $\underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}$ είναι ανεξάρτητη του $\underline{\vartheta}$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ και $\forall \underline{t}$.

Ερμηνεία: Μία επαρκής στατιστική συνάρτηση συγκεντρώνει όλη την πληροφορία που περιέχει το δείγμα για την άγνωστη παράμετρο. Δηλαδή, αν έχουμε στα χέρια μας ένα δείγμα παρατηρήσεων, τότε αρκεί να υπολογίσουμε μέσω αυτών την τιμή μίας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης και θα έχουμε όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο, χωρίς να έχουμε πλέον πρόσβαση στις τιμές των επιμέρους παρατηρήσεων.

Πρόταση 3.2. (Παραγοντικό Κριτήριο Neyman - Fisher)
Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ αν και μόνο αν υπάρχουν μη-αρνητικές συναρτήσεις g, h τέτοιες ώστε

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = g(\underline{T}(\underline{x}),\underline{\vartheta}) \cdot h(\underline{x}), \quad \forall \underline{\vartheta} \in \Theta, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Παράδειγμα 3.3. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Γνωρίζουμε ότι $f(x_i;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_i} I_{(0,\infty)}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, και χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των $X_1,\ldots,X_n$ υπολογίζουμε την κατανομή του δείγματος

$$f(\underline{x};\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\lambda) = \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right\} I_{(0,\infty)^n}(\underline{x}) = g(T(\underline{x}),\lambda)\cdot h(\underline{x}),$$

όπου $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$, $g(t,\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda t}$ και $h(\underline{x}) = I_{(0,\infty)^n}(\underline{x})$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επαρκής για το λ. $\square$

Παράδειγμα 3.4. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,\vartheta)$. Ορίζουμε $X_{(1)} = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$ και $X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$. Γνωρίζουμε ότι $f(x_i;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} I_{(0,\vartheta)}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, επομένως

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \frac{1}{\vartheta^n}\prod_{i=1}^n I_{(0,\vartheta)}(x_i) = \frac{1}{\vartheta^n} I_{(0,\vartheta)}\left(x_{(1)}\right) I_{(0,\vartheta)}\left(x_{(n)}\right) \\ &= \frac{1}{\vartheta^n} I_{(0,\infty)}\left(x_{(1)}\right) I_{(-\infty,\vartheta)}\left(x_{(n)}\right), \end{aligned}$$

όπου $T(\underline{x}) = x_{(n)}$, $g(t,\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^n} I_{(-\infty,\vartheta)}(t)$ και $h(\underline{x}) = I_{(0,\infty)}\left(x_{(1)}\right)$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ. $\square$

Παράδειγμα 3.5. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ με $f(x_i;\lambda,p) = \lambda e^{-\lambda(x_i-p)} I_{(p,\infty)}(x_i)$, $\lambda > 0$ και $p \in \mathbb{R}$ για $i = 1,2,\ldots,n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\lambda,p) &= \lambda^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i + n\lambda p\right\} \prod_{i=1}^n I_{(p,\infty)}(x_i) \\ &= \lambda^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i + n\lambda p\right\} I_{(p,\infty)}\left(x_{(1)}\right), \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, x_{(1)}\right)$, $g(t_1,t_2,\lambda,p) = \lambda^n e^{-\lambda t_1 + n\lambda p} I_{(p,\infty)}(t_2)$, $h(\underline{x}) = 1$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, X_{(1)}\right)$ είναι επαρκής για το (λ, p). □

Πρόταση 3.3. i. Αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και $\underline{T} = \underline{\psi}\left(\underline{T}_1\right)$, τότε και η $\underline{T}_1(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

ii. Επίσης, αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και $\underline{\vartheta} = \underline{G}(\underline{\eta})$, τότε η $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής και για το $\underline{\eta}$.

Σημείωση 3.2. Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, υπάρχουν άπειρες δυνατές επιλογές μίας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης για μία άγωστη παράμετρο ϑ.

Πρόταση 3.4. (Επάρκεια στην Ε.Ο.Κ.)
Έστω ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ., δηλαδή το στήριγμά της δεν εξαρτάται από την άγωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ και η συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας του δείγματος γράφεται στη μορφή

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x}) \exp\left\{\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{T}(\underline{x}) - A(\underline{\vartheta})\right\}, \quad \underline{x} \in S, \quad \underline{\vartheta} \in \Theta.$$

Τότε, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Παράδειγμα 3.6. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\vartheta \neq 0$ και διασπορά ϑ^2. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\vartheta|^{-n} \exp\left\{\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{n}{2}\right\} \\ &= (2\pi e)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\log|\vartheta|\right\}, \quad \underline{x} \in S = \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

όπου $h(\underline{x}) = (2\pi e)^{-\frac{n}{2}}$, $\underline{Q}(\vartheta) = \left(\frac{1}{\vartheta}, -\frac{1}{2\vartheta^2}\right)$, $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$, $A(\vartheta) = n\log|\vartheta|$. Από πρόταση για την επάρκεια στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι επαρκής για το ϑ.

Παρατηρούμε ότι η κατανομή του δείγματος είχε μόνο μία άγνωστη παράμετρο, ενώ η επαρκής στατιστική συνάρτηση που βρήκαμε μέσω της Ε.Ο.Κ. είχε διάσταση 2. Στην ίδια επαρκή στατιστική συνάρτηση θα καταλήγαμε αν δουλεύαμε με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher. □

Σημείωση 3.3. Συνοψίζοντας, για να δείξουμε ότι μία στατιστική συνάρτηση είναι επαρκής για το ϑ έχουμε στη διάθεσή μας τρεις τρόπους: με τον ορισμό (αρκετά δύσχρηστος στην πράξη), με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher (πιο εύχρηστο στην πράξη από τον ορισμό) ή μέσω της πρότασης για την επάρκεια στην Ε.Ο.Κ. (συνδυάζεται εύκολα με την πληρότητα όπως θα δούμε στην επόμενο παράγραφο). Ενδεικτικά, στον πίνακα 3.1 συνοψίζουμε ορισμένες επιλογές επαρκών στατιστικών συναρτήσεων για τις άγνωστες παραμέτρους κάποιων βασικών κατανομών:

$U(\vartheta_1, b)$ με b γνωστό	$T(\underline{X}) = X_{(1)}$
$U(a, \vartheta_2)$ με a γνωστό	$T(\underline{X}) = X_{(n)}$
Bernoulli(ϑ)	$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$
Bin(N, ϑ) με N γνωστό	
Geom(ϑ)	
NegBin(N, ϑ) με N γνωστό	
Poisson(ϑ)	
Exp(ϑ)	
$N(\vartheta_1, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό	
$N(\mu, \vartheta_2)$ με μ γνωστό	$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$
$N(\vartheta_1, \vartheta_2)$	$\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$
Gamma$(\vartheta_1, \vartheta_2)$	$\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \log X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$
Beta$(\vartheta_1, \vartheta_2)$	$\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \log X_i, \sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i)\right)$

Πινακας 3.1: Σύνοψη Επαρκών-Πλήρων Στατιστικών Συναρτήσεων

3.5 Πληρότητα

Ορισμός 3.11. Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται πλήρης (για την κατανομή των X_i) όταν η σχέση $E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(\underline{T})] = 0$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$, συνεπάγεται ότι $\varphi(\underline{T}) = 0$ με πιθανότητα 1 (σχεδόν παντού).

Σημείωση 3.4. Στην πράξη, συνήθως, βρίσκουμε μία επαρκή στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$ με κάποιον από τους τρόπους που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και ελέγχουμε αν αυτή είναι και πλήρης. Για να εφαρμόσουμε τον ορισμό της πληρότητας, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την κατανομή της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $T(\underline{X})$, ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)]$. Διακρίνουμε δύο σημαντικές περιπτώσεις:

- Στη συνήθη περίπτωση όπου έχουμε τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ και επαρκή στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ για το $\underline{\vartheta}$, η κατανομή της $T(\underline{X})$ προκύπτει άμεσα από ιδιότητες ροπογεννητριών.

- Στην περίπτωση όπου έχουμε τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \underline{\vartheta})$, συνάρτηση κατανομής $F(x; \underline{\vartheta})$ και επαρκή στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ ή $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ για το $\underline{\vartheta}$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $T(\underline{X})$ υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x;\underline{\vartheta}) =& P\left(\max\{X_1,\dots,X_n\} \leqslant x\right) = P\left(X_1 \leqslant x,\dots,X_n \leqslant x\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \\ & P(X_1 \leqslant x)\cdots P(X_n \leqslant x) \overset{\text{ισον.}}{=} [F(x;\underline{\vartheta})]^n \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_{X_{(n)}}(x;\underline{\vartheta}) = nf(x;\underline{\vartheta})\,[F(x;\underline{\vartheta})]^{n-1} \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x;\underline{\vartheta}) =& 1 - P\left(\min\{X_1,\dots,X_n\} > x\right) = 1 - P(X_1 > x,\dots,X_n > x) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \\ & 1 - P(X_1 > x)\cdots P(X_n > x) \overset{\text{ισον.}}{=} 1 - [1 - F(x;\underline{\vartheta})]^n \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_{X_{(1)}}(x;\underline{\vartheta}) = nf(x;\underline{\vartheta})\,[1 - F(x;\underline{\vartheta})]^{n-1}.$$

Σημείωση 3.5. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής $E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)]$ διακρίνουμε τις εξής σημαντικές περιπτώσεις

- Η κατανομή της T είναι διακριτή: Η μέση τιμή παίρνει τη μορφή σειράς (ή αθροίσματος αν το στήριγμα της T είναι πεπερασμένο σύνολο). Συγκεκριμένα, αν παίρνει τη μορφή

$$E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = \sum_{t=0}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)\,[u(\underline{\vartheta})]^t = 0, \quad \forall \underline{\vartheta} \in \Theta,$$

  τότε μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι $\varphi(t)\psi(t) = 0$, $\forall t$. Αν, επιπλέον, $\psi(t) \neq 0$, $\forall t$, τότε συμπεραίνουμε ότι $\varphi(t) = 0$, $\forall t$ και έχουμε το ζητούμενο.

- Η κατανομή της T είναι συνεχής και το στήριγμά της εξαρτάται από το ϑ: Η μέση τιμή παίρνει τη μορφή ολοκληρώματος Riemann με κάποιο άκρο ολοκλήρωσης που είναι συνάρτηση του ϑ

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \int_a^{u(\vartheta)} \varphi(t)\psi(t)w(\vartheta)dt = w(\vartheta)\int_a^{u(\vartheta)} \varphi(t)\psi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

  Αν $w(\vartheta) \neq 0$, $\forall \vartheta \in \Theta$, τότε παίρνουμε τη σχέση

$$\int_a^{u(\vartheta)} \varphi(t)\psi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

  Εφαρμόζουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού για να παραγωγίσουμε τη σχέση ως προς ϑ

$$u'(\vartheta)\varphi\left(u(\vartheta)\right)\psi\left(u(\vartheta)\right) = 0, \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

  Αν, επιπλέον, $u'(\vartheta)\psi\left(u(\vartheta)\right) \neq 0$, $\forall \vartheta \in \Theta$, παίρνουμε $\varphi\left(u(\vartheta)\right) = 0$, $\forall \vartheta \in \Theta$, δηλαδή $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in u(\Theta)$. Αν το στήριγμα της T είναι υποσύνολο του

$u(\Theta)$, τότε έχουμε και το ζητούμενο.

- Η κατανομή της T είναι συνεχής και το στήριγμά της είναι το $(0,\infty)$: Αν το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = \int_0^\infty \varphi(t)\psi(t)w(\vartheta)e^{-u(\vartheta)t}dt = w(\vartheta)\int_0^\infty \varphi(t)\psi(t)e^{-u(\vartheta)t}dt = 0,$$

$\forall\vartheta \in \Theta$ και $w(\vartheta) \neq 0$, $\forall\vartheta \in \Theta$, τότε παίρνουμε τη σχέση

$$\int_0^\infty \varphi(t)\psi(t)e^{-u(\vartheta)t}dt = 0, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\varphi(t)\psi(t)$ στο σημείο $u(\vartheta)$. Σημειώνουμε, εδώ, ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι 1-1 σε κλάσεις σχεδόν παντού ίσων συναρτήσεων. Επειδή ο μετασχηματισμός Laplace της μηδενικής συνάρτησης ισούται προφανώς με 0, συμπεραίνουμε ότι $\varphi(t)\psi(t) = 0$ σχεδόν παντού. Αν, επιπλέον, $\psi(t) \neq 0$ σχεδόν παντού, τότε συμπεραίνουμε ότι $\varphi(t) = 0$ σχεδόν παντού και έχουμε το ζητούμενο.

- Η κατανομή της T είναι συνεχής και το στήριγμά της είναι όλο το $\mathbb{R}$: Ομοίως, αν το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = \int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\psi(t)w(\vartheta)e^{-u(\vartheta)t}dt = w(\vartheta)\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\psi(t)e^{-u(\vartheta)t}dt = 0,$$

$\forall\vartheta \in \Theta$ και $w(\vartheta) \neq 0$, $\forall\vartheta \in \Theta$, τότε παίρνουμε τη σχέση

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\psi(t)e^{-u(\vartheta)t}dt = 0, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Ομοίως, μπορούμε να αναγνωρίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\varphi(t)\psi(t)$ στο σημείο $u(\vartheta)$, ο οποίος, επίσης, είναι 1-1 σε κλάσεις σχεδόν παντού ίσων συναρτήσεων, οπότε καταλήγουμε στο ζητούμενο, ακριβώς όπως και πριν.

Παράδειγμα 3.7. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από την κατανομή Poisson με παράμετρο ϑ. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\vartheta)$ είναι επαρκής για το ϑ. Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall\vartheta > 0$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \sum_{t=0}^\infty P_\vartheta(T=t)\varphi(t) = \sum_{t=0}^\infty e^{-n\vartheta t}\frac{(n\vartheta)^t}{t!}\varphi(t) = \sum_{t=0}^\infty \frac{\varphi(t)}{t!}\left(n\vartheta e^{-n\vartheta}\right)^t = 0,$$

$\forall\vartheta > 0$. Η παραπάνω σχέση μάς δίνει ότι $\frac{\varphi(t)}{t!} = 0$ για $t = 0,1,\ldots \Rightarrow \varphi(t) = 0$ για $t = 0,1,\ldots$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 3.8. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(\vartheta^2, 1)$ με $\vartheta \in (0,1)$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.4, η στατιστική συνάρτηση T έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(t;\vartheta) = \frac{n(1-t)^{n-1}}{(1-\vartheta^2)^n} I_{(\vartheta^2,1)}(t).$$

Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall \vartheta \in (0,1)$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \int_{\vartheta^2}^1 f(t;\vartheta)\varphi(t)dt = \frac{n}{(1-\vartheta^2)^n} \int_{\vartheta^2}^1 (1-t)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \Rightarrow$$

$$\int_{\vartheta^2}^1 (1-t)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1).$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μάς δίνει ότι

$$-2\vartheta\left(1-\vartheta^2\right)^{n-1}\varphi\left(\vartheta^2\right) = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \overset{t=\vartheta^2}{\Rightarrow} \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (0,1) \supseteq \left(\vartheta^2, 1\right).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 3.9. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-\vartheta, \vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.4, η στατιστική συνάρτηση $X_{(n)}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_{(n)}}(t;\vartheta) = \frac{n(t+\vartheta)^{n-1}}{(2\vartheta)^n} I_{(-\vartheta,\vartheta)}(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E_\vartheta\left[X_{(n)}\right] &= \int_{-\vartheta}^{\vartheta} t\frac{n(t+\vartheta)^{n-1}}{(2\vartheta)^n}dt = \left[t\left(\frac{t+\vartheta}{2\vartheta}\right)^n\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} - \int_{-\vartheta}^{\vartheta}\left(\frac{t+\vartheta}{2\vartheta}\right)^n dt \\ &= \vartheta - \left[\frac{(t+\vartheta)^{n+1}}{(n+1)\,(2\vartheta)^n}\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} = \vartheta - \frac{2\vartheta}{n+1}. \end{aligned}$$

Ομοίως, η στατιστική συνάρτηση $X_{(1)}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_{(1)}}(t;\vartheta) = \frac{n(\vartheta-t)^{n-1}}{(2\vartheta)^n} I_{(-\vartheta,\vartheta)}(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E_\vartheta\left[X_{(1)}\right] &= \int_{-\vartheta}^{\vartheta} t\frac{n(\vartheta-t)^{n-1}}{(2\vartheta)^n}dt = -\left[t\left(\frac{\vartheta-t}{2\vartheta}\right)^n\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} + \int_{-\vartheta}^{\vartheta}\left(\frac{\vartheta-t}{2\vartheta}\right)^n dt \\ &= -\vartheta - \left[\frac{(\vartheta-t)^{n+1}}{(n+1)\,(2\vartheta)^n}\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} = -\vartheta + \frac{2\vartheta}{n+1}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $E_\vartheta\left[X_{(1)} + X_{(n)}\right] = 0$, $\forall \vartheta > 0$, όμως $X_{(1)} + X_{(n)} \not\equiv 0$. Δηλαδή, για τη συνάρτηση $\varphi(t_1, t_2) = t_1 + t_2$, η σχέση $E_\vartheta\left[\varphi\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)\right] = 0$, $\forall \vartheta > 0$, δε συνεπάγεται ότι $\varphi\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right) = 0$ σχεδόν παντού. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ **δεν** είναι πλήρης.

Θέτουμε $Y_i = |X_i|$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y \in (0, \vartheta)$, έχουμε

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(y) &= P\left(|X_i| \leqslant y\right) = P(-y \leqslant X_i \leqslant y) = P(X_i \leqslant y) - P(X_i < -y) \\ &= F_{X_i}(y) - F_{X_i}(-y) \Rightarrow f_{Y_i}(y) = f_{X_i}(y) + f_{X_i}(-y) = \frac{1}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}. \end{aligned}$$

Δηλαδή $Y_i \sim U(0, \vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα, η $T_1(\underline{X}) = Y_{(n)} = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$ είναι κι αυτή επαρκής για το ϑ. Δουλεύοντας όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η $Y_{(n)}$ είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 3.10. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την Εκθετική κατανομή με παράμετρο ϑ. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$ είναι επαρκής για το ϑ. Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall \vartheta > 0$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \int_0^\infty f(t;\vartheta)\varphi(t)dt = \frac{\vartheta^n}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\vartheta t}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta > 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \varphi(t)t^{n-1}e^{-\vartheta t}dt = 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\varphi(t)t^{n-1}$ στο σημείο ϑ. Από τη σημείωση 3.5, προκύπτει ότι $\varphi(t)t^{n-1} = 0$, $\forall t > 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0$, $\forall t > 0$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 3.11. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Beta}(1, \vartheta)$ με $\vartheta > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1}$, $x \in (0,1)$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log\frac{1}{1-X_i}$ είναι επαρκής για το ϑ, όμως δε γνωρίζουμε την κατανομή της. Υπολογίζουμε πρώτα την κατανομή της $Y_i = \log\frac{1}{1-X_i}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ ως εξής

$$F_{Y_i}(y) = P\left(\log\frac{1}{1-X_i} \leqslant y\right) = P\left(1 - X_i \geqslant e^{-y}\right) = F_{X_i}\left(1 - e^{-y}\right) \Rightarrow$$

$$f_{Y_i}(y) = e^{-y}f_{X_i}\left(1 - e^{-y}\right) = e^{-y}\vartheta\left(1 - 1 + e^{-y}\right)^{\vartheta-1} = \vartheta e^{-\vartheta y}.$$

Άρα $Y_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$, $i = 1, \ldots, n$. Συμπεραίνουμε ότι $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Συνεπώς, δουλεύοντας ακριβώς όπως στο παραπάνω παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log\frac{1}{1-X_i}$ είναι πλήρης. □

Θεώρημα 3.1. (Επάρκειας - Πληρότητας στην Ε.Ο.Κ.)
Έστω ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη πολυπαραμετρική Ε.Ο.Κ., δηλαδή το στήριγμά της δεν εξαρτάται από την άγωστη παράμετρο

$\underline{\vartheta}$ και η συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας του δείγματος γράφεται στη μορφή

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x}) \exp\left\{\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \cdot \underline{T}(\underline{x}) - A(\underline{\vartheta})\right\}, \quad \underline{x} \in S, \quad \underline{\vartheta} \in \Theta.$$

Αν, επιπλέον, η διάσταση της διανυσματικής στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}(\underline{x})$ ταυτίζεται με τη διάσταση του διανύσματος $\underline{\vartheta}$ των αγνώστων παραμέτρων και το σύνολο $\underline{Q}(\Theta) = \{(Q_1(\underline{\vartheta}), \ldots, Q_s(\underline{\vartheta})) : \underline{\vartheta} \in \Theta\} \subseteq \mathbb{R}^s$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης.

Παράδειγμα 3.12. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή ϑ_1 και διασπορά ϑ_2. Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.4 (σελίδα 20), η κατανομή των X_i ανήκει στην Ε.Ο.Κ. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 2.3 (σελίδα 20), η από κοινού κατανομή του τυχαίου δείγματος $\underline{X}$ θα ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2\vartheta_2}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} - \frac{n\log\vartheta_2}{2}\right\}, \quad \text{όπου}$$

$$\underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2}\right), \quad \underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2\right), \quad \underline{x} \in S = \mathbb{R}^n.$$

Η διάσταση του $\underline{T}(\underline{X})$ είναι ίση με τη διάσταση του διανύσματος $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ και το σύνολο $\underline{Q}(\Theta) = \left\{\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2}\right) : (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)\right\} = \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}^2$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ είναι επαρκής για το $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ και πλήρης. □

Παράδειγμα 3.13. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\vartheta \neq 0$ και διασπορά ϑ^2. Στο παράδειγμα 3.6 (σελίδα 25) βρήκαμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Παρατηρούμε ότι $\underline{T}(\underline{X}) = \left(n\overline{X}, (n-1)S^2 + n\overline{X}^2\right) = \psi\left(\overline{X}, S^2\right)$. Από την πρόταση 3.3, συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}_1(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ είναι κι αυτή επαρκής για το ϑ. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.1 (σελίδα 22), παίρνουμε ότι $E_\vartheta\left(S^2\right) = \vartheta^2$ και

$$E_\vartheta\left(\overline{X}^2\right) = \frac{\vartheta^2}{n} + \vartheta^2 = \frac{n+1}{n}\vartheta^2 \Rightarrow E_\vartheta\left(S^2 - \frac{n}{n+1}\overline{X}^2\right) = 0, \quad \forall\vartheta \neq 0.$$

Όμως $S^2 - \frac{n}{n+1}\overline{X}^2 \not\equiv 0$. Δηλαδή για τη συνάρτηση $\varphi(t_1, t_2) = t_2 - \frac{n}{n+1}t_1^2$, η σχέση $E_\vartheta\left[\varphi\left(\overline{X}, S^2\right)\right] = 0$, $\forall\vartheta \neq 0$, δε συνεπάγεται ότι $\varphi\left(\overline{X}, S^2\right) = 0$ σχεδόν παντού. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}_1(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ **δεν** είναι πλήρης. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε και για τη στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$.

Σημειώνουμε ότι το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ. δε θα μπορούσε να εφαρμοστεί στη συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή η διάσταση του διανύσματος των αγνώστων παραμέτρων είναι 1, ενώ η διάσταση της στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}(\underline{X})$ που εμφανίζεται στην Ε.Ο.Κ. είναι 2. $\square$

Σημείωση 3.6. Συνοψίζοντας, για να δείξουμε ότι μία στατιστική συνάρτηση είναι πλήρης έχουμε στη διάθεσή μας δύο τρόπους: με τον ορισμό (πρέπει να βρισκόμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης T) ή μέσω του θεωρήματος επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ. (εύκολο στην πράξη να ελέγξουμε αν ισχύουν οι απαραίτητες προϋποθέσεις για την ισχύ του θεωρήματος). Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε με κάποιον από τους παραπάνω δύο τρόπους ότι όλες οι επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις που παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1 είναι και πλήρεις. Ενδεικτικά, στον πίνακα 3.2 συνοψίζουμε τις κατανομές κάποιων επαρκών στατιστικών συναρτήσεων σε περίπτωση που θέλουμε να επαληθεύσουμε την πληρότητά τους με χρήση του ορισμού:

<table>
<tr><td>$\text{Bernoulli}(\vartheta)$</td><td rowspan="8">$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$</td><td>$T \sim \text{Bin}(n, \vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Bin}(N, \vartheta)$, N γνωστό</td><td>$T \sim \text{Bin}(nN, \vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Geom}(\vartheta)$</td><td>$T \sim \text{NegBin}(n, \vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$\text{NegBin}(N, \vartheta)$, N γνωστό</td><td>$T \sim \text{NegBin}(nN, \vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Poisson}(\vartheta)$</td><td>$T \sim \text{Poisson}(n\vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Gamma}(a, \vartheta)$, a γνωστό</td><td>$T \sim \text{Gamma}(na, \vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$N(\vartheta_1, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό</td><td>$T \sim N(n\vartheta_1, n\sigma^2)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Exp}(\vartheta)$</td><td rowspan="3">$T \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Beta}(\vartheta, 1)$</td><td>$T = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i$</td></tr>
<tr><td>$\text{Beta}(1, \vartheta)$</td><td>$T = -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i)$</td></tr>
<tr><td>$U(\vartheta_1, b)$, b γνωστό</td><td>$T = X_{(1)}$</td><td>$f(t; \vartheta_1) = \frac{n(b-t)^{n-1}}{(b-\vartheta_1)^n} I_{(\vartheta_1, b)}(t)$</td></tr>
<tr><td>$U(a, \vartheta_2)$, a γνωστό</td><td>$T = X_{(n)}$</td><td>$f(t; \vartheta_2) = \frac{n(t-a)^{n-1}}{(\vartheta_2-a)^n} I_{(a, \vartheta_2)}(t)$</td></tr>
</table>

Πινακας 3.2: Σύνοψη Κατανομών Επαρκών - Πλήρων Στατιστικών Συναρτήσεων

Πρόταση 3.5. Αν $\underline{T}(\underline{X})$ πλήρης και $\underline{T} = \psi(\underline{T}_1)$, τότε και $\underline{T}_1(\underline{X})$ πλήρης.

Θεώρημα 3.2. (Basu)
Έστω τυχαίο δείγμα $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ και $\underline{T}(\underline{X})$ επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης. Αν $\underline{S}(\underline{X})$ στατιστική συνάρτηση με κατανομή ανεξάρτητη του $\underline{\vartheta}$, τότε οι $\underline{T}(\underline{X})$ και $\underline{S}(\underline{X})$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Σημείωση 3.7. (Κατανομή χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας)

i. $X \sim \chi^2_n \equiv \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow E(X) = n$ και $\text{Var}(X) = 2n$.

ii. Αν $X \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$, τότε $2\vartheta X \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_{2n}$.

iii. Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ και $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_1$.

iv. Αν $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητες, τότε $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$.

v. Αν $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητες, τότε $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Παράδειγμα 3.14. Μία κλασική εφαρμογή του θεωρήματος Basu βρίσκεται στην απόδειξη της στοχαστικής ανεξαρτησίας των $\overline{X}$ και S^2 στην περίπτωση της Κανονικής κατανομής. Μάλιστα, η στοχαστική ανεξαρτησία του δειγματικού μέσου και της δειγματικής διασποράς χαρακτηρίζει την Κανονική κατανομή - καμία άλλη κατανομή δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. Σταθεροποιούμε τη διασπορά: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ γνωστή. Έχουμε αναφέρει ότι σε αυτήν την περίπτωση η στατιστική συνάρτηση $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το μ και πλήρης. Συμπεραίνουμε ότι και η στατιστική συνάρτηση $\overline{X}$ είναι επαρκής για το μ και πλήρης. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$, δηλαδή η κατανομή της S^2 είναι ανεξάρτητη του μ. Από το Θεώρημα Basu, έπεται ότι οι $\overline{X}$ και S^2 είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Αφού το σ_0^2 που σταθεροποιήσαμε ήταν αυθαίρετο, έχουμε δείξει το ζητούμενο. $\square$

3.6 Αμερόληπτες Εκτιμήτριες Ελάχιστης Διασποράς

Ορισμός 3.12. Η εκτιμήτρια $\delta(\underline{X})$ ονομάζεται αμερόληπτη εκτιμήτρια (ομοιόμορφα) ελάχιστης διασποράς (Α.Ε.Ε.Δ.) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ αν $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X})\right] < \infty$, είναι αμερόληπτη, δηλαδή $E_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] = g(\underline{\vartheta}),\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$, και για κάθε άλλη α.ε. $\delta^*(\underline{X})$ ισχύει $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X})\right] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta^*(\underline{X})\right],\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Πρόταση 3.6. Αν υπάρχει Α.Ε.Ε.Δ. για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$, τότε είναι και μοναδική.

Σημείωση 3.8. Ενώ η Α.Ε.Ε.Δ. είναι καλύτερη σύμφωνα με το κριτήριο Μ.Τ.Σ. μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητριών μίας παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$, αυτό δεν αποκλείει το γεγονός να υπάρχει κάποια μεροληπτική εκτιμήτρια του $g(\underline{\vartheta})$ με μικρότερο Μ.Τ.Σ. από την Α.Ε.Ε.Δ. και άρα από κάθε άλλη α.ε. του $g(\underline{\vartheta})$. Ένα τέτοιο παράδειγμα για την Κανονική κατανομή θα παρουσιάσουμε στην παράγραφο 3.9.

Σημείωση 3.9. Μία διαισθητική εξήγηση για την προσπάθεια να βρούμε μία α.ε. με όσο το δυνατόν μικρότερη διασπορά δίνεται από την ανισότητα Chebyshev. Αν θέλαμε να εκτιμήσουμε μία παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$, τότε μεταξύ των αμερόληπτων εκτιμητριών της θα προτιμούσαμε μία $\delta(\underline{X})$ για την οποία να ισχύει $P_{\underline{\vartheta}}\left(|\delta(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| < \varepsilon\right) \approx 1,\ \forall \varepsilon > 0$. Όμως, από την ανισότητα Chebyshev γνωρίζουμε ότι

$$P_{\underline{\vartheta}}\left(|\delta(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X})\right]}{\varepsilon^2}.$$

Επομένως, αν ελαχιστοποιήσουμε τη διασπορά $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X})\right]$, θα έχουμε επιτύχει τον στόχο μας.

Πρόταση 3.7. (Χαρακτηρισμός της Α.Ε.Ε.Δ. μέσω των α.ε. του μηδενός)
Έστω $\mathscr{U}_0 = \left\{U = U(\underline{X}) : E_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right] = 0 \text{ και } E_{\underline{\vartheta}}\left[U^2(\underline{X})\right] < \infty,\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta\right\}$ η κλάση των αμερόληπτων εκτιμητριών του 0 με πεπερασμένη διασπορά. Θεωρούμε μία α.ε. $\delta = \delta(\underline{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά, δηλαδή $E_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})$ και $E_{\underline{\vartheta}}\left[\delta^2(\underline{X})\right] < \infty$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Τότε, η δ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\underline{\vartheta})$ αν και μόνο αν $\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X}), U(\underline{X})\right] = 0$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ και $\forall U(\underline{X}) \in \mathscr{U}_0$.

Πόρισμα 3.1. Αν οι $\delta_1(\underline{X}), \ldots, \delta_n(\underline{X})$ είναι οι Α.Ε.Ε.Δ. των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(\underline{\vartheta}), \ldots, g_n(\underline{\vartheta})$ αντίστοιχα, τότε η $\delta(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \delta_i(\underline{X})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i g_i(\underline{\vartheta})$.

Θεώρημα 3.3. (Rao - Blackwell)
Έστω τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Θεωρούμε $U = U(\underline{X})$ μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά, δηλαδή $E_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})$ και $E_{\underline{\vartheta}}\left[U^2(\underline{X})\right] < \infty$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Αν $\underline{T} = \underline{T}(\underline{X})$ μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$, τότε η $\delta(\underline{X}) = E_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X}) | \underline{T}(\underline{X})\right]$ είναι, επίσης, αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ και μάλιστα με μικρότερη διασπορά από τη $U(\underline{X})$, δηλαδή $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X})\right] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right]$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Θεώρημα 3.4. (Lehmann - Scheffé)
Έστω τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Θεωρούμε $U = U(\underline{X})$ μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά, δηλαδή $E_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})$ και $E_{\underline{\vartheta}}\left[U^2(\underline{X})\right] < \infty$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Αν $\underline{T} = \underline{T}(\underline{X})$ μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης για την κατανομή των X_i, τότε η $\delta(\underline{X}) = E_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X}) | \underline{T}(\underline{X})\right]$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\underline{\vartheta})$.

Πόρισμα 3.2. Έστω τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Θεωρούμε $\underline{T} = \underline{T}(\underline{X})$ μία επαρκή στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρη για την κατανομή των X_i. Αν $E_{\underline{\vartheta}}\left[\psi(\underline{T})\right] = g(\underline{\vartheta})$ για κάποια συνάρτηση ψ, τότε η $\delta(\underline{X}) = \psi(\underline{T})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$.

Σημείωση 3.10. Συνοψίζοντας, για την εύρεση της Α.Ε.Ε.Δ. μίας παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ πρέπει πρώτα να βρούμε μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ που να είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης. Μετά, έχουμε τις εξής 2 επιλογές:

- Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε μία οποιαδήποτε αμερόληπτη εκτιμήτρια $U(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ και είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή

$\psi(\underline{t}) = E_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})|\, \underline{T} = \underline{t}\right]$, τότε, από θεώρημα Lehmann - Scheffé, η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \psi(\underline{T})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\underline{\vartheta})$. Βέβαια, ο προσδιορισμός μίας οποιασδήποτε α.ε. $U(\underline{X})$ και ο υπολογισμός της παραπάνω δεσμευμένης τιμής πολλές φορές δεν είναι καθόλου τετριμμένα ζητήματα.

- Αν μπορούμε να "μαντέψουμε" κάποια συνάρτηση ψ της $\underline{T}(\underline{X})$ τέτοια ώστε $E_{\underline{\vartheta}}\left[\psi(\underline{T})\right] = ag(\underline{\vartheta}) + b$, τότε, από το παραπάνω πόρισμα, η $\delta(\underline{X}) = \frac{\psi(\underline{T})-b}{a}$ είναι προφανώς η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\underline{\vartheta})$. Και πάλι, δεν είναι πάντα τετριμμένο ζήτημα να "μαντέψουμε" μία τέτοια συνάρτηση ψ.

Παράδειγμα 3.15. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \vartheta)$. Αν η συνάρτηση $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$.
Η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Θέλουμε

$$E\left[\psi(T)\right] = \int_0^{\vartheta} f_{X_{(n)}}(t;\vartheta)\psi(t)dt = \int_0^{\vartheta} \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n}\psi(t)dt = g(\vartheta) \Rightarrow$$

$$n\int_0^{\vartheta} t^{n-1}\psi(t)dt = \vartheta^n g(\vartheta) \Rightarrow n\vartheta^{n-1}\psi(\vartheta) = n\vartheta^{n-1}g(\vartheta) + \vartheta^n g'(\vartheta) \Rightarrow$$

$$\psi(\vartheta) = g(\vartheta) + \frac{\vartheta g'(\vartheta)}{n}, \quad \forall \vartheta \in (0,\infty) \supseteq (0,\vartheta).$$

Από πόρισμα 3.2, προκύπτει ότι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ είναι η $\psi(T) = g(T) + \frac{Tg'(T)}{n}$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(n)}$. □

Παράδειγμα 3.16. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\vartheta)$. Να βρεθούν οι Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^2}$ και του ϑ.
Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi_1(T)$ τέτοια ώστε $E_{\vartheta}\left[\psi_1(T)\right] = g(\vartheta)$. Δοκιμάζουμε

$$E\left(T^2\right) = \text{Var}(T) + \left[E(T)\right]^2 = \frac{n}{\vartheta^2} + \frac{n^2}{\vartheta^2} \Rightarrow E\left[\frac{T^2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{\vartheta^2}.$$

Από πόρισμα 3.2, προκύπτει ότι η $\psi_1(T) = \frac{T^2}{n(n+1)}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$.

Για το ϑ, θα προσπαθήσουμε πάλι να βρούμε μία συνάρτηση $\psi_2(T)$ τέτοια ώστε $E_{\vartheta}\left[\psi_2(T)\right] = \vartheta$. Δοκιμάζουμε

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{T}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{\vartheta^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\vartheta x}dx = \frac{\vartheta^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty} x^{n-2}e^{-\vartheta x}dx \\ &= \frac{\vartheta^n}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-2)!}{\vartheta^{n-1}} = \frac{\vartheta}{n-1} \Rightarrow E\left(\frac{n-1}{T}\right) = \vartheta. \end{aligned}$$

Από πόρισμα 3.2, προκύπτει ότι η $\psi_2(T) = \frac{n-1}{T}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ. □

Παράδειγμα 3.17. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\vartheta)$. Να βρεθούν οι Α.Ε.Ε.Δ. των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(\vartheta) = \vartheta^2$ και $g_2(\vartheta) = \vartheta(1-\vartheta)$.
Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi_1(T)$ τέτοια ώστε $E_\vartheta\left[\psi_1(T)\right] = g_1(\vartheta)$. Δοκιμάζουμε

$$\begin{aligned} E\left(T^2\right) &= \text{Var}(T) + [E(T)]^2 = n\vartheta(1-\vartheta) + (n\vartheta)^2 = n\vartheta - n\vartheta^2 + n^2\vartheta^2 \\ &= E(T) + n(n-1)\vartheta^2 \Rightarrow E\left(T^2 - T\right) = n(n-1)\vartheta^2 \Rightarrow E\left[\frac{T(T-1)}{n(n-1)}\right] = \vartheta^2. \end{aligned}$$

Από πόρισμα 3.2, προκύπτει ότι η $\psi_1(T) = \frac{T(T-1)}{n(n-1)}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g_1(\vartheta)$.

Για τη δεύτερη παραμετρική συνάρτηση, θα προσπαθήσουμε πάλι να βρούμε μία συνάρτηση $\psi_2(T)$ τέτοια ώστε $E_\vartheta\left[\psi_2(T)\right] = g_2(\vartheta)$. Δοκιμάζουμε

$$E\left(T^2\right) = n\vartheta(1-\vartheta) + n^2\vartheta^2 - n^2\vartheta + n^2\vartheta = n\vartheta(1-\vartheta) - n^2\vartheta(1-\vartheta) + nE(T) \Rightarrow$$

$$E\left(T^2 - nT\right) = n(1-n)\vartheta(1-\vartheta) \Rightarrow E\left[\frac{T(n-T)}{n(n-1)}\right] = \vartheta(1-\vartheta).$$

Από πόρισμα 3.2, προκύπτει ότι η $\psi_2(T) = \frac{T(n-T)}{n(n-1)}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g_2(\vartheta)$. □

Παράδειγμα 3.18. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Poisson}(\vartheta)$. Να βρεθούν οι Α.Ε.Ε.Δ. των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(\vartheta) = \vartheta^k e^{-\vartheta}$ και $g_2(\vartheta) = e^{-k\vartheta}$ για $k \in \mathbb{N}$.
Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g_1(\vartheta)$, ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Lehmann - Scheffé. Παρατηρούμε ότι $E\left[I_{\{k\}}(X_1)\right] = P(X_1 = k) = e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^k}{k!} = \frac{g_1(\vartheta)}{k!}$. Επομένως, η $W_1(\underline{X}) = k! \cdot I_{\{k\}}(X_1)$ είναι μία α.ε. της $g_1(\vartheta)$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned} E\left(W_1 | T = t\right) &= E\left(k! \cdot I_{\{k\}}(X_1) \middle| \sum_{i=1}^{n} X_i = t\right) = k! \cdot P\left(X_1 = k \middle| \sum_{i=1}^{n} X_i = t\right) \\ &= k! \cdot \frac{P\left(X_1 = k, \sum_{i=1}^{n} X_i = t\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = t\right)} = k! \cdot \frac{P\left(X_1 = k, \sum_{i=2}^{n} X_i = t-k\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = t\right)} \\ &= k! \cdot \frac{P(X_1 = k) P\left(\sum_{i=2}^{n} X_i = t-k\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = t\right)} = k! \cdot \frac{e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^k}{k!} e^{-(n-1)\vartheta}\frac{[(n-1)\vartheta]^{t-k}}{(t-k)!}}{e^{-n\vartheta}\frac{(n\vartheta)^t}{t!}} \\ &= k! \cdot \binom{t}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-k} \quad \text{για } t = k, k+1, \ldots. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Lehmann - Scheffé, προκύπτει ότι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g_1(\vartheta)$ είναι η στατιστική συνάρτηση $\psi_1(T) = \frac{T!}{(T-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{T-k} I_{\{k,k+1,\dots\}}(T)$.

Παρατηρούμε ότι, αν $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες από την κατανομή Poisson με παράμετρο ϑ, τότε $\left(X_1\left|\sum\limits_{i=1}^n X_i = t\right.\right) \sim \text{Bin}\left(t,\frac{1}{n}\right)$ ανεξαρτήτως του ϑ.

Θα προσπαθήσουμε πάλι να βρούμε μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g_2(\vartheta)$, ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Lehmann - Scheffé. Παρατηρούμε ότι

$$E\left[I_{\{0\}}(X_1)\cdots I_{\{0\}}(X_k)\right] = P(X_1=0,\dots,X_k=0) \underset{\text{ισον.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} [P(X_1=0)]^k = e^{-k\vartheta}.$$

Επομένως, η $W_2(\underline{X}) = I_{\{0\}}(X_1)\cdots I_{\{0\}}(X_k)$ είναι μία α.ε. της $g_2(\vartheta)$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned}
E\left(W_2|\,T=t\right) &= P\left(X_1=0,\dots,X_k=0\left|\sum_{i=1}^n X_i=t\right.\right)\\
&= \frac{P\left(X_1=0,\dots,X_k=0,\sum\limits_{i=1}^n X_i=t\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i=t\right)}\\
&= \frac{P(X_1=0)\cdots P(X_k=0)P\left(\sum\limits_{i=k+1}^n X_i=t\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i=t\right)}\\
&= \frac{e^{-k\vartheta}e^{-(n-k)\vartheta}\frac{[(n-k)\vartheta]^t}{t!}}{e^{-n\vartheta}\frac{(n\vartheta)^t}{t!}} = \left(1-\frac{k}{n}\right)^t \quad \text{για } n=k+1,k+2,\dots.
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Lehmann - Scheffé, προκύπτει ότι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g_2(\vartheta)$ είναι η $\psi_2(T) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^T$ για $n=k+1,k+2,\dots$. □

Παράδειγμα 3.19. Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n \sim (\mu,\sigma^2)$ με σ^2 γνωστό. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu)=e^{\mu u}$ για $u\in\mathbb{R}$.
Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι επαρκής για το μ και πλήρης. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι $M_{X_1}(u) = E\left(e^{uX_1}\right) = \exp\left\{\mu u + \frac{\sigma^2u^2}{2}\right\}$. Συμπεραίνουμε ότι $M_{\overline{X}}(u) = E\left(e^{u\overline{X}}\right) = \exp\left\{\mu u + \frac{\sigma^2u^2}{2n}\right\} \Rightarrow E\left[\exp\left\{u\overline{X} - \frac{u^2\sigma^2}{2n}\right\}\right] = e^{\mu u}$.
Άρα, η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\mu)$ είναι η $\psi(\overline{X}) = \exp\left\{u\overline{X}-\frac{u^2\sigma^2}{2n}\right\}$, $\forall u\in\mathbb{R}$. □

Παράδειγμα 3.20. Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n \sim (\mu,\sigma^2)$. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu,\sigma^2)=\mu^2$.
Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X},S^2\right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}=(\mu,\sigma^2)$ και πλήρης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $E(S^2)=\sigma^2$. Προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi(\underline{T})$ τέτοια ώστε $E_{\underline{\vartheta}}\left[\psi(\underline{T})\right] = g(\underline{\vartheta})$. Δοκιμάζουμε

$$E\left(\overline{X}^2\right) = \text{Var}(\overline{X}) + \left[E(\overline{X})\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n}+\mu^2 = \frac{E(S^2)}{n}+\mu^2 \Rightarrow E\left(\overline{X}^2-\frac{S^2}{n}\right) = \mu^2.$$

Άρα, η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\mu,\sigma^2)$ είναι η $\psi\left(\overline{X},S^2\right)=\overline{X}^2-\frac{S^2}{n}$. □

Παράδειγμα 3.21*. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n\sim(\mu,\sigma^2)$. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu,\sigma^2)=\frac{\mu}{\sigma}$.
Η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})=\left(\overline{X},S^2\right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}=(\mu,\sigma^2)$ και πλήρης. Από το θεώρημα Basu έπεται ότι οι $\overline{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητες. Προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi(\underline{T})$ τέτοια ώστε $E_{\underline{\vartheta}}\left[\psi(\underline{T})\right]=g(\underline{\vartheta})$. Δοκιμάζουμε

$$E\left(\frac{\overline{X}}{S}\right)=E\left(\overline{X}\cdot\frac{1}{S}\right)=E\left(\overline{X}\right)E\left(\frac{1}{S}\right)=\mu\cdot E\left(\frac{1}{S}\right).$$

Για την Κανονική κατανομή γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$Q=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}\equiv\text{Gamma}\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{S}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n-1}{Q}}\quad\text{και}$$

$$\begin{aligned}E\left(\frac{1}{\sqrt{Q}}\right)&=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty x^{\frac{n-2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx\\&=\frac{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Rightarrow E\left(\frac{1}{S}\right)=\frac{1}{\sigma}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{n-1}{2}}\Rightarrow\end{aligned}$$

$$E\left(\frac{\overline{X}}{S}\right)=\frac{\mu}{\sigma}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{n-1}{2}}.$$

Άρα, η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\mu,\sigma^2)$ είναι η $\psi\left(\overline{X},S^2\right)=\frac{\overline{X}}{S}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. □

Παράδειγμα 3.22*. Έστω $X\sim\text{Laplace}(\mu,\vartheta)$ δείγμα μεγέθους 1 με $\mu\in\mathbb{R}$ γνωστό, $\vartheta>0$ και $f(x;\vartheta)=\frac{\vartheta}{2}e^{-\vartheta|x-\mu|}$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)=\frac{1}{1+\vartheta}$.
Εύκολα βλέπουμε, μέσω του θεωρήματος επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X)=|X-\mu|$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi(T)$ τέτοια ώστε $E_\vartheta\left[\psi(T)\right]=g(\vartheta)$. Αρχικά, υπολογίζουμε την κατανομή της T. Για $y>0$, έχουμε

$$F_T(y)=P\left(|X-\mu|\leqslant y\right)=P(\mu-y\leqslant X\leqslant\mu+y)=F_X(\mu+y)-F_X(\mu-y)\Rightarrow$$

$$f_T(y)=f_x(\mu+y)+f_X(\mu-y)=\frac{\vartheta}{2}e^{-\vartheta|y|}+\frac{\vartheta}{2}e^{-\vartheta|-y|}=\frac{\vartheta}{2}e^{-\vartheta y}+\frac{\vartheta}{2}e^{-\vartheta y}=\vartheta e^{-\vartheta y}.$$

Δηλαδή, $T\sim\text{Exp}(\vartheta)$. Συμβουλευόμαστε την παράγραφο 1.2 και παρατηρούμε ότι η μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής $W\sim\text{Beta}(a,b)$ δίνεται από τον τύπο $E(W)=\frac{a}{a+b}$. Άρα, αν καταφέρουμε να μετασχηματίσουμε την τυχαία μεταβλητή T σε μία άλλη τυχαία μεταβλητή $Y\sim\text{Beta}(1,\vartheta)$, τότε θα έχουμε αυτόματα το ζητούμενο, αφού $E(Y)=\frac{1}{1+\vartheta}=g(\vartheta)$. Στο παράδειγμα 3.11 (σελίδα 30) δείξαμε ότι $Y\sim\text{Beta}(1,\vartheta)\Rightarrow T=\log\frac{1}{1-Y}\sim\text{Exp}(\vartheta)$. Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό, βρίσκουμε ότι $Y = 1 - e^{-T}$. Επαληθεύουμε ότι η κατανομή και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y είναι, πράγματι, οι ζητούμενες. Για $y \in (0,1)$, έχουμε

$$F_Y(y) = P\left(-e^{-T} \leqslant y - 1\right) = P\left(-T \geqslant \log(1-y)\right) = F_T\left(\log\frac{1}{1-y}\right) \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{1-y} f_T\left(\log\frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{1-y}\cdot \vartheta e^{\vartheta\log(1-y)} = \vartheta(1-y)^{\vartheta-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 y\vartheta(1-y)^{\vartheta-1}dy = -\left[y(1-y)^{\vartheta}\right]_0^1 + \int_0^1 (1-y)^{\vartheta}dy \\ &= -\left[\frac{(1-y)^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\vartheta+1}. \end{aligned}$$

Επομένως, η $\psi(T) = Y = 1 - e^{-|X-\mu|}$ είναι, πράγματι, η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \frac{1}{1+\vartheta}$. □

3.7 Ανισότητα Cramér - Rao

Συνθήκες Ομαλότητας: Αν $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\vartheta)$, τότε υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες ομαλότητας:

I. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

II. Το στήριγμα $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x};\vartheta) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του ϑ.

III. Ισχύει $\frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta) < \infty$, $\forall \underline{x} \in S$, $\forall\vartheta \in \Theta$.

IV. Ισχύει $\int_S \frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = 0$, $\forall\vartheta\in\Theta$.

V. Ισχύει $I_{\underline{X}}(\vartheta) \in (0,\infty)$, $\forall\vartheta\in\Theta$, όπου $I_{\underline{X}}(\vartheta)$ η πληροφορία κατά Fisher του δείγματος $\underline{X}$ για την άγνωστη παράμετρο ϑ, η οποία ορίζεται ως

$$I_{\underline{X}}(\vartheta) = E_\vartheta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta)\right)^2\right].$$

Πρόταση 3.8. Αν ισχύει η επιπλέον συνθήκη ομαλότητας

$$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} f(\underline{x};\vartheta) < \infty \quad \text{και} \quad \int_S \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\int_S f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = 0,\ \forall\underline{x}\in S,\ \forall\vartheta\in\Theta,$$

τότε ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της $I_{\underline{X}}(\vartheta)$ δίνεται από τη σχέση

$$I_{\underline{X}}(\vartheta) = -E_\vartheta\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(\underline{X};\vartheta)\right].$$

Σημείωση 3.11. Γενικά, προτιμάται η έκφραση με τη δεύτερη παράγωγο της

$\log f(\underline{X};\vartheta)$, επειδή συνήθως απαιτεί μόνο υπολογισμούς απλών μέσων τιμών. Αντιθέτως, η έκφραση με το τετράγωνο της πρώτης παραγώγου της $\log f(\underline{X};\vartheta)$ απαιτεί τον υπολογισμό μέσων τιμών τετραγώνων τυχαίων μεταβλητών που είναι εν γένει πιο δύσκολος.

Ορισμός 3.13. Η συνάρτηση $U(\underline{X},\vartheta)=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta)$ ονομάζεται συνάρτηση score του δείγματος $\underline{X}$ για την παράμετρο ϑ.

Πρόταση 3.9. i. Αν $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες, τότε $U(\underline{X},\vartheta)=\sum\limits_{i=1}^{n}U(X_i,\vartheta)$.

ii. Αν $g(\eta)=\vartheta$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε $I_{\underline{X}}(\eta)=I_{\underline{X}}\left[g(\eta)\right]\cdot\left[g'(\eta)\right]^2$.

Πρόταση 3.10. Έστω τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\vartheta)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας.

i. Ισχύει ότι $E\left[U(\underline{X},\vartheta)\right]=0$ και $\operatorname{Var}\left[U(\underline{X},\vartheta)\right]=E\left[U^2(\underline{X},\vartheta)\right]=I_{\underline{X}}(\vartheta)$, $\forall\vartheta\in\Theta$.

ii. Αν $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες, τότε $I_{\underline{X}}(\vartheta)=\sum\limits_{i=1}^{n}I_{X_i}(\vartheta)$.

iii. Αν $X_1,\dots,X_n$ τυχαίο δείγμα, τότε $I_{\underline{X}}(\vartheta)=n\cdot I_{X_1}(\vartheta)$.

Θεώρημα 3.5. (Ανισότητα Cramér - Rao)
Έστω τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$ και συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\vartheta)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας I.-V. Θεωρούμε $g(\vartheta)$ μία παραμετρική συνάρτηση και $T(\underline{X})$ μία εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$ με πεπερασμένη διασπορά, δηλαδή $E_\vartheta\left[T^2(\underline{X})\right]<\infty$. Αν για την $T(\underline{X})$ ισχύει η επιπλέον συνθήκη ομαλότητας

$$\int_S T(\underline{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S T(\underline{x})f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}E_\vartheta\left[T(\underline{X})\right],\ \forall\vartheta\in\Theta,$$

όπου $E_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]=g(\vartheta)+b_{g(\vartheta)}\left[T(\underline{X})\right]$, τότε

$$\operatorname{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\geqslant\frac{1}{I_{\underline{X}}(\vartheta)}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}E_\vartheta\left(T(\underline{X})\right)\right]^2,\quad\forall\vartheta\in\Theta.$$

Πόρισμα 3.3. Αν, επιπλέον, η $T(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, τότε

$$\operatorname{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\geqslant\frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)},\quad\forall\vartheta\in\Theta.$$

Ορισμός 3.14. Μία αμερόληπτη εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ η οποία επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao, δηλαδή

$$\operatorname{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]=\frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)},\quad\forall\vartheta\in\Theta,$$

ονομάζεται αποτελεσματική (αποδοτική) εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$.

Ορισμός 3.15. Ορίζουμε ως αποτελεσματικότητα μίας αμερόληπτης εκτιμήτριας $T(\underline{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ την ποσότητα

$$a\left[T(\underline{X})\right] = \frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)} \cdot \frac{1}{\mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]} \in (0, 1].$$

Σημείωση 3.12. Προφανώς, η $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν $a\left[T(\underline{X})\right] = 1$.

Σημείωση 3.13. Έστω ότι η κατανομή του $\underline{X}$ ανήκει στη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. με $f(\underline{x};\vartheta) = h(\underline{x})\exp\left\{Q(\vartheta)T(\underline{x}) - A(\vartheta)\right\}$ και ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $Q' : \Theta \to \mathbb{R}$ συνεχής με $Q'(\vartheta) \neq 0$, $\forall \vartheta \in \Theta$, τότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται.

Σημείωση 3.14. Προφανώς, αν η $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$, τότε είναι και η μοναδική Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$. Επομένως, πέραν των δύο τρόπων εύρεσης της Α.Ε.Ε.Δ. μίας παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ που παρουσιάστηκαν στη σημείωση 3.10, ένας τρίτος τρόπος είναι η εύρεση μίας αποτελεσματικής εκτιμήτριας της $g(\vartheta)$, δηλαδή μίας αμερόληπτης εκτιμήτριας που να επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή, αν η $T(\underline{X})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$, τότε δεν είναι απαραίτητο να είναι και αποτελεσματική για τη $g(\vartheta)$, δηλαδή να επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao.

Πρόταση 3.11. Μία εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $k(\vartheta) \neq 0$ τέτοια, ώστε $U(\underline{x},\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{x};\vartheta) = k(\vartheta)\left[T(\underline{x}) - g(\vartheta)\right]$, $\forall \vartheta \in \Theta$ σχεδόν παντού. Συγκεκριμένα ισχύει ότι $k(\vartheta) = \frac{I_{\underline{X}}(\vartheta)}{g'(\vartheta)}$.

Σημείωση 3.15. Συμπεραίνουμε ότι μία εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ μπορεί να είναι αποτελεσματική για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ με συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(\underline{x};\vartheta) = h(\underline{x})\exp\left\{Q(\vartheta)T(\underline{x}) - A(\vartheta)\right\}$. Συγκεκριμένα, η $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)}$.

Σημείωση 3.16. Συνοψίζοντας, αν έχουμε μία υποψήφια εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, τότε αρκεί να υπολογίσουμε τη διασπορά της και να τη συγκρίνουμε με το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao για να ελέγξουμε αν αυτή είναι αποτελεσματική. Διαφορετικά, μπορούμε να κάνουμε χρήση της πρότασης 3.11 ή της σημείωσης 3.15 για να ελέγξουμε αν υπάρχει αποτελεσματική εκτιμήτρια της ζητούμενης $g(\vartheta)$.

Παράδειγμα 3.23. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\vartheta)$. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta$.
Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το ϑ

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta) \Rightarrow \log f(\underline{x};\vartheta) &= \sum_{i=1}^n \log f(x_i;\vartheta) \\ &= \log\vartheta \sum_{i=1}^n x_i + \log(1-\vartheta)\left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(\underline{X},\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{1-\vartheta}\left(n - \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{\vartheta(1-\vartheta)}\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\vartheta\right) = \frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}\left(\overline{X} - \vartheta\right) = k(\vartheta)\left[T(\underline{X}) - g(\vartheta)\right], \end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)} \neq 0$, $\forall \vartheta \in (0,1)$. Συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta) = \vartheta$.

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{n\left[\log\vartheta - \log(1-\vartheta)\right]\overline{x} + n\log(1-\vartheta)\right\}, \text{ όπου } T(\underline{x}) = \overline{x},$$

$Q(\vartheta) = n\left[\log\vartheta - \log(1-\vartheta)\right]$ και $A(\vartheta) = -n\log(1-\vartheta)$. Υπολογίζουμε ότι

$$Q'(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} + \frac{n}{1-\vartheta} = \frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)} \quad \text{και} \quad A'(\vartheta) = \frac{n}{1-\vartheta}.$$

Συμπεραίνουμε, και πάλι, ότι η $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)} = \vartheta$.

Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q' : \Theta \to \mathbb{R}$ συνεχή συνάρτηση και $Q'(\vartheta) \neq 0$. Άρα, οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Εφόσον οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αρκεί να υπολογίσουμε την πληροφορία κατά Fisher της παρατήρησης X_1 για το ϑ. Έχουμε

$$f(x;\vartheta) = \vartheta^x(1-\vartheta)^{1-x} \Rightarrow \log f(x;\vartheta) = x\log\vartheta + (1-x)\log(1-\vartheta) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(x;\vartheta) = \frac{x}{\vartheta} - \frac{1-x}{1-\vartheta} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(x;\vartheta) = -\frac{x}{\vartheta^2} - \frac{1-x}{(1-\vartheta)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_{X_1}(\vartheta) &= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(X_1;\vartheta)\right] = \frac{E(X_1)}{\vartheta^2} + \frac{1-E(X_1)}{(1-\vartheta)^2} \\ &= \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{1-\vartheta} = \frac{1}{\vartheta(1-\vartheta)} \Rightarrow I_{\underline{X}}(\vartheta) = n \cdot I_{X_1}(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)} \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\text{Var}(\overline{X}) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n} = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n} = \frac{[g'(\vartheta)]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)}$, όπου $g(\vartheta) = \vartheta$. Βλέπουμε, και πάλι, ότι η $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ. $\square$

3.8 Συνέπεια

Ορισμός 3.16. (Σύγκλιση Ακολουθίας Τυχαίων Μεταβλητών)

i. **Σύγκλιση με πιθανότητα 1**: $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$.

ii. **Σύγκλιση κατά πιθανότητα**: $X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1, \forall \varepsilon > 0$.

iii. **Σύγκλιση κατά κατανομή**: $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, για κάθε σημείο συνέχειας x της $F_X(x)$.

Ορισμός 3.17. Έστω δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ μεγέθους n από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ και $T_n(\underline{X})$ μία εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$.

i. Η $T_n(\underline{X})$ καλείται ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ αν $T_n(\underline{X}) \xrightarrow{a.s.} g(\underline{\vartheta})$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

ii. Η $T_n(\underline{X})$ καλείται (ασθενώς) συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ αν $T_n(\underline{X}) \xrightarrow{p} g(\underline{\vartheta})$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

iii. Η $T_n(\underline{X})$ έχει ασυμπτωτική κατανομή αν υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(r_n)_{n\geqslant 1}$ με $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ τέτοια, ώστε $r_n\left[T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})\right] \xrightarrow{d} Y$ για κάποια τυχαία μεταβλητή Y.

Ορισμός 3.18. i. Αν $\lim_{n\to\infty} E_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})$, τότε η $T_n(\underline{X})$ καλείται ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

ii. Αν $\lim_{n\to\infty} a\left[T_n(\underline{X})\right] = 1$, τότε η $T_n(\underline{X})$ καλείται ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$.

Πρόταση 3.12. (Ικανές Συνθήκες για τη Συνέπεια μίας Εκτιμήτριας)

i. Αν $E_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})$, δηλαδή η $T_n(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$, και $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = 0$, τότε η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

ii. Αν $\lim_{n\to\infty} E_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})$, δηλαδή η $T_n(\underline{X})$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$, και $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = 0$, τότε η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

Θεώρημα 3.6. (Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών)

Αν η $(X_n)_{n\geqslant 1}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$, τότε $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

Θεώρημα 3.7. (Ισχυρός Νόμος Μεγάλων Αριθμών)

Αν η $(X_n)_{n\geqslant 1}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$, τότε $\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$.

Θεώρημα 3.8. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)
Αν η $(X_n)_{n \geqslant 1}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$ και $\operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$, τότε $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow{d} X \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.

Πόρισμα 3.4. Αν $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$, τότε η εκτιμήτρια $T_n(\underline{X}) = \overline{X}_n$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta}) = E_{\underline{\vartheta}}(X_1)$ ακολουθεί ασυμπτωτικά την Κανονική κατανομή.

Πρόταση 3.13. i. $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

ii. Αν $X = c$ εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $X = c$ με πιθανότητα 1, τότε $X_n \xrightarrow{p} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{d} c$.

Πόρισμα 3.5. Αν $T_n(\underline{X})$ ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$, τότε $T_n(\underline{X})$ συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

Πρόταση 3.14. Αν $X_n \xrightarrow{a.s./p} X$ και $Y_n \xrightarrow{a.s./p} Y$, τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{a.s./p} X + Y$ και $X_n Y_n \xrightarrow{a.s./p} XY$. Αν, επιπλέον, $Y_n \neq 0$ και $Y \neq 0$, τότε $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{a.s./p} \frac{X}{Y}$.

Θεώρημα 3.9. (Slutsky)
Αν $X_n \xrightarrow{d} X$ και $Y_n \xrightarrow{d} c$, τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$ και $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$. Αν, επιπλέον, $Y_n \neq 0$ και $c \neq 0$, τότε $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$.

Πόρισμα 3.6. Αν η εκτιμήτρια $T_n(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ έχει ασυμπτωτική κατανομή, τότε είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

Θεώρημα 3.10. (Θεώρημα Συνεχούς Απεικόνισης)
Έστω $X_n \xrightarrow{a.s./p/d} X$ και S το στήριγμα της τυχαίας μεταβλητής X. Αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο S, τότε $g\left(X_n\right) \xrightarrow{a.s./p/d} g(X)$.

Πόρισμα 3.7. Αν η $T_n(\underline{X})$ είναι (ισχυρά) συνεπής εκτιμήτρια του ϑ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο Θ, τότε η $g\left(T_n(\underline{X})\right)$ είναι (ισχυρά) συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$.

Πόρισμα 3.8. Αν $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ τ.δ. από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$, τότε οι στατιστικές συναρτήσεις $T_1(\underline{X}) = \overline{X}_n$ και $T_2(\underline{X}) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ είναι ισχυρά συνεπείς εκτιμήτριες των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(\underline{\vartheta}) = E_{\underline{\vartheta}}(X_1)$ και $g_2(\underline{\vartheta}) = \operatorname{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1)$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.11. (Μέθοδος Δέλτα)
Έστω ότι $r_n\left(X_n - a\right) \xrightarrow{d} X$, όπου $\left(r_n\right)_{n \geqslant 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = \infty$. Αν η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$, τότε $r_n\left[\varphi\left(X_n\right) - \varphi(a)\right] \xrightarrow{d} \varphi'(a) \cdot X$.

Πόρισμα 3.9. Αν η εκτιμήτρια $T_n(\underline{X})$ του ϑ έχει ασυμπτωτική κατανομή και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο Θ, τότε κι η εκτιμήτρια $g\left(T_n(\underline{X})\right)$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ έχει ασυμπτωτική κατανομή.

Πρόταση 3.15. Έστω $\underline{X_n} = (X_{n1}, \ldots, X_{nd})$ και $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_d)$. Ισχύει ότι $\underline{X_n} \overset{a.s./p}{\to} \underline{X}$ αν και μόνο αν $X_{ni} \overset{a.s./p}{\to} X_i$ για $i = 1, 2, \ldots, d$.

Θεώρημα 3.12. (Τέχνασμα Cramér – Wold)
Έστω $\underline{X_n} = (X_{n1}, \ldots, X_{nd})$ και $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_d)$. Ισχύει ότι $\underline{X_n} \xrightarrow{d} \underline{X}$ αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{d} c_i X_{ni} \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{d} c_i X_i$ για κάθε διάνυσμα $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_d) \in \mathbb{R}^d$.

Σημείωση 3.17. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πολλοί πιθανοί τρόποι για να δείξουμε ότι μία στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$. Ενδεικτικά:

- Με τον ορισμό της σύγκλισης κατά πιθανότητα.
- Δείχνοντας ότι η $T_n(\underline{X})$ είναι (ασυμπτωτικά) αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ με $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = 0$.
- Συνδυάζοντας τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών με το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης.
- Δείχνοντας ότι η $T_n(\underline{X})$ έχει ασυμπτωτική κατανομή. Για τον σκοπό αυτό, μπορούμε να συνδυάσουμε οποιαδήποτε από τα παρακάτω: ορισμός της σύγκλισης κατά κατανομή, κεντρικό οριακό θεώρημα, μέθοδος δέλτα και θεώρημα Slutsky.

Παράδειγμα 3.24. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim (\mu, \sigma^2)$. Να βρεθεί συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu, \sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma}$.
Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\overline{X}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του μ. Επιπλέον, η S_n^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2 και

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \equiv \mathrm{Gamma}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{Var}\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \Rightarrow$$

$$\mathrm{Var}\left(S_n^2\right) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Από πρόταση 3.12, η S_n^2 είναι συνεπής εκτιμήτρια του σ^2. Συμπεραίνουμε ότι η $\left(\overline{X}_n, S_n^2\right)$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του (μ, σ^2). Από θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, η $T_n(\underline{X}) = \frac{\overline{X}_n}{S_n}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu, \sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma}$, αφού η g είναι συνεχής στο $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. □

Παράδειγμα 3.25. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\vartheta)$. Να εξετάσετε αν η εκτιμήτρια $T_n(\underline{X}) = \frac{1}{\overline{X}_n}$ είναι συνεπής για το ϑ.

Θα εξετάσουμε πρώτα αν η $T_n(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ. Γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.16 (σελίδα 35), παίρνουμε ότι $E\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right) = \frac{n}{n-1}\vartheta \to \vartheta$, καθώς $n \to \infty$. Επομένως, η $T_n(\underline{X})$ είναι ασυμπτωτική αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ και

$$E\left(\frac{1}{\overline{X}_n^2}\right) = n^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\vartheta^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\vartheta x} dx = \frac{n^2 \vartheta^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-3} e^{-\vartheta x} dx$$
$$= \frac{n^2 \vartheta^n}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-3)!}{\vartheta^{n-2}} = \frac{n^2 \vartheta^2}{(n-1)(n-2)} \Rightarrow$$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right) = E\left(\frac{1}{\overline{X}_n^2}\right) - \left[E\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right)\right]^2 = \frac{n^2\vartheta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\vartheta^2}{(n-1)^2}$$
$$= \frac{n^2\vartheta^2}{(n-2)(n-1)^2} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Από πρόταση 3.12, η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ.

Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\overline{X}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$. Από θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, συμπεραίνουμε ότι η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ, αφού η $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

Από κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\vartheta}\right) \xrightarrow{d} Y \sim N\left(0, \frac{1}{\vartheta^2}\right)$. Αφού η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$, από τη μέθοδο Δέλτα προκύπτει ότι $\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] \xrightarrow{d} g'\left(\frac{1}{\vartheta}\right) \cdot Y = -\vartheta^2 Y \sim N\left(0, \vartheta^2\right)$. Από πόρισμα 3.6, έπεται ότι η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ. □

Παράδειγμα 3.26.* Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \vartheta)$. Να εξετάσετε αν η εκτιμήτρια $T_n(\underline{X}) = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ είναι συνεπής για το ϑ και να βρείτε την ασυμπτωτική κατανομή της, υπολογίζοντας πρώτα την κατανομή της $Y_n = n\left[\vartheta - T_n(\underline{X})\right] + \vartheta$.
Θα εξετάσουμε πρώτα αν η $T_n(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ. Γνωρίζουμε ότι $f_{X_{(n)}}(x; \vartheta) = \frac{n x^{n-1}}{\vartheta^n} I_{(0,\vartheta)}(x)$, επομένως

$$E\left[X_{(n)}\right] = \frac{n}{\vartheta^n} \int_0^\vartheta x^n dx = \frac{n}{\vartheta^n} \cdot \frac{\vartheta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\vartheta \Rightarrow E\left[T_n(\underline{X})\right] = \frac{n+1}{n} \cdot E\left[X_{(n)}\right] = \vartheta.$$

Άρα, η $T_n(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ και

$$E\left[X_{(n)}^2\right] = \frac{n}{\vartheta^n} \int_0^\vartheta x^{n+1} dx = \frac{n}{\vartheta^n} \cdot \frac{\vartheta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\vartheta^2}{n+2} \Rightarrow$$

$$E\left[T_n^2(\underline{X})\right] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 E\left[X_{(n)}^2\right] = \frac{(n+1)^2\vartheta^2}{n(n+2)} \Rightarrow$$

$$\text{Var}\left[T_n(\underline{X})\right] = \frac{(n+1)^2\vartheta^2}{n(n+2)} - \vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Από πρόταση 3.12, η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ.

Γνωρίζουμε ότι $F_{X_{(n)}}(x;\vartheta) = \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n$ για $x \in [0,\vartheta]$. Για $y \in (0, n\vartheta+\vartheta)$, έχουμε

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P\left[n\left(\vartheta - T_n(\underline{X})\right) + \vartheta \leqslant y\right] = P\left[T_n(\underline{X}) \geqslant \vartheta + \frac{\vartheta - y}{n}\right] \\ &= 1 - P\left[X_{(n)} \leqslant \left(\vartheta + \frac{\vartheta - y}{n}\right)\frac{n}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{\vartheta^n}\left(\vartheta + \frac{\vartheta-y}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1-\frac{y}{\vartheta}}{n}\right)^n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 1 - e^{1-\frac{y}{\vartheta}} \cdot \frac{1}{e} = 1 - e^{-\frac{y}{\vartheta}}, \end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, συμπεραίνουμε ότι η ασυμπτωτική κατανομή της $T_n(\underline{X})$ δίνεται από τη σχέση $n\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] = \vartheta - Y_n \xrightarrow{d} \vartheta - Y$, όπου $Y \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$. Άρα βλέπουμε και πάλι ότι η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ.

Παρατηρούμε επίσης ότι $\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (\vartheta - Y_n) \xrightarrow{d} 0 \cdot (\vartheta - Y) = 0$, πάλι από θεώρημα Slutsky. □

3.9 Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Ορισμός 3.19. Έστω τ.δ. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Ορίζουμε ως συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος $\underline{X}$ την από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ ως συνάρτηση του $\underline{\vartheta}$, δηλαδή $L(\underline{\vartheta}|\underline{x}) = f(\underline{x};\underline{\vartheta})$.

Σημείωση 3.18. Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε $L(\underline{\vartheta}|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\underline{\vartheta})$.

Ερμηνεία: Για δεδομένο δείγμα παρατηρήσεων $\underline{x}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$ εκφράζει το πόσο πιθανό είναι να έχουμε παρατηρήσει τα δεδομένα $\underline{x}$ που παρατηρήσαμε για τις διάφορες τιμές της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$.

Μία "λογική" εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$ θα προέκυπτε αν μεγιστοποιούσαμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος ως προς $\underline{\vartheta}$. Με αυτόν τον τρόπο, θα επιλέγαμε ως εκτιμήτρια της άγνωστης παραμέτρου την τιμή της για την οποία είναι το περισσότερο πιθανό να έχουμε παρατηρήσει τα δεδομένα που παρατηρήσαμε.

Ορισμός 3.20. Έστω τ.δ. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ και συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$. Ορίζουμε ως εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$ την τιμή (ή τις τιμές) $\widehat{\underline{\vartheta}} = \widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{x})$ για την οποία μεγιστοποιείται η $L(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$, δηλαδή $L(\widehat{\underline{\vartheta}} \mid \underline{x}) = \max_{\underline{\vartheta}\in\Theta} L(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$ ή ισοδύναμα $\widehat{\underline{\vartheta}} = \arg\max_{\underline{\vartheta}\in\Theta} L(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$.

Σημείωση 3.19. i. Για τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ μπορεί να μην υπάρχει Ε.Μ.Π., μπορεί να υπάρχει και να είναι μοναδική ή μπορεί και να υπάρχουν περισσότερα του ενός ολικά μέγιστα της $L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$.

ii. Επειδή η συνάρτηση $g(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία στα οποία επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή της η λεγόμενη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας $\ell(\underline{\vartheta}|\underline{x}) = \log L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$ ταυτίζονται με τα σημεία στα οποία επιτυγχάνει τη μέγιστη τιμή της η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$. Για λόγους ευκολίας στις πράξεις (το γινόμενο που εμφανίζεται στη συνάρτηση πιθανοφάνειας μετατρέπεται σε άθροισμα), προτιμάται πολλές φορές η μεγιστοποίηση της συνάρτησης λογαριθμο-πιθανοφάνειας.

iii. Αν η συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας $\ell(\underline{\vartheta}|\underline{x})$ έχει μερικές παραγώγους σε ένα ανοικτό σύνολο $\Theta^* \subseteq \Theta$, τότε πιθανά ολικά μέγιστα της $\ell(\underline{\vartheta}|\underline{x})$ μπορεί να προκύψουν από την επίλυση των εξισώσεων $\frac{\partial \ell}{\partial \vartheta_i}(\underline{\vartheta}|\underline{x}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Πρόταση 3.16. Αν η $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$ και $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ είναι η μοναδική Ε.Μ.Π. του $\underline{\vartheta}$, τότε η Ε.Μ.Π. είναι συνάρτηση της επαρκούς, δηλαδή $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X}) = \underline{\psi}\left(\underline{T}(\underline{X})\right)$ για κατάλληλη συνάρτηση $\underline{\psi}$.

Πρόταση 3.17. Έστω τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο ϑ για την οποία ικανοποιούνται οι συνθήκες ομαλότητας της ανισότητας Cramér - Rao. Αν η πληροφορία κατά Fisher $I_{\underline{X}}(\vartheta)$ του δείγματος για το ϑ είναι παραγωγίσιμη στο Θ και $T(\underline{X})$ είναι μία αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ, τότε η $T(\underline{X})$ είναι και Ε.Μ.Π. του ϑ.

Παράδειγμα 3.27. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Έχουμε

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \vartheta^n \prod_{i=1}^n e^{-\vartheta x_i} \Rightarrow \ell(\vartheta|\underline{x}) = n \log \vartheta - \vartheta \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow \ell'(\vartheta|\underline{x}) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow$$

$$\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Επαληθεύουμε ότι το κρίσιμο σημείο $\widehat{\vartheta}$ που βρήκαμε είναι, πράγματι, το ολικό μέγιστο της $L(\vartheta|\underline{x})$ ως εξής

$$\ell''(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0, \infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. □

Παράδειγμα 3.28. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bin}(N, \vartheta)$ με N γνωστό. Έχουμε

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \vartheta) = \prod_{i=1}^n \left[\binom{N}{x_i} \vartheta^{x_i} (1-\vartheta)^{N-x_i}\right] \Rightarrow$$

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = \log L(\vartheta|\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\log \binom{N}{x_i} + x_i \log \vartheta + (N - x_i) \log(1-\vartheta)\right] \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\vartheta} - \frac{N - x_i}{1-\vartheta}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\widehat{\vartheta}) \sum_{i=1}^{n} x_i = \widehat{\vartheta} \left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\overline{x}}{N} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{1}{\vartheta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{(1-\vartheta)^2} \left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) < 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1).$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0,1)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε.

Στην ειδική περίπτωση όπου $x_1 = \cdots = x_n = 0$, έχουμε $L(\vartheta|\underline{x}) = (1-\vartheta)^{nN}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο σύνολο $\Theta = (0,1)$ και δεν επιτυγχάνει μέγιστο στο ανοικτό $(0,1)$, αφού το supremum της επιτυγχάνεται για $\vartheta = 0 \notin (0,1)$. Ομοίως, αν $x_1 = \cdots = x_n = N$, παίρνουμε $L(\vartheta|\underline{x}) = \vartheta^{nN}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\Theta = (0,1)$ και δεν επιτυγχάνει μέγιστο στο ανοικτό $(0,1)$, αφού το supremum της επιτυγχάνεται για $\vartheta = 1 \notin (0,1)$. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις, δεν υπάρχει η Ε.Μ.Π του ϑ. □

Παράδειγμα 3.29. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U[0,\vartheta]$ με $\vartheta > 0$. Έχουμε

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \frac{1}{\vartheta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{[0,\vartheta]}(x_i) = \frac{1}{\vartheta^n} I_{(-\infty,\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) = \frac{1}{\vartheta^n} I_{\left[x_{(n)},\infty\right)}(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta^{-n}, & \vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \vartheta < x_{(n)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \geqslant x_{(n)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = x_{(n)}$. Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα δε χρειάστηκε να λογαριθμίσουμε και στη συνέχεια να παραγωγίσουμε την $\ell(\vartheta|\underline{x})$ για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της $L(\vartheta|\underline{x})$. □

Παράδειγμα 3.30. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U[-\vartheta,\vartheta]$ με $\vartheta > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} L(\vartheta|\underline{x}) &= \frac{1}{(2\vartheta)^n} \cdot I_{[-\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \cdot I_{(-\infty,\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) = \frac{1}{(2\vartheta)^n} \cdot I_{\left[-x_{(1)},\infty\right)}(\vartheta) \cdot I_{\left[x_{(n)},\infty\right)}(\vartheta) \\ &= \begin{cases} (2\vartheta)^{-n}, & \vartheta \geqslant -x_{(1)} \text{ και } \vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} (2\vartheta)^{-n}, & \vartheta \geqslant \max\left\{-x_{(1)}, x_{(n)}\right\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, συμπεραίνουμε ότι η Ε.Μ.Π του ϑ είναι η $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = \max\left\{-x_{(1)}, x_{(n)}\right\}$.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θέσουμε $Y_i = |X_i| \sim U(0,\vartheta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

για να υπολογίσουμε την Ε.Μ.Π του ϑ. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, θα προέκυπτε $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = y_{(n)} = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \max\{-x_{(1)}, x_{(n)}\}$. □

Παράδειγμα 3.31. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U[2\vartheta, 3\vartheta]$ με $\vartheta > 0$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
L(\vartheta|\underline{x}) &= \frac{1}{\vartheta^n} \cdot I_{[2\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \cdot I_{(-\infty,3\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) = \frac{1}{\vartheta^n} \cdot I_{\left(-\infty, x_{(1)}\right]}(2\vartheta) \cdot I_{\left[x_{(n)},\infty\right)}(3\vartheta) \\
&= \begin{cases} \vartheta^{-n}, & 2\vartheta \leqslant x_{(1)} \text{ και } 3\vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} \vartheta^{-n}, & \frac{x_{(n)}}{3} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{x_{(1)}}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Για $\vartheta \in \left[\frac{x_{(n)}}{3}, \frac{x_{(1)}}{2}\right]$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = \frac{x_{(n)}}{3}$. □

Παράδειγμα 3.32. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U[\vartheta, \vartheta+1]$ με $\vartheta \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
L(\vartheta|\underline{x}) &= I_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \cdot I_{(-\infty,\vartheta+1]}\left(x_{(n)}\right) = I_{\left(-\infty, x_{(1)}\right]}(\vartheta) \cdot I_{\left[x_{(n)}-1,\infty\right)}(\vartheta) \\
&= \begin{cases} 1, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \text{ και } \vartheta \geqslant x_{(n)} - 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_{(n)} - 1 \leqslant \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Για $\vartheta \in \left[x_{(n)} - 1, x_{(1)}\right]$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι σταθερή, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για οποιοδήποτε $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) \in \left[x_{(n)} - 1, x_{(1)}\right]$. Άρα, η Ε.Μ.Π. του ϑ δεν είναι μοναδική σε αυτήν την περίπτωση. □

Σημείωση 3.20. Στην περίπτωση όπου το διάνυσμα $\underline{\vartheta}$ των αγνώστων παραμέτρων έχει διάσταση τουλάχιστον 2, χρειάζεται μεγαλύτερη προσοχή στην εύρεση ολικού μεγίστου. Χρησιμοποιώντας τον εσσιανό πίνακα της $\ell(\underline{\vartheta}|\underline{x})$ μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σημείο είναι τοπικό μέγιστο της $\ell(\underline{\vartheta}|\underline{x})$, αλλά και πάλι δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι είναι και ολικό μέγιστο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$ μπορεί να μην είναι φραγμένη στο Θ, οπότε σε αυτήν την περίπτωση δε θα υπάρχει η Ε.Μ.Π. του $\underline{\vartheta}$. Μία εναλλακτική και πιο απλή λύση είναι να κάνουμε διαδοχική μεγιστοποίηση της $L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$ ως προς κάθε άγνωστη παράμετρο χωριστά, δηλαδή

$$
\max_{(\vartheta_1,\vartheta_2)\in\Theta} L(\vartheta_1, \vartheta_2|\underline{x}) = \max_{\vartheta_1\in\Theta_1}\left\{\max_{\vartheta_2\in\Theta_2} L(\vartheta_1, \vartheta_2|\underline{x})\right\} = \max_{\vartheta_2\in\Theta_2}\left\{\max_{\vartheta_1\in\Theta_1} L(\vartheta_1, \vartheta_2|\underline{x})\right\}.
$$

Παράδειγμα 3.33. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U[\vartheta_1, \vartheta_2]$ με $\vartheta_2 < \vartheta_2$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
L(\vartheta_1, \vartheta_2|\underline{x}) &= I_{[\vartheta_1,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \cdot I_{(-\infty,\vartheta_2]}\left(x_{(n)}\right) = I_{\left(-\infty, x_{(1)}\right]}(\vartheta_1) \cdot I_{\left[x_{(n)},\infty\right)}(\vartheta_2) \\
&= \begin{cases} (\vartheta_2 - \vartheta_1)^{-n}, & \vartheta_1 \leqslant x_{(1)} \text{ και } \vartheta_2 \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Για $(\vartheta_1,\vartheta_2)\in\big(-\infty,x_{(1)}\big]\times\big[x_{(n)},\infty\big)$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta_1,\vartheta_2|\underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς ϑ_1 και γνησίως φθίνουσα ως προς ϑ_2, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\underline{\vartheta}}=\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{x})=\big(x_{(1)},x_{(n)}\big)$. □

Παράδειγμα 3.34. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ με $f(x_i;\lambda,p)=\lambda e^{-\lambda(x_i-p)}I_{[p,\infty)}(x_i)$, $\lambda>0$ και $p\in\mathbb{R}$ για $i=1,2,\ldots,n$. Έχουμε

$$L(\lambda,p|\underline{x})=\lambda^n\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i+n\lambda p\right\}I_{[p,\infty)}\left(x_{(1)}\right)$$
$$=\begin{cases}\lambda^n\exp\left\{-\lambda\sum\limits_{i=1}^n x_i+n\lambda p\right\}, & p\leqslant x_{(1)}\\ 0, & p>x_{(1)}\end{cases}.$$

Σταθεροποιούμε το λ και μεγιστοποιούμε ως προς p. Για $p\leqslant x_{(1)}$, η $L(\lambda,p|\underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς p, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{p}=\widehat{p}(\underline{x})=x_{(1)}$. Τώρα μεγιστοποιούμε την $\ell\left(\lambda,x_{(1)}|\underline{x}\right)$ ως προς λ

$$\ell\left(\lambda,x_{(1)}|\underline{x}\right)=n\log\lambda-\lambda\sum_{i=1}^n x_i+n\lambda x_{(1)}\Rightarrow\frac{\partial\ell}{\partial\lambda}\left(\lambda,x_{(1)}|\underline{x}\right)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n x_i+nx_{(1)}=0\Rightarrow$$

$$\widehat{\lambda}=\widehat{\lambda}(\underline{x})=\frac{1}{\overline{x}-x_{(1)}}\quad\text{και}\quad\frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda^2}\left(\lambda,x_{(1)}|\underline{x}\right)=-\frac{n}{\lambda^2}<0,\ \forall\lambda>0.$$

Δηλαδή, η $\ell\left(\lambda,x_{(1)}|\underline{x}\right)$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $(0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Τελικά, $(\widehat{\lambda},\widehat{p})=\left(\frac{1}{\overline{x}-x_{(1)}},x_{(1)}\right)$.

Στην ειδική περίπτωση όπου $\overline{x}=x_{(1)}$, δηλαδή $x_1=\cdots=x_n=x_{(1)}$, έχουμε $L\left(\lambda,x_1|\underline{x}\right)=\lambda^n$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι μη-φραγμένη στο $[x_1,\infty)$. Άρα δεν υπάρχει η Ε.Μ.Π του λ. Όμως $P(X_1=\cdots=X_n)=0$, δηλαδή η Ε.Μ.Π. του λ υπάρχει και είναι μοναδική με πιθανότητα 1. □

Παράδειγμα 3.35. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n\sim N(\vartheta_1,\vartheta_2)$ με $\vartheta_1\in\mathbb{R}$, $\vartheta_2>0$. Έχουμε

$$L(\vartheta_1,\vartheta_2|\underline{x})=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta_2}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta_2}\sum_{i=1}^n(x_i-\vartheta_1)^2\right\}\Rightarrow$$

$$\ell(\vartheta_1,\vartheta_2|\underline{x})=-\frac{n\log(2\pi)}{2}-\frac{n\log\vartheta_2}{2}-\frac{1}{2\vartheta_2}\sum_{i=1}^n(x_i-\vartheta_1)^2.$$

Σταθεροποιούμε το ϑ_2 και μεγιστοποιούμε ως προς ϑ_1

$$\frac{\partial\ell}{\partial\vartheta_1}=\frac{1}{\vartheta_2}\sum_{i=1}^n(x_i-\vartheta_1)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^n x_i-n\widehat{\vartheta_1}=0\Rightarrow\widehat{\vartheta_1}=\widehat{\vartheta_1}(\underline{x})=\overline{x}\quad\text{και}$$

$$\frac{\partial^2\ell}{\partial\vartheta_1^2}=-\frac{n}{\vartheta_2}<0,\quad\forall\vartheta_1\in\mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta_1, \vartheta_2|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση για ϑ_2 σταθερό και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Τώρα, μεγιστοποιούμε την $\ell(\overline{x}, \vartheta_2|\underline{x})$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \vartheta_2} = -\frac{n}{2\vartheta_2} + \frac{1}{2\vartheta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta_2} = \widehat{\vartheta_2}(\underline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_2^2} = \frac{n}{2\vartheta_2^2} - \frac{1}{\vartheta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{\vartheta_2^2}\left[\frac{n}{2} - \frac{1}{\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \vartheta_2^2}\left(\widehat{\vartheta_1}, \widehat{\vartheta_2}|\underline{x}\right) = \frac{1}{\widehat{\vartheta_2}^2}\left(\frac{n}{2} - n\right) = -\frac{n}{2\widehat{\vartheta_2}^2} < 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\overline{x}, \vartheta_2|\underline{x})$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{\vartheta_2} = \widehat{\vartheta_2}(\underline{x}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. Υπολογίζοντας τα όρια της συνάρτησης $L\left(\widehat{\vartheta_1}, \vartheta_2|\underline{x}\right)$ ως προς ϑ_2 στα 0^+ και ∞, επαληθεύουμε ότι το $\widehat{\vartheta_2}$ είναι σημείο ολικού μεγίστου

$$\lim_{\vartheta_2 \to \infty} L\left(\widehat{\vartheta_1}, \vartheta_2|\underline{x}\right) = \lim_{\vartheta_2 \to \infty} (2\pi\vartheta_2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right\} = 0,$$

$$\lim_{\vartheta_2 \to 0^+} L\left(\widehat{\vartheta_1}, \vartheta_2|\underline{x}\right) = \lim_{\vartheta_2 \to 0^+} (2\pi\vartheta_2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right\} = 0.$$

Τελικά, $\widehat{\underline{\vartheta}} = \widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{x}) = \left(\overline{x}, \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)$.

Στην ειδική περίπτωση όπου $x_1 = \cdots = x_n = \overline{x}$, έχουμε $L(\overline{x}, \vartheta_2|\underline{x}) = (2\pi\vartheta_2)^{-\frac{n}{2}}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι μη-φραγμένη στο $(0, \infty)$. Άρα δεν υπάρχει η Ε.Μ.Π του ϑ_2. Όμως $P(X_1 = \cdots = X_n) = 0$, δηλαδή η Ε.Μ.Π. του ϑ_2 υπάρχει και είναι μοναδική με πιθανότητα 1.

Έχουμε υπολογίσει ότι $\text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(S^2\right) = \text{Var}\left(S^2\right) = \frac{2}{n-1} \cdot \vartheta_2^2$ και θα το συγκρίνουμε τώρα με το Μ.Τ.Σ. της Ε.Μ.Π. του ϑ_2

$$\text{Var}\left(\widehat{\vartheta_2}\right) = \text{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{n}\right] = \frac{2(n-1)}{n^2} \cdot \vartheta_2^2 \quad \text{και} \quad E\left(\widehat{\vartheta_2}\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \vartheta_2 \Rightarrow$$

$$b_{\vartheta_2}\left(\widehat{\vartheta_2}\right) = E\left(\widehat{\vartheta_2}\right) - \vartheta_2 = -\frac{\vartheta_2}{n} \Rightarrow \text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(\widehat{\vartheta_2}\right) = \text{Var}\left(\widehat{\vartheta_2}\right) + b_{\vartheta_2}^2\left(\widehat{\vartheta_2}\right) = \frac{2n-1}{n^2} \cdot \vartheta_2^2.$$

Συγκρίνουμε τα Μ.Τ.Σ. των δύο εκτιμητριών

$$\text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(\widehat{\vartheta_2}\right) < \text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(S^2\right) \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow -3n + 1 < 0 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}.$$

Άρα, πράγματι, η μεροληπτική Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta_2}$ του ϑ_2 έχει μικρότερο Μ.Τ.Σ. από την Α.Ε.Ε.Δ. S^2 του ϑ_2. $\square$

Πρόταση 3.18. (Ιδιότητα του Αναλλοίωτου)
Αν $\widehat{\underline{\vartheta}}$ είναι η Ε.Μ.Π. του $\underline{\vartheta}$ και $g : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι μία 1-1 συνάρτηση, τότε η $g(\widehat{\underline{\vartheta}})$ είναι η Ε.Μ.Π. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$, δηλαδή $\widehat{g(\underline{\vartheta})} = g(\widehat{\underline{\vartheta}})$.

Για να γίνει κατανοητό το πόσο σημαντική είναι αυτή η ιδιότητα των Ε.Μ.Π., αρκεί να σκεφτεί κανείς πόσο περίπλοκη είναι η ίδια διαδικασία για την εύρεση της Α.Ε.Ε.Δ. μίας παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$.

Παράδειγμα 3.36. Αν $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta_1, \vartheta_2)$ ανεξάρτητες, τότε η Ε.Μ.Π. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta_2 e^{\vartheta_1}$ είναι η $g\left(\widehat{\vartheta_1}, \widehat{\vartheta_2}\right) = \frac{e^{\overline{x}}}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$. □

Ενδεικτικά, στον πίνακα 3.3 συνοψίζουμε τις εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για τις άγνωστες παραμέτρους κάποιων βασικών κατανομών:

Bernoulli(ϑ)	$\widehat{\vartheta} = \overline{X}$
Poisson(ϑ)	
Bin(N, ϑ) με N γνωστό	$\widehat{\vartheta} = \frac{\overline{X}}{N}$
Exp(ϑ)	$\widehat{\vartheta} = \frac{1}{\overline{X}}$
Gamma(a, ϑ) με a γνωστό	$\widehat{\vartheta} = \frac{a}{\overline{X}}$
$N(\mu, \vartheta_2)$ με μ γνωστό	$\widehat{\vartheta} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$
$N(\vartheta_1, \vartheta_2)$	$\widehat{\underline{\vartheta}} = \left(\overline{X}, \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right)$
$U(\vartheta_1, \vartheta_2)$	$\widehat{\underline{\vartheta}} = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$

Πινακας 3.3: Σύνοψη Εκτιμητριών Μέγιστης Πιθανοφάνειας

3.10 Η Μέθοδος των Ροπών

Η παλαιότερη μέθοδος υπολογισμού εκτιμητριών είναι η μέθοδος των ροπών. Παρά τη σχετική απλότητα της μεθόδου των ροπών, οι εκτιμήτριες οι οποίες μας δίνει στην πλειοψηφία των περιπτώσεων δεν έχουν "καλές" ιδιότητες.

Ορισμός 3.21. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Για $k = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε

i. (Πληθυσμιακή ή θεωρητική) ροπή k-τάξης: $m_k = E_{\underline{\vartheta}}(X_1^k)$.

ii. Δειγματική ροπή k-τάξης: $M_k = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$.

Επιπλέον, για $k = 2, 3, \ldots$ ορίζουμε

i. Κεντρική (πληθυσμιακή ή θεωρητική) ροπή k-τάξης: $\widetilde{m}_k = E_{\underline{\vartheta}}\left[(X_1 - m_1)^k\right]$.

ii. Κεντρική δειγματική ροπή k-τάξης: $\widetilde{M}_k = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^k$.

Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Η ιδέα της μεθόδου των ροπών βασίζεται στον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, σύμφωνα με τον οποίο, αν $m_k = E_{\underline{\vartheta}}\left(X_1^k\right) < \infty$ για $k = 1, 2, \ldots$, τότε

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \overset{a.s.}{\to} E_{\underline{\vartheta}}\left(X_1^k\right) = m_k \quad \text{και}$$

$$\widetilde{M}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k \overset{a.s.}{\to} E_{\underline{\vartheta}}\left[(X_1 - m_1)^k\right] = \widetilde{m}_k.$$

Θεωρώντας οποιεσδήποτε από τις εξισώσεις $M_k = m_k$ για $k = 1, 2, \ldots$ και $\widetilde{M}_k = \widetilde{m}_k$ για $k = 2, 3, \ldots$, ώστε να πάρουμε ένα σύστημα συνολικά s εξισώσεων, το οποίο μπορούμε να λύσουμε ως προς την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$, καταλήγουμε στη λεγόμενη ροποεκτιμήτρια ή εκτιμήτρια μεθόδου ροπών (Ε.Μ.Ρ.) $\widetilde{\underline{\vartheta}} = \widetilde{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$. Προφανώς, η Ε.Μ.Ρ. δεν είναι μοναδική, αφού εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος εξισώσεων.

Σημείωση 3.21. Στην πράξη, για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ροπών, φτιάχνουμε το σύστημα που θέλουμε να επιλύσουμε ξεκινώντας από τις ροπές χαμηλότερης τάξης, οι οποίες είναι και πιο εύκολα υπολογίσιμες. Στην περίπτωση γνωστών βασικών κατανομών προτιμάμε να δουλεύουμε με τις κεντρικές ροπές, αφού $\widetilde{m}_2 = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1)$, η οποία είναι πιο άμεσα γνωστή από την $m_2 = E_{\underline{\vartheta}}\left(X_1^2\right)$. Αν η ροπή m_k και η κεντρική ροπή $\widetilde{m}_k$ είναι ανεξάρτητες της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$ για κάποιο k, τότε παραλείπουμε την αντίστοιχη εξίσωση και συνεχίζουμε με τις ροπές της επόμενης τάξης.

Παράδειγμα 3.37. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \vartheta)$ με μ γνωστό. Βλέπουμε ότι $m_1 = E(X_1) = \mu$ δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ, άρα την παραλείπουμε. Εξισώνουμε τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης

$$\widetilde{m}_2 = \widetilde{M}_2 \Rightarrow \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow \widetilde{\vartheta} = \widetilde{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{n-1}{n} \cdot S^2.$$

Παρατηρούμε ότι η Ε.Μ.Ρ. $\widetilde{\vartheta}(\underline{X})$ του ϑ διαφέρει από την Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta}(\underline{X})$ του ϑ. □

Παράδειγμα 3.38. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \widetilde{\vartheta_1} = \widetilde{\vartheta_1}(\underline{X}) = \overline{X} \quad \text{και}$$

$$\widetilde{m}_2 = \widetilde{M}_2 \Rightarrow \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow \widetilde{\vartheta_2} = \widetilde{\vartheta_2}(\underline{X}) = \frac{n-1}{n} \cdot S^2,$$

όπου $m_1 = M_1 = \overline{X}$ από την πρώτη εξίσωση. Παρατηρούμε ότι κι εδώ η Ε.Μ.Ρ. $\underline{\widetilde{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$ ταυτίζεται με την Ε.Μ.Π. $\underline{\widehat{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$. $\square$

Παράδειγμα 3.39. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gamma}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \frac{\widetilde{\vartheta_1}}{\widetilde{\vartheta_2}} = \overline{X} \quad \text{και}$$

$$\widetilde{m}_2 = \widetilde{M}_2 \Rightarrow \text{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow \frac{\widetilde{\vartheta_1}}{\widetilde{\vartheta_2}^2} = \frac{n-1}{n} \cdot S^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{X}}{\widetilde{\vartheta_2}} = \frac{n-1}{n} \cdot S^2 \Rightarrow \widetilde{\vartheta_2} = \widetilde{\vartheta_2}(\underline{X}) = \frac{n\overline{X}}{(n-1)S^2} \Rightarrow \widetilde{\vartheta_1} = \widetilde{\vartheta_1}(\underline{X}) = \frac{n\overline{X}^2}{(n-1)S^2}.$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η Ε.Μ.Ρ. $\underline{\widetilde{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$ δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} \log X_i\right)$ για το $\underline{\vartheta}$. Για τον λόγο αυτό αποφεύγεται η χρήση της, παρά την ευκολία στον υπολογισμό της. $\square$

Παράδειγμα 3.40. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(-\vartheta, \vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Παρατηρούμε ότι $m_1 = E(X_1) = 0$ δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ, άρα την παραλείπουμε. Αφού $\text{Var}(X_1) = E\left(X_1^2\right)$, εξισώνουμε τις ροπές δεύτερης τάξης

$$m_2 = M_2 \Rightarrow E\left(X_1^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Rightarrow \frac{\widetilde{\vartheta}^2}{3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Rightarrow \widetilde{\vartheta_2} = \widetilde{\vartheta_2}(\underline{X}) = \sqrt{3M_2},$$

αφού $\vartheta > 0$. Παρατηρούμε ότι κι εδώ η Ε.Μ.Ρ. $\widetilde{\vartheta}(\underline{X})$ του ϑ δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $T(\underline{X}) = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$ για το ϑ. $\square$

Παράδειγμα 3.41. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(\vartheta_1, \vartheta_2)$ με $\vartheta_1 < \vartheta_2$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \frac{\widetilde{\vartheta_1} + \widetilde{\vartheta_2}}{2} = \overline{X} \Rightarrow \widetilde{\vartheta_1} + \widetilde{\vartheta_2} = 2\overline{X} \quad \text{και}$$

$$\widetilde{m}_2 = \widetilde{M}_2 \Rightarrow \text{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow \frac{(\widetilde{\vartheta_2} - \widetilde{\vartheta_1})^2}{12} = \frac{n-1}{n} \cdot S^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\widetilde{\vartheta_2} - \widetilde{\vartheta_1}}{2\sqrt{3}} = S\sqrt{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow \widetilde{\vartheta_2} = \widetilde{\vartheta_1} + 2S\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}} \Rightarrow 2\widetilde{\vartheta_1} + 2S\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}} = 2\overline{X} \Rightarrow$$

$$\widetilde{\vartheta_1} = \widetilde{\vartheta_1}(\underline{X}) = \overline{X} - S\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}} \Rightarrow \widetilde{\vartheta_2} = \widetilde{\vartheta_2}(\underline{X}) = \overline{X} + S\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}}.$$

Παρατηρούμε ότι κι εδώ η Ε.Μ.Ρ. $\underline{\widetilde{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$ δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ για το $\underline{\vartheta}$. $\square$

Παράδειγμα 3.42. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $f(x_i; \lambda, p) = \lambda e^{-\lambda(x_i - p)} I_{(p,\infty)}(x_i)$, όπου $\lambda > 0$ και $p \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Παρατηρούμε ότι $Y_i = X_i - p \sim \text{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Πράγματι, για $y > 0$ έχουμε

$$F_{Y_1}(y) = P(X_1 - p \leqslant y) = F_{X_1}(y + p) \Rightarrow f_{Y_1}(y) = f_{X_1}(y + p) = \lambda e^{-\lambda y} \Rightarrow$$

$$E(X_1) = E(Y_1 + p) = E(Y_1) + p = \frac{1}{\lambda} + p \quad \text{και}$$

$$\text{Var}(X_1) = \text{Var}(Y_1 + p) = \text{Var}(Y_1) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \frac{1}{\widetilde{\lambda}} + \widetilde{p} = \overline{X} \Rightarrow \widetilde{p} = \overline{X} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}} \quad \text{και}$$

$$\widetilde{m}_2 = \widetilde{M}_2 \Rightarrow \text{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow \frac{1}{\widetilde{\lambda}^2} = \frac{n-1}{n} \cdot S^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}} = S\sqrt{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow \widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\underline{X}) = \frac{1}{S}\sqrt{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow \widetilde{p} = \widetilde{p}(\underline{X}) = \overline{X} - S\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Παρατηρούμε ότι κι εδώ η Ε.Μ.Ρ. του (λ, p) δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}(\underline{X}) = \big(\overline{X}, X_{(1)}\big)$ για το (λ, p). □

Παράδειγμα 3.43.* Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bin}(N, p)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \widetilde{N}\widetilde{p} = \overline{X} \Rightarrow \widetilde{N} = \frac{\overline{X}}{\widetilde{p}} \quad \text{και}$$

$$\widetilde{m}_2 = \widetilde{M}_2 \Rightarrow \text{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow \widetilde{N}\widetilde{p}(1 - \widetilde{p}) = \frac{n-1}{n} \cdot S^2 \Rightarrow$$

$$\overline{X}\widetilde{p} = \overline{X} - \frac{n-1}{n} \cdot S^2 \Rightarrow \widetilde{p} = \widetilde{p}(\underline{X}) = \frac{n\overline{X} - (n-1)S^2}{n\overline{X}} \Rightarrow$$

$$\widetilde{N} = \widetilde{N}(\underline{X}) = \frac{n\overline{X}^2}{n\overline{X} - (n-1)S^2}.$$

Για να εξασφαλίσουμε ότι η $(\widetilde{N}, \widetilde{p})$ είναι όντως εκτιμήτρια του (N, p), θα πρέπει να παίρνει τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο $\Theta = \mathbb{N} \times (0, 1)$ και να συμφωνεί με το στήριγμα της κατανομής του δείγματος. Για τον λόγο αυτό, θέτουμε τους εξής περιορισμούς

- $(n-1)S^2 < n\overline{X} \Rightarrow \widetilde{p}(\underline{X}) \in (0, 1)$.
- $\widetilde{N}(\underline{X}) \in \mathbb{N}$ και $\widetilde{N}(\underline{X}) \geqslant X_{(n)} \Rightarrow \widetilde{N}(\underline{X}) = \max\left\{\left\lceil \frac{n\overline{X}^2}{n\overline{X} - (n-1)S^2} \right\rceil, X_{(n)}\right\}$. □

Κεφάλαιο 4

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

4.1 Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής, έχουμε ασχοληθεί μόνο με σημειακές εκτιμήσεις αγνώστων παραμέτρων. Στην πράξη, έχοντας ένα δείγμα παρατηρήσεων $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο ϑ, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta}(\underline{x})$ του ϑ, την τιμή της Ε.Μ.Ρ. $\widetilde{\vartheta}(\underline{x})$ του ϑ ή την τιμή της Α.Ε.Ε.Δ. $\delta(\underline{x})$ του ϑ, εφόσον αυτές υπάρχουν. Οι τιμές αυτές αποτελούν κάποιες "καλές" εκτιμήσεις της πραγματικής τιμής του ϑ, σύμφωνα με τα κριτήρια που μελετήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, ο απλός υπολογισμός μίας σημειακής εκτιμήτριας του ϑ δε μας δίνει καμία πληροφορία σχετικά με την αβεβαιότητα που έχουμε για τη σημειακή εκτίμησή μας, δηλαδή το κατά πόσο θα μπορούσε να απέχει η πραγματική τιμή του ϑ από τη σημειακή εκτίμηση που μας έδωσε το δείγμα μας. Οδηγούμαστε, λοιπόν, στην ιδέα της κατασκευής ενός διαστήματος στο οποίο θα μπορούσε με κάποια δεδομένη "βεβαιότητα" να περιέχεται η πραγματική τιμή του ϑ .

Ορισμός 4.1. Έστω τ.δ. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta$. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, ορίζουμε ως $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ ένα τυχαίο διάστημα της μορφής $I(\underline{X}) = [L(\underline{X}), U(\underline{X})]$ τέτοιο ώστε

$$\inf_{\underline{\vartheta}\in\Theta} P_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}), U(\underline{X}) \geqslant g(\underline{\vartheta})\right] = \inf_{\underline{\vartheta}\in\Theta} P_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})\right] = 1-\alpha,$$

όπου οι $L(\underline{X})$ και $U(\underline{X})$ στατιστικές συναρτήσεις με $L(\underline{x}) \leqslant U(\underline{x})$, $\forall \underline{x}$. Το $1-\alpha$ ονομάζεται συντελεστής εμπιστοσύνης του Δ.Ε.

Προσοχή! Έστω ότι επιλέγουμε $\alpha = 0.05$, συλλέγουμε ένα δείγμα παρατηρήσεων $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και κατασκευάζουμε με βάση αυτό ένα 95% Δ.Ε. $I(\underline{x}) = [0.9, 1.2]$

για το ϑ. Με βάση τον παραπάνω ορισμό, θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ότι η πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου ϑ ανήκει στο διάστημα $[0.9, 1.2]$ με πιθανότητα 95%. Όμως, αυτή η ερμηνεία του Δ.Ε. είναι **λάθος**. Στην κλασική στατιστική, με την οποία ασχολείται το μάθημα της Στατιστικής Ι, η παράμετρος ϑ θεωρείται ότι είναι μία άγνωστη σταθερά. Μία σταθερά είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα συγκεκριμένο διάστημα, όπως $1 \in [0.9, 1.2]$ και $2 \notin [0.9, 1.2]$. Η πιθανότητα $P\left(0.9 \leqslant \vartheta \leqslant 1.2\right)$ δεν έχει νόημα, αφού το ϑ δεν είναι τυχαία μεταβλητή. Κάποιες σωστές ερμηνείες ενός 95% Δ.Ε. για το ϑ είναι οι εξής:

- Αν επαναλαμβάναμε πολλές φορές τη διαδικασία με την οποία συλλέξαμε το δείγμα παρατηρήσεων και για κάθε ένα από αυτά τα δείγματα επαναλαμβάναμε τη διαδικασία υπολογισμού του 95% Δ.Ε. για το ϑ, τότε το 95% από αυτά τα Δ.Ε. θα περιείχαν την πραγματική τιμή του ϑ. Με άλλα λόγια, στην κλασική στατιστική, το διάστημα είναι αυτό που κινείται ανάλογα με τα δεδομένα που έχουμε στα χέρια μας και όχι η άγνωστη παράμετρος, η οποία παραμένει πάντα σταθερή. Παρατηρούμε ότι το 5% των Δ.Ε. που θα κατασκευάζαμε δε θα περιείχαν καν την πραγματική τιμή του ϑ. Αυτή η ερμηνεία του Δ.Ε. απορρέει από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{[L(\underline{x}_i),U(\underline{x}_i)]}(\vartheta) \overset{a.s.}{\to} E_\vartheta\left[I_{[L(\underline{X}),U(\underline{X})]}(\vartheta)\right] = P_\vartheta\left[L(\underline{X}) \leqslant \vartheta \leqslant U(\underline{X})\right],$$
όπου $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N$ δείγματα παρατηρήσεων και $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} I_{[L(\underline{x}_i),U(\underline{x}_i)]}(\vartheta)$ είναι ακριβώς το ποσοστό των Δ.Ε. που περιέχουν το ϑ.

- Υπάρχει 95% πιθανότητα ένα Δ.Ε. που θα υπολογιστεί από ένα μελλοντικό δείγμα παρατηρήσεων να περιέχει την πραγματική τιμή του ϑ. Σημειώνουμε ότι αυτή η πιθανοθεωρητική ερμηνεία αφορά και πάλι το Δ.Ε. και όχι την άγνωστη παράμετρο ϑ, η οποία παραμένει σταθερή. Από τη στιγμή που δεν έχουμε παρατηρήσει ακόμα τα δεδομένα με βάση τα οποία θα κατασκευάσουμε το Δ.Ε., μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι τυχαία. Άρα και το Δ.Ε. το οποίο θα κατασκευάσουμε με βάση αυτά είναι τυχαίο και μπορούμε να του αποδώσουμε την παραπάνω πιθανοθεωρητική ερμηνεία.

4.2 Μέθοδος Αντιστρεπτής Ποσότητας

Ορισμός 4.2. Έστω τ.δ. $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta$ και $g(\underline{\vartheta})$ μία παραμετρική συνάρτηση. Μία τυχαία μεταβλητή $Q = Q\left(\underline{X}, g(\underline{\vartheta})\right)$ καλείται αντιστρεπτή ποσότητα ή ποσότητα οδηγός, αν εξαρτάται από το $\underline{\vartheta}$ μόνο μέσω της $g(\underline{\vartheta})$ και η κατανομή της είναι ανεξάρτητη του $\underline{\vartheta}$.

Η μέθοδος αντιστρεπτής ποσότητας στοχεύει στην κατασκευή Δ.Ε. για τα οποία η πιθανότητα $P_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})\right]$ δεν εξαρτάται από το $\underline{\vartheta}$. Συνεπώς, για αυτά τα Δ.Ε. θα ισχύει

$$P_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})\right] = 1-\alpha,\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta.$$

Μέθοδος Αντιστρεπτής Ποσότητας:

1. Προσδιορίζουμε μία "καλή" εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ (Ε.Μ.Π. ή Α.Ε.Ε.Δ.) ή μία επαρκή στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$.
2. Βρίσκουμε την κατανομή της $T(\underline{X})$.
3. Με βάση την $T(\underline{X})$ και την κατανομή της βρίσκουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα $Q = Q\left(\underline{X}, g(\underline{\vartheta})\right)$.
4. Προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε $P(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = 1-\alpha$.
5. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $g(\underline{\vartheta})$ και καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής $L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})$.

Συνεπώς, το ζητούμενο $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ είναι το $[L(\underline{X}), U(\underline{X})]$.

Ορισμός 4.3. Αν $Z \sim N(0,1)$ και $X \sim \chi^2_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}} \sim t_n.$$

Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την κατανομή t (ή κατανομή t του Student) με n βαθμούς ελευθερίας.

Ορισμός 4.4. Αν $X \sim \chi^2_n$ και $Y \sim \chi^2_m$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$F = \frac{X}{n} \cdot \frac{m}{Y} \sim F_{n,m}.$$

Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή F ακολουθεί την κατανομή F του Snedecor (ή κατανομή Fisher - Snedecor) με n και m βαθμούς ελευθερίας. Για ιστορικούς λόγους αναφέρουμε ότι την κατανομή F του Snedecor την ανέπτυξε ο G.W. Snedecor και την ονόμασε F προς τιμήν του R. Fisher.

Σημείωση 4.1. i. Αν $(X_n)_{n\geqslant 1}$ με $X_n \sim t_n$ για $n \geqslant 1$, τότε $X_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$.

ii. Αν $T \sim t_n$, τότε $F = T^2 \sim F_{1,n}$.

iii. Αν $F_1 \sim F_{n,m}$, τότε $F_2 = \frac{1}{F_1} \sim F_{m,n}$.

Σημείωση 4.2. Το πιο δύσκολο βήμα κατασκευής ενός Δ.Ε. σύμφωνα με τη μέθοδο αντιστρεπτής ποσότητας είναι η εύρεση της ίδιας της αντιστρεπτής ποσότητας, αφού η μέθοδος δε μας προσφέρει κάποια μέθοδο υπολογισμού της. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ σε μία ποσότητα οδηγό $Q\left(\underline{X}, g(\underline{\vartheta})\right)$ που να ακολουθεί μία από τις εξής τέσσερις κατανομές που είναι ανεξάρτητες από την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$: $N(0,1)$, χ^2_n, t_n, $F_{n,m}$. Για τον μετασχηματισμό αυτό, χρησιμοποιούμε είτε κάποια από τις ιδιότητες της κατανομής χ^2 που είδαμε στη σημείωση 3.7 είτε τους ορισμούς των κατανομών t_n, $F_{n,m}$. Προφανώς, η επιλογή κατάλληλης αντιστρεπτής ποσότητας δεν είναι μοναδική.

Σημείωση 4.3. Συνοψίζουμε τις βασικές περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται οι παραπάνω τέσσερις κατανομές για την κατασκευή Δ.Ε.

- Κατανομή $N(0,1)$:
  - Δ.Ε. για τη μέση τιμή της Κανονικής κατανομής, όταν η διασπορά της είναι γνωστή.
  - Ασυμπτωτικά Δ.Ε. για μία άγνωστη παράμετρο κάποιας κατανομής, κάνοντας χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος.
- Κατανομή χ^2_n:
  - Δ.Ε. για τη διασπορά της Κανονικής κατανομής είτε η μέση τιμή είναι γνωστή είτε άγνωστη.
  - Δ.Ε. για μία άγνωστη θετική παράμετρο κάποιας συνεχούς κατανομής με στήριγμα ανεξάρτητο της άγνωστης παραμέτρου.
- Κατανομή t_n: Δ.Ε. για τη μέση τιμή της Κανονικής κατανομής, όταν η διασπορά της είναι άγνωστη.
- Κατανομή $F_{n,m}$:
  - Δ.Ε. για τον λόγο των διασπορών δύο ανεξάρτητων Κανονικών κατανομών είτε η μέση τιμή είναι γνωστή είτε άγνωστη.
  - Δ.Ε. για τον λόγο δύο άγνωστων θετικών παραμέτρων δύο ανεξάρτητων συνεχών κατανομών με στηρίγματα ανεξάρτητα των αγνώστων παραμέτρων.

Σημείωση 4.4. i. Στην περίπτωση όπου έχουμε τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(a, \vartheta)$, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{X_{(n)}-a}{\vartheta-a}$ και δείχνουμε ότι $F_Q(y) = y^n$ για $y \in (0,1)$, δηλαδή $Q \sim \mathrm{Beta}(n,1)$.

ii. Στην περίπτωση όπου έχουμε τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(\vartheta, b)$, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{b-X_{(1)}}{b-\vartheta}$ και δείχνουμε ότι $F_Q(y) = y^n$ για $y \in (0,1)$, δηλαδή $Q \sim \text{Beta}(n,1)$.

Ορισμός 4.5. Έστω τ.μ. X με στήριγμα S και συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$. Ονομάζουμε άνω α-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της X το σημείο c για το οποίο ισχύει $P(X > c) = \alpha$ ή ισοδύναμα $F_X(c) = P(X \leqslant c) = 1 - \alpha$.

Σημείωση 4.5. Αν η κατανομή της X είναι (απόλυτα) συνεχής, τότε η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο S, άρα και αντιστρέψιμη. Δηλαδή ισχύει ότι $c = F_X^{-1}(1-a)$. Σε αυτήν την περίπτωση, το άνω α-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της X είναι το σημείο του S που "αφήνει" δεξιά του εμβαδόν ίσο με α στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X.

Συμβολίζουμε τα άνω α-ποσοστιαία σημεία των κατανομών $N(0,1)$, χ^2_n, t_n και $F_{n,m}$ με Z_α, $\chi^2_{n;\alpha}$, $t_{n;\alpha}$ και $F_{n,m;\alpha}$ αντίστοιχα. Σε όλα τα εγχειρίδια στατιστικής υπάρχουν συγκεντρωτικοί πίνακες με τις τιμές των άνω α-ποσοστιαίων σημείων αυτών των τεσσάρων κατανομών για διάφορες τιμές των α, n και m.

Οι κατανομές $N(0,1)$ και t_n είναι συμμετρικές γύρω από το 0, δηλαδή για τις συναρτήσεις κατανομής τους ισχύει ότι $F(c) = 1 - F(-c)$. Άρα, για τα άνω ποσοστιαία σημεία τους ισχύει $P(X > -c) = \alpha \Leftrightarrow F(c) = \alpha \Leftrightarrow P(X > c) = 1 - \alpha$. Δηλαδή, το c είναι το άνω $(1-\alpha)$-ποσοστιαίο σημείο τους αν και μόνο αν το $-c$ είναι το άνω α-ποσοστιαίο σημείο τους. Με άλλα λόγια, ισχύει ότι $Z_{1-\alpha} = -Z_a$ και $t_{n;1-\alpha} = -t_{n;\alpha}$. Σε αντιδιαστολή, οι κατανομές χ^2 και F έχουν στήριγμα το $(0,\infty)$, οπότε δεν παρουσιάζουν κάποια συμμετρία.

Σημείωση 4.6. Η μέθοδος αντιστρεπτής ποσότητας δεν προσδιορίζει κάποιον συγκεκριμένο τρόπο υπολογισμού των σταθερών c_1, c_2. Θεωρητικά, η επιλογή αυτή θα μπορούσε να γίνει με άπειρους τρόπους. Στην πράξη, όμως, οι σταθερές c_1, c_2 συνήθως επιλέγονται με έναν από τους εξής δύο τρόπους:

- $P(Q < c_1) = P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ Δ.Ε. ίσων ουρών.
- Ελαχιστοποίηση του μήκους $\ell(\underline{X}) = U(\underline{X}) - L(\underline{X})$ ή του μέσου μήκους $E\left[\ell(\underline{X})\right] \Rightarrow$ Δ.Ε. ελαχίστου μήκους.

Τα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους είναι καλύτερα από τα Δ.Ε. ίσων ουρών, όμως, στην πράξη, είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστούν. Επίσης, σε κάποιες περιπτώσεις, ενδέχεται αυτά τα δύο είδη Δ.Ε. να ταυτίζονται.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι συνεχής, οι σταθερές c_1, c_2 των Δ.Ε. ίσων ουρών επιλέγονται με τέτοιον τρόπο, ώστε το c_1 να "αφήνει" εμβαδόν $\frac{\alpha}{2}$ αριστερά του και το c_2 να "αφήνει" εμβαδόν $\frac{\alpha}{2}$ δεξιά του στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Q, οπότε "περισσεύει" εμβαδόν $1-\alpha$ μεταξύ των σταθερών c_1, c_2, όπως θέλαμε.

Με άλλα λόγια, το c_1 επιλέγεται ως το άνω $(1-\frac{\alpha}{2})$-ποσοστιαίο σημείο, ενώ το c_2 ως το άνω $\frac{\alpha}{2}$-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της Q.

Παράδειγμα 4.1. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim U(p,\vartheta)$ με $p\in\mathbb{R}$ γνωστό και $\vartheta > p$. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ με συνάρτηση κατανομής $F_T(t) = [F_{X_1}(t)]^n = \left(\frac{t-p}{\vartheta-p}\right)^n$ για $t\in(p,\vartheta)$. Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{X_{(n)}-p}{\vartheta-p}$. Τότε, για $y\in(0,1)$, έχουμε

$$F_Q(y) = P\left[\frac{X_{(n)}-p}{\vartheta-p} \leqslant y\right] = F_T\left((\vartheta-p)y+p\right) = \left[\frac{(\vartheta-p)y+p-p}{\vartheta-p}\right]^n = y^n.$$

Για το Δ.Ε. ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες, ώστε

$$P(Q<c_1) = F_Q(c_1) = c_1^n = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{και}$$

$$P(Q>c_2) = 1-F_Q(c_2) = 1-c_2^n = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(n)}-p}{\vartheta-p} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{c_2} \leqslant \frac{\vartheta-p}{X_{(n)}-p} \leqslant \frac{1}{c_1} \Leftrightarrow$$

$$\left[X_{(n)}-p\right]\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} + p \leqslant \vartheta \leqslant \left[X_{(n)}-p\right]\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} + p. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.2. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ γνωστό και $F(x;\vartheta) = 1-e^{-\lambda(x-\vartheta)}$, $x\geqslant\vartheta$. Η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ με $F_T(t) = 1-[1-F_X(t)]^n = 1-e^{-n\lambda(t-\vartheta)}$ για $t\geqslant\vartheta$. Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = X_{(1)}-\vartheta$. Τότε, για $y\geqslant 0$, έχουμε

$$F_Q(y) = F_T\left(y+\vartheta\right) = 1-e^{-n\lambda y} \Rightarrow Q\sim \mathrm{Exp}(n\lambda).$$

Για το Δ.Ε. ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες, ώστε

$$P(Q<c_1) = 1-e^{-n\lambda c_1} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow -n\lambda c_1 = \log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{n\lambda}\log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{και} \quad P(Q>c_2) = e^{-n\lambda c_2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow -n\lambda c_2 = \log\frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{n\lambda}\log\frac{\alpha}{2}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant X_{(1)}-\vartheta \leqslant c_2 \Leftrightarrow X_{(1)} + \frac{1}{n\lambda}\log\frac{\alpha}{2} \leqslant \vartheta \leqslant X_{(1)} + \frac{1}{n\lambda}\log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right). \quad \square$$

Παράδειγμα 4.3. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{Pareto}(\vartheta,\lambda)$ με $\lambda>0$ γνωστό, $\vartheta>0$ και $F_{X_i}(x) = 1-\left(\frac{\vartheta}{x}\right)^\lambda$, $x\geqslant\vartheta$. Γνωρίζουμε ότι η $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ με $F_T(t) = 1 - [1 - F_{X_1}(t)]^n = 1 - \left(\frac{\vartheta}{t}\right)^{n\lambda}$ για $t \geqslant \vartheta$, δηλαδή $T \sim \text{Pareto}(\vartheta, n\lambda)$. Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{X_{(1)}}{\vartheta}$. Τότε, για $y \geqslant 1$, έχουμε

$$F_Q(y) = P\left[\frac{X_{(1)}}{\vartheta} \leqslant y\right] = F_T(\vartheta y) = 1 - \frac{\vartheta^{n\lambda}}{\vartheta^{n\lambda} y^{n\lambda}} = 1 - \frac{1}{y^{n\lambda}} \Rightarrow Q \sim \text{Pareto}(1, n\lambda).$$

Για το Δ.Ε. ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες, ώστε

$$P(Q < c_1) = F_Q(c_1) = 1 - \frac{1}{c_1^{n\lambda}} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n\lambda}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = 1 - F_Q(c_2) = \frac{1}{c_2^{n\lambda}} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n\lambda}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(1)}}{\vartheta} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{c_2} \leqslant \frac{\vartheta}{X_{(1)}} \leqslant \frac{1}{c_1} \Leftrightarrow X_{(1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n\lambda}} \leqslant \vartheta \leqslant X_{(1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.4. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Beta}(1, \vartheta)$ με άγνωστη παράμετρο $\vartheta > 0$ και $f(x;\vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1}$, $x \in (0,1)$. Στο παράδειγμα 3.11 (σελίδα 30) υπολογίσαμε ότι $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \log\frac{1}{1-X_i} \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να πάρουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\vartheta T \sim \chi^2_{2n}$. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant 2\vartheta T \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-X_i}} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-X_i}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.5. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Weibull}(p, \vartheta)$ με $p > 0$ γνωστό, $\vartheta > 0$ και $f(x;\vartheta) = p\vartheta x^{p-1} e^{-\vartheta x^p}$, $x > 0$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p$ είναι επαρκής για το ϑ. Θα υπολογίσουμε την κατανομή της $W_i = X_i^p$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $w > 0$, έχουμε

$$F_{W_i}(w) = P\left(X_i^p \leqslant w\right) = P\left(X_i \leqslant w^{\frac{1}{p}}\right) = F_{X_i}\left(w^{\frac{1}{p}}\right) \Rightarrow$$

$$f_{W_i}(w) = \frac{1}{p} w^{\frac{1}{p}-1} f_{X_i}\left(w^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p} w^{\frac{1}{p}-1} \cdot p\vartheta w^{1-\frac{1}{p}} e^{-\vartheta w} = \vartheta e^{-\vartheta w}.$$

Δηλαδή $W_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow T = \sum_{i=1}^{n} X_i^p \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Καταλήγουμε πάλι στην αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\vartheta T \sim \chi^2_{2n}$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}$ και $c_2 = \chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}$. Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant 2\vartheta T \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.6. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Laplace}(\mu, \vartheta)$ με $\mu \in \mathbb{R}$ γνωστό, $\vartheta > 0$ και $f(x;\vartheta) = \frac{\vartheta}{2} e^{-\vartheta|x-\mu|}$, $x \in \mathbb{R}$. Η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$ είναι επαρκής για το ϑ. Στο παράδειγμα 3.22 (σελίδα 38) βρήκαμε ότι $|X_i - \mu| \sim \text{Exp}(\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα $T = \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Καταλήγουμε πάλι στην αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\vartheta T \sim \chi^2_{2n}$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}$ και $c_2 = \chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}$. Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant 2\vartheta T \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} |X_i - \mu|} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} |X_i - \mu|}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.7. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta > 0$, $p \in \mathbb{R}$ γνωστό και $F(x;\vartheta) = 1 - e^{-\vartheta(x-p)}$, $x > p$. Προκειμένου να βρούμε κατάλληλη αντιστρεπτή ποσότητα, θα υπολογίσουμε πρώτα την Ε.Μ.Π. του ϑ

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \vartheta^n \exp\left\{-\vartheta \sum_{i=1}^{n} (x_i - p)\right\} \Rightarrow \ell(\vartheta|\underline{x}) = n \log \vartheta - \vartheta \sum_{i=1}^{n} (x_i - p) \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x}) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^{n} (x_i - p) = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - p)} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Με αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε την ιδέα να υπολογίσουμε την κατανομή της $W_i = X_i - p$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $w > 0$, έχουμε $F_{W_i}(w) = F_{X_i}(w + p) = 1 - e^{-\vartheta w}$. Δηλαδή $W_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα $T = \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Καταλήγουμε πάλι στην αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\vartheta T \sim \chi^2_{2n}$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}$ και $c_2 = \chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}$.

Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant 2\vartheta T \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - p)} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - p)}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.8. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(p, \vartheta)$ με $p > 0$ γνωστό, $\vartheta > 0$, $f_{X_i}(x) = \frac{\vartheta \cdot p^\vartheta}{x^{\vartheta+1}}$ και $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{p}{x}\right)^\vartheta$, $x \geqslant p$. Προκειμένου να βρούμε κατάλληλη αντιστρεπτή ποσότητα, θα υπολογίσουμε πρώτα την Ε.Μ.Π. του ϑ

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \vartheta^n \cdot p^{n\vartheta} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\vartheta-1} \Rightarrow \ell(\vartheta|\underline{x}) = n \log\vartheta + n\vartheta \log p - (\vartheta+1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x}) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^{n}(\log x_i - \log p) = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \log\frac{X_i}{p}} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Με αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε την ιδέα να υπολογίσουμε την κατανομή της $W_i = \log\frac{X_i}{p}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $w > 0$, έχουμε

$$F_{W_i}(w) = P\left(\log\frac{X_i}{p} \leqslant w\right) = P\left(X_i \leqslant e^{w+\log p}\right) = F_{X_i}(pe^w) = 1 - \frac{p^\vartheta}{p^\vartheta e^{\vartheta w}} = 1 - e^{-\vartheta w}.$$

Δηλαδή $W_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα $T = \sum\limits_{i=1}^{n} \log\frac{X_i}{p} \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Καταλήγουμε πάλι στην αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\vartheta T \sim \chi^2_{2n}$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}$ και $c_2 = \chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}$. Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant 2\vartheta T \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{X_i}{p}} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{X_i}{p}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.9. Έστω δύο ανεξάρτητα δείγματα $X_1, \ldots, X_n$ και $Y_1, \ldots, Y_m$ από την Εκθετική κατανομή με παραμέτρους ϑ_1 και ϑ_2 αντίστοιχα και θέλουμε να κατασκευάσουμε Δ.Ε. για το πηλίκο $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ σε συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $T_1(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_1)$ και $T_2(\underline{Y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} Y_i \sim \text{Gamma}(m, \vartheta_2)$ είναι επαρκείς για τις παραμέτρους ϑ_1 και ϑ_2 αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, βρίσκουμε ότι $W_1 = 2\vartheta_1 T_1 \sim \chi^2_{2n}$ και $W_2 = 2\vartheta_2 T_2 \sim \chi^2_{2m}$. Αφού τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι και οι τυχαίες μεταβλητές W_1 και W_2 είναι ανεξάρτητες. Συνδυάζοντας τις τυχαίες μεταβλητές W_1 και W_2, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα

$$Q = \frac{W_1}{2n} \cdot \frac{2m}{W_2} = \frac{m\vartheta_1 T_1}{n\vartheta_2 T_2} = \frac{\vartheta_1 \overline{X}}{\vartheta_2 \overline{Y}} \sim F_{2n,2m}.$$

Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής F για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = F_{2n,2m;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = F_{2n,2m;\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{m\vartheta_1 T_1}{n\vartheta_2 T_2} \leqslant c_2 \Leftrightarrow F_{2n,2m;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} \leqslant \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \leqslant F_{2n,2m;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}. \quad \square$$

4.3 Δ.Ε. για Κανονικό Πληθυσμό

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε το πρόβλημα της εύρεσης διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους ενός κανονικού πληθυσμού. Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι διαθέτουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή ϑ_1 και διασπορά ϑ_2 και θέλουμε να κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους ϑ_1 και ϑ_2 σε συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$. Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις τις οποίες παρουσιάζουμε στα επόμενα παραδείγματα αυτής της παραγράφου.

Παράδειγμα 4.10. Η διασπορά $\vartheta_2 = \sigma^2$ είναι γνωστή. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\overline{X} \sim N\left(\vartheta_1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ είναι η Ε.Μ.Π. του ϑ_1. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να ορίσουμε την αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{\overline{X}-\vartheta_1}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$ για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = Z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X} - \vartheta_1}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant c_2 \Leftrightarrow -c_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \vartheta_1 - \overline{X} \leqslant -c_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \vartheta_1 \leqslant \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

Παρατήρηση 4.1. Παρατηρούμε ότι το μήκος του παραπάνω διαστήματος εμπιστοσύνης είναι $\ell = 2Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, το όποιο δεν εξαρτάται από τα δεδομένα $x_1, \ldots, x_n$. Αν θέλαμε να μικρύνουμε το μήκος αυτού του διαστήματος εμπιστοσύνης, τότε θα είχαμε τις εξής τρεις επιλογές:

- $\ell \downarrow \Leftrightarrow \sigma \downarrow$, δηλαδή το μήκος του Δ.Ε. μικραίνει όσο μικραίνει κι η διασπορά των δεδομένων, το οποίο είναι λογικό.
- $\ell \downarrow \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow \Leftrightarrow n \uparrow$, δηλαδή το μήκος του Δ.Ε. μικραίνει όσο μεγαλώνει το πλήθος των δεδομένων, το οποίο είναι επίσης λογικό.
- $\ell \downarrow \Leftrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \downarrow \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} \downarrow \Leftrightarrow 1 - \alpha \downarrow$, αφού η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής $\Phi(x)$ της κατανομής $N(0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα. Δηλαδή, το μήκος του Δ.Ε. μικραίνει όσο μικραίνει κι ο συντελεστής εμπιστοσύνης του. Με άλλα λόγια, όσο μεγαλύτερη ''εμπιστοσύνη'' θέλουμε να έχουμε ότι η πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου θα περιλαμβάνεται μέσα στο Δ.Ε., τόσο μεγαλύτερο θα πρέπει να είναι το Δ.Ε. που θα κατασκευάσουμε, το οποίο είναι επίσης λογικό.

Παράδειγμα 4.11. Η διασπορά $\vartheta_2 = \sigma^2 = 4$ είναι γνωστή. Να προσδιορισθεί το ελάχιστο μέγεθος δείγματος n, ώστε το 99% Δ.Ε. για τη μέση τιμή ϑ_1 να έχει μήκος το πολύ $d = 0.1$.
Έχουμε $\alpha = 0.01$. Βρίσκουμε στον πίνακα με τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$ ότι $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.005} = 2.58$. Συνεπώς, θέλουμε

$$\ell = 2Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant d \Leftrightarrow n \geqslant 4Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma^2}{d^2} = 10650.24.$$

Επομένως, το ελάχιστο μέγεθος δείγματος που θα χρειαστούμε είναι $n = 10651$.

□

Παράδειγμα 4.12. Οι παράμετροι ϑ_1 και ϑ_2 είναι άγνωστες και θέλουμε Δ.Ε. για τη μέση τιμή ϑ_1. Γνωρίζουμε πάλι ότι η στατιστική συνάρτηση $\overline{X} \sim N\left(\vartheta_1, \frac{\vartheta_2}{n}\right)$ είναι η Ε.Μ.Π. του ϑ_1. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση, η στατιστική συνάρτηση $Z = \frac{\overline{X} - \vartheta_1}{\sqrt{\vartheta_2}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$ δεν αποτελεί αντιστρεπτή ποσότητα, επειδή εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ_2. Χρησιμοποιώντας πάλι τη σημείωση 3.7, βλέπουμε ότι $V = \frac{(n-1)S^2}{\vartheta_2} \sim \chi^2_{n-1}$. Συνδυάζοντας τις τυχαίες μεταβλητές Z και V, οι οποίες είναι ανεξάρτητες, σύμφωνα με το θεώρημα Basu, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα Q, η οποία θα ακολουθεί την κατανομή t με τόσους βαθμούς ελευθερίας όσους κι η κατανομή της V. Πράγματι,

$$Q = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} = \frac{\overline{X} - \vartheta_1}{\sqrt{\vartheta_2}}\sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{\vartheta_2}}{S} = \frac{\overline{X} - \vartheta_1}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}.$$

Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής t για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X} - \vartheta_1}{S}\sqrt{n} \leqslant c_2 \Leftrightarrow -c_2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \vartheta_1 - \overline{X} \leqslant -c_1 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{X} - t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \vartheta_1 \leqslant \overline{X} + t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.13. Η μέση τιμή $\vartheta_1 = \mu$ είναι γνωστή. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ είναι επαρκής για το ϑ_2. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να ορίσουμε την αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{T}{\vartheta_2} \sim \chi^2_n$. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{T}{\vartheta_2} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \frac{1}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.14. Οι παράμετροι ϑ_1 και ϑ_2 είναι άγνωστες και θέλουμε Δ.Ε. για τη διασπορά ϑ_2. Σε αυτήν την περίπτωση, γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ_2. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να ορίσουμε την αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{(n-1)S^2}{\vartheta_2} \sim \chi^2_{n-1}$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι

$$c_1 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\vartheta_2} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \frac{1}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \quad \square$$

4.4 Δ.Ε. για Ανεξάρτητους Κανονικούς Πληθυσμούς

Στην παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι διαθέτουμε δύο ανεξάρτητα δείγματα $X_1, \ldots, X_n$ και $Y_1, \ldots, Y_m$ από τις Κανονικές κατανομές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

αντίστοιχα και θέλουμε να κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\vartheta_1 = \mu_1 - \mu_2$ των δύο μέσων τιμών και το πηλίκο $\vartheta_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ των δύο διασπορών σε συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$. Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις τις οποίες παρουσιάζουμε στα επόμενα παραδείγματα αυτής της παραγράφου.

Παράδειγμα 4.15. Οι διασπορές σ_1^2, σ_2^2 είναι γνωστές. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right)$ και $\overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$ είναι οι Ε.Μ.Π. των μ_1 και μ_2 αντίστοιχα. Αφού τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι και οι τυχαίες μεταβλητές $\overline{X}$ και $\overline{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να ορίσουμε την αντιστρεπτή ποσότητα

$$Q = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1).$$

Ακριβώς όπως στο παράδειγμα 4.10 (σελίδα 66), υπολογίζουμε ότι

$$\overline{X} - \overline{Y} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \leqslant \mu_1 - \mu_2 \leqslant \overline{X} - \overline{Y} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.16.* Οι διασπορές $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ είναι άγνωστες και ίσες μεταξύ τους. Γνωρίζουμε και πάλι ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ και $\overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m}\right)$ είναι οι Ε.Μ.Π. των μ_1 και μ_2 αντίστοιχα. Αφού τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι και οι τυχαίες μεταβλητές $\overline{X}$ και $\overline{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}\right)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1).$$

Σε αυτήν την περίπτωση όμως, η τυχαία μεταβλητή Z δεν αποτελεί αντιστρεπτή ποσότητα, επειδή εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο σ^2. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ και $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2$ είναι δύο Α.Ε.Ε.Δ. του σ^2 βασισμένες στα δύο ανεξάρτητα δείγματα $\underline{X}$ και $\underline{Y}$ αντίστοιχα. Πάλι σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, βλέπουμε ότι $V_1 = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ και $V_2 = \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$. Αφού τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι και οι τυχαίες μεταβλητές V_1 και V_2 είναι ανεξάρτητες, οπότε από σημείωση 3.7, προκύπτει ότι $W = V_1 + V_2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}$. Για λόγους ευκολίας, ορίζουμε επίσης τη συγχωνευμένη διασπορά (pooled variance) $S_p^2 = \frac{\sigma^2 W}{n+m-2} = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$. Συνδυάζοντας τις τυχαίες μεταβλητές Z και W, οι οποίες είναι ανεξάρτητες, σύμφωνα με το θεώρημα Basu, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα Q, η οποία θα ακολουθεί την κατανομή t με τόσους βαθμούς ελευθερίας όσους κι η κατανομή της W. Πράγματι,

$$Q = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n+m-2}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \cdot \frac{\sigma}{S_p} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}.$$

Ακριβώς όπως στο παράδειγμα 4.12 (σελίδα 67), υπολογίζουμε ότι

$$\overline{X} - \overline{Y} - t_{n+m-2;\frac{\alpha}{2}} \cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \leqslant \mu_1 - \mu_2 \leqslant \overline{X} - \overline{Y} + t_{n+m-2;\frac{\alpha}{2}} \cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.17. Οι μέσες τιμές μ_1, μ_2 είναι γνωστές. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι οι $T_1(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2$ και $T_2(\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \mu_2)^2$ είναι επαρκείς για το σ_1^2 και το σ_2^2 αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να ορίσουμε $W_1 = \frac{T_1}{\sigma_1^2} \sim \chi_n^2$ και $W_2 = \frac{T_2}{\sigma_2^2} \sim \chi_m^2$. Αφού τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα, συμπεραίνουμε ότι και οι τυχαίες μεταβλητές W_1 και W_2 είναι ανεξάρτητες. Συνδυάζοντας τις W_1 και W_2, ορίζουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα

$$Q = \frac{W_2}{m} \cdot \frac{n}{W_1} = \frac{nT_2}{mT_1} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{m,n}.$$

Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής F για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = F_{m,n;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = F_{m,n;\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$F_{m,n;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{mT_1(\underline{X})}{nT_2(\underline{Y})} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqslant F_{m,n;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{mT_1(\underline{X})}{nT_2(\underline{Y})}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.18. Οι μέσες τιμές μ_1, μ_2 είναι άγνωστες. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ και $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2$ είναι οι Α.Ε.Ε.Δ. των σ_1^2 και σ_2^2 αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, μπορούμε να ορίσουμε $W_1 = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n-1}^2$ και $W_2 = \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{m-1}^2$. Αφού τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι και οι τυχαίες μεταβλητές W_1 και W_2 είναι ανεξάρτητες. Συνδυάζοντας τις τυχαίες μεταβλητές W_1 και W_2, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα

$$Q = \frac{W_2}{m-1} \cdot \frac{n-1}{W_1} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{m-1,n-1}.$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι

$$F_{m-1,n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqslant F_{m-1,n-1;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}. \quad \square$$

4.5 Ασυμπτωτικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Στην περίπτωση όπου έχουμε δείγμα αρκετά "μεγάλου" μεγέθους και αντιμετωπίζουμε δυσκολία στην εύρεση κατάλληλης αντιστρεπτής ποσότητας, όπως συμβαίνει συχνά όταν η κατανομή του δείγματος είναι διακριτή, ή στην επίλυση της ανισότητας $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $g(\underline{\vartheta})$, καταφεύγουμε στην κατασκευή ασυμπτωτικών διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Ορισμός 4.6. Έστω τ.δ. $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta$. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, ορίζουμε ως $100(1-\alpha)\%$ ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ ένα τυχαίο διάστημα της μορφής $I_n(\underline{X}) = [L_n(\underline{X}), U_n(\underline{X})]$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{n\to\infty} P_{\underline{\vartheta}}\left[L_n(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U_n(\underline{X})\right] = 1-\alpha, \quad \forall \underline{\vartheta} \in \Theta.$$

Σημείωση 4.7. Σε αντίθεση με τα ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης, στα αυμπτωτικά διαστήματα εμπιστοσύνης δεν είναι απαραίτητη η εύρεση κατάλληλης αντιστρεπτής ποσότητας. Αρκεί η εύρεση μίας τυχαίας μεταβλητής $Q = Q\left(\underline{X}, g(\underline{\vartheta})\right)$ η οποία εξαρτάται από το $\underline{\vartheta}$ μόνο μέσω της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ και συγκλίνει κατά κατανομή σε μία άλλη τυχαία μεταβλητή με κατανομή ανεξάρτητη της άγνωστης παραμέτρου ϑ. Για τον σκοπό αυτό, κάνουμε χρήση των ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων της παραγράφου 3.8 και, κυρίως, του κεντρικού οριακού θεωρήματος σε συνδυασμό με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, το θεώρημα Slutsky και το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης.

Παράδειγμα 4.19. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Γνωρίζουμε ότι $E(X_1) = \frac{\vartheta}{2}$ και $\text{Var}(X_1) = \frac{\vartheta^2}{12}$. Από κεντρικό οριακό θεώρημα, έπεται ότι

$$Q = \frac{\overline{X}_n - \frac{\vartheta}{2}}{\frac{\vartheta}{\sqrt{12}}}\sqrt{n} = 2\sqrt{3n}\left(\frac{\overline{X}_n}{\vartheta} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{d} Z = N(0,1).$$

Η τυχαία μεταβλητή Q ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις που παραθέσαμε στην παραπάνω σημείωση, άρα την αξιοποιούμε για την κατασκευή του ασυμπτωτικού Δ.Ε. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$ για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$\lim_{n\to\infty} P(Q < c_1) = P(Z < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Q > c_2) = P(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = Z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το ασυμπτωτικό Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant 2\sqrt{3n}\left(\frac{\overline{X}_n}{\vartheta} - \frac{1}{2}\right) \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{c_1 + \sqrt{3n}}{2\sqrt{3n}} \leqslant \frac{\overline{X}_n}{\vartheta} \leqslant \frac{c_2 + \sqrt{3n}}{2\sqrt{3n}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{3n}}{\sqrt{3n} + Z_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \overline{X}_n \leqslant \vartheta \leqslant \frac{2\sqrt{3n}}{\sqrt{3n} - Z_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \overline{X}_n. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.20. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta_1, \vartheta_2)$ και θέλουμε Δ.Ε. για τη μέση τιμή ϑ_1. Γνωρίζουμε ότι $Z = \frac{\overline{X}_n - \vartheta_1}{\sqrt{\vartheta_2}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$. Στο παράδειγμα 3.24 (σελίδα 45) δείξαμε ότι $S_n^2 \xrightarrow{p} \vartheta_2$. Σύμφωνα με το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, παίρνουμε ότι $S_n \xrightarrow{p} \sqrt{\vartheta_2}$. Άρα $\frac{\sqrt{\vartheta_2}}{S_n} \xrightarrow{p} 1$. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Slutsky, παίρνουμε ότι

$$Q = Z \cdot \frac{\sqrt{\vartheta_2}}{S_n} = \frac{\overline{X}_n - \vartheta_1}{S_n}\sqrt{n} \xrightarrow{d} W \sim N(0,1).$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X}_n - \vartheta_1}{S_n}\sqrt{n} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \overline{X}_n - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \vartheta \leqslant \overline{X}_n + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.21. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Poisson}(\vartheta)$ και θέλουμε Δ.Ε. για το ϑ. Γνωρίζουμε ότι $E(X_1) = \text{Var}(X_1) = \vartheta$. Από κεντρικό οριακό θεώρημα, έπεται ότι $W = \frac{\overline{X}_n - \vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z_1 = N(0,1)$. Η τυχαία μεταβλητή W δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της σημείωσης 4.7, αφού εξαρτάται από το ϑ και μέσω της ποσότητας $\sqrt{\vartheta}$. Κάνουμε χρήση του ασθενούς νόμου μεγάλων αριθμών σε συνδυασμό με το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης για να την απαλείψουμε. Έπεται ότι $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \vartheta \Rightarrow \sqrt{\overline{X}_n} \xrightarrow{p} \sqrt{\vartheta} \Rightarrow \sqrt{\frac{\vartheta}{\overline{X}_n}} \xrightarrow{p} 1$. Τελικά, από θεώρημα Slutsky συμπεραίνουμε ότι

$$Q = W \cdot \sqrt{\frac{\vartheta}{\overline{X}_n}} = \frac{\overline{X}_n - \vartheta}{\sqrt{\overline{X}_n}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z_2 \sim N(0,1).$$

Επομένως, το ασυμπτωτικό Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X}_n - \vartheta}{\sqrt{\overline{X}_n}}\sqrt{n} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \overline{X}_n - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}} \leqslant \vartheta \leqslant \overline{X}_n + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}.$$

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι το ασυμπτωτικό Δ.Ε. παίρνει τιμές πάνω στον παραμετρικό χώρο $\Theta = (0, \infty)$, ορίζουμε

$$I_n(\underline{X}) = \left[\max\left\{\overline{X}_n - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}},\ 0\right\}, \overline{X}_n + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.22. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim$ Bernoulli(ϑ) και θέλουμε Δ.Ε. για το ϑ. Γνωρίζουμε ότι $E(X_1) = \vartheta$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \vartheta(1-\vartheta)$. Από κεντρικό οριακό θεώρημα, έπεται ότι $W = \frac{\overline{X}_n - \vartheta}{\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z_1 = N(0,1)$. Η τυχαία μεταβλητή W δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της σημείωσης 4.7, αφού εξαρτάται από το ϑ και μέσω της ποσότητας $\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)}$. Έχουμε

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \vartheta \Rightarrow \sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)} \xrightarrow{p} \sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} \Rightarrow \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}} \xrightarrow{p} 1 \Rightarrow$$

Τελικά, από θεώρημα Slutsky συμπεραίνουμε ότι

$$Q = W \cdot \sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}} = \frac{\overline{X}_n - \vartheta}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z_2 \sim N(0,1).$$

Επομένως, το ασυμπτωτικό Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X}_n - \vartheta}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\sqrt{n} \leqslant c_2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{X}_n - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} \leqslant \vartheta \leqslant \overline{X}_n + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}.$$

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι το ασυμπτωτικό Δ.Ε. παίρνει τιμές πάνω στον παραμετρικό χώρο $\Theta = (0,1)$, ορίζουμε

$$I_n(\underline{X}) = [\max\{L_n(\underline{X}),\ 0\}, \min\{U_n(\underline{X}),\ 1\}], \quad \text{όπου}$$

$$L_n(\underline{X}) = \max\left\{\overline{X}_n - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}},\ 0\right\} \quad \text{και}$$

$$U_n(\underline{X}) = \min\left\{\overline{X}_n + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}},\ 1\right\}. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.23.* Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in (0,1)$ και συνάρτηση πιθανότητας $f(x;\vartheta) = (1-\vartheta)\vartheta^x$, $x \in \{0,1,2,\ldots\}$. Θέλουμε Δ.Ε. για το ϑ. Γνωρίζουμε ότι $E(X_1) = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2}$. Από κεντρικό οριακό θεώρημα, έπεται ότι

$$W = \frac{\overline{X}_n - \frac{\vartheta}{1-\vartheta}}{\frac{\sqrt{\vartheta}}{1-\vartheta}}\sqrt{n} = \frac{\overline{X}_n + 1 - \frac{1}{1-\vartheta}}{\frac{\sqrt{\vartheta}}{1-\vartheta}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z_1 = N(0,1).$$

Η τυχαία μεταβλητή W δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της σημείωσης 4.7, αφού εξαρτάται από το ϑ και μέσω της ποσότητας $\frac{\sqrt{\vartheta}}{1-\vartheta}$. Έχουμε

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \Rightarrow \overline{X}_n + 1 \xrightarrow{p} \frac{1}{1-\vartheta} \Rightarrow \overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right) \xrightarrow{p} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)} \xrightarrow{p} \frac{\sqrt{\vartheta}}{1-\vartheta} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{\vartheta}}{1-\vartheta}}{\sqrt{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}} \xrightarrow{p} 1.$$

Τελικά, από θεώρημα Slutsky συμπεραίνουμε ότι

$$Q = W \cdot \frac{\frac{\sqrt{\vartheta}}{1-\vartheta}}{\sqrt{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}} = \frac{\overline{X}_n + 1 - \frac{1}{1-\vartheta}}{\sqrt{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z_2 \sim N(0,1).$$

Επομένως, το ασυμπτωτικό Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X}_n + 1 - \frac{1}{1-\vartheta}}{\sqrt{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}}\sqrt{n} \leqslant c_2 \Leftrightarrow$$

$$c_1\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}{n}} - \overline{X}_n - 1 \leqslant \frac{1}{\vartheta-1} \leqslant c_2\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}{n}} - \overline{X}_n - 1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{\overline{X}_n + 1 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}{n}}} \leqslant \vartheta \leqslant 1 - \frac{1}{\overline{X}_n + 1 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}{n}}}.$$

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι το ασυμπτωτικό Δ.Ε. παίρνει τιμές πάνω στον παραμετρικό χώρο $\Theta = (0,1)$, ορίζουμε

$$I_n(\underline{X}) = \left[\max\left\{L_n(\underline{X}),\ 0\right\}, \min\left\{U_n(\underline{X}),\ 1\right\}\right], \quad \text{όπου}$$

$$L_n(\underline{X}) = 1 - \frac{1}{\overline{X}_n + 1 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}{n}}} \quad \text{και}$$

$$U_n(\underline{X}) = 1 - \frac{1}{\overline{X}_n + 1 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}_n\left(\overline{X}_n+1\right)}{n}}}. \quad \square$$

Κεφάλαιο 5

Στατιστικοί Έλεγχοι Υποθέσεων

5.1 Εισαγωγή

Πολλές φορές στη στατιστική χρειάζεται να πάρουμε μία απόφαση σχετικά με το αν μία στατιστική υπόθεση που έχει διατυπωθεί είναι λανθασμένη ή όχι. Αυτή η στατιστική υπόθεση που πρέπει να ελεγχθεί ονομάζεται μηδενική υπόθεση και συμβολίζεται με H_0. Ο καθορισμός της μηδενικής υπόθεσης μας οδηγεί στη διατύπωση μίας εναλλακτικής υπόθεσης την οποία συμβολίζουμε με H_1. Η απόφαση που πρέπει να πάρουμε είναι αν θα απορρίψουμε ή όχι τη μηδενική υπόθεση H_0 έναντι της εναλλακτικής H_1 και η διαδικασία που μας οδηγεί στην απόφαση αυτή καλείται στατιστικός έλεγχος υποθέσεων.

Συγκεκριμένα, οι στατιστικές υποθέσεις H_0 και H_1 αφορούν την κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση κατανομής F που γνωρίζουμε ότι ανήκει σε μία οικογένεια συναρτήσεων κατανομής $\mathscr{F}$. Δηλαδή, οι H_0 και H_1 μπορούν να γραφούν στη μορφή $H_0 : F \in \mathscr{F}_0$ vs. $H_1 : F \in \mathscr{F}_1$, όπου $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{F}_1 = \varnothing$. Η απόφασή μας θα βασιστεί σε ένα δείγμα παρατηρήσεων $\underline{x}$ από την κατανομή F.

Ειδικότερα, στην παραμετρική στατιστική, η οικογένεια συναρτήσεων κατανομής $\mathscr{F}$ παίρνει τη μορφή $\mathscr{F}_{\underline{\vartheta}} = \{F(x; \underline{\vartheta}) : \underline{\vartheta} \in \Theta\}$, δηλαδή οι H_0 και H_1 αφορούν συγκεκριμένα την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ της κατανομής της X. Τότε, οι H_0 και H_1 μπορούν να γραφούν στη μορφή $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Ορισμός 5.1. Η στατιστική υπόθεση H_0 (αντίστοιχα και η H_1) καλείται απλή αν καθορίζει πλήρως την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X, δηλαδή αν το σύνολο $\Theta_0 = \{\underline{\vartheta}_0\}$ είναι μονοσύνολο. Διαφορετικά, καλείται σύνθετη υπόθεση.

Παράδειγμα 5.1.

- Ο $H_0 : X \sim N(0, 1)$ vs. $H_1 : X \sim \text{Laplace}(0, 1)$ είναι ένας έλεγχος απλής (υπόθεσης) έναντι απλής (υπόθεσης).
- Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε ο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ είναι ένας έλεγχος

σύνθετης έναντι σύνθετης, αφού οι H_0 και H_1 δεν καθορίζουν την παράμετρο σ^2 της κατανομής, δηλαδή $\Theta_0 = \{\mu_0\} \times (0, \infty)$ και $\Theta_1 = \{\mu_1\} \times (0, \infty)$.

- Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό, τότε ο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ είναι ένας έλεγχος απλής έναντι απλής, αφού $\Theta_0 = \{\mu_0\}$ και $\Theta_1 = \{\mu_1\}$.
- Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό, τότε ο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ είναι ένας έλεγχος απλής έναντι (αμφίπλευρης) σύνθετης, αφού $\Theta_0 = \{\mu_0\}$ και $\Theta_1 = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$.
- Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό, τότε ο $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$ είναι ένας έλεγχος (μονόπλευρης) σύνθετης έναντι (μονόπλευρης) σύνθετης, αφού $\Theta_0 = [\mu_0, \infty)$ και $\Theta_1 = (-\infty, \mu_0)$.

Ορισμός 5.2. Έλεγχος μίας στατιστικής υπόθεσης καλείται μία στατιστική συνάρτηση $\varphi(\underline{X}) : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ η οποία χρησιμοποιείται στη λήψη της απόφασης απόρριψης ή όχι μίας μηδενικής υπόθεσης H_0 έναντι μίας εναλλακτικής υπόθεσης H_1. Στην ειδική περίπτωση όπου

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{απορρίπτουμε την } H_0 \\ 0, & \text{δεν απορρίπτουμε την } H_0 \end{cases},$$

ο έλεγχος φ καλείται μη-τυχαιοποιημένος. Διαφορετικά, αν

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{απορρίπτουμε την } H_0 \\ \gamma, & \text{απορρίπτουμε την } H_0 \text{ με πιθανότητα } \gamma \in (0,1) \\ 0, & \text{δεν απορρίπτουμε την } H_0 \end{cases},$$

τότε ο έλεγχος φ καλείται τυχαιοποιημένος.

Ένας μη-τυχαιοποιημένος έλεγχος διαμερίζει τον επαγόμενο δειγματικό χώρο $\underline{X}(\Omega)$ του δείγματος $\underline{X}$ σε δύο υποσύνολα K και A, δηλαδή $\underline{X}(\Omega) = K \cup A$ με $K \cap A = \varnothing$, τέτοια ώστε

- Αν $\underline{x} \in K$, όπου $\underline{x}$ η παρατηρούμενη τιμή του δείγματος, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.
- Αν $\underline{x} \in A$, τότε δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Ορισμός 5.3. Το υποσύνολο K καλείται κρίσιμη περιοχή ή περιοχή απόρριψης του ελέγχου.

Ορισμός 5.4. Όταν πραγματοποιούμε έναν έλεγχο υποθέσεων, τότε μπορεί είτε να πάρουμε τη σωστή απόφαση είτε να διαπράξουμε ένα από τα εξής δύο σφάλματα:

- Σφάλμα Τύπου I: Απορρίπτουμε την H_0, ενώ αυτή ισχύει. Έχουμε

$$P(\text{Σφάλμα Τύπου I}) = P(\underline{X} \in K | H_0 \text{ ισχύει}) = P_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in K),\ \underline{\vartheta} \in \Theta_0.$$

- Σφάλμα Τύπου II: Δεν απορρίπτουμε την H_0, ενώ αυτή δεν ισχύει. Έχουμε

$$P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = P(\underline{X} \in A | H_0 \text{ δεν ισχύει}) = P_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in A),\ \underline{\vartheta} \in \Theta_1.$$

	Δεν απορρίπτουμε την H_0	Απορρίπτουμε την H_0
Ισχύει η H_0	True Negative	Σφάλμα Τύπου I
Δεν ισχύει η H_0	Σφάλμα Τύπου II	True Positive

Πινακας 5.1: Σύνοψη Εκβάσεων Ελέγχου Υποθέσεων

Ορισμός 5.5. i. Ορίζουμε ως συνάρτηση ισχύος ενός ελέγχου φ την

$$\begin{aligned}\pi_\varphi(\underline{\vartheta}) &= E_{\underline{\vartheta}}[\varphi(\underline{X})] = P_{\underline{\vartheta}}(\text{απορρίπτουμε την } H_0) = P_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in K) \\ &= \begin{cases} P(\text{Σφάλμα Τύπου I}), & \underline{\vartheta} \in \Theta_0 \\ 1 - P(\text{Σφάλμα Τύπου II}), & \underline{\vartheta} \in \Theta_1 \end{cases}.\end{aligned}$$

ii. Ορίζουμε ως ισχύ ή διακριτική ικανότητα ενός ελέγχου φ την ποσότητα

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\underline{\vartheta}) &= P(\text{σωστή απόρριψη της } H_0) = P(\underline{X} \in K | H_0 \text{ δεν ισχύει}) \\ &= 1 - P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = P_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in K) = \pi_\varphi(\underline{\vartheta}),\ \underline{\vartheta} \in \Theta_1.\end{aligned}$$

iii. Ορίζουμε ως μέγεθος ενός ελέγχου φ ή μέγεθος της κρίσιμης περιοχής του ελέγχου φ την ποσότητα

$$\sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} \pi_\varphi(\underline{\vartheta}) = \sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} P_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in K) = \sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} P(\text{Σφάλμα Τύπου I}).$$

Για συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος, δεν μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε ταυτόχρονα τις P(Σφάλμα Τύπου I) και P(Σφάλμα Τύπου II). Συνήθως, μάλιστα, όσο η μία μειώνεται, τόσο η άλλη αυξάνεται. Επειδή η μηδενική υπόθεση H_0 είναι η υπόθεση για την οποία σχεδιάζουμε τον έλεγχο, η εσφαλμένη απόρριψή της εγκυμονεί συνήθως και τους περισσότερους κινδύνους. Για τον λόγο αυτό, προκαθορίζουμε ένα ανώτατο όριο α για τη μέγιστη δυνατή πιθανότητα σφάλματος τύπου I, δηλαδή το μέγεθος του ελέγχου, και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλαδή να μεγιστοποιήσουμε την ισχύ του ελέγχου. Με άλλα λόγια, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\beta_\varphi(\underline{\vartheta})$ στο

Θ_1, υπό τον περιορισμό $\sup\limits_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0} \pi_\varphi(\underline{\vartheta}) \leqslant \alpha$.

Ορισμός 5.6. Το ανώτατο όριο α του μεγέθους του ελέγχου καλείται επίπεδο (στατιστικής) σημαντικότητας του ελέγχου.

Ορισμός 5.7. Ένας έλεγχος φ μεγέθους α, δηλαδή με $\sup\limits_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0} \pi_\varphi(\underline{\vartheta}) = \alpha$, καλείται ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος (Ο.Ι.Ε.) αν για κάθε άλλο έλεγχο φ^* μεγέθους α ισχύει ότι $\beta_\varphi(\underline{\vartheta}) \geqslant \beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta})$, $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta_1$.

Με άλλα λόγια, ο Ο.Ι.Ε. φ έχει τη μεγαλύτερη δυνατή ισχύ μεταξύ όλων των ελέγχων με το ίδιο μέγεθος κρίσιμης περιοχής.

Σημείωση 5.1.
  i. Στην περίπτωση όπου η κατανομή του δείγματος είναι διακριτή, δεν είναι πάντα εφικτή η εύρεση μη-τυχαιοποιημένου ελέγχου προκαθορισμένου μεγέθους. Σε αυτήν την περίπτωση, γίνεται χρήση τυχαιοποιημένων ελέγχων.
  ii. Στην περίπτωση όπου η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής και η μηδενική υπόθεση $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0 = \{\underline{\vartheta}_0\}$ είναι απλή, τότε είναι εύκολο να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο μεγέθους α, αφού $\sup\limits_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0} \pi_\varphi(\underline{\vartheta}) = P_{\underline{\vartheta}_0}(\underline{X} \in K) = \alpha$.

5.2 Λήμμα Neyman - Pearson

Λήμμα Neyman - Pearson: Έστω δείγμα $\underline{x}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0 = \{\underline{\vartheta}_0\}$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1 = \{\underline{\vartheta}_1\}$, δηλαδή βρισκόμαστε στην περίπτωση απλής έναντι απλής.

  i. **Ύπαρξη Ο.Ι.Ε.**: Για κάθε $\alpha \in (0, 1)$, ο έλεγχος

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & L(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) < c \cdot L(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) \\ \gamma, & L(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) = c \cdot L(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) \\ 0, & L(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) > c \cdot L(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) \end{cases},$$

όπου $c > 0, \gamma \in [0, 1)$ σταθερές τέτοιες ώστε $\pi_\varphi(\underline{\vartheta}_0) = E_{\underline{\vartheta}_0}[\varphi(\underline{X})] = \alpha$, είναι Ο.Ι.Ε. μεγέθους α για τις απλές υποθέσεις H_0 και H_1.

  ii. **Μοναδικότητα Ο.Ι.Ε.**: Αν φ^* είναι Ο.Ι.Ε. μεγέθους α για τις ίδιες υποθέσεις H_0 και H_1, τότε $\varphi^*(\underline{x}) = \varphi(\underline{x})$, $\forall \underline{x} \notin \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : L(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) = c \cdot L(\underline{\vartheta}_1|\underline{x})\}$, δηλαδή

$$\varphi^*(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & L(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) < c \cdot L(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) \\ 0, & L(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) > c \cdot L(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) \end{cases}.$$

Παρατήρηση 5.1. Συνήθως δουλεύουμε με λογαριθμο-πιθανοφάνειες, δηλαδή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \ell(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) - \ell(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) < c \\ \gamma, & \ell(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) - \ell(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) = c \\ 0, & \ell(\underline{\vartheta}_0|\underline{x}) - \ell(\underline{\vartheta}_1|\underline{x}) > c \end{cases} \cdot$$

Παράδειγμα 5.2. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$ και να υπολογιστεί η ισχύς του.

Γνωρίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n \log\left(2\pi\sigma^2\right)}{2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta)^2.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta_0)^2\right] < c \Leftrightarrow$$

$$n\vartheta_1^2 - 2\vartheta_1\sum_{i=1}^{n} x_i - n\vartheta_0^2 + 2\vartheta_0\sum_{i=1}^{n} x_i < c^* = 2\sigma^2 \cdot c \Leftrightarrow$$

$$2(\vartheta_0 - \vartheta_1)\sum_{i=1}^{n} x_i < c^{**} = c^* + n\left(\vartheta_0^2 - \vartheta_1^2\right) \overset{\vartheta_0 - \vartheta_1 < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overline{x} > c_\alpha = \frac{c^{**}}{2n(\vartheta_0 - \vartheta_1)}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} > c_\alpha \\ 0, & \overline{x} \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής.

Όμως, η διαδικασία προσδιορισμού του Ο.Ι.Ε. δεν τελείωσε εδώ, αφού απομένει να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_α, ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α, δηλαδή κάνοντας χρήση της σχέσης $\pi_\varphi(\vartheta_0) = E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\vartheta_0}(\overline{X} > c_a) = \alpha$. Για να το επιτύχουμε αυτό, ακολουθούμε μία μέθοδο παρόμοια με τη μέθοδο αντιστρεπτής ποσότητας που χρησιμοποιήσαμε για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Προσδιορίζουμε μία τυχαία μεταβλητή $T = T\left(\overline{X}, \vartheta_0\right)$, της οποίας η κατανομή να είναι ανεξάρτητη του ϑ_0, όταν ισχύει η H_0. Η T συνήθως καλείται

ελεγχοσυνάρτηση ή στατιστική συνάρτηση του ελέγχου.

2. Λύνουμε την ανισότητα $\overline{X} > c_\alpha$ ως προς την T.
3. Κάνουμε χρήση των άνω ποσοστιαίων σημείων της κατανομής της T για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_α.

Αρχικά, υπό την H_0, δηλαδή όταν $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta_0, \sigma^2)$, γνωρίζουμε ότι $T = \frac{\overline{X}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$. Λύνοντας την ανισότητα $\overline{X} > c_\alpha$ ως προς T, βρίσκουμε ότι $T > c_\alpha^* = \frac{c_\alpha - \vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n}$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$, έχουμε ότι $P_{\vartheta_0}(\overline{X} > c_\alpha) = P_{\vartheta_0}(T > c_\alpha^*) = \alpha \Rightarrow c_\alpha^* = Z_\alpha$. Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{x}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} > Z_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{x}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant Z_\alpha \end{cases}.$$

Η κρίσιμη περιοχή του παραπάνω ελέγχου είναι το σύνολο

$$K = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{\overline{x}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} > Z_\alpha \right\}.$$

Η ισχύς του παραπάνω ελέγχου υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \beta_\varphi(\vartheta_1) &= P_{\vartheta_1}(\underline{X} \in K) = P_{\vartheta_1}\left(\frac{\overline{X}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} > Z_\alpha \right) \\ &= P_{\vartheta_1}\left(\frac{\overline{X}-\vartheta_1}{\sigma}\sqrt{n} > Z_\alpha + \frac{\vartheta_0-\vartheta_1}{\sigma}\sqrt{n} \right) = 1 - \Phi\left(Z_\alpha + \frac{\vartheta_0-\vartheta_1}{\sigma}\sqrt{n} \right), \end{aligned}$$

αφού $\frac{\overline{X}-\vartheta_1}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$, υπό την H_1, δηλαδή όταν $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta_1, \sigma^2)$. □

Παρατήρηση 5.2. Παρατηρούμε ότι η κρίσιμη περιοχή του παραπάνω ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε. Δηλαδή, ο παραπάνω έλεγχος είναι Ο.Ι.Ε. για κάθε απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1^*$ με $\vartheta_1^* > \vartheta_0$. Επομένως, είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Πόρισμα 5.1. i. Αν η κρίσιμη περιοχή του Ο.Ι.Ε. φ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$ είναι ανεξάρτητη από το ϑ_1, τότε ο φ είναι Ο.Ι.Ε. και για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

ii. Αντίστοιχα, αν η κρίσιμη περιοχή του Ο.Ι.Ε. φ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 < \vartheta_0$ είναι ανεξάρτητη από το ϑ_1, τότε ο φ είναι Ο.Ι.Ε. και για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$.

Παράδειγμα 5.3. Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν $\sigma^2 = 4$, $\vartheta_1 = \vartheta_0 + 2$ και $\alpha = 1\%$, τότε να βρεθεί το ελάχιστο μέγεθος δείγματος n, ώστε η πιθανότητα σφάλματος τύπου II να είναι το πολύ 0.01.

Έχουμε $\alpha = 0.01$. Βρίσκουμε στον πίνακα με τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$ ότι $Z_\alpha = Z_{0.01} \approx 2.33$. Συνεπώς, θέλουμε

$$\begin{aligned} P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= 1 - \beta_\varphi(\vartheta_1) = \Phi\left(Z_\alpha + \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\ &= \Phi\left(2.33 - \sqrt{n}\right) \leqslant 0.01 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2.33 - \sqrt{n} \leqslant \Phi^{-1}(0.01) = Z_{0.99} = -Z_{0.01} \approx -2.33 \Rightarrow n \geqslant 4 \cdot 2.33^2 \approx 21.7156.$$

Επομένως, το ελάχιστο μέγεθος δείγματος που θα χρειαστούμε είναι $n = 22$. □

Παράδειγμα 5.4. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(0, \vartheta)$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$ και να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου II.

Αρχικά δουλεύουμε με την απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 < \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Γνωρίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n\log(2\pi)}{2} - \frac{n\log\vartheta}{2} - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow \frac{n(\log\vartheta_1 - \log\vartheta_0)}{2} + \left(\frac{1}{2\vartheta_1} - \frac{1}{2\vartheta_0}\right)\sum_{i=1}^n x_i^2 < c \Leftrightarrow$$

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{2\vartheta_0\vartheta_1}\sum_{i=1}^n x_i^2 < c^* = c - \frac{n(\log\vartheta_1 - \log\vartheta_0)}{2} \overset{\vartheta_0 - \vartheta_1 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < c_\alpha = \frac{2\vartheta_0\vartheta_1}{\vartheta_0 - \vartheta_1} \cdot c^*.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \geqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, γνωρίζουμε ότι $T = \frac{1}{\vartheta_0}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$, υπό την H_0, δηλαδή όταν $X_1, \ldots, X_n \sim N(0, \vartheta_0)$. Λύνοντας την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^n X_i^2 < c_\alpha$ ως προς T, βρίσκουμε ότι $T < c_\alpha^* = \frac{c_\alpha}{\vartheta_0}$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $P_{\vartheta_0}\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i^2 < c_\alpha\right) = P_{\vartheta_0}(T < c_\alpha^*) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}(T > c_\alpha^*) = 1 - \alpha \Rightarrow$

$c_\alpha^* = \chi^2_{n;1-\alpha}$. Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{\vartheta_0}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < \chi^2_{n;1-\alpha} \\ 0, & \frac{1}{\vartheta_0}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \chi^2_{n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 < \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$. Για $\vartheta < \vartheta_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= P_\vartheta(\underline{X} \notin K) = P_\vartheta\left(\frac{1}{\vartheta_0}\sum_{i=1}^n X_i^2 \geqslant \chi^2_{n;1-\alpha}\right) \\ &= P_{\vartheta_1}\left(\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n X_i^2 \geqslant \frac{\vartheta_0}{\vartheta}\cdot\chi^2_{n;1-\alpha}\right) = 1 - F_Q\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\cdot\chi^2_{n;1-\alpha}\right), \end{aligned}$$

όπου $Q = \frac{1}{\vartheta}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2_n$. □

Παράδειγμα 5.5. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\vartheta)$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$ και να υπολογιστεί η ισχύς του.
Αρχικά δουλεύουμε με την απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 < \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Γνωρίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = n\log\vartheta - \vartheta\sum_{i=1}^n x_i.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow n\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^n x_i < c \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^n x_i < c^* = c - n\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \overset{\vartheta_1 - \vartheta_0 < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i > c_\alpha = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^n x_i > c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^n x_i \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπό την

H_0, δηλαδή όταν $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\vartheta_0)$, γνωρίζουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0) \Rightarrow$ $T = 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$. Λύνοντας την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i > c_\alpha$ ως προς T, βρίσκουμε ότι $T > c^*_\alpha = 2\vartheta_0 c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $P_{\vartheta_0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i > c_\alpha\right) = P_{\vartheta_0}\left(T > c^*_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{2n;\alpha}$. Ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > \chi^2_{2n;\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant \chi^2_{2n;\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχη του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 < \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$. Για $\vartheta < \vartheta_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \beta_\varphi(\vartheta) &= P_\vartheta(\underline{X} \in K) = P_\vartheta\left(2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i > \chi^2_{2n;\alpha}\right) \\ &= P_\vartheta\left(2\vartheta \sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \cdot \chi^2_{2n;\alpha}\right) = 1 - F_Q\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \cdot \chi^2_{2n;\alpha}\right), \end{aligned}$$

όπου $Q = 2\vartheta \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$. □

Παράδειγμα 5.6. Έστω X δείγμα μεγέθους 1 από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in (-2, 2)$ και $f(x; \vartheta) = 1 + \vartheta(x - 0.5)$, $x \in (0, 1)$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 = 0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1 = 1$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.1$ και να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ.

$$L(\vartheta_0|x) < c \cdot L(\vartheta_1|x) \Leftrightarrow 1 + 0 \cdot (x - 0.5) < c \cdot [1 + 1 \cdot (x - 0.5)] \Leftrightarrow x > c_\alpha = \frac{1}{c} - 0.5.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x > c_\alpha \\ 0, & x \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_α κάνουμε χρήση της σχέσης

$$P_{\vartheta_0}(X > c_\alpha) = \int_{c_\alpha}^{1} [1 + 0 \cdot (x - 0.5)]\, dx = 1 - c_\alpha = \alpha \Rightarrow c_\alpha = 1 - \alpha = 0.9.$$

Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0.9 \\ 0, & x \leqslant 0.9 \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= P_{\vartheta_1}(X \leqslant 0.9) = \int_0^{0.9} [1 + 1 \cdot (x - 0.5)]\, dx \\ &= 0.5 \cdot 0.9 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.9} = 0.45 + \frac{0.81}{2} = 0.855. \quad \square \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.7. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \vartheta)$. Αν είναι γνωστό ότι η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 = \frac{1}{2}$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1 = \frac{1}{4}$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ έχει τη μορφή $K = \left\{\underline{x} \in (0, \vartheta)^n : x_{(n)} < c\right\}$ και δίνεται ότι $P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = 0.2$, τότε να προσδιοριστεί η σταθερά c και το μέγεθος δείγματος n.
Γνωρίζουμε ότι $F_{X_{(n)}}(x) = \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n$ για $x \in (0, \vartheta)$. Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c και το μέγεθος δείγματος n, κάνουμε αρχικά χρήση της σχέσης

$$P_{\vartheta_0}(\underline{X} \in K) = P_{\vartheta_0}(X_{(n)} < c) = \left(\frac{c}{\vartheta_0}\right)^n = \alpha \Rightarrow c = \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \cdot 0.05^{\frac{1}{n}}.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι

$$P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = P_{\vartheta_1}(\underline{X} \notin K) = P_{\vartheta_1}(X_{(n)} \geqslant c) = 1 - \left(\frac{c}{\vartheta_1}\right)^n = 0.2 \Rightarrow$$

$$c = \vartheta_1 \cdot (1 - 0.2)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \cdot 0.8^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0.05^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \cdot 0.8^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 16^{\frac{1}{n}} = 2 \Rightarrow$$

$$2^{\frac{4}{n}} = 2 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow c \approx 0.2364. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.8.* Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\vartheta)$, όπου $n = 6$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0 = 0.2$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1 = 0.5$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$.

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \log\vartheta + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right)\log(1 - \vartheta) = \sum_{i=1}^n x_i \log\frac{\vartheta}{1 - \vartheta} + n\log(1 - \vartheta).$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow \log\frac{\vartheta_0(1 - \vartheta_1)}{\vartheta_1(1 - \vartheta_0)}\sum_{i=1}^n x_i + n\log\frac{1 - \vartheta_0}{1 - \vartheta_1} < c \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > c_\alpha = \left(c - n\log\frac{1-\vartheta_0}{1-\vartheta_1}\right)\left[\log\frac{\vartheta_0(1-\vartheta_1)}{\vartheta_1(1-\vartheta_0)}\right]^{-1}, \text{ αφού } \frac{\vartheta_0(1-\vartheta_1)}{\vartheta_1(1-\vartheta_0)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > c_\alpha \\ \gamma, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < c_\alpha \end{cases}.$$

Υπό την H_0, δηλαδή όταν $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\vartheta_0)$, γνωρίζουμε από ιδιότητες ροπογεννητριών ότι $T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n, \vartheta_0)$. Υπολογίζουμε τις σταθερές c_α και γ

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(\vartheta_0) = E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] &= P_{\vartheta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > c_\alpha\right) + \gamma P_{\vartheta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = c_\alpha\right) \\ &= 1 - F_T(c_\alpha) + \gamma P_{\vartheta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = c_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

$$F_T(c_\alpha) - \gamma P_{\vartheta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i = c_\alpha\right) = 1 - \alpha \Rightarrow F_T(c_\alpha) - \gamma\left[F_T(c_\alpha) - F_T(c_\alpha - 1)\right] = 1 - \alpha.$$

Αρχικά, βρίσκουμε το μικρότερο $c_\alpha \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ώστε $F_T(c_\alpha) > 1 - \alpha$. Τότε, λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς γ, παίρνουμε ότι

$$\gamma = \frac{F_T(c_\alpha) - (1-\alpha)}{F_T(c_\alpha) - F_T(c_\alpha - 1)} \in (0, 1).$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι

$$F_T(2) = \sum_{t=0}^{2} \binom{n}{t} \vartheta_0^t (1-\vartheta_0)^{n-t} = \sum_{t=0}^{2} \binom{6}{t} \cdot 0.2^t \cdot 0.8^{6-t} \approx 0.901 < 0.95 = 1 - \alpha.$$

$$F_T(3) = F_T(2) + \binom{n}{3} \vartheta_0^3 (1-\vartheta_0)^{n-3} = 0.9 + \binom{6}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^3 \approx 0.983 > 0.95.$$

Άρα επιλέγουμε $c_\alpha = 3$ και υπολογίζουμε τη σταθερά $\gamma = \frac{F_T(3) - 0.95}{F_T(3) - F_T(2)} \approx \frac{0.033}{0.082} \approx 0.4$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > 3 \\ 0.4, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 3 \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < 3 \end{cases}.$$

Στην περίπτωση όπου $\sum_{i=1}^{n} x_i = 3$, ο έλεγχος φ μας λέει ότι απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 με πιθανότητα 0.4. □

Παράδειγμα 5.9.* Έστω X δείγμα μεγέθους 1. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : X \sim N(0,1)$ vs. $H_1 : X \sim \text{Laplace}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 2\%$ και να υπολογιστεί η ισχύς του.
Γνωρίζουμε ότι $L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ και $L_1(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{|x|}{2}}$. Επομένως,

$$\ell_0(x) - \ell_1(x) < c \Leftrightarrow -\frac{\log(2\pi)}{2} - \frac{x^2}{2} + \log 4 + \frac{|x|}{2} < c \Leftrightarrow$$

$$x^2 - |x| > c^* = 2\left[\log 4 - \frac{\log(2\pi)}{2} - c\right] \Leftrightarrow$$

$$|x| > \frac{1+\sqrt{1+4c^*}}{2} = c_\alpha \quad ή \quad |x| < \frac{1-\sqrt{1+4c^*}}{2} = 1 - \frac{1+\sqrt{1+4c^*}}{2} = 1 - c_\alpha.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & |x| > c_\alpha \text{ ή } |x| < 1 - c_\alpha \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπό την H_0, γνωρίζουμε ότι $X \sim N(0,1)$. Υπολογίζουμε τη σταθερά c_α

$$E_0\left[\varphi(X)\right] = P_0(|X| > c_\alpha) + P_0(|X| < 1 - c_\alpha) = \alpha, \quad \text{όπου}$$

$$\begin{aligned} P_0(|X| > c_\alpha) &= P_0(X > c_\alpha) + P_0(X < -c_\alpha) = 1 - \Phi(c_\alpha) + \Phi(-c_\alpha) \\ &= 1 - \Phi(c_\alpha) + 1 - \Phi(c_\alpha) = 2\left[1 - \Phi(c_\alpha)\right]. \end{aligned}$$

Αν $c_\alpha \geqslant 1$, τότε $P_0(|X| < 1 - c_\alpha) = 0$. Διαφορετικά, αν $c_\alpha < 1$, τότε

$$\begin{aligned} P_0(|X| < 1 - c_\alpha) &= P_0(c_\alpha - 1 < X < 1 - c_\alpha) = \Phi(1 - c_\alpha) - \Phi(c_\alpha - 1) \\ &= \Phi(1 - c_\alpha) - 1 + \Phi(1 - c_\alpha) = 2\Phi(1 - c_\alpha) - 1. \end{aligned}$$

Έστω ότι $c_\alpha < 1$. Τότε, έχουμε ότι

$$P_0(|X| > c_\alpha) > P_0(|X| > 1) = 2\left[1 - \Phi(1)\right] = 2(1 - 0.84) = 0.32 \Rightarrow$$

$$\alpha = P_0(|X| > c_\alpha) + P_0(|X| < 1 - c_\alpha) > P_0(|X| > 1) + P_0(|X| < 1 - c_\alpha) \geqslant 0.32.$$

Άτοπο, αφού $\alpha = 0.02$. Άρα, υπολογίζουμε ότι

$$P_0(|X| > c_\alpha) + P_0(|X| < 1 - c_\alpha) = 2\left[1 - \Phi(c_\alpha)\right] + 0 = \alpha \Rightarrow \Phi(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$c_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.33.$$

Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 2.33 \\ 0, & |x| \leqslant 2.33 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\beta_\varphi &= P_1(|x| > 2.33) = 1 - P_1(|x| \leqslant 2.33) = 1 - P_1(-2.33 \leqslant x \leqslant 2.33) \\ &= 1 - \int_{-2.33}^{2.33} \frac{1}{4} e^{-\frac{|x|}{2}} dx = 1 - \frac{1}{2}\int_0^{2.33} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 + \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{2.33} = e^{-\frac{2.33}{2}} \approx 0.31. \quad \square\end{aligned}$$

5.3 Ιδιότητα Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών

Στην περίπτωση όπου θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, τότε, πάλι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson, ώστε να βρούμε Ο.Ι.Ε. φ για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_0 < \vartheta_1$. Αν, επιπλέον, δείξουμε ότι η κρίσιμη περιοχή του φ δεν εξαρτάται από το ϑ_1 και ότι $\sup\limits_{\vartheta \leqslant \vartheta_0} \pi_\varphi(\vartheta) = \pi_\varphi(\vartheta_0) = E_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = \alpha$, δηλαδή ότι η συνάρτηση ισχύος $\pi_\varphi(\vartheta)$ είναι αύξουσα ως προς ϑ στο $(-\infty, \vartheta_0]$, τότε ο φ είναι Ο.Ι.Ε. και για τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Αντίστοιχα, αν θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$, τότε, πάλι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson, ώστε να βρούμε Ο.Ι.Ε. φ για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_0 > \vartheta_1$. Αν, επιπλέον, δείξουμε ότι η κρίσιμη περιοχή του φ δεν εξαρτάται από το ϑ_1 και ότι $\sup\limits_{\vartheta \geqslant \vartheta_0} \pi_\varphi(\vartheta) = \pi_\varphi(\vartheta_0) = E_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = \alpha$, δηλαδή ότι η συνάρτηση ισχύος $\pi_\varphi(\vartheta)$ είναι φθίνουσα ως προς ϑ στο $[\vartheta_0, \infty)$, τότε ο φ είναι Ο.Ι.Ε. και για τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$.

Στην προσπάθεια αυτή, θα μας βοηθήσει η ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών (Μ.Λ.Π.) που έχουν ορισμένες οικογένειες κατανομών.

Ορισμός 5.8. Έστω δείγμα $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in \Theta$. Για κάθε ζεύγος παραμέτρων $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta$ ορίζουμε τον λόγο πιθανοφανειών

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{L(\vartheta_2|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})}.$$

Θα λέμε ότι η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών (Μ.Λ.Π.) ως προς κάποια στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ αν, για κάθε ζεύγος παραμέτρων $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta$ με $\vartheta_1 < \vartheta_2$, ο λόγος πιθανοφανειών $\lambda(\underline{x})$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$ στο σύνολο $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : L(\vartheta_1|\underline{x}) > 0 \text{ ή } L(\vartheta_2|\underline{x}) > 0\}$.

Σημείωση 5.2. Αν ο λόγος πιθανοφανειών $\lambda(\underline{x})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς κάποια $T(\underline{X})$, τότε, προφανώς, είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς την $-T(\underline{X})$, οπότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = -T(\underline{X})$.

Πρόταση 5.1. Αν η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με

$$f(\underline{x};\vartheta) = h(\underline{x}) \exp\left\{Q(\vartheta)T(\underline{x}) - A(\vartheta)\right\},$$

όπου $Q(\vartheta)$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση, τότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$.

Σημείωση 5.3. Αν $Q(\vartheta)$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε, προφανώς, η $-Q(\vartheta)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = -T(\underline{X})$.

Θεώρημα 5.1. (Karlin - Rubin)
Έστω δείγμα $\underline{x}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο ϑ. Θεωρούμε ότι η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς κάποια στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$.

i. Θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Τότε, υπάρχει Ο.Ι.Ε. μεγέθους $\alpha \in (0,1)$ που ορίζεται ως

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) > c_\alpha \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) < c_\alpha \end{cases}.$$

Οι σταθερές c_α, $\gamma \in [0,1)$ υπολογίζονται από τη σχέση $E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha$.

ii. Θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$. Τότε, υπάρχει Ο.Ι.Ε. μεγέθους $\alpha \in (0,1)$ που ορίζεται ως

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) < c_\alpha \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) > c_\alpha \end{cases}.$$

Οι σταθερές c_α, $\gamma \in [0,1)$ υπολογίζονται από τη σχέση $E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha$.

Σημείωση 5.4. Για να θυμόμαστε τη φορά των ανισοτήτων που ορίζουν τις κρίσιμες περιοχές των παραπάνω ελέγχων, είναι σημαντικό να τις αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά. Στην πρώτη περίπτωση, θα εφαρμόζαμε το λήμμα Neyman - Pearson για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_0 < \vartheta_1$. Θα λύναμε την ανισότητα $\frac{L(\vartheta_0|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})} < c$ για να προσδιορίσουμε την κρίσιμη περιοχή του ελέγχου. Αφού $\vartheta_0 < \vartheta_1$, ο λόγος $\frac{L(\vartheta_1|\underline{x})}{L(\vartheta_0|\underline{x})}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$, σύμφωνα με την ιδιότητα Μ.Λ.Π. Ισοδύναμα, ο λόγος $\frac{L(\vartheta_0|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$. Επομένως, ο λόγος $\frac{L(\vartheta_0|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})}$ είναι άνω φραγμένος από κάποια σταθερά c αν και μόνο αν η $T(\underline{X})$ είναι κάτω φραγμένη από κάποια άλλη σταθερά c_α.

Στη δεύτερη περίπτωση, θα εφαρμόζαμε το λήμμα Neyman - Pearson για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_0 > \vartheta_1$. Θα λύναμε την ανισότητα $\frac{L(\vartheta_0|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})} < c$ για να προσδιορίσουμε την κρίσιμη περιοχή του ελέγχου. Αφού $\vartheta_1 < \vartheta_0$, ο λόγος $\frac{L(\vartheta_0|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$, σύμφωνα με την ιδιότητα Μ.Λ.Π. Επομένως, ο λόγος $\frac{L(\vartheta_0|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})}$ είναι άνω φραγμένος από κάποια σταθερά c αν και μόνο αν η $T(\underline{X})$ είναι άνω φραγμένη από κάποια άλλη σταθερά c_α.

Παράδειγμα 5.10. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gamma}(p, \vartheta)$ με $p > 0$ γνωστό. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$.
Γνωρίζουμε ότι η κατανομή Γάμμα με $p > 0$ γνωστό ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \exp\left\{-\vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i + np \log \vartheta\right\} \frac{1}{[\Gamma(p)]^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = -\vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς την $T^*(\underline{X}) = -\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T^*(\underline{x}) < c_\alpha \\ 0, & T^*(\underline{x}) \geqslant c_\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > c_\alpha^* = -c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant c_\alpha^* = -c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι $T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(np, \vartheta_0)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, έχουμε ότι $Q = 2\vartheta_0 T \sim \chi^2_{2np}$. Λύνοντας την ανισότητα $T(\underline{X}) > c_\alpha^*$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q > c_\alpha^{**} = 2\vartheta_0 c_\alpha^*$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, έχουμε ότι $E_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\vartheta_0}(T > c_\alpha^*) = P_{\vartheta_0}(Q > c_\alpha^{**}) = \alpha \Rightarrow c_\alpha^{**} = \chi^2_{2np;\alpha}$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > \chi^2_{2np;\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant \chi^2_{2np;\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.11. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Beta}(1, \vartheta)$ με $f(x; \vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1}$, $\vartheta > 0$, $x \in (0, 1)$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή Βήτα ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{(\vartheta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i) + n\log\vartheta\right\}, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = \vartheta - 1$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\log(1-X_i)$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς την $T(\underline{X})$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) > c_\alpha \\ 0, & T(\underline{x}) \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, έχουμε αποδείξει ότι $Y = \sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-X_i} \sim \text{Gamma}(n,\vartheta_0)$. Από τη σημείωση 3.7, παίρνουμε ότι $Q = 2\vartheta_0 Y \sim \chi^2_{2n}$. Λύνοντας την ανισότητα $T(\underline{X}) > c_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c^*_\alpha = -2\vartheta_0 c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, προκύπτει ότι $E_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\vartheta_0}(T > c_\alpha) = P_{\vartheta_0}(Q < c^*_\alpha) = \alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-x_i} < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-x_i} \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.12. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \text{Laplace}(\mu,\vartheta)$ με $\mu \in \mathbb{R}$ γνωστό, $\vartheta > 0$ και $f(x;\vartheta) = \frac{\vartheta}{2}e^{-\vartheta|x-\mu|}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$.
Η κατανομή Laplace με μ γνωστό ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και

$$f(\underline{x};\vartheta) = 2^{-n}\exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^{n}|x_i-\mu| + n\log\vartheta\right\}, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = -\vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς την $T^*(\underline{X}) = -\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T^*(\underline{x}) < c_\alpha \\ 0, & T^*(\underline{x}) \geqslant c_\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-\mu| > c^*_\alpha = -c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-\mu| \leqslant c^*_\alpha = -c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, έχουμε δείξει ότι $T = \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, έχουμε ότι $Q = 2\vartheta_0 T \sim \chi^2_{2n}$. Λύνοντας την ανισότητα $T(\underline{X}) > c^*_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q > c^{**}_\alpha = 2\vartheta_0 c^*_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $E_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\vartheta_0}(T > c^*_\alpha) = P_{\vartheta_0}(Q > c^{**}_\alpha) = \alpha \Rightarrow c^{**}_\alpha = \chi^2_{2n;\alpha}$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| > \chi^2_{2n;\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \leqslant \chi^2_{2n;\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.13. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Weibull}(p, \vartheta)$ με $p > 0$ γνωστό, $\vartheta > 0$ και $f(x;\vartheta) = p\vartheta x^{p-1} e^{-\vartheta x^p}$, $x > 0$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή Weibull με $p > 0$ γνωστό ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-\vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i^p + n \log \vartheta\right\} p^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = -\vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^p$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς την $T^*(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^{n} X_i^p$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T^*(\underline{x}) > c_\alpha \\ 0, & T^*(\underline{x}) \leqslant c_\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} x_i^p < c^*_\alpha = -c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i^p \geqslant c^*_\alpha = -c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, έχουμε δείξει ότι $T = \sum_{i=1}^{n} X_i^p \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, έχουμε ότι $Q = 2\vartheta_0 T \sim \chi^2_{2n}$. Λύνοντας την ανισότητα $T(\underline{X}) < c^*_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c^{**}_\alpha = 2\vartheta_0 c^*_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $E_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\vartheta_0}(T < c^*_\alpha) = P_{\vartheta_0}(Q < c^{**}_\alpha) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}(Q \geqslant c^{**}_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow c^{**}_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^p < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^p \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.14. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pareto}(p, \vartheta)$ με $p > 0$ γνωστό, $\vartheta > 0$ και $f(x;\vartheta) = \frac{\vartheta p^\vartheta}{x^{\vartheta+1}}$, $x > p$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs.

$H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Η κατανομή Pareto με $p > 0$ γνωστό ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-(\vartheta+1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i + n\log\vartheta + n\vartheta\log p\right\}, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = -(\vartheta+1)$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς την $T^*(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T^*(\underline{x}) > c_\alpha \\ 0, & T^*(\underline{x}) \leqslant c_\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} \log x_i < c^*_\alpha = -c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} \log x_i \geqslant c^*_\alpha = -c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Στο παράδειγμα 4.8 (σελίδα 65) δείξαμε ότι $Y = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{X_i}{p} \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0)$, για $\vartheta = \vartheta_0$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, έχουμε ότι $Q = 2\vartheta_0 Y \sim \chi^2_{2n}$. Λύνοντας την ανισότητα $T(\underline{X}) < c^*_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c^{**}_\alpha = 2\vartheta_0(c^*_\alpha - n\log p)$. Κάνοντας χρήση των άνω ποσοστιαίων σημείων της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $E_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\vartheta_0}(T < c^*_\alpha) = P_{\vartheta_0}(Q < c^{**}_\alpha) = \alpha \Rightarrow c^{**}_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{p} < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{p} \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.15. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \vartheta)$. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

Γνωρίζουμε ότι $L(\vartheta|\underline{x}) = \vartheta^{-n} I_{(0,\vartheta)}\left(x_{(n)}\right)$. Για $\vartheta_1 < \vartheta_2$ υπολογίζουμε τον λόγο πιθανοφανειών

$$\frac{L(\vartheta_2|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})} = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^n \frac{I_{(0,\vartheta_2)}\left(x_{(n)}\right)}{I_{(0,\vartheta_1)}\left(x_{(n)}\right)} = \lambda(T), \text{ όπου } T(\underline{x}) = x_{(n)}.$$

Έστω $t_1, t_2 \in (0, \vartheta_2)$ με $t_1 \leqslant t_2$. Διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

- Για $0 < t_1 \leqslant t_2 < \vartheta_1 < \vartheta_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^n = \lambda(t_2) \Rightarrow \lambda(t_1) \leqslant \lambda(t_2)$.
- Για $0 < t_1 < \vartheta_1 < t_2 < \vartheta_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^n < \infty = \lambda(t_2)$.
- Για $0 < \vartheta_1 < t_1 \leqslant t_2 < \vartheta_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = \infty = \lambda(t_2) \Rightarrow \lambda(t_1) \leqslant \lambda(t_2)$.

Άρα, η συνάρτηση $\lambda(t)$ είναι αύξουσα στο $(0, \vartheta_2)$. Δηλαδή, η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(n)} > c_\alpha \\ 0, & x_{(n)} \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι $F_T(t) = \left(\frac{t}{\vartheta_0}\right)^n$ για $t \in (0, \vartheta_0)$. Υπολογίζουμε ότι

$$E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\vartheta_0}\left[X_{(n)} > c_\alpha\right] = 1 - F_T(c_\alpha) = 1 - \left(\frac{c_\alpha}{\vartheta_0}\right)^n = \alpha \Rightarrow c_\alpha = \vartheta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(n)} > \vartheta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}} \\ 0, & x_{(n)} \leqslant \vartheta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.16. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(\vartheta, \lambda)$ με $f(x;\vartheta) = \frac{\lambda\vartheta^\lambda}{x^{\lambda+1}}$ και $F(x;\vartheta) = 1 - \left(\frac{\vartheta}{x}\right)^\lambda$, $x > \vartheta > 0$, $\lambda > 0$ γνωστό. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$.
Για $\vartheta_1 < \vartheta_2$ υπολογίζουμε τον λόγο πιθανοφανειών

$$\frac{L(\vartheta_2|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})} = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^{n\lambda} \frac{I_{(\vartheta_2,\infty)}\left(x_{(1)}\right)}{I_{(\vartheta_1,\infty)}\left(x_{(1)}\right)} = \lambda(T), \text{ όπου } T(\underline{x}) = x_{(1)}.$$

Έστω $t_1, t_2 \in (\vartheta_1, \infty)$ με $t_1 \leqslant t_2$. Διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

- Για $\vartheta_1 < t_1 \leqslant t_2 < \vartheta_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = 0 = \lambda(t_2) \Rightarrow \lambda(t_1) \leqslant \lambda(t_2)$.
- Για $\vartheta_1 < t_1 < \vartheta_2 < t_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = 0 < \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^{n\lambda} = \lambda(t_2)$.
- Για $\vartheta_1 < \vartheta_2 < t_1 \leqslant t_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^{n\lambda} = \lambda(t_2) \Rightarrow \lambda(t_1) \leqslant \lambda(t_2)$.

Άρα, η συνάρτηση $\lambda(t)$ είναι αύξουσα στο (ϑ_1, ∞). Δηλαδή, η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(1)} < c_\alpha \\ 0, & x_{(1)} \geqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι $F_T(t) = 1 - \left(\frac{\vartheta_0}{t}\right)^{n\lambda}$ για $t \in (\vartheta_0, \infty)$. Υπολογίζουμε ότι

$$E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\vartheta_0}\left[X_{(1)} < c_\alpha\right] = 1 - \left(\frac{\vartheta_0}{c_\alpha}\right)^{n\lambda} = \alpha \Rightarrow c_\alpha = \vartheta_0(1-\alpha)^{-\frac{1}{n\lambda}}.$$

Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(1)} < \vartheta_0(1-\alpha)^{-\frac{1}{n\lambda}} \\ 0, & x_{(1)} \geqslant \vartheta_0(1-\alpha)^{-\frac{1}{n\lambda}} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.17. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in \mathbb{R}$, $f(x;\vartheta) = \lambda e^{-\lambda(x-\vartheta)}$ και $F(x;\vartheta) = 1 - e^{-\lambda(x-\vartheta)}$, $x > \vartheta$, $\lambda > 0$ γνωστό. Να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.
Για $\vartheta_1 < \vartheta_2$ υπολογίζουμε τον λόγο πιθανοφανειών

$$\frac{L(\vartheta_2|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})} = e^{n\lambda(\vartheta_2-\vartheta_1)}\frac{I_{(\vartheta_2,\infty)}\left(x_{(1)}\right)}{I_{(\vartheta_1,\infty)}\left(x_{(1)}\right)} = \lambda(T), \text{ όπου } T(\underline{x}) = x_{(1)}.$$

Έστω $t_1, t_2 \in (\vartheta_1, \infty)$ με $t_1 \leqslant t_2$. Διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

- Για $\vartheta_1 < t_1 \leqslant t_2 < \vartheta_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = 0 = \lambda(t_2) \Rightarrow \lambda(t_1) \leqslant \lambda(t_2)$.
- Για $\vartheta_1 < t_1 < \vartheta_2 < t_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = 0 < e^{n\lambda(\vartheta_2-\vartheta_1)} = \lambda(t_2)$.
- Για $\vartheta_1 < \vartheta_2 < t_1 \leqslant t_2$, έχουμε $\lambda(t_1) = e^{n\lambda(\vartheta_2-\vartheta_1)} = \lambda(t_2) \Rightarrow \lambda(t_1) \leqslant \lambda(t_2)$.

Άρα, η συνάρτηση $\lambda(t)$ είναι αύξουσα στο (ϑ_1, ∞). Δηλαδή, η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(1)} > c_\alpha \\ 0, & x_{(1)} \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι $F_T(t) = 1 - e^{-n\lambda(t-\vartheta_0)}$ για $t \in (\vartheta_0, \infty)$. Υπολογίζουμε ότι

$$E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\vartheta_0}\left[X_{(1)} > c_\alpha\right] = 1 - F_T(c_\alpha) = e^{-n\lambda(c_\alpha-\vartheta_0)} = \alpha \Rightarrow c_\alpha = 2 - \frac{\log\alpha}{n\lambda}.$$

Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(1)} > \vartheta_0 - \frac{\log\alpha}{n\lambda} \\ 0, & x_{(1)} \leqslant \vartheta_0 - \frac{\log\alpha}{n\lambda} \end{cases}. \quad \square$$

5.4 Κριτήριο Γενικευμένου Λόγου Πιθανοφανειών

Στις περιπτώσεις όπου δεν μπορούν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων παραγράφων για την εύρεση ομοιόμορφα ισχυρότατου ελέγχου, καταφεύγουμε στη χρήση του κριτηρίου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών, το οποίο, γενικά, δε μας οδηγεί σε ομοιόμορφα ισχυρότατους ελέγχους. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο έλεγχος των υποθέσεων $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$.

Ορισμός 5.9. Έστω δείγμα $\underline{x}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta$. Θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ και $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$. Ορίζουμε τη στατιστική συνάρτηση

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} L(\underline{\vartheta}|\underline{x})}{\sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta} L(\underline{\vartheta}|\underline{x})},$$

η οποία καλείται γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών. Ισχύει ότι $0 \leqslant \lambda^*(\underline{x}) \leqslant 1$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Σημείωση 5.5. Αν υπάρχουν η Ε.Μ.Π. $\widehat{\underline{\vartheta}}$ του $\underline{\vartheta}$ και η Ε.Μ.Π. $\widehat{\underline{\vartheta}}_0$ του $\underline{\vartheta}$ υπό την $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$, δηλαδή $L(\widehat{\underline{\vartheta}}_0|\underline{x}) = \max\limits_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} L(\underline{\vartheta}|\underline{x})$, τότε

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{L(\widehat{\underline{\vartheta}}_0|\underline{x})}{L(\widehat{\underline{\vartheta}}|\underline{x})}.$$

Πρόταση 5.2. Σύμφωνα με το κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών, ο έλεγχος μεγέθους α των υποθέσεων $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ και $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \lambda^*(\underline{x}) < c \\ \gamma, & \lambda^*(\underline{x}) = c \\ 0, & \lambda^*(\underline{x}) > c \end{cases},$$

όπου οι σταθερές $c, \gamma \in [0, 1)$ προσδιορίζονται από τη σχέση $\sup\limits_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} E_{\underline{\vartheta}}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha$.

Σημείωση 5.6. Διαισθητικά, ο αριθμητής του $\lambda^*(\underline{x})$ εκφράζει τη μέγιστη δυνατή πιθανοφάνεια υπό την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης, ενώ ο παρονομαστής εκφράζει τη μέγιστη δυνατή πιθανοφάνεια συνολικά. Αν ο αριθμητής είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή, δηλαδή ο λόγος $\lambda^*(\underline{x})$ παίρνει τιμές κοντά στο 0, τότε είναι λιγότερο πιθανό να έχουμε παρατηρήσει τα δεδομένα $\underline{x}$ που παρατηρήσαμε κάτω από τιμές της παραμέτρου $\underline{\vartheta}$ που ανήκουν στο σύνολο Θ_0 σε σύγκριση με τιμές της παραμέτρου που ανήκουν γενικά στον παραμετρικό χώρο Θ, οπότε και απορρίπτουμε την H_0.

Αν ο αριθμητής είναι αρκετά κοντά στον παρονομαστή, δηλαδή ο λόγος $\lambda^*(\underline{x})$ παίρνει τιμές κοντά στο 1, τότε δεν μπορούμε να διακρίνουμε πόσο πιθανό είναι να έχουμε παρατηρήσει τα δεδομένα $\underline{x}$ που παρατηρήσαμε κάτω από τιμές της παραμέτρου $\underline{\vartheta}$ που ανήκουν στο σύνολο Θ_0 σε σύγκριση με τιμές της παραμέτρου που ανήκουν γενικά στον παραμετρικό χώρο Θ, οπότε δεν απορρίπτουμε την H_0.

Πρόταση 5.3. Έστω ότι θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$. Τότε, το κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών μας οδηγεί σε έναν έλεγχο με κρίσιμη περιοχή της μορφής $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : T(\underline{x}) < c_1 \quad ή \quad T(\underline{x}) > c_2\}$ για κάποια στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$.

Παράδειγμα 5.18. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U[0, \vartheta]$. Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος των υποθέσεων $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ και να υπολογιστεί η ισχύς του. Γνωρίζουμε ότι $L(\vartheta|\underline{x}) = \vartheta^{-n} I_{[0,\vartheta]}\left(x_{(n)}\right)$ και $\widehat{\vartheta} = x_{(n)}$. Υπολογίζουμε ότι

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{L(\vartheta_0|\underline{x})}{L(\widehat{\vartheta}|\underline{x})} = \frac{\vartheta_0^{-n} I_{[0,\vartheta_0]}\left(x_{(n)}\right)}{\left[x_{(n)}\right]^{-n} I_{[0,x_{(n)}]}\left(x_{(n)}\right)} = \begin{cases} \left[\frac{x_{(n)}}{\vartheta_0}\right]^n, & x_{(n)} \leqslant \vartheta_0 \\ 0, & x_{(n)} > \vartheta_0 \end{cases}.$$

Λύνουμε την ανισότητα $\lambda^*(\underline{x}) < c$ ως προς $T(\underline{x}) = x_{(n)}$

$$\lambda^*(\underline{x}) < c \Leftrightarrow \left[\frac{x_{(n)}}{\vartheta_0}\right]^n < c \quad ή \quad x_{(n)} > \vartheta_0 \Leftrightarrow x_{(n)} < \vartheta_0 \cdot c^{\frac{1}{n}} \quad ή \quad x_{(n)} > \vartheta_0.$$

Επομένως, παίρνουμε τον έλεγχο

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(n)} < \vartheta_0 \cdot c^{\frac{1}{n}} \quad ή \quad x_{(n)} > \vartheta_0 \\ 0, & \vartheta_0 \cdot c^{\frac{1}{n}} \leqslant x_{(n)} \leqslant \vartheta_0 \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπό την H_0, γνωρίζουμε ότι $F_T(t) = \left(\frac{t}{\vartheta_0}\right)^n$ για $t \in [0, \vartheta_0]$. Υπολογίζουμε ότι

$$E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\vartheta_0}\left(X_{(n)} < \vartheta_0 \cdot c^{\frac{1}{n}}\right) + P_{\vartheta_0}\left(X_{(n)} > \vartheta_0\right) = F_T\left(\vartheta_0 \cdot c^{\frac{1}{n}}\right) + 0 = c = \alpha.$$

Επομένως, ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(n)} < \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \quad ή \quad x_{(n)} > \vartheta_0 \\ 0, & \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \leqslant x_{(n)} \leqslant \vartheta_0 \end{cases}.$$

Για $\vartheta > \vartheta_0$, υπολογίζουμε ότι

$$\beta_\varphi(\vartheta) = P_\vartheta\left(X_{(n)} < \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}}\right) + P_\vartheta\left(X_{(n)} > \vartheta_0\right) = \frac{\vartheta_0^n \cdot \alpha}{\vartheta^n} + 1 - \frac{\vartheta_0^n}{\vartheta^n} = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^n.$$

Για $\vartheta < \vartheta_0$, υπολογίζουμε ότι $P_\vartheta\left(X_{(n)} > \vartheta_0\right) = 0$ και

$$P_\vartheta\left(X_{(n)} < \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}}\right) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^n, & \vartheta > \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \\ 1, & \vartheta \leqslant \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \end{cases}.$$

Άρα, τελικά, για $\vartheta \neq \vartheta_0$, παίρνουμε ότι

$$\beta_\varphi(\vartheta) = \begin{cases} 1, & \vartheta \leqslant \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} \\ \alpha\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^n, & \vartheta_0 \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} < \vartheta < \vartheta_0 \\ 1-(1-\alpha)\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^n, & \vartheta > \vartheta_0 \end{cases}. \quad \square$$

5.5 Έλεγχοι Υποθέσεων για Κανονικό Πληθυσμό

Στην παράγραφο αυτή θα πραγματοποιήσουμε σύνθετους ελέγχους υποθέσεων για τις παραμέτρους ενός Κανονικού πληθυσμού, κάνοντας χρήση του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών. Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι διαθέτουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις τις οποίες παρουσιάζουμε στα επόμενα παραδείγματα αυτής της παραγράφου.

Παράδειγμα 5.19. Η διασπορά σ^2 είναι γνωστή και θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
Γνωρίζουμε ότι $\ell(\mu|\underline{x}) = -\frac{n\log\left(2\pi\sigma^2\right)}{2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ και $\widehat{\mu} = \overline{x}$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\log\lambda^*(\underline{x}) = \ell(\mu_0|\underline{x}) - \ell(\widehat{\mu}|\underline{x}) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\mu_0^2 - 2\mu_0\sum_{i=1}^{n}x_i - n\overline{x}^2 + 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\mu_0^2 - 2n\mu_0\overline{x} - n\overline{x}^2 + 2n\overline{x}^2\right] = -\frac{n}{2\sigma^2}\left(\overline{x}-\mu_0\right)^2 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\lambda^*(\underline{x}) < c \Leftrightarrow \frac{n\left(\overline{x}-\mu_0\right)^2}{\sigma^2} > c^* = -2\log c \Leftrightarrow \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} > c_\alpha = \sqrt{|c^*|}.$$

Επομένως, παίρνουμε τον έλεγχο

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} > c_\alpha \\ 0, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπό την H_0, γνωρίζουμε ότι $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} E_{\mu_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] &= P_{\mu_0}\left(\frac{\left|\overline{X}-\mu_0\right|}{\sigma}\sqrt{n} > c_\alpha\right) = P_{\mu_0}(Z > c_\alpha) + P_{\mu_0}(Z < -c_\alpha) \\ &= 1 - \Phi(c_\alpha) + \Phi(-c_\alpha) = 1 - \Phi(c_\alpha) + 1 - \Phi(c_\alpha) = 2\left[1-\Phi(c_\alpha)\right] = \alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Phi(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_\alpha = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = Z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} > Z_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}. \quad \square$$

Παρατήρηση 5.3. Στον παραπάνω έλεγχο, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu_0 \leqslant \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \\ &= \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \mu_0 \in I(\underline{x}) = \left[\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right\}, \end{aligned}$$

όπου $I(\underline{x})$ το $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για τη μέση τιμή μ της κανονικής κατανομής, όταν η διασπορά σ^2 είναι γνωστή. Δηλαδή, δεν απορρίπτω την $H_0 : \mu = \mu_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας α αν και μόνο αν το μ_0 ανήκει στο $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το μ. Ισοδύναμα, απορρίπτω την $H_0 : \mu = \mu_0$ αν και μόνο αν $\mu_0 \notin I(\underline{x})$.

Αυτή η σύνδεση μεταξύ διαστημάτων εμπιστοσύνης και ελέγχων υποθέσεων με αμφίπλευρη εναλλακτική ισχύει και γενικότερα και μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο εύρεσης ελέγχων υποθέσεων με αμφίπλευρη εναλλακτική. Σε αντιδιαστολή, ο προσδιορισμός του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών $\lambda^*(\underline{x})$ και, στη συνέχεια, η επίλυση της ανισότητας $\lambda^*(\underline{x}) < c$ για τον προσδιορισμό της κρίσιμης περιοχής του ελέγχου είναι μία αρκετά πιο δύσκολη διαδικασία.

Παράδειγμα 5.20*. Η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη και θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
Γνωρίζουμε ότι $\widehat{\mu} = \overline{x}$ και $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{(n-1)S^2}{n}$. Υπό την H_0, δηλαδή όταν $\mu = \mu_0$ γνωστό, τότε γνωρίζουμε ότι $\widehat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \log\lambda^*(\underline{x}) &= \ell\left(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2|\underline{x}\right) - \ell\left(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2|\underline{x}\right) \\ &= -\frac{n}{2}\log\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2} - \frac{1}{2\widehat{\sigma}_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 + \frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \\ &= -\frac{n}{2}\log\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2} - \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = -\frac{n}{2}\log\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}, \quad \text{όπου} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_0^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x} + \overline{x} - \mu_0)^2 \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2 + 2(\overline{x} - \mu_0)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\right] \\
&= \widehat{\sigma}^2 + (\overline{x} - \mu_0)^2 + \frac{2(\overline{x} - \mu_0)}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x}\right) = \widehat{\sigma}^2 + (\overline{x} - \mu_0)^2 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\log \lambda^*(\underline{x}) = -\frac{n}{2}\log\left[1 + \frac{(\overline{x} - \mu_0)^2}{\widehat{\sigma}^2}\right] = -\frac{n}{2}\log\left[1 + \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s^2}\right] \Rightarrow$$

$$\lambda^*(\underline{x}) < c \Leftrightarrow \log \lambda^*(\underline{x}) < c^* = \log c \Leftrightarrow 1 + \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s^2} > c^{**} = e^{-\frac{2c^*}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{s^2} > c^{***} = (n-1)\left(c^{**} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{s}\sqrt{n} > c_\alpha = \sqrt{|c^{***}|}.$$

Επομένως, παίρνουμε τον έλεγχο

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{n} > c_\alpha \\ 0, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{n} \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπό την H_0, γνωρίζουμε ότι $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
E_{\mu_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\mu_0}\left(\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{S}\sqrt{n} > c_\alpha\right) &= P_{\mu_0}(T > c_\alpha) + P_{\mu_0}(T < -c_\alpha) \\
= 1 - F_T(c_\alpha) + F_T(-c_\alpha) &= 2\left[1 - F_T(c_\alpha)\right] = \alpha \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$F_T(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_\alpha = F_T^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{n} > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s}\sqrt{n} \leqslant t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \end{cases}. \quad \square$$

5.6 Ασυμπτωτικοί Έλεγχοι Υποθέσεων

Ορισμός 5.10. Έστω δείγμα $\underline{X}$ μεγέθους n. Θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$. Λέμε ότι η κρίσιμη περιοχή K_n του ελέγχου φ_n έχει ασυμπτωτικό μέγεθος α αν ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0} P_{\underline{\vartheta}}\left(\underline{X} \in K_n\right) = \alpha.$$

Παράδειγμα 5.21. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\vartheta)$. Θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ σε ασυμπτωτικό επίπεδο σημαντικότητας α. Αν είναι γνωστό ότι η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου έχει τη μορφή $K_n = \{\underline{x} \in \{0,1\}^n : |\overline{x}_n - \vartheta_0| > c\}$, να προσδιοριστεί η σταθερά c. Υπό την H_0, δηλαδή όταν $\vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι

$$Q = \frac{\overline{X}_n - \vartheta_0}{\sqrt{\vartheta_0(1-\vartheta_0)}} \sqrt{n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $\left|\overline{X}_n - \vartheta_0\right| > c$ ως προς Q

$$\left|\overline{X}_n - \vartheta_0\right| > c \Leftrightarrow |Q| > c_\alpha = c \cdot \sqrt{\frac{n}{\vartheta_0(1-\vartheta_0)}}.$$

Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_{\vartheta_0}\left(\underline{X} \in K_n\right) &= \lim_{n\to\infty} P_{\vartheta_0}\left(\left|\overline{X}_n - \vartheta_0\right| > c\right) = \lim_{n\to\infty} P_{\vartheta_0}\left(|Q| > c_\alpha\right) \\
&= P_{\vartheta_0}(|Z| > c_\alpha) = P_{\vartheta_0}(Z > c_\alpha) + P_{\vartheta_0}(Z < -c_\alpha) \\
&= 1 - \Phi(c_\alpha) + \Phi(-c_\alpha) = 2\left[1 - \Phi(c_\alpha)\right] = \alpha \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Phi(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = Z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, παίρνουμε τον ασυμπτωτικό έλεγχο

$$\varphi_n(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{|\overline{x}_n - \vartheta_0|}{\sqrt{\vartheta_0(1-\vartheta_0)}}\sqrt{n} > Z_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \frac{|\overline{x}_n - \vartheta_0|}{\sqrt{\vartheta_0(1-\vartheta_0)}}\sqrt{n} \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η ασυμπτωτική κατανομή του $\overline{X}_n$ είναι συνεχής. $\square$

Κεφάλαιο 6

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1. Έστω τ.δ. X δείγμα μεγέθους 1 από την κατανομή Poisson με παράμετρο ϑ. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$.

Λύση. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$. Δηλαδή,

$$E(T) = \frac{1}{\vartheta} \Leftrightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^x}{x!} = \frac{1}{\vartheta} \Leftrightarrow \vartheta \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\vartheta^x}{x!} = e^{\vartheta} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\vartheta^{x+1}}{x!} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\vartheta^y}{y!} \Leftrightarrow \sum_{z=1}^{\infty} T(z-1) \frac{\vartheta^z}{(z-1)!} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\vartheta^y}{y!} \Leftrightarrow$$

$$T(0)\vartheta + T(1)\vartheta^2 + T(2)\frac{\vartheta^3}{2} + \cdots = 1 + \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2} + \cdots, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Εφόσον το αριστερό μέλος είναι μία δυναμοσειρά χωρίς σταθερό όρο και το δεξί μέλος είναι μία δυναμοσειρά με σταθερό όρο 1, είναι αδύνατο να είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, δε γίνεται να υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$.

Άσκηση 2. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Laplace}(\vartheta, \lambda)$ με $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ γνωστό και $f(x;\vartheta) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\vartheta|}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι

$$f(\underline{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = \frac{\lambda^n}{2^n} \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i - \vartheta|\right\} = g(T(\underline{x}), \vartheta) \cdot h(\underline{x}),$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(\underline{t}, \vartheta) = \exp\left\{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} |t_i(\underline{x}) - \vartheta|\right\}$ και $h(\underline{x}) = \frac{\lambda^n}{2^n}$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση

$\underline{T}(\underline{X}) = \underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι επαρκής για το ϑ.

Παρατηρούμε ότι η επαρκής στατιστική συνάρτηση που βρήκαμε ήταν το ίδιο το δείγμα $\underline{X}$. Σε αυτήν την περίπτωση δε θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε καμία επαρκή στατιστική συνάρτηση με μικρότερη διάσταση από αυτή. Φυσικά η συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n} |X_i - \vartheta|$ που εμφανίζεται στην από κοινού κατανομή του δείγματος δεν αποτελεί στατιστική συνάρτηση, αφού περιέχει την άγνωστη παράμετρο ϑ.

Άσκηση 3. Έστω $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Να δειχθεί ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\left(\overline{X}, S^2\right)$ και $\frac{R}{S}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, όπου $R = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ. είναι εύκολο να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι επαρκής για τη διανυσματική παράμετρο $\left(\mu, \sigma^2\right)$ και πλήρης. Τώρα, παρατηρούμε ότι $\underline{T}(\underline{X}) = \left(n\overline{X}, (n-1)S^2 + n\overline{X}^2\right) = \psi\left(\overline{X}, S^2\right)$. Από την πρόταση 3.3 (σελίδα 25) και την πρόταση 3.5 (σελίδα 32), συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}_1(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ είναι κι αυτή επαρκής για το $\left(\mu, \sigma^2\right)$ και πλήρης. Επίσης, παρατηρούμε ότι $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Έπεται ότι $\overline{X} = \sigma\overline{Z} + \mu$ και $X_{(i)} = \sigma Z_{(i)} + \mu$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα

$$R = X_{(n)} - X_{(1)} = \sigma Z_{(n)} + \mu - \left[\sigma Z_{(1)} + \mu\right] = \sigma\left[Z_{(n)} - Z_{(1)}\right],$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma Z_i + \mu - \left(\sigma\overline{Z} + \mu\right)\right]^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2 \Rightarrow \frac{R}{S} = \frac{Z_{(n)} - Z_{(1)}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2}}, \end{aligned}$$

η κατανομή της οποίας είναι προφανώς ανεξάρτητη του $\left(\mu, \sigma^2\right)$. Από το Θεώρημα Basu, έπεται ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\left(\overline{X}, S^2\right)$ και $\frac{R}{S}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 4. Έστω $X \sim \text{Poisson}(\vartheta)$ και $Y \sim \text{Poisson}(2\vartheta)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Λύση. Το στήριγμα $S = \{0, 1, 2, \ldots\}^2$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(x, y; \vartheta) = e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^x}{x!} \cdot e^{-2\vartheta}\frac{(2\vartheta)^y}{y!} = \frac{2^y}{x!y!}\exp\left\{(x+y)\log\vartheta - 3\vartheta\right\},$$

όπου $Q(\vartheta) = \log\vartheta$ και $T(x, y) = x + y$. Το $Q(\Theta) = \{\log\vartheta : \vartheta > 0\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X, Y) = X + Y$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Γνωρίζουμε ότι $T = X + Y \sim \text{Poisson}(3\vartheta) \Rightarrow E(T) = 3\vartheta$. Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T) = \frac{X+Y}{3}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Άσκηση 5. Έστω $X_i \sim U\left(-i(\vartheta - 1), i(\vartheta + 1)\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$X_i \sim U\left(-i(\vartheta-1), i(\vartheta+1)\right) \Leftrightarrow \frac{X_i}{i} \sim U\left(-\vartheta+1, \vartheta+1\right) \Leftrightarrow \frac{X_i}{i} - 1 \sim U\left(-\vartheta, \vartheta\right).$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.9 (σελίδα 29), έπεται ότι $Y_i = \left|\frac{X_i}{i} - 1\right| \sim U(0, \vartheta)$. Στο παράδειγμα 3.15 (σελίδα 35), δείξαμε ότι η $\psi(T) = g(T) + \frac{Tg'(T)}{n}$, όπου $T(\underline{Y}) = Y_{(n)}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$, αν g παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = T + \frac{T}{n} = \frac{n+1}{n} Y_{(n)} = \frac{n+1}{n} \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \left|\frac{X_i}{i} - 1\right|$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Άσκηση 6. Έστω $X_i \sim N(i\vartheta, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Λύση. Το στήριγμα $S = \mathbb{R}^n$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$\begin{aligned} f(\underline{x}; \vartheta) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - i\vartheta)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\} \exp\left\{\vartheta \sum_{i=1}^{n} i x_i - \frac{\vartheta^2}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right\}, \end{aligned}$$

όπου $Q(\vartheta) = \vartheta$ και $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} i x_i$. Το $Q(\Theta) = \{\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} i X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Γνωρίζουμε ότι

$$E(T) = \sum_{i=1}^{n} i E(X_i) = \vartheta \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \vartheta.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T) = \frac{6T}{n(n+1)(2n+1)}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Άσκηση 7. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\vartheta)$. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta^k$ για $k \in \mathbb{N}$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Lehmann - Scheffé. Για $k \leqslant n$, παρατηρούμε ότι $E\left(X_1 X_2 \cdots X_k\right) \underset{\text{ισον.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} \left[E(X_1)\right]^k = \vartheta^k$. Επομένως, η $W(\underline{X}) = X_1 X_2 \cdots X_k$ είναι μία α.ε. της $g(\vartheta)$. Εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι δυαδικές, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
E\left(W|T=t\right) &= E\left(X_1X_2\cdots X_k \left| \sum_{i=1}^{n} X_i = t\right.\right) \\
&= P\left(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = 1 \left| \sum_{i=1}^{n} X_i = t\right.\right) \\
&= \frac{P\left(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = 1, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = t\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = t\right)} \\
&= \frac{P\left(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = 1, \sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = t-k\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = t\right)} \\
&= \frac{P(X_1=1)P(X_2=1)\cdots P(X_k=1)P\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = t-k\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = t\right)} \\
&= \frac{\vartheta^k\binom{n-k}{t-k}\vartheta^{t-k}(1-\vartheta)^{n-t}}{\binom{n}{t}\vartheta^t(1-\vartheta)^{n-t}} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)},
\end{aligned}
$$

για $t = k, k+1, \ldots, n$. Από το θεώρημα Lehmann - Scheffé, προκύπτει ότι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ είναι η στατιστική συνάρτηση $\psi(T) = \frac{T(T-1)\cdots(T-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} I_{\{k,k+1,\ldots,n\}}(T)$. Για $k > n$, έστω ότι υπάρχει κάποια αμερόληπτη εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ της $g(\vartheta)$. Δηλαδή,

$$E\left[T(\underline{X})\right] = \vartheta^k \Leftrightarrow \sum_{\underline{x}\in\{0,1\}^n} T(\underline{x})P(\underline{X} = \underline{x}) = \vartheta^k \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\underline{x}\in\{0,1\}^n} T(\underline{x})\vartheta^{n\overline{x}}(1-\vartheta)^{n-n\overline{x}} = \vartheta^k, \quad \forall \vartheta \in (0,1).$$

Εφόσον το αριστερό μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n και το δεξί μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ακριβώς $k > n$, είναι αδύνατο να είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, δε γίνεται να υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta^k$.

Άσκηση 8. Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \text{Poisson}(\vartheta)$. Να δειχθεί ότι $E\left(S^2|\overline{X}\right) = \overline{X}$ και $\text{Var}\left(\overline{X}\right) < \text{Var}\left(S^2\right)$.

Λύση. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Παρατηρούμε ότι $T(\underline{X}) = n\overline{X} = \psi\left(\overline{X}\right)$. Από την πρόταση 3.3 (σελίδα 25) και την πρόταση 3.5 (σελίδα 32), συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T_1(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι κι αυτή επαρκής για το ϑ και πλήρης.

Προφανώς ισχύει ότι $E\left(\overline{X}\right) = E(X_1) = \vartheta$, δηλαδή η $T_1(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ. Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\psi(T_1) = T_1(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.1 (σελίδα 22), παίρνουμε ότι $E\left(S^2\right) = \mathrm{Var}(X_1) = \vartheta$, οπότε και η S^2 είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ. Από το θεώρημα Lehmann - Scheffé, προκύπτει ότι η στατιστική συνάρτηση $\varphi(T_1) = E\left(S^2|T_1\right) = E\left(S^2|\overline{X}\right)$ πρέπει να είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ. Εφόσον η $\overline{X}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ και είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι $E\left(S^2|\overline{X}\right) = \overline{X}$. Αφού η $\overline{X}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ και η S^2 είναι μία άλλη αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ, έπεται ότι $\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) < \mathrm{Var}\left(S^2\right)$.

Άσκηση 9. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \vartheta)$. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ, να υπολογιστεί η διασπορά της και να συγκριθεί με το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao.

Λύση. Στο παράδειγμα 3.15 (σελίδα 35), δείξαμε ότι η $\psi(T) = g(T) + \frac{Tg'(T)}{n}$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(n)}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$, αν g παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $W(\underline{X}) = T + \frac{T}{n} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.4 (σελίδα 26), η στατιστική συνάρτηση $X_{(n)}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_{(n)}}(t) = \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n} I_{(0,\vartheta)}(t) \Rightarrow E\left[X_{(n)}^2\right] = \int_0^\vartheta t^2 \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n} dt = \left[\frac{nt^{n+2}}{(n+2)\vartheta^n}\right]_0^\vartheta = \frac{n\vartheta^2}{n+2}.$$

Προφανώς ισχύει ότι $E(W) = \vartheta$. Επομένως,

$$\mathrm{Var}(W) = E\left(W^2\right) - [E(W)]^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2} E\left[X_{(n)}^2\right] - \vartheta^2 = \frac{(n+1)^2\vartheta^2}{n(n+2)} - \vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)}.$$

Υπολογίζουμε την πληροφορία κατά Fisher του δείγματος για το ϑ. Έχουμε

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \vartheta^{-n} I_{(0,\vartheta)}\left(x_{(n)}\right) \Rightarrow \log f(\underline{x}; \vartheta) = -n \log \vartheta I_{(0,\vartheta)}\left(x_{(n)}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\underline{x}; \vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} I_{(0,\vartheta)}\left(x_{(n)}\right) \Rightarrow I_{\underline{X}}(\vartheta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\underline{X}; \vartheta)\right)^2\right] = \frac{n^2}{\vartheta^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Var}(W) = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)} < \frac{\vartheta^2}{n^2} = \frac{[g'(\vartheta)]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)}$, όπου $g(\vartheta) = \vartheta$. Επομένως, η Α.Ε.Ε.Δ. $W(\underline{X})$ του ϑ έχει μικρότερη διασπορά από το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao. Αυτό δεν έρχεται σε αντιπαράθεση με το πόρισμα της ανισότητας Cramér - Rao, αφού η κατανομή του δείγματος προφανώς δεν ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας.

Σχετικά με τη συνάρτηση score του δείγματος, παρατηρούμε ότι

$$E\left[U(\underline{X}, \vartheta)\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\underline{X}; \vartheta)\right] = -\frac{n}{\vartheta} \neq 0,$$

$$\mathrm{Var}\left[U(\underline{X},\vartheta)\right] = E\left[U^2(\underline{X},\vartheta)\right] - \left[E\left(U(\underline{X},\vartheta)\right)\right]^2 = 0 \neq I_{\underline{X}}(\vartheta),$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(\underline{X};\vartheta)\right] = \frac{n}{\vartheta^2} \neq -I_{\underline{X}}(\vartheta),$$

$$I_{X_1}(\vartheta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(X_1;\vartheta)\right)^2\right] = \frac{1}{\vartheta^2} \neq \frac{1}{n}I_{\underline{X}}(\vartheta).$$

Δηλαδή, όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης score και της πληροφορίας κάτα Fisher που προκύπτουν από τις συνθήκες ομαλότητας δεν ικανοποιούνται.

Άσκηση 10. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $f(x_i;\vartheta) = \frac{\log\vartheta}{\vartheta-1}\vartheta^{x_i}$, $\vartheta > 1$ και $x_i \in (0,1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Να εξεταστεί αν υπάρχει αποτελεσματική εκτιμήτρια για κάποια παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$.

Λύση. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το ϑ

$$\log f(\underline{x};\vartheta) = \sum_{i=1}^{n}\log f(x_i;\vartheta) = n\log\log\vartheta - n\log(\vartheta-1) + \log\vartheta\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U(\underline{X},\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = \frac{n}{\vartheta\log\vartheta} - \frac{n}{\vartheta-1} + \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}x_i \\ &= \frac{1}{\vartheta}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n\vartheta}{\vartheta-1} + \frac{n}{\log\vartheta}\right) = \frac{n}{\vartheta}\left[\overline{X} - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta-1} - \frac{1}{\log\vartheta}\right)\right] \\ &= k(\vartheta)\left[T(\underline{X}) - g(\vartheta)\right], \end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} \neq 0, \forall\vartheta > 1$. Συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta-1} - \frac{1}{\log\vartheta}$.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{n\overline{x}\log\vartheta - n\left[\log(\vartheta-1) - \log\log\vartheta\right]\right\}, \text{ όπου } T(\underline{x}) = \overline{x},$$

$Q(\vartheta) = n\log\vartheta$ και $A(\vartheta) = n\left[\log(\vartheta-1) - \log\log\vartheta\right]$. Υπολογίζουμε ότι

$$Q'(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} \quad \text{και} \quad A'(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta-1} - \frac{n}{\vartheta\log\vartheta}.$$

Συμπεραίνουμε, και πάλι, ότι η $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)} = \frac{\vartheta}{\vartheta-1} - \frac{1}{\log\vartheta}$.

Άσκηση 11. Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\vartheta,\vartheta)$ με $\vartheta > 0$.

α. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}X_i$ δεν είναι επαρκής για το ϑ.

β. Να εξεταστεί αν υπάρχει αποτελεσματική εκτιμήτρια για κάποια παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$.

γ. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του ϑ. Να εξεταστεί αν είναι συνεπής εκτιμήτρια για το ϑ.

Λύση. α. Σύμφωνα με ιδιότητες ροπογεννητριών έχουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\vartheta, n\vartheta)$. Η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος δεδομένου ότι $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = t$, γράφεται

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,X_2,\ldots,X_n|T}(x_1,x_2,\ldots,x_n|t) &= \frac{f_{X_1,X_2,\ldots,X_n,T}(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)}{f_T(t)} \\
&= \frac{f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_T(t)} \\
&= \frac{f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)}{f_T(t)} \\
&= \frac{(2\pi\vartheta)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi n\vartheta}}\exp\left\{-\frac{(t-n\vartheta)^2}{2n\vartheta}\right\}} \\
&= \sqrt{n}\,(2\pi\vartheta)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2n\vartheta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Εφόσον η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος δεδομένου ότι $T(\underline{X}) = t$ εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ, συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ δεν μπορεί να είναι επαρκής για το ϑ.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το ϑ

$$
\log f(\underline{x};\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i;\vartheta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\vartheta}{2} \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
U(\underline{X},\vartheta) &= -\frac{n}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{2} = \frac{1}{2\vartheta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\vartheta^2 - n\vartheta\right) \\
&= \frac{n}{2\vartheta^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \vartheta(\vartheta+1)\right] = k(\vartheta)\left[T(\underline{X}) - g(\vartheta)\right],
\end{aligned}
$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{2\vartheta^2} \neq 0, \forall\vartheta > 0$. Έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta(\vartheta+1)$.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με

$$
f(\underline{x};\vartheta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{n\overline{x}} \exp\left\{-\frac{n}{2\vartheta}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n\vartheta}{2} - \frac{n\log\vartheta}{2}\right\},\ \text{όπου } T(\underline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,
$$

$Q(\vartheta) = -\frac{n}{2\vartheta}$ και $A(\vartheta) = \frac{n\vartheta}{2} + \frac{n \log \vartheta}{2}$. Υπολογίζουμε ότι

$$Q'(\vartheta) = \frac{n}{2\vartheta^2} \quad \text{και} \quad A'(\vartheta) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2\vartheta}.$$

Συμπεραίνουμε, και πάλι, ότι η $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)} = \vartheta(\vartheta + 1)$.

γ. Έστω $S(\underline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Έχουμε

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i;\vartheta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\vartheta}{2} \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{2} = 0 \Rightarrow -\vartheta^2 - \vartheta + S(\underline{X}) = 0 \Rightarrow$$

$$\vartheta_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4S(\underline{X})}}{-2} < 0, \quad \vartheta_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4S(\underline{X})}}{-2} > 0.$$

Δηλαδή, $\ell'(\vartheta|\underline{x}) > 0$ στο $(0, \vartheta_2)$ και $\ell'(\vartheta|\underline{x}) < 0$ στο (ϑ_2, ∞). Επομένως, η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\vartheta} = \frac{\sqrt{1+4S(\underline{X})}-1}{2}$.

Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $S(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $E\left(X_1^2\right) = \vartheta + \vartheta^2 = \vartheta(\vartheta+1)$. Από θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, η $\widehat{\vartheta} = g\left(S(\underline{X})\right) = \frac{\sqrt{1+4S(\underline{X})}-1}{2}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του $g\left(\vartheta + \vartheta^2\right) = \frac{\sqrt{1+4\vartheta+4\vartheta^2}-1}{2} = \frac{1+2\vartheta-1}{2} = \vartheta$, αφού η g είναι συνεχής στο $\Theta = (0,\infty)$.

Άσκηση 12. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta > 0$ και $f(x;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{x-\vartheta}{\vartheta}} I_{[\vartheta,\infty)}(x)$.

α. Να βρεθεί μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ και να εξεταστεί αν είναι πλήρης.

β. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του ϑ.

Λύση. α. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \vartheta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{[\vartheta,\infty)}(x_i) \\ &= e^n \vartheta^{-n} e^{-\frac{n}{\vartheta}\overline{x}} I_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right), \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\overline{x}, x_{(1)}\right)$, $g(t_1,t_2,\vartheta) = \vartheta^{-n} e^{-\frac{n}{\vartheta}t_1} I_{[\vartheta,\infty)}(t_2)$, $h(\underline{x}) = e^n$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, X_{(1)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Αρχικά υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} E\left(\overline{X}\right) &= E(X_1) = \int_{\vartheta}^{\infty} \frac{x}{\vartheta} e^{-\frac{x-\vartheta}{\vartheta}} dx = \int_0^{\infty} \frac{y+\vartheta}{\vartheta} e^{-\frac{y}{\vartheta}} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y}{\vartheta} e^{-\frac{y}{\vartheta}} dy + \vartheta \int_0^{\infty} \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{y}{\vartheta}} dy = \vartheta + \vartheta = 2\vartheta, \end{aligned}$$

$$F_{X_1}(x) = \int_{\vartheta}^{x} \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{y-\vartheta}{\vartheta}} dy = \int_0^{x-\vartheta} \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{z}{\vartheta}} dz = 1 - e^{-\frac{x-\vartheta}{\vartheta}}.$$

Σύμφωνα με τη σημείωση 3.4 (σελίδα 26), η στατιστική συνάρτηση $X_{(1)}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_{(1)}}(t) = \frac{n}{\vartheta} e^{-n\frac{t-\vartheta}{\vartheta}} I_{[\vartheta,\infty)}(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E\left[X_{(1)}\right] &= \int_{\vartheta}^{\infty} t\frac{n}{\vartheta} e^{-n\frac{t-\vartheta}{\vartheta}} dt = \int_0^{\infty} n\frac{u+\vartheta}{\vartheta} e^{-n\frac{u}{\vartheta}} du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{nu}{\vartheta} e^{-\frac{nu}{\vartheta}} du + \vartheta \int_0^{\infty} \frac{n}{\vartheta} e^{-\frac{nu}{\vartheta}} du = \frac{\vartheta}{n} + \vartheta = \frac{n+1}{n}\vartheta. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $E_\vartheta\left[\frac{\overline{X}}{2} - \frac{nX_{(1)}}{n+1}\right] = 0$, $\forall \vartheta > 0$, όμως $\frac{\overline{X}}{2} - \frac{nX_{(1)}}{n+1} \not\equiv 0$. Δηλαδή, για τη συνάρτηση $\varphi(t_1,t_2) = \frac{t_1}{2} - \frac{nt_2}{n+1}$, η σχέση $E_\vartheta\left[\varphi\left(\overline{X}, X_{(1)}\right)\right] = 0$, $\forall \vartheta > 0$, δε συνεπάγεται ότι $\varphi\left(\overline{X}, X_{(1)}\right) = 0$ με πιθανότητα 1. Επομένως, η επαρκής στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, X_{(1)}\right)$ **δεν** είναι πλήρης.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \begin{cases} e^n \vartheta^{-n} e^{-\frac{n\overline{x}}{\vartheta}}, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, υπολογίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = \log L(\vartheta|\underline{x}) = n - n\log\vartheta - \frac{n\overline{x}}{\vartheta} \Rightarrow \ell'(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{n\overline{x}}{\vartheta^2} = h(\vartheta).$$

Παρατηρούμε ότι $h(\vartheta) > 0$ αν και μόνο αν $\vartheta < \overline{x}$. Όμως, ισχύει ότι $\overline{x} > x_{(1)}$. Συμπεραίνουμε ότι η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = x_{(1)}$.

Άσκηση 13. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x;\vartheta_1,\vartheta_2) = \begin{cases} \vartheta_1\vartheta_2 e^{-\vartheta_2 x}, & x > 0 \\ (1-\vartheta_1)\vartheta_2 e^{\vartheta_2 x}, & x \leqslant 0 \end{cases},$$

όπου $\vartheta_1 \in [0,1]$ και $\vartheta_2 > 0$. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του $(\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Λύση. Έστω $K = \sum_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i)$ το πλήθος θετικών παρατηρήσεων και $S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

το άθροισμα απολύτων τιμών των παρατηρήσεων. Προφανώς, το πλήθος των μηθετικών παρατηρήσεων θα είναι $n-K$. Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$\begin{aligned} L(\vartheta_1,\vartheta_2|\underline{x}) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta_1,\vartheta_2) = \prod_{i:x_i>0} \vartheta_1\vartheta_2 e^{-\vartheta_2 x_i}\cdot \prod_{i:x_i\leqslant 0}(1-\vartheta_1)\vartheta_2 e^{\vartheta_2 x_i} \\ &= \vartheta_1^K\vartheta_2^K \exp\left\{-\vartheta_2\sum_{i:x_i>0}x_i\right\}\cdot(1-\vartheta_1)^{n-K}\vartheta_2^{n-K}\exp\left\{\vartheta_2\sum_{i:x_i\leqslant 0}x_i\right\} \\ &= \vartheta_1^K(1-\vartheta_1)^{n-K}\vartheta_2^n\exp\left\{-\vartheta_2\left(\sum_{i:x_i>0}x_i-\sum_{i:x_i\leqslant 0}x_i\right)\right\} \\ &= \vartheta_1^K(1-\vartheta_1)^{n-K}\vartheta_2^n\exp\left\{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n|x_i|\right\} = \vartheta_1^K(1-\vartheta_1)^{n-K}\vartheta_2^n e^{-\vartheta_2 S}\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\ell(\vartheta_1,\vartheta_2|\underline{x}) = \log L(\vartheta_1,\vartheta_2|\underline{x}) = K\log\vartheta_1+(n-K)\log(1-\vartheta_1)+n\log\vartheta_2-\vartheta_2 S\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\vartheta_1} = \frac{K}{\vartheta_1}-\frac{n-K}{1-\vartheta_1}=0,\quad \frac{\partial\ell}{\partial\vartheta_2}=\frac{n}{\vartheta_2}-S=0\Rightarrow\widehat{\vartheta_1}=\frac{K}{n},\quad \widehat{\vartheta_2}=\frac{n}{S}\quad \text{και}$$

$$\frac{\partial^2\ell}{\partial\vartheta_1^2} = -\frac{K}{\vartheta_1^2}-\frac{n-K}{(1-\vartheta_1)^2}<0,\quad \frac{\partial^2\ell}{\partial\vartheta_2^2}=-\frac{n}{\vartheta_2^2}<0,\quad \frac{\partial^2\ell}{\partial\vartheta_1\partial\vartheta_2}=0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta_1,\vartheta_2|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta=[0,1]\times(0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Παρατηρούμε ότι η Ε.Μ.Π. του ϑ_1 είναι το ποσοστό των θετικών παρατηρήσεων και η Ε.Μ.Π. του ϑ_2 είναι η αντίστροφη δειγματική μέση τιμή των απολύτων τιμών των παρατηρήσεων.

Άσκηση 14.* Θεωρούμε δύο ανεξάρτητα δείγματα $X_1,\dots,X_n$ και $Y_1,\dots,Y_n$ από την Εκθετική κατανομή με παραμέτρους λ και μ αντίστοιχα. Έστω ότι παρατηρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$Z_i=\min\{X_i,Y_i\},\quad W_i=\begin{cases}1, & Z_i=X_i\\ 0, & Z_i=Y_i\end{cases}.$$

Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του (λ,μ).

Λύση. Υπολογίζουμε πρώτα την από κοινού κατανομή του (Z_i,W_i). Έχουμε

$$\begin{aligned} P(Z_i>t,W_i=1) &= P(X_i>t,X_i<Y_i)=P(t<X_i<Y_i) \\ &= \int_t^\infty P(t<X_i<Y_i|X_i=x)f_{X_i}(x)dx \\ &= \int_t^\infty P(t<x<Y_i|X_i=x)f_{X_i}(x)dx = \int_t^\infty P(Y_i>x)f_{X_i}(x)dx \\ &= \int_t^\infty e^{-\mu x}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, έπεται ότι $P(Z_i>t,W_i=0)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$. Συμπεραίνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές Z_i και W_i είναι ανεξάρτητες με $Z_i \sim \text{Exp}(\lambda+\mu)$ και $W_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$\begin{aligned} L(\lambda,\mu|\underline{z},\underline{w}) &= \prod_{i=1}^n f(z_i;\lambda,\mu)f(w_i;\lambda,\mu) \\ &= (\lambda+\mu)^n \exp\left\{-(\lambda+\mu)\sum_{i=1}^n z_i\right\} \prod_{i:w_i=1}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\prod_{i:w_i=0}\frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ &= (\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)n\overline{z}}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n\overline{w}}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-n\overline{w}} = e^{-(\lambda+\mu)n\overline{z}}\lambda^{n\overline{w}}\mu^{n-n\overline{w}}. \end{aligned}$$

Επομένως, υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας

$$\ell(\lambda,\mu|\underline{z},\underline{w}) = \log L(\lambda,\mu|\underline{z},\underline{w}) = -(\lambda+\mu)n\overline{z} + n\overline{w}\log\lambda + n(1-\overline{w})\log\mu \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\lambda} = -n\overline{z} + \frac{n\overline{w}}{\lambda} = 0, \quad \frac{\partial\ell}{\partial\mu} = -n\overline{z} + \frac{n(1-\overline{w})}{\mu} = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}, \quad \widehat{\mu} = \frac{1-\overline{w}}{\overline{z}} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda^2} = -\frac{n\overline{w}}{\lambda^2} < 0, \quad \frac{\partial^2\ell}{\partial\mu^2} = -\frac{n\overline{w}}{\mu^2} < 0, \quad \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda\partial\mu} = 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\lambda,\mu|\underline{z},\underline{w})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0,\infty)^2$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε.

Αν $w_1 = \cdots = w_n = 0$, έχουμε $L(\lambda,\mu|\underline{z},\underline{w}) = e^{-(\lambda+\mu)n\overline{z}}\mu^n$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα ως προς λ και δεν υπάρχει η Ε.Μ.Π του λ. Ομοίως, αν $w_1 = \cdots = w_n = 1$, παίρνουμε $L(\lambda,\mu|\underline{z},\underline{w}) = e^{-(\lambda+\mu)n\overline{z}}\lambda^n$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα ως προς μ και δεν υπάρχει η Ε.Μ.Π του μ.

Άσκηση 15.* Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \text{Gamma}(a,\vartheta)$ με $a>0$ γνωστό και $\vartheta>0$.

α. Να δειχθεί ότι η $\delta(\underline{X}) = \frac{na-1}{n\overline{X}}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ, ενώ δεν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ.

β. Να συγκριθούν η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ, η Ε.Μ.Π. του ϑ κι η Ε.Μ.Ρ. του ϑ με βάση το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Λύση. α. Το στήριγμα $S=(0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(\underline{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta) = \exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^n x_i + na\log\vartheta\right\}\frac{1}{[\Gamma(a)]^n}\prod_{i=1}^n x_i^{a-1},$$

όπου $Q(\vartheta) = -\vartheta$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Το $Q(\Theta) = \{-\vartheta : \vartheta > 0\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(na,\vartheta)$

είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Αν $na > 1$, υπολογίζουμε ότι

$$E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_T(t)dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \frac{\vartheta^{na}}{\Gamma(na)} t^{na-1} e^{-\vartheta t} dt = \frac{\vartheta^{na}}{\Gamma(na)} \int_0^\infty t^{na-2} e^{-\vartheta t} dt$$
$$= \frac{\vartheta^{na}}{\Gamma(na)} \cdot \frac{\Gamma(na-1)}{\vartheta^{na-1}} = \frac{\vartheta\Gamma(na-1)}{(na-1)\Gamma(na-1)} = \frac{\vartheta}{na-1} \Rightarrow E\left(\frac{na-1}{T}\right) = \vartheta.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\delta(\underline{X}) = \frac{na-1}{T} = \frac{na-1}{n\overline{X}}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ. Αν $na > 2$, υπολογίζουμε τη διασπορά της $\delta(\underline{X})$

$$E\left(\frac{1}{T^2}\right) = \frac{\vartheta^{na}}{\Gamma(na)} \int_0^\infty t^{na-3} e^{-\vartheta t} dt = \frac{\vartheta^{na}}{\Gamma(na)} \cdot \frac{\Gamma(na-2)}{\vartheta^{na-2}} = \frac{\vartheta^2}{(na-1)(na-2)} \Rightarrow$$

$$E\left[\delta^2(\underline{X})\right] = (na-1)^2 E\left(\frac{1}{T^2}\right) = \frac{(na-1)\vartheta^2}{na-2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Var}\left[\delta(\underline{X})\right] = E\left[\delta^2(\underline{X})\right] - \left[E\left(\delta(\underline{X})\right)\right]^2 = \frac{(na-1)\vartheta^2}{na-2} - \vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{na-2}.$$

Υπολογίζουμε τώρα το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao. Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q'(\vartheta) = -1 \neq 0$ συνεχή συνάρτηση. Άρα, οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Εφόσον οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αρκεί να υπολογίσουμε την πληροφορία κατά Fisher της παρατήρησης X_1 για το ϑ. Έχουμε

$$\log f(x;\vartheta) = a\log\vartheta - \log\Gamma(a) + (a-1)\log x - \vartheta x \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(x;\vartheta) = \frac{a}{\vartheta} - x \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(x;\vartheta) = -\frac{a}{\vartheta^2} \Rightarrow$$

$$I_{X_1}(\vartheta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(X_1;\vartheta)\right] = \frac{a}{\vartheta^2} \Rightarrow I_{\underline{X}}(\vartheta) = n \cdot I_{X_1}(\vartheta) = \frac{na}{\vartheta^2} \in (0,\infty).$$

Συνεπώς, το κάτω φράγμα της διασποράς μίας αμερόληπτης εκτιμήτριας της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{[g'(\vartheta)]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)} = \frac{\vartheta^2}{na} < \frac{\vartheta^2}{na-2} = \operatorname{Var}\left[\delta(\underline{X})\right].$$

Επομένως, η Α.Ε.Ε.Δ. $\delta(\underline{X})$ δεν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ.

β. Αφού η $\delta(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ, έχουμε ότι

$$\text{ΜΤΣ}_\vartheta\left[\delta(\underline{X})\right] = \operatorname{Var}\left[\delta(\underline{X})\right] = \frac{\vartheta^2}{na-2}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την Ε.Μ.Π. του ϑ

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = -\vartheta\sum_{i=1}^{n} x_i + na\log\vartheta - n\log\Gamma(a) + (a-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{\vartheta} = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \frac{a}{\overline{X}} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{na}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall\vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Θα υπολογίσουμε τώρα την Ε.Μ.Ρ. του ϑ. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \frac{a}{\widetilde{\vartheta}} = \overline{X} \Rightarrow \widetilde{\vartheta} = \frac{a}{\overline{X}} = \widehat{\vartheta}.$$

Υπολογίζουμε το Μ.Τ.Σ. της Ε.Μ.Π. του ϑ

$$\mathrm{Var}(\widehat{\vartheta}) = n^2a^2\mathrm{Var}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{n^2a^2}{(na-1)^2}\mathrm{Var}\left(\frac{na-1}{T}\right) = \frac{n^2a^2\vartheta^2}{(na-2)(na-1)^2} \quad \text{και}$$

$$E(\widehat{\vartheta}) = naE\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{na\vartheta}{na-1} \Rightarrow b_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = E(\widehat{\vartheta}) - \vartheta = \frac{\vartheta}{na-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MT\Sigma}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) &= \mathrm{Var}(\widehat{\vartheta}) + b_\vartheta^2(\widehat{\vartheta}) = \frac{n^2a^2\vartheta^2}{(na-2)(na-1)^2} + \frac{\vartheta^2}{(na-1)^2} \\ &= \frac{(n^2a^2+na-2)\vartheta^2}{(na-2)(na-1)^2} = \frac{(na+2)\vartheta^2}{(na-1)(na-2)}.\end{aligned}$$

Συγκρίνουμε τα Μ.Τ.Σ. των δύο εκτιμητριών

$$\mathrm{MT\Sigma}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) > \mathrm{MT\Sigma}_\vartheta\left[\delta(\underline{X})\right] \Leftrightarrow \frac{(na+2)\vartheta^2}{(na-1)(na-2)} > \frac{\vartheta^2}{na-2} \overset{na>2}{\Leftrightarrow} na+2 > na-1.$$

Επομένως, η Α.Ε.Ε.Δ. $\delta(\underline{X})$ του ϑ έχει μικρότερο Μ.Τ.Σ. από την Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta}$ του ϑ.

Άσκηση 16.* Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\vartheta, 2\vartheta]$, όπου $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$. Να βρεθούν οι Ε.Μ.Ρ. και Ε.Μ.Π. του ϑ και να συγκριθούν με βάση το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Λύση. Θα βρούμε πρώτα την Ε.Μ.Ρ. του ϑ. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \frac{3\widetilde{\vartheta}}{2} = \overline{X} \Rightarrow \widetilde{\vartheta} = \frac{2\overline{X}}{3}.$$

Υπολογίζουμε το Μ.Τ.Σ. της Ε.Μ.Ρ.

$$\mathrm{Var}(\widetilde{\vartheta}) = \frac{4\mathrm{Var}(X_1)}{9n} = \frac{\vartheta^2}{27n} \quad \text{και} \quad E(\widetilde{\vartheta}) = \frac{2E(X_1)}{3} = \vartheta \Rightarrow b_\vartheta(\widetilde{\vartheta}) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{MT\Sigma}_\vartheta(\widetilde{\vartheta}) = \mathrm{Var}(\widetilde{\vartheta}) + b_\vartheta^2(\widetilde{\vartheta}) = \frac{\vartheta^2}{27n}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την Ε.Μ.Π. του ϑ. Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$\begin{aligned} L(\vartheta|\underline{x}) &= \frac{1}{\vartheta^n} \cdot I_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \cdot I_{(-\infty,2\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) = \frac{1}{\vartheta^n} \cdot I_{\left(-\infty,x_{(1)}\right]}(\vartheta) \cdot I_{\left[x_{(n)},\infty\right)}(2\vartheta) \\ &= \begin{cases} \vartheta^{-n}, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \text{ και } 2\vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} \vartheta^{-n}, & \frac{x_{(n)}}{2} \leqslant \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \end{aligned}$$

Για $\vartheta \in \left[\frac{x_{(n)}}{2}, x_{(1)}\right]$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = \frac{x_{(n)}}{2}$. Για $x \in [\vartheta, 2\vartheta]$, γνωρίζουμε ότι

$$f_{X_{(n)}}(x) = nf(x;\vartheta)\left[F(x;\vartheta)\right]^{n-1} = n \cdot \frac{1}{\vartheta} \cdot \left(\frac{x-\vartheta}{\vartheta}\right)^{n-1} = \frac{n(x-\vartheta)^{n-1}}{\vartheta^n}.$$

Υπολογίζουμε τα εξής

$$\begin{aligned} E\left[X_{(n)}\right] &= \int_\vartheta^{2\vartheta} x f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_\vartheta^{2\vartheta} \frac{nx(x-\vartheta)^{n-1}}{\vartheta^n}dx \\ &= \left[\frac{x(x-\vartheta)^n}{\vartheta^n}\right]_\vartheta^{2\vartheta} - \int_\vartheta^{2\vartheta} \frac{(x-\vartheta)^n}{\vartheta^n}dx = 2\vartheta - \left[\frac{(x-\vartheta)^{n+1}}{(n+1)\vartheta^n}\right]_\vartheta^{2\vartheta} = \frac{(2n+1)\vartheta}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[X_{(n)}^2\right] &= \int_\vartheta^{2\vartheta} x^2 f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_\vartheta^{2\vartheta} \frac{nx^2(x-\vartheta)^{n-1}}{\vartheta^n}dx \\ &= \left[\frac{x^2(x-\vartheta)^n}{\vartheta^n}\right]_\vartheta^{2\vartheta} - \int_\vartheta^{2\vartheta} \frac{2x(x-\vartheta)^n}{\vartheta^n}dx \\ &= 4\vartheta^2 - \frac{2\vartheta}{n+1}\int_\vartheta^{2\vartheta} \frac{x(n+1)(x-\vartheta)^n}{\vartheta^{n+1}}dx = 4\vartheta^2 - \frac{2\vartheta}{n+1} \cdot \frac{(2n+3)\,\vartheta}{n+2} \\ &= \frac{2(2n^2+4n+1)\vartheta^2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\left[X_{(n)}\right] = \frac{2(2n^2+4n+1)\vartheta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{(4n^2+4n+1)\vartheta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\vartheta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Υπολογίζουμε το Μ.Τ.Σ. της Ε.Μ.Π.

$$\mathrm{Var}(\widehat{\vartheta}) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}\left[X_{(n)}\right] \frac{n\vartheta^2}{4(n+2)(n+1)^2} \quad \text{και} \quad E(\widehat{\vartheta}) = \frac{(2n+1)\vartheta}{2(n+1)} \Rightarrow$$

$$b_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = E(\widehat{\vartheta}) - \vartheta = -\frac{\vartheta}{2(n+1)} \Rightarrow$$

$$\text{ΜΤΣ}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = \text{Var}(\widehat{\vartheta}) + b_\vartheta^2(\widehat{\vartheta}) = \frac{\vartheta^2}{2(n+1)(n+2)}.$$

Συγκρίνουμε τα Μ.Τ.Σ. των δύο εκτιμητριών

$$\text{ΜΤΣ}_\vartheta(\widetilde{\vartheta}) \geqslant \text{ΜΤΣ}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) \Leftrightarrow \frac{\vartheta^2}{27n} \geqslant \frac{\vartheta^2}{2(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow 2n^2 - 21n + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$n \leqslant \frac{21-\sqrt{409}}{4} \approx 0.1941 \quad \text{ή} \quad n \geqslant \frac{21+\sqrt{409}}{4} \approx 10.3059.$$

Επομένως, η Ε.Μ.Π. του ϑ έχει μικρότερο Μ.Τ.Σ. από την Ε.Μ.Ρ. του ϑ για $n \geqslant 11$.

***Άσκηση* 17.** Έστω δύο ανεξάρτητα δείγματα $X_1, \ldots, X_n$ και $Y_1, \ldots, Y_n$ από την Εκθετική κατανομή με παραμέτρους ϑ και $\frac{1}{\vartheta}$ αντίστοιχα.

α. Να βρεθεί μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ και να εξετασθεί αν είναι πλήρης.

β. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του ϑ. Να εξετασθεί αν είναι συνεπής εκτιμήτρια για το ϑ.

γ. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση. α. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(\underline{x}, \underline{y}; \vartheta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta) f(y_i;\vartheta) \\ &= \vartheta^n \exp\left\{-\vartheta \sum_{i=1}^n x_i\right\} \cdot \vartheta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n y_i\right\} = e^{-n\vartheta\overline{x} - \frac{n}{\vartheta}\overline{y}}, \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}, \underline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$, $g(t_1, t_2, \vartheta) = e^{-n\vartheta t_1 - \frac{n}{\vartheta} t_2}$, $h(\underline{x}, \underline{y}) = 1$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η $\underline{T}(\underline{X}, \underline{Y}) = \left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Παρατηρούμε ότι $n\overline{X} \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{n\overline{X}}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{\vartheta^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\vartheta x} dx = \frac{\vartheta^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-2} e^{-\vartheta x} dx \\ &= \frac{\vartheta^n}{(n-1)!} \frac{(n-2)!}{\vartheta^{n-1}} = \frac{\vartheta}{n-1}. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $E\left(\overline{Y}\right) = E(Y_1) = \vartheta$. Παρατηρούμε ότι $E_\vartheta\left(\frac{n-1}{n\overline{X}} - \overline{Y}\right) = 0$, $\forall \vartheta > 0$, όμως $\frac{n-1}{n\overline{X}} - \overline{Y} \not\equiv 0$. Δηλαδή, για τη συνάρτηση $\varphi(t_1, t_2) = \frac{n-1}{nt_1} - t_2$, η σχέση $E_\vartheta\left[\varphi\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\right] = 0$, $\forall \vartheta > 0$, δε συνεπάγεται ότι $\varphi\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = 0$ με πιθανότητα 1. Επομένως, η επαρκής στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}, \underline{Y}) = \left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ **δεν** είναι πλήρης.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$\ell(\vartheta|\underline{x},\underline{y}) = \log L(\vartheta|\underline{x},\underline{y}) = -n\vartheta\overline{x} - \frac{n\overline{y}}{\vartheta} \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x},\underline{y}) = -n\overline{x} + \frac{n\overline{y}}{\vartheta^2} = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \sqrt{\frac{\overline{y}}{\overline{x}}} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\vartheta|\underline{x},\underline{y}) = -\frac{2n\overline{y}}{\vartheta^3} < 0, \quad \forall\vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|\underline{x},\underline{y})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε.

Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\overline{X}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $E(X_1) = \frac{1}{\vartheta}$, ενώ η $\overline{Y}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $E(Y_1) = \vartheta$. Συμπεραίνουμε ότι η $\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n\right)$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του $\left(\frac{1}{\vartheta}, \vartheta\right)$. Από θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, η $\widehat{\vartheta} = g\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n\right) = \sqrt{\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n}}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του $g\left(\frac{1}{\vartheta}, \vartheta\right) = \vartheta$, αφού η g είναι συνεχής στο $\Theta = (0,\infty)^2$.

γ. Γνωρίζουμε ότι $n\overline{X} \sim \text{Gamma}(n,\vartheta)$ και $n\overline{Y} \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{\vartheta}\right)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, βρίσκουμε ότι $W_1 = 2n\vartheta\overline{X} \sim \chi^2_{2n}$ και $W_2 = \frac{2n}{\vartheta}\overline{Y} \sim \chi^2_{2n}$. Αφού τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι και οι τυχαίες μεταβλητές W_1 και W_2 είναι ανεξάρτητες. Συνδυάζοντας τις τυχαίες μεταβλητές W_1 και W_2, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα

$$Q = \frac{W_1}{2n} \cdot \frac{2n}{W_2} = \vartheta^2 \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \sim F_{2n,2n}.$$

Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής F για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = F_{2n,2n;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = F_{2n,2n;\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \vartheta^2 \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \sqrt{F_{2n,2n;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}} \leqslant \vartheta \leqslant \sqrt{F_{2n,2n;\frac{\alpha}{2}} \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}}.$$

Άσκηση 18. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in \mathbb{R}$ και $f(x;\vartheta) = e^{-(x-\vartheta)} I_{(\vartheta,\infty)}(x)$.

α. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Να δειχθεί ότι η T και η $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[X_i-X_{(1)}\right]$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

γ. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, όπου g παραγωγίσιμη συνάρτηση.

δ. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση. α. Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)\right\}\prod_{i=1}^{n} I_{(\vartheta,\infty)}(x_i) \\ &= e^{-n\overline{x}}e^{n\vartheta}I_{(\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) = g\left(T(\underline{x}),\vartheta\right)\cdot h(\underline{x}), \end{aligned}$$

όπου $T(\underline{x})=x_{(1)}$, $g(t,\vartheta)=e^{n\vartheta}I_{(\vartheta,\infty)}(t)$ και $h(\underline{x})=e^{-n\overline{x}}$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})=X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ.

Για να δείξουμε ότι η T είναι πλήρης για το ϑ, πρέπει να προσδιορίσουμε την κατανομή της. Θα βρούμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής των X_i. Για $x>\vartheta$, έχουμε

$$F(x;\vartheta)=\int_{\vartheta}^{x} f(y;\vartheta)dy=\int_{\vartheta}^{x} e^{-(y-\vartheta)}dy=\int_{0}^{x-\vartheta} e^{-u}du=1-e^{-(x-\vartheta)}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την κατανομή της T. Για $t>\vartheta$, έχουμε

$$f_T(t)=nf(t;\vartheta)\left[1-F(t;\vartheta)\right]^{n-1}=ne^{-(t-\vartheta)}e^{-(n-1)(t-\vartheta)}=ne^{-n(t-\vartheta)}.$$

Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)]=0$, $\forall\vartheta\in\mathbb{R}$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)]=\int_{\vartheta}^{\infty} f_T(t)\varphi(t)dt=ne^{n\vartheta}\int_{\vartheta}^{\infty} e^{-nt}\varphi(t)dt=0,\ \forall\vartheta\in\mathbb{R})\Rightarrow$$

$$\int_{\vartheta}^{\infty} e^{-nt}\varphi(t)dt=0,\quad \forall\vartheta\in\mathbb{R}.$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μάς δίνει ότι

$$-e^{-n\vartheta}\varphi\left(\vartheta\right)=0,\quad \forall\vartheta\in\mathbb{R}\Rightarrow\varphi(t)=0,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})=X_{(1)}$ είναι πλήρης.

β. Το ερώτημα μάς παραπέμπει στο θεώρημα Basu. Έχουμε δείξει ότι η T είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης, άρα αρκεί να δείξουμε ότι η κατανομή της S είναι ανεξάρτητη του ϑ. Παρατηρούμε ότι η κατανομή των X_i "μοιάζει" με την κατανομή Exp(1). Θα δείξουμε ότι $Y_i = X_i - \vartheta \sim \text{Exp}(1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, έχουμε

$$F_{Y_i}(y) = P(X_i - \vartheta \leqslant y) = F_{X_i}(y + \vartheta) = 1 - e^{-y}.$$

Επιπλέον, έπεται ότι $Y_{(1)} = X_{(1)} - \vartheta \sim \text{Exp}(n)$. Υπολογίζουμε ότι

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[X_i - X_{(1)}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \vartheta - \left(Y_{(1)} - \vartheta\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - Y_{(1)}\right],$$

οπότε η κατανομή της $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[Y_i - Y_{(1)}\right]$ είναι ανεξάρτητη του ϑ. Από το θεώρημα Basu, έπεται οι T και S είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

γ. Προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi(T)$ τέτοια ώστε $E\left[\psi(T)\right] = g(\vartheta)$. Επειδή το στήριγμα της κατανομής εξαρτάται από το ϑ, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$E[\psi(T)] = \int_{\vartheta}^{\infty} f_T(t)\psi(t)dt = ne^{n\vartheta} \int_{\vartheta}^{\infty} e^{-nt}\psi(t)dt = g(\vartheta) \Rightarrow$$

$$n\int_{\vartheta}^{\infty} e^{-nt}\psi(t)dt = e^{-n\vartheta}g(\vartheta) \Rightarrow$$

$$-ne^{-n\vartheta}\psi(\vartheta) = -ne^{-n\vartheta}g(\vartheta) + e^{-n\vartheta}g'(\vartheta),$$

αφού g παραγωγίσιμη. Άρα, τελικά

$$\psi(\vartheta) = g(\vartheta) - \frac{g'(\vartheta)}{n}, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T) = g(T) - \frac{g'(T)}{n}$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(1)}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$.

δ. Είδαμε ότι $Q = X_{(1)} - \vartheta \sim \text{Exp}(n)$, οπότε η Q αποτελεί μία αντιστρεπτή ποσότητα. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant X_{(1)} - \vartheta \leqslant c_2 \Leftrightarrow X_{(1)} - c_2 \leqslant \vartheta \leqslant X_{(1)} - c_1.$$

Το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι ίσο με $c_2 - c_1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \infty)$. Αφού θέλουμε το διάστημα εμπιστοσύνης να έχει το ελάχιστο μήκος, αυτό ισοδυναμεί με το να περιέχει τις τιμές της Q με την υψηλότερη πυκνότητα. Επομένως, το διάστημα $c_2 - c_1$ επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_1 = 0$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_2 έτσι, ώστε

$$P(Q \leqslant c_2) = 1 - e^{-nc_2} = 1 - \alpha \Rightarrow -nc_2 = \log\alpha \Rightarrow c_2 = \frac{1}{n}\log\frac{1}{\alpha}.$$

Τελικά, το διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$ είναι το $\left[X_{(1)} - \frac{1}{n}\log\frac{1}{\alpha}, X_{(1)}\right]$.

Άσκηση 19. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\vartheta, \vartheta+1]$, όπου $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}$. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση. Είναι εύκολο να δούμε ότι $F_{X_{(n)}}(t) = [F_{X_1}(t)]^n = (t-\vartheta)^n$ για $t \in [\vartheta, \vartheta+1]$. Ορίζουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα $Q = X_{(n)} - \vartheta$. Τότε, για $y \in [0,1]$, έχουμε

$$F_Q(y) = P\left[X_{(n)} - \vartheta \leqslant y\right] = F_T\left(y+\vartheta\right) = y^n \Rightarrow Q \sim \text{Beta}(n,1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant X_{(n)} - \vartheta \leqslant c_2 \Leftrightarrow X_{(n)} - c_2 \leqslant \vartheta \leqslant X_{(n)} - c_1.$$

Το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι ίσο με $c_2 - c_1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$. Αφού θέλουμε το διάστημα εμπιστοσύνης να έχει το ελάχιστο μήκος, αυτό ισοδυναμεί με το να περιέχει τις τιμές της Q με την υψηλότερη πυκνότητα. Επομένως, το διάστημα $c_2 - c_1$ επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_2 = 1$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_1 έτσι, ώστε

$$P(Q \geqslant c_1) = 1 - c_1^n = 1 - \alpha \Rightarrow c_1 = \alpha^{\frac{1}{n}}.$$

Τελικά, ένα διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$ είναι το $\left[X_{(n)} - 1, X_{(n)} - \alpha^{\frac{1}{n}}\right]$.

Άσκηση 20. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(\vartheta, \lambda)$ με $\lambda > 0$ γνωστό, $\vartheta > 0$ και $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\vartheta}{x}\right)^\lambda$, $x \geqslant \vartheta$. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ με $F_T(t) = 1 - [1 - F_{X_1}(t)]^n = 1 - \left(\frac{\vartheta}{t}\right)^{n\lambda}$ για $t \geqslant \vartheta$, δηλαδή $T \sim \text{Pareto}(\vartheta, n\lambda)$. Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{X_{(1)}}{\vartheta}$. Τότε, για $y \geqslant 1$, έχουμε

$$F_Q(y) = P\left[\frac{X_{(1)}}{\vartheta} \leqslant y\right] = F_T\left(\vartheta y\right) = 1 - \frac{\vartheta^{n\lambda}}{\vartheta^{n\lambda}y^{n\lambda}} = 1 - \frac{1}{y^{n\lambda}} \Rightarrow Q \sim \text{Pareto}(1, n\lambda).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(1)}}{\vartheta} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{X_{(1)}}{c_2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{X_{(1)}}{c_1}.$$

Το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι ίσο με $X_{(1)}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\ell(c_1, c_2) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}$ υπό τον περιορισμό

$$P(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = F_Q(c_2) - F_Q(c_1) = \frac{1}{c_1^{n\lambda}} - \frac{1}{c_2^{n\lambda}} = 1 - \alpha.$$

Παραγωγίζουμε τον παραπάνω περιορισμό ως προς c_1. Έχουμε

$$-\frac{n\lambda}{c_1^{n\lambda+1}} + \frac{n\lambda}{c_2^{n\lambda+1}}\frac{\partial c_2}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial c_2}{\partial c_1} = \frac{c_2^{n\lambda+1}}{c_1^{n\lambda+1}}.$$

Τώρα, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ℓ ως προς c_1. Έχουμε

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_1} = -\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial c_2}{\partial c_1} = -\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\frac{c_2^{n\lambda+1}}{c_1^{n\lambda+1}} = \frac{c_2^{n\lambda-1} - c_1^{n\lambda-1}}{c_1^{n\lambda+1}} > 0.$$

Πρέπει να ισχύει ότι $c_1 \geqslant 1$. Αφού το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του c_1, το διάστημα εμπιστοσύνης επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_1 = 1$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_2 έτσι, ώστε

$$P(Q \leqslant c_2) = 1 - \frac{1}{c_2^{n\lambda}} = 1 - \alpha \Rightarrow c_2 = \alpha^{-\frac{1}{n\lambda}}.$$

Τελικά, το διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ είναι το $\left[\alpha^{\frac{1}{n\lambda}} X_{(1)}, X_{(1)}\right]$.

Κεφάλαιο 7

Λύσεις Θεμάτων Εξετάσεων

7.1 Φεβρουάριος 2020

Θέμα 1. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1, \vartheta]$, $\vartheta \in \Theta = (1, \infty)$. Βρείτε την Ε.Μ.Π., την Ε.Μ.Ρ. και την Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Λύση. Στο παράδειγμα 3.29 (σελίδα 49), δείξαμε ότι η Ε.Μ.Π. του ϑ είναι η $\widehat{\vartheta} = X_{(n)}$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \frac{\widetilde{\vartheta}+1}{2} = \overline{X} \Rightarrow \widetilde{\vartheta} = 2\overline{X} - 1.$$

Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας για την Ε.Ο.Κ. Επομένως, θα δουλέψουμε με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher για την επάρκεια και με τον ορισμό για την πληρότητα. Στο παράδειγμα 3.4 (σελίδα 24), δείξαμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Θα δείξουμε τώρα ότι η $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι πλήρης, οπότε χρειάζεται να βρούμε την κατανομή της. Για $t \in (1, \vartheta)$, έχουμε

$$f_T(t) = nf(t;\vartheta)\,[F(t;\vartheta)]^{n-1} = n \cdot \frac{1}{\vartheta-1}\left(\frac{t-1}{\vartheta-1}\right)^{n-1} = \frac{n(t-1)^{n-1}}{(\vartheta-1)^n}.$$

Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall \vartheta > 1$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \int_1^\vartheta f_T(t)\varphi(t)dt = \frac{n}{(\vartheta-1)^n}\int_1^\vartheta (t-1)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta > 1 \Rightarrow$$

$$\int_1^\vartheta (t-1)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta > 1.$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μάς δίνει ότι

$$(\vartheta-1)^{n-1}\varphi(\vartheta)=0, \quad \forall\vartheta>1 \Rightarrow \varphi(t)=0, \quad \forall t\in(1,\infty)\supseteq(1,\vartheta).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})=X_{(n)}$ είναι πλήρης. Θέλουμε

$$E_\vartheta\left[\psi(T)\right]=\int_1^\vartheta f_T(t;\vartheta)\psi(t)dt=\int_1^\vartheta \frac{n(t-1)^{n-1}}{(\vartheta-1)^n}\psi(t)dt=\vartheta \Rightarrow$$

$$n\int_1^\vartheta (t-1)^{n-1}\psi(t)dt=\vartheta(\vartheta-1)^n \Rightarrow n(\vartheta-1)^{n-1}\psi(\vartheta)=(\vartheta-1)^n+n\vartheta(\vartheta-1)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\psi(\vartheta)=\frac{(n+1)\vartheta-1}{n}, \quad \forall\vartheta\in(1,\infty)\supseteq(1,\vartheta).$$

Από πόρισμα 3.2, προκύπτει ότι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ είναι η $\psi(T)=\frac{(n+1)T-1}{n}$, όπου $T(\underline{X})=X_{(n)}$.

Θέμα 2. Έστω $X_1,\ldots,X_n\sim \text{Exp}(\vartheta)$, όπου $n\geqslant 2$ και $\vartheta\in\Theta=(0,\infty)$ άγνωστη παράμετρος. Διατυπώστε το θεώρημα Basu και αποδείξτε μέσω αυτού ότι οι τυχαίες μεταβλητές $T=\sum_{i=1}^n X_i$ και $S=\frac{X_1}{T}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Λύση. Το στήριγμα $S=(0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(\underline{x};\vartheta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta)=\exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^n x_i+n\log\vartheta\right\},$$

όπου $Q(\vartheta)=-\vartheta$ και $T(\underline{x})=\sum_{i=1}^n x_i$. Το $Q(\Theta)=\{-\vartheta:\vartheta>0\}=(-\infty,0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})=\sum_{i=1}^n X_i\sim \text{Gamma}(n,\vartheta)$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Αρκεί να δείξουμε ότι η κατανομή της S είναι ανεξάρτητη του ϑ. Θα δείξουμε ότι $Y_i=\vartheta X_i\sim \text{Exp}(1)$ για $i=1,2,\ldots,n$. Για $y>0$, έχουμε

$$F_{Y_i}(y)=P(\vartheta X_i\leqslant y)=F_{X_i}\left(\frac{y}{\vartheta}\right)=1-e^{-y}.$$

Υπολογίζουμε ότι

$$S=\frac{X_1}{T}=\frac{\frac{Y_1}{\vartheta}}{\sum_{i=1}^n\frac{Y_i}{\vartheta}}=\frac{\frac{Y_1}{\vartheta}}{\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n Y_i}=\frac{Y_1}{\sum_{i=1}^n Y_i},$$

οπότε η κατανομή της S είναι ανεξάρτητη του ϑ. Από το θεώρημα Basu, έπεται οι T και S είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Θέμα 3. Έστω $\underline{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ το διάνυσμα των δεδομένων και $\delta=\delta(\underline{X})$ μία αμερόληπτη στατιστική συνάρτηση για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$. Υποθέτουμε ότι η δ έχει πεπερασμένη διασπορά και θεωρούμε την κλάση των αμερόληπτων εκτιμητριών του μηδενός

$$U_0 = \{T : T = T(\underline{X}) \text{ στατιστική συνάρτηση με } E_\vartheta(T) = 0 \text{ και } \mathrm{Var}_\vartheta(T) < \infty \ \forall \vartheta\}\,.$$

α. Να δείξετε ότι η $\delta(\underline{X})$ είναι Α.Ε.Ε.Δ. για την $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστη με κάθε $T \in U_0$.

β. Να αποδείξετε ότι αν η $\delta_1(\underline{X})$ είναι Α.Ε.Ε.Δ. για την $g_1(\vartheta)$ και η $\delta_2(\underline{X})$ είναι Α.Ε.Ε.Δ. για την $g_2(\vartheta)$, τότε η $\delta_1(\underline{X}) + \delta_2(\underline{X})$ είναι Α.Ε.Ε.Δ. για την $g_1(\vartheta) + g_2(\vartheta)$.

Λύση. α. Αρχικά υποθέτουμε ότι η $\delta(\underline{X})$ είναι ασυσχέτιστη με κάθε $T \in U_0$. Έστω $\delta'(\underline{X})$ μία άλλη αμερόληπτη στατιστική συνάρτηση για την $g(\vartheta)$. Τότε, παρατηρούμε ότι $E_\vartheta[\delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})] = E_\vartheta[\delta'(\underline{X})] - E_\vartheta[\delta(\underline{X})] = g(\vartheta) - g(\vartheta) = 0$, οπότε η $\delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του μηδενός. Από υπόθεση συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Cov}_\vartheta[\delta(\underline{X}), \delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})] = 0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\delta'(\underline{X}) = \delta(\underline{X}) + [\delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})]$, οπότε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\vartheta\left[\delta'(\underline{X})\right] &= \mathrm{Var}_\vartheta[\delta(\underline{X})] + \mathrm{Var}_\vartheta\left[\delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})\right] + 2\cdot\mathrm{Cov}_\vartheta\left[\delta(\underline{X}), \delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})\right] \\ &= \mathrm{Var}_\vartheta[\delta(\underline{X})] + \mathrm{Var}_\vartheta\left[\delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})\right].\end{aligned}$$

Εφόσον ισχύει ότι $\mathrm{Var}_\vartheta[\delta'(\underline{X}) - \delta(\underline{X})] \geqslant 0$, έπεται ότι $\mathrm{Var}_\vartheta[\delta'(\underline{X})] \geqslant \mathrm{Var}_\vartheta[\delta(\underline{X})]$. Αφού η αμερόληπτη στατιστική συνάρτηση $\delta'(\underline{X})$ ήταν τυχούσα, συμπεραίνουμε ότι η $\delta(\underline{X})$ έχει τη μικρότερη διασπορά ανάμεσα σε όλες τις αμερόληπτες στατιστικές συναρτήσεις για την $g(\vartheta)$, δηλαδή είναι η Α.Ε.Ε.Δ. για την $g(\vartheta)$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι η $\delta(\underline{X})$ είναι Α.Ε.Ε.Δ. για την $g(\vartheta)$, $T \in U_0$ και $\delta_a(\underline{X}) = \delta(\underline{X}) + aT(\underline{X})$ για $a \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\vartheta[\delta_a(\underline{X})] &= \mathrm{Var}_\vartheta[\delta(\underline{X})] + \mathrm{Var}_\vartheta[aT(\underline{X})] + 2\cdot\mathrm{Cov}_\vartheta[\delta(\underline{X}), aT(\underline{X})] \\ &= \mathrm{Var}_\vartheta[\delta(\underline{X})] + a^2\mathrm{Var}_\vartheta[T(\underline{X})] + 2a\cdot\mathrm{Cov}_\vartheta[\delta(\underline{X}), T(\underline{X})]\,.\end{aligned}$$

Έστω ότι ισχύει $\mathrm{Cov}_{\vartheta_0}[\delta(\underline{X}), T(\underline{X})] < 0$ για κάποιο ϑ_0. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$\begin{aligned}p(a) &= \mathrm{Var}_{\vartheta_0}[T(\underline{X})]\,a^2 + 2\cdot\mathrm{Cov}_{\vartheta_0}[\delta(\underline{X}), T(\underline{X})]\,a \\ &= a\left[\mathrm{Var}_{\vartheta_0}(T(\underline{X}))\,a + 2\cdot\mathrm{Cov}_{\vartheta_0}(\delta(\underline{X}), T(\underline{X}))\right],\end{aligned}$$

το οποίο έχει ρίζες το 0 και το $-\frac{2\mathrm{Cov}_{\vartheta_0}[\delta(\underline{X}),T(\underline{X})]}{\mathrm{Var}_{\vartheta_0}[T(\underline{X})]} > 0$. Εφόσον $\mathrm{Var}_{\vartheta_0}[T(\underline{X})] > 0$, για κάθε $a \in \left(0, -\frac{2\mathrm{Cov}_{\vartheta_0}[\delta(\underline{X}),T(\underline{X})]}{\mathrm{Var}_{\vartheta_0}[T(\underline{X})]}\right)$ θα ισχύει ότι $p(a) < 0$. Αν επιλέξουμε ένα τέτοιο a, τότε θα ισχύει ότι $\mathrm{Var}_{\vartheta_0}[\delta_a(\underline{X})] < \mathrm{Var}_{\vartheta_0}[\delta(\underline{X})]$, οπότε η $\delta(\underline{X})$ δε θα είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$. Ομοίως, αν $\mathrm{Cov}_{\vartheta_0}[\delta(\underline{X}), T(\underline{X})] > 0$ για κάποιο ϑ_0, τότε για κάθε $a \in \left(-\frac{2\mathrm{Cov}_{\vartheta_0}[\delta(\underline{X}),T(\underline{X})]}{\mathrm{Var}_{\vartheta_0}[T(\underline{X})]}, 0\right)$ θα ισχύει ότι $p(a) < 0$. Αν επιλέξουμε ένα τέτοιο a, τότε θα ισχύει ότι $\mathrm{Var}_{\vartheta_0}\left[\delta_a(\underline{X})\right] < \mathrm{Var}_{\vartheta_0}\left[\delta(\underline{X})\right]$, οπότε η $\delta(\underline{X})$ πάλι δε θα είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$. Συνεπώς, θα πρέπει να ισχύει ότι $\mathrm{Cov}_{\vartheta}\left[\delta(\underline{X}), T(\underline{X})\right] = 0$ για κάθε ϑ. Αφού η $T \in U_0$ ήταν τυχούσα, συμπεραίνουμε ότι η $\delta(\underline{X})$ είναι ασυσχέτιστη με κάθε αμερόληπτη εκτιμήτρια του μηδενός.

β. Βλέπουμε ότι $E_{\vartheta}\left[\delta_1(\underline{X}) + \delta_2(\underline{X})\right] = E_{\vartheta}\left[\delta_1(\underline{X})\right] + E_{\vartheta}\left[\delta_2(\underline{X})\right] = g_1(\vartheta) + g_2(\vartheta)$, δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $\delta_1(\underline{X}) + \delta_2(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη για την $g(\vartheta)$. Έστω $T(\underline{X})$ μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του μηδενός. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, έπεται ότι $\mathrm{Cov}_{\vartheta}\left[\delta_1(\underline{X}), T(\underline{X})\right] = 0$ και $\mathrm{Cov}_{\vartheta}\left[\delta_2(\underline{X}), T(\underline{X})\right] = 0$ για κάθε ϑ. Υπολογίζουμε ότι

$$\mathrm{Cov}_{\vartheta}\left[\delta_1(\underline{X}) + \delta_2(\underline{X}), T(\underline{X})\right] = \mathrm{Cov}_{\vartheta}\left[\delta_1(\underline{X}), T(\underline{X})\right] + \mathrm{Cov}_{\vartheta}\left[\delta_2(\underline{X}), T(\underline{X})\right] = 0.$$

Αφού η $T \in U_0$ ήταν τυχούσα, συμπεραίνουμε ότι η αμερόληπτη στατιστική συνάρτηση $\delta_1(\underline{X}) + \delta_2(\underline{X})$ είναι ασυσχέτιστη με κάθε αμερόληπτη εκτιμήτρια του μηδενός. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, συμπεραίνουμε ότι η $\delta_1(\underline{X}) + \delta_2(\underline{X})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. για την $g_1(\vartheta) + g_2(\vartheta)$.

Θέμα 4. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$ η άγνωστη παράμετρος. Να κατασκευαστεί $1 - \alpha$ Δ.Ε. για το ϑ ίσων ουρών και ελαχίστου μήκους.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ με συνάρτηση κατανομής $F_T(t) = \left[F_{X_1}(t)\right]^n = \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^n$ για $t \in (0, \vartheta)$. Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{X_{(n)}}{\vartheta}$. Τότε, για $y \in (0, 1)$, έχουμε

$$F_Q(y) = P\left[\frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leqslant y\right] = F_T(\vartheta y) = y^n.$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{X_{(n)}}{c_2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{X_{(n)}}{c_1}.$$

Για το Δ.Ε. ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες, ώστε

$$P(Q < c_1) = F_Q(c_1) = c_1^n = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = 1 - F_Q(c_2) = 1 - c_2^n = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Επομένως, το $\left[X_{(n)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}, X_{(n)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}\right]$ είναι ένα $1 - \alpha$ Δ.Ε. ίσων ουρών για την παράμετρο ϑ.

Το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι ίσο με $X_{(n)}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\ell(c_1, c_2) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}$ υπό τον περιορισμό

$$P(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = F_Q(c_2) - F_Q(c_1) = c_2^n - c_1^n = 1 - \alpha.$$

Παραγωγίζουμε τον παραπάνω περιορισμό ως προς c_2. Έχουμε

$$nc_2^{n-1} - nc_1^{n-1}\frac{\partial c_1}{\partial c_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial c_2} = \frac{c_2^{n-1}}{c_1^{n-1}}.$$

Τώρα, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ℓ ως προς c_2. Έχουμε

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_2} = -\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial c_1}{\partial c_2} + \frac{1}{c_2^2} = -\frac{1}{c_1^2}\frac{c_2^{n-1}}{c_1^{n-1}} + \frac{1}{c_2^2} = \frac{c_1^{n+1} - c_2^{n+1}}{c_1^{n+1}c_2^2} < 0.$$

Πρέπει να ισχύει ότι $c_2 \leqslant 1$. Αφού το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του c_2, το διάστημα εμπιστοσύνης επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_2 = 1$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_1 έτσι, ώστε

$$P(Q \geqslant c_1) = 1 - c_1^n = 1 - \alpha \Rightarrow c_1 = \alpha^{\frac{1}{n}}.$$

Τελικά, το $\left[X_{(n)}, \alpha^{-\frac{1}{n}}X_{(n)}\right]$ είναι ένα $1-\alpha$ Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για την παράμετρο ϑ.

Θέμα 5. Να κατασκευάσετε Ο.Ι.Ε. επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = 2\vartheta^2 x^3 e^{-\vartheta x^2} I_{(0,\infty)}(x)$, $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$.

Λύση. Το στήριγμα $S = (0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2n\log\vartheta\right\} 2^n \prod_{i=1}^n x_i^3, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = -\vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^n X_i^2$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς την $T^*(\underline{X}) = -\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T^*(\underline{x}) > c_\alpha \\ 0, & T^*(\underline{x}) \leqslant c_\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < c_\alpha^* = -c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \geqslant c_\alpha^* = -c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Ορίζουμε

$Y_i = X_i^2$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, έχουμε

$$F_{Y_i}(y) = P\left(X_i^2 \leqslant y\right) = P\left(|X_i| \leqslant \sqrt{y}\right) = P\left(X_i \leqslant \sqrt{y}\right) = F_{X_i}\left(\sqrt{y}\right) \Rightarrow$$

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_{X_i}\left(\sqrt{y}\right) = \frac{2\vartheta^2 y^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{y}} e^{-\vartheta y} = \vartheta^2 y e^{-\vartheta y} \Rightarrow Y_i \sim \text{Gamma}(2, \vartheta).$$

Για $\vartheta = \vartheta_0$, έπεται ότι $T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \text{Gamma}(2n, \vartheta_0)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, έχουμε ότι $Q = 2\vartheta_0 T \sim \chi^2_{4n}$. Λύνοντας την ανισότητα $T(\underline{X}) < c^*_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c^{**}_\alpha = 2\vartheta_0 c^*_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\vartheta_0}\left(T < c^*_\alpha\right) = P_{\vartheta_0}\left(Q < c^{**}_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}\left(Q \geqslant c^{**}_\alpha\right) = 1 - \alpha \Rightarrow c^{**}_\alpha = \chi^2_{4n;1-\alpha}$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < \chi^2_{4n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \chi^2_{4n;1-\alpha} \end{cases}.$$

7.2 Σεπτέμβριος 2019

Θέμα 1. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x;\vartheta) = 1 - \left(1 + x^2\right)^{-\vartheta}, \quad x > 0, \quad \vartheta > 0.$$

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta}$ του ϑ και μία αποτελεσματική εκτιμήτρια $U(\underline{X})$ του $\frac{1}{\vartheta}$. Είναι οι $\widehat{\vartheta}$ και $U(\underline{X})$ επαρκείς για το ϑ;

γ. Να δειχθεί ότι η $U(\underline{X})$ είναι συνεπής για το $\frac{1}{\vartheta}$.

Λύση. α. Αρχικά, υπολογίζουμε ότι

$$f(x;\vartheta) = F'(x;\vartheta) = 2\vartheta x \left(1 + x^2\right)^{-\vartheta - 1}.$$

Το στήριγμα $S = (0, \infty)^n$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(\underline{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = \exp\left\{-(\vartheta + 1)\sum_{i=1}^{n} \log\left(1 + x_i^2\right) + n\log\vartheta\right\} 2^n \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

όπου $A(\vartheta) = -n\log(\vartheta)$, $Q(\vartheta) = -(\vartheta + 1)$ και $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \log\left(1 + x_i^2\right)$. Το σύνολο $Q(\Theta) = \{-(\vartheta + 1) : \vartheta > 0\} = (-\infty, -1)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \log\left(1 + X_i^2\right)$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = -(\vartheta+1)\sum_{i=1}^{n} \log\left(1 + x_i^2\right) + n\log\vartheta + n\log 2 + \sum_{i=1}^{n}\log x_i \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \log\left(1 + x_i^2\right) + \frac{n}{\vartheta} = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\log\left(1 + x_i^2\right)}, \quad \text{όπου}$$

$$\ell''(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε.

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το ϑ

$$\begin{aligned} U(\underline{X},\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = -\sum_{i=1}^{n}\log\left(1 + X_i^2\right) + \frac{n}{\vartheta} \\ &= -n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1 + X_i^2\right) - \frac{1}{\vartheta}\right] = k(\vartheta)\left[T(\underline{X}) - \vartheta\right], \end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = -n \neq 0$, $\forall \vartheta > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η $U(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\log\left(1 + X_i^2\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$.

Παρατηρούμε ότι $T(\underline{X}) = nU(\underline{X}) = \frac{n}{\widehat{\vartheta}}$. Από την πρόταση 3.3 (σελίδα 25), συμπεραίνουμε ότι οι $\widehat{\vartheta}$ και $U(\underline{X})$ είναι κι αυτές επαρκείς για το ϑ.

γ. Παρατηρούμε ότι

$$f(x;\vartheta) = \frac{2x}{1+x^2}\exp\left\{-\vartheta\log\left(1+x^2\right) + \log\vartheta\right\},$$

όπου $A(\vartheta) = -\log(\vartheta)$, $Q(\vartheta) = \vartheta$ και $V(x) = -\log\left(1+x^2\right)$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.1 (σελίδα 18), έπεται ότι $E\left[V(X)\right] = A'(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta}$. Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $U_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $E\left[\log\left(1+X_1^2\right)\right] = -E\left[V(X)\right] = \frac{1}{\vartheta}$.

Θέμα 2. Έστω X τ.δ. μεγέθους 1 από πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x;\vartheta) = \frac{2x}{\vartheta}I_{[0,\vartheta]}(x) + \frac{2(1-x)}{1-\vartheta}I_{(\vartheta,1]}(x), \quad \vartheta \in (0,1).$$

α. Να βρεθεί Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta}$ του ϑ.

β. Να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. για το ϑ.

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι

$$L(\vartheta|x) = f(x;\vartheta) = \begin{cases} \frac{2(1-x)}{1-\vartheta}, & \vartheta < x \\ \frac{2x}{\vartheta}, & \vartheta \geqslant x \end{cases}.$$

Για $\vartheta < x$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Για $\vartheta \geqslant x$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|x)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = x$.

β. Τετριμμένα, έχουμε

$$f(x;\vartheta) = \frac{2x}{\vartheta} I_{[0,\vartheta]}(x) + \frac{2(1-x)}{1-\vartheta} I_{(\vartheta,1]}(x) = g\left(T(x),\vartheta\right) \cdot h(x),$$

όπου $T(x) = x$, $g(t,\vartheta) = \frac{2t}{\vartheta} I_{[0,\vartheta]}(t) + \frac{2(1-t)}{1-\vartheta} I_{(\vartheta,1]}(t)$ και $h(x) = 1$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$ είναι επαρκής για το ϑ. Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall \vartheta \in (0,1)$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned} E_\vartheta[\varphi(T)] &= \int_0^\vartheta \varphi(t) \frac{2t}{\vartheta} dt + \int_\vartheta^1 \varphi(t) \frac{2(1-t)}{1-\vartheta} dt \\ &= \frac{2}{\vartheta} \int_0^\vartheta t\varphi(t) dt + \frac{2}{1-\vartheta} \int_\vartheta^1 (1-t)\varphi(t) dt = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1-\vartheta) \int_0^\vartheta t\varphi(t) dt + \vartheta \int_\vartheta^1 (1-t)\varphi(t) dt = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \Rightarrow$$

$$-\int_0^\vartheta t\varphi(t) dt + \cancel{(1-\vartheta)\vartheta\varphi(\vartheta)} + \int_\vartheta^1 (1-t)\varphi(t) dt - \cancel{\vartheta(1-\vartheta)\varphi(\vartheta)} = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \Rightarrow$$

$$-\vartheta\varphi(\vartheta) - (1-\vartheta)\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \Rightarrow \varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$ είναι πλήρης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$E_\vartheta[\psi(T)] = \frac{2}{\vartheta} \int_0^\vartheta t\psi(t) dt + \frac{2}{1-\vartheta} \int_\vartheta^1 (1-t)\psi(t) dt = \vartheta \Rightarrow$$

$$2(1-\vartheta) \int_0^\vartheta t\psi(t) dt + 2\vartheta \int_\vartheta^1 (1-t)\psi(t) dt = \vartheta^2(1-\vartheta) \Rightarrow$$

$$-2\int_0^\vartheta t\psi(t) dt + \cancel{2(1-\vartheta)\vartheta\psi(\vartheta)} + 2\int_\vartheta^1 (1-t)\psi(t) dt - \cancel{2\vartheta(1-\vartheta)\psi(\vartheta)} = 2\vartheta - 3\vartheta^2 \Rightarrow$$

$$-2\vartheta\psi(\vartheta) - 2(1-\vartheta)\psi(\vartheta) = 2 - 6\vartheta \Rightarrow \psi(\vartheta) = 3\vartheta - 1, \quad \forall \vartheta \in (0,1).$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T) = 3T - 1 = 3X - 1$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Θέμα 3. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κανονική κατανομή $N(\vartheta, 1)$.

α. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

β. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση. α. Στο παράδειγμα 4.10 (σελίδα 66), δείξαμε ότι ένα $1-\alpha$ Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ είναι το $\left[\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, όπου $\sigma^2 = 1$.

β. Έστω $\vartheta_1 > \vartheta_0$. Στο παράδειγμα 5.2 (σελίδα 79), δείξαμε ότι ο Ο.Ι.Ε. για την εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ παίρνει τη μορφή

$$\varphi_1(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{x}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} > Z_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{x}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant Z_\alpha \end{cases}.$$

Τώρα έστω $\vartheta_1 < \vartheta_0$. Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε ομοίως τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi_2(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} < c_\alpha \\ 0, & \overline{x} \geqslant c_\alpha \end{cases}.$$

Υπό την $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι $T = \frac{\overline{X}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$. Λύνοντας την ανισότητα $\overline{X} < c_\alpha$ ως προς T, έχουμε ότι $T < c^*_\alpha = \frac{c_\alpha - \vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n}$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της τυπικής Κανονικής κατανομής $N(0,1)$, έχουμε ότι $P_{\vartheta_0}(\overline{X} < c_\alpha) = P_{\vartheta_0}(T < c^*_\alpha) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}(T > c^*_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow c^*_\alpha = Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$. Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi_2(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{x}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} < -Z_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{x}-\vartheta_0}{\sigma}\sqrt{n} \geqslant -Z_\alpha \end{cases}.$$

Έστω ότι υπάρχει Ο.Ι.Ε. φ^* για την εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 \neq \vartheta_0$. Σύμφωνα με τη μοναδικότητα στο λήμμα Neyman - Pearson, έπεται ότι ο έλεγχος φ^* θα πρέπει να ταυτίζεται με τον έλεγχο φ_1, αλλά και με τον έλεγχο φ_2. Όμως οι έλεγχοι φ_1 και φ_2 δεν ταυτίζονται μεταξύ τους, οπότε δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος Ο.Ι.Ε. φ^*.

Θέμα 4. Να κατασκευάσετε Ο.Ι.Ε. επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1} I_{(0,1)}(x)$, $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$.

Λύση. Βλέπε παράδειγμα 5.11 (σελίδα 89).

7.3 Ιούνιος 2019

Θέμα 1. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} x^{\frac{1-\vartheta}{\vartheta}}, \quad 0 < x < 1, \quad \vartheta > 0.$$

α. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. και η εκτιμήτρια ροπών της παραμέτρου ϑ.

β. Να κατασκευαστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το $\frac{1}{\vartheta}$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$.
[Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = -\log X$.]

Λύση. α. Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{\vartheta}-1} \Rightarrow \ell(\vartheta|\underline{x}) = -n \log \vartheta + \left(\frac{1}{\vartheta} - 1\right) \sum_{i=1}^{n} \log x_i \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x}) = -\frac{n}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{x_i}.$$

Επαληθεύουμε ότι το κρίσιμο σημείο $\widehat{\vartheta}$ που βρήκαμε είναι, πράγματι, το ολικό μέγιστο της $L(\vartheta|\underline{x})$ ως εξής

$$\ell''(\vartheta|\underline{x}) = \frac{n}{\vartheta^2} + \frac{2}{\vartheta^3} \sum_{i=1}^{n} \log x_i = \frac{n}{\vartheta^2} \left(1 - \frac{2\widehat{\vartheta}}{\vartheta}\right) \Rightarrow \ell''\left(\widehat{\vartheta}|\underline{x}\right) = -\frac{n}{\widehat{\vartheta}^2} < 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{\vartheta}$. Υπολογίζοντας τα όρια της συνάρτησης $L\left(\vartheta|\underline{x}\right)$ ως προς ϑ στα 0^+ και ∞, επαληθεύουμε ότι το $\widehat{\vartheta}$ είναι σημείο ολικού μεγίστου

$$\lim_{\vartheta \to \infty} L\left(\vartheta|\underline{x}\right) = \lim_{\vartheta \to \infty} \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{\vartheta}-1} = 0 \cdot 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{-1} = 0,$$

$$\lim_{\vartheta \to 0^+} L\left(\vartheta|\underline{x}\right) = \lim_{\vartheta \to 0^+} \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{\vartheta}-1} = 0.$$

β. Υπολογίζουμε πρώτα την κατανομή της $Y_i = \log \frac{1}{X_i}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ ως εξής

$$F_{Y_i}(y) = P\left(\log \frac{1}{X_i} \leqslant y\right) = P\left(X_i \geqslant e^{-y}\right) = F_{X_i}\left(e^{-y}\right) \Rightarrow$$

$$f_{Y_i}(y) = e^{-y} f_{X_i}\left(e^{-y}\right) = e^{-y} \frac{1}{\vartheta} e^{-y\frac{1-\vartheta}{\vartheta}} = \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{y}{\vartheta}}.$$

Άρα $Y_i \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Συμπεραίνουμε ότι $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathrm{Gamma}\left(n, \frac{1}{\vartheta}\right)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, παίρνουμε την αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{2T}{\vartheta} \sim \chi^2_{2n}$. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{2T}{\vartheta} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i}} \leqslant \frac{1}{\vartheta} \leqslant \frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i}}.$$

Θέμα 2. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\vartheta) = e^{\vartheta - x} I_{[\vartheta,\infty)}(x), \quad \vartheta \in \mathbb{R}.$$

α. Να εξετασθεί αν η παραπάνω κατανομή με σ.π.π. $f(x;\vartheta)$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. για την παράμετρο ϑ.

Λύση. α. Βλέπουμε άμεσα ότι η παραπάνω οικογένεια κατανομών δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ., αφού το στήριγμα $S = [\vartheta, \infty]$ εξαρτάται από το ϑ.

β. Στην άσκηση 18 (σελίδα 116), δείξαμε ότι η $\psi(T) = g(T) - \frac{g'(T)}{n}$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(1)}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$, αν g παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $W(\underline{X}) = T - \frac{1}{n} = X_{(1)} - \frac{1}{n}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Θέμα 3. α. Αποδείξτε το ακόλουθο. Έστω ότι η $f(x;\vartheta)$ ανήκει στη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. με σ.π.π. ή σ.π. της μορφής $f(x;\vartheta) = h(x)\beta(\vartheta)e^{\eta(\vartheta)T^*(x)}$. Αν η συνάρτηση $\eta(\vartheta)$ είναι φθίνουσα, τότε η f έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών με $T(\underline{x}) = -\sum\limits_{i=1}^{n} T^*(x_i)$.

β. Έστω ότι ο χρόνος ζωής X ενός λαμπτήρα ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\vartheta)$. Ο κατασκευαστής δηλώνει ότι ο μέσος χρόνος ζωής μ είναι τουλάχιστον 1800 ώρες. Καταναλωτές παραπονέθηκαν στον κατασκευαστή ότι ο μέσος χρόνος ζωής είναι μικρότερος. Να κατασκευάσετε Ο.Ι.Ε. για τον έλεγχο $H_0 : \mu \geqslant 1800$ vs. $H_1 : \mu < 1800$. Αν οι χρόνοι ζωής από ένα δείγμα 10 τέτοιων λαμπτήρων έδωσαν $\overline{X} = 1600$ ώρες, τι συμπέρασμα προκύπτει από τον έλεγχο σε ε.σ.σ. 5%;

Λύση. α. Έστω $\vartheta_1 < \vartheta_2$. Αφού η συνάρτηση $\eta(\vartheta)$ είναι φθίνουσα, θα ισχύει ότι $\eta(\vartheta_1) - \eta(\vartheta_2) \geqslant 0$. Υπολογίζουμε ότι

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = [\beta(\vartheta)]^n \exp\left\{\eta(\vartheta)\sum_{i=1}^{n} T^*(x_i)\right\} \prod_{i=1}^{n} h(x_i) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\lambda(\underline{x}) = \frac{L(\vartheta_2|\underline{x})}{L(\vartheta_1|\underline{x})} &= \left[\frac{\beta(\vartheta_2)}{\beta(\vartheta_1)}\right]^n \exp\left\{-\left[\eta(\vartheta_1)-\eta(\vartheta_2)\right]\sum_{i=1}^n T^*(x_i)\right\} \\ &= \left[\frac{\beta(\vartheta_2)}{\beta(\vartheta_1)}\right]^n e^{[\eta(\vartheta_1)-\eta(\vartheta_2)]T(\underline{x})}.\end{aligned}$$

Αφού $\eta(\vartheta_1)-\eta(\vartheta_2) \geqslant 0$, έπεται ότι ο λόγος πιθανοφανειών $\lambda(\underline{x})$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$, οπότε η f έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών ως προς $T(\underline{X})$.

β. Στην περίπτωση της Εκθετικής κατανομής, γνωρίζουμε ότι $\mu = \frac{1}{\vartheta}$. Επομένως, θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0 = \frac{1}{1800}$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0 = \frac{1}{1800}$. Γνωρίζουμε ότι η Εκθετική κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^n x_i + n\log\vartheta\right\}, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = -\vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^n X_i$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς την $T^*(\underline{X}) = -\sum\limits_{i=1}^n X_i$. Από θεώρημα Karlin - Rubin, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T^*(\underline{x}) > c_\alpha \\ 0, & T^*(\underline{x}) \leqslant c_\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^n x_i < c_\alpha^* = -c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^n x_i \geqslant c_\alpha^* = -c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Για $\vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι $T = \sum\limits_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, έχουμε ότι $Q = 2\vartheta_0 T \sim \chi^2_{2n}$. Λύνοντας την ανισότητα $T(\underline{X}) < c_\alpha^*$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c_\alpha^{**} = 2\vartheta_0 c_\alpha^*$. Σύμφωνα με τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_{\vartheta_0}\left(T < c_\alpha^*\right) = P_{\vartheta_0}\left(Q < c_\alpha^{**}\right) = \alpha \Rightarrow c_\alpha^{**} = \chi^2_{2n;1-\alpha}$. Επομένως, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^n x_i < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^n x_i \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \overline{x} < \frac{900}{n}\chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & \overline{x} \geqslant \frac{900}{n}\chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Για $n = 10$ και $\alpha = 0.05$, υπολογίζουμε ότι

$$\overline{x} = 1600 \geqslant 976.59 \approx 90\chi^2_{20;0.95} = \frac{900}{n}\chi^2_{2n;1-\alpha},$$

οπότε δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu \geqslant 1800$ σε ε.σ.σ. 5%.

Θέμα 4. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κατανομή Bernoulli(ϑ), $\vartheta \in (0,1)$.

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια για το ϑ και το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao.

β. Δείξτε ότι για $n = 1$ δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια για την ποσότητα $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Δείξτε ότι για $n = 2$ η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_1$ δεν είναι επαρκής για το ϑ.

Λύση. α. Βλέπε παράδειγμα 3.23 (σελίδα 42).

β. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X_1)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\vartheta) = \vartheta^2$. Δηλαδή,

$$E(T) = \vartheta^2 \Leftrightarrow \sum_{x=0}^{1} T(x)\vartheta^x(1-\vartheta)^{1-x} = \vartheta^2 \Leftrightarrow T(0)(1-\vartheta) + T(1)\vartheta = \vartheta^2, \quad \forall \vartheta \in (0,1).$$

Εφόσον το αριστερό μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1 και το δεξί μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ακριβώς 2, είναι αδύνατο να είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, δε γίνεται να υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος δεδομένου ότι $T(\underline{X}) = X_1 = x_1$, γράφεται

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 | X_1 = x_1) &= \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_1 = x_1)} = \frac{P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)}{P(X_1 = x_1)} \\ &= P(X_2 = x_2) = \vartheta^{x_2}(1-\vartheta)^{1-x_2}. \end{aligned}$$

Εφόσον η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος δεδομένου ότι $X_1 = x_1$ εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ, συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση X_1 δεν μπορεί να είναι επαρκής για το ϑ.

7.4 Φεβρουάριος 2019

Θέμα 1. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από την αρνητική διωνυμική με συνάρτηση πιθανότητας $f(x;\vartheta) = (x+1)\vartheta^2(1-\vartheta)^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$, όπου $\vartheta \in \Theta = (0,1)$ άγνωστη παράμετρος. Εξετάστε αν η κατανομή αυτή ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και υπολογίστε το κάτω φράγμα διασποράς της ανισότητας Cramér - Rao για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$. Τέλος, βρείτε την Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$, δείχνοντας ότι η διασπορά της επιτυγχάνει το κάτω φράγμα Cramér - Rao.

Λύση. Η κατανομή NegBin$(2,\vartheta)$ ανήκει πράγματι στην Ε.Ο.Κ., αφού το στήριγμα $S = \{0, 1, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(x;\vartheta) = (x+1)\exp\{x\log(1-\vartheta) - 2\log\vartheta\},$$

όπου $h(x) = x + 1$, $T(x) = x$, $Q(\vartheta) = \log(1-\vartheta)$ και $A(\vartheta) = 2\log\vartheta$.

Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q'(\vartheta) = -\frac{1}{1-\vartheta} \neq 0$ συνεχή συνάρτηση στο $(0,1)$. Άρα, οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Εφόσον οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αρκεί να υπολογίσουμε την πληροφορία κατά Fisher της παρατήρησης X_1 για το ϑ. Έχουμε

$$f(x;\vartheta) = (x+1)\vartheta^2(1-\vartheta)^x \Rightarrow \log f(x;\vartheta) = \log(x+1) + 2\log\vartheta + x\log(1-\vartheta) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(x;\vartheta) = \frac{2}{\vartheta} - \frac{x}{1-\vartheta} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(x;\vartheta) = -\frac{2}{\vartheta^2} - \frac{x}{(1-\vartheta)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_{X_1}(\vartheta) &= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(X_1;\vartheta)\right] = \frac{2}{\vartheta^2} + \frac{E(X_1)}{(1-\vartheta)^2} = \frac{2}{\vartheta^2} + \frac{2(1-\vartheta)}{\vartheta(1-\vartheta)^2} \\ &= \frac{2}{\vartheta^2(1-\vartheta)} \Rightarrow I_{\underline{X}}(\vartheta) = n \cdot I_{X_1}(\vartheta) = \frac{2n}{\vartheta^2(1-\vartheta)} \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Επομένως, το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao για την $g(\vartheta)$ ισούται με

$$\frac{[g'(\vartheta)]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)} = \frac{\vartheta^2(1-\vartheta)}{2n\vartheta^4} = \frac{1-\vartheta}{2n\vartheta^2}.$$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το ϑ

$$\log f(\underline{x};\vartheta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i;\vartheta) = \sum_{i=1}^n \log(x_i+1) + 2n\log\vartheta + \log(1-\vartheta)\sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U(\underline{X},\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = \frac{2n}{\vartheta} - \frac{1}{1-\vartheta}\sum_{i=1}^n X_i = -\frac{1}{1-\vartheta}\left[\sum_{i=1}^n X_i - \frac{2n(1-\vartheta)}{\vartheta}\right] \\ &= -\frac{1}{1-\vartheta}\left(\sum_{i=1}^n X_i + 2n - \frac{2n}{\vartheta}\right) = -\frac{2n}{1-\vartheta}\left(\frac{\overline{X}}{2} + 1 - \frac{1}{\vartheta}\right) \\ &= k(\vartheta)\left[T(\underline{x}) - g(\vartheta)\right], \end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = -\frac{2n}{1-\vartheta} \neq 0$, $\forall\vartheta \in (0,1)$. Επιβεβαιώνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \frac{\overline{X}}{2} + 1$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$, δείχνοντας ότι η διασπορά της επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao που υπολογίσαμε

$$\mathrm{Var}\left[T(\underline{X})\right] = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{4n}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{2(1-\vartheta)}{4n\vartheta^2} = \frac{1-\vartheta}{2n\vartheta^2} = \frac{[g'(\vartheta)]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)}.$$

Επομένως, η T είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$.

Θέμα 2. Έστω $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta, 1)$, όπου $n \geq 3$ και $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}$ άγνωστη παράμετρος. Διατυπώστε το θεώρημα Basu και αποδείξτε μέσω αυτού ότι οι τυχαίες μεταβλητές $T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ και $S = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2 - 2X_3}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Λύση. Το στήριγμα της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\} \exp\left\{\vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2}\vartheta^2\right\}, \end{aligned}$$

όπου $Q(\vartheta) = \vartheta$ και $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Το σύνολο $Q(\Theta) = \{\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση T είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Επίσης, παρατηρούμε ότι $Z_i = X_i - \vartheta \sim N(0,1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα

$$S = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2 - 2X_3} = \frac{\vartheta + Z_1 - (\vartheta + Z_2)}{\vartheta + Z_1 + \vartheta + Z_2 - 2(\vartheta + Z_3)} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_3},$$

η κατανομή της οποίας είναι προφανώς ανεξάρτητη του ϑ. Από το Θεώρημα Basu, έπεται ότι οι στατιστικές συναρτήσεις T και S είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Θέμα 3. Έστω $X_1, \ldots, X_n \sim N(\vartheta_1, \vartheta_2)$, όπου $(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ η διδιάστατη άγνωστη παράμετρος και $n \geqslant 2$.

α. Να δείξετε ότι η Α.Ε.Ε.Δ. της διασποράς ϑ_2 είναι η $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ και η Ε.Μ.Π. της ϑ_2 είναι η $\widehat{\vartheta_2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

β. Με βάση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, ποια εκτιμήτρια από τις παραπάνω προτιμάτε;

Λύση. α. Δείξαμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης στο παράδειγμα 3.12 (σελίδα 31). Τώρα, παρατηρούμε ότι $\underline{T}(\underline{X}) = \left(n\overline{X}, (n-1)S^2 + n\overline{X}^2\right) = \psi\left(\overline{X}, S^2\right)$. Συμπεραίνουμε ότι η $\underline{T}_1(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ είναι κι αυτή επαρκής για το ϑ και πλήρης. Από σημείωση 3.7, γνωρίζουμε ότι $\frac{(n-1)S^2}{\vartheta_2} \sim \chi^2_{n-1}$, δηλαδή $E\left[\frac{(n-1)S^2}{\vartheta_2}\right] = n - 1 \Rightarrow E\left(S^2\right) = \vartheta_2$. Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η S^2 είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ_2. Για τον υπολογισμό της Ε.Μ.Π. του ϑ_2, βλέπε παράδειγμα 3.35 (σελίδα 51).

β. Βλέπε παράδειγμα 3.35 (σελίδα 51).

Θέμα 4. Υπολογίστε ροποεκτιμήτριες των παραμέτρων $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ ακολουθεί Gamma$(\vartheta_1, \vartheta_2)$ με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x;\vartheta_1,\vartheta_2) = \frac{\vartheta_2^{\vartheta_1}}{\Gamma(\vartheta_1)} x^{\vartheta_1 - 1} e^{-\vartheta_2 x} I_{(0,\infty)}(x).$$

Λύση. Βλέπε παράδειγμα 3.39 (σελίδα 55).

Θέμα 5. Έστω $X_1, \ldots, X_n \sim f(x;\vartheta) = \frac{2x}{\vartheta^2} I_{[0,\vartheta]}(x)$, όπου $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Ανήκει η παραπάνω οικογένεια στην Ε.Ο.Κ.;

β. Βρείτε την Ε.Μ.Π., έστω $\widehat{\vartheta}$, της άγνωστης παραμέτρου ϑ.

γ. Αποδείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = \frac{\widehat{\vartheta}}{\vartheta}$ είναι ποσότητα οδηγός και, χρησιμοποιώντας την, κατασκευάστε διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$, όπου $\alpha \in (0,1)$.

Λύση. α. Βλέπουμε άμεσα ότι η παραπάνω οικογένεια κατανομών δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ., αφού το στήριγμα $S = [0,\vartheta]$ εξαρτάται από το ϑ.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = \frac{2^n}{\vartheta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} \left[x_i I_{[0,\vartheta]}(x_i)\right] = \frac{2^n}{\vartheta^{2n}} I_{[0,\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) \prod_{i=1}^{n} x_i$$
$$= \begin{cases} 2^n \vartheta^{-2n} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i, & \vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \vartheta < x_{(n)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \geqslant x_{(n)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = X_{(n)}$.

γ. Αρχικά υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής των X_i. Για $x \in [0,\vartheta]$, έχουμε

$$F(x;\vartheta) = \int_0^x f(y;\vartheta)dy = \int_0^x \frac{2y}{\vartheta^2} dy = \left[\left(\frac{y}{\vartheta}\right)^2\right]_0^x = \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^2.$$

Για την κατανομή της $X_{(n)}$, γνωρίζουμε ότι $F_{X_{(n)}}(x) = [F(x;\vartheta)]^n = \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{2n}$. Επομένως, για $y \in [0,1]$

$$F_Y(y) = P\left[\frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leqslant y\right] = F_{X_{(n)}}(\vartheta y) = y^{2n}.$$

Δηλαδή, η Y είναι ποσότητα οδηγός. Για το Δ.Ε. ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2, ώστε

$$P(Y < c_1) = F_Y(c_1) = c_1^{2n} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \quad \text{και}$$

$$P(Y > c_2) = 1 - F_Y(c_2) = 1 - c_2^{2n} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Y \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leqslant c_2 \Leftrightarrow X_{(n)} \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2n}} \leqslant \vartheta \leqslant X_{(n)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2n}}.$$

Θέμα 6. Να κατασκευάσετε Ο.Ι.Ε. επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1} I_{(0,1)}(x)$, $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$.
[Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της $Y = -2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \log(1-X_i)$, όταν η πραγματική τιμή του ϑ είναι ϑ_0.]

Λύση. Βλέπε παράδειγμα 5.11 (σελίδα 89).

7.5 Ιούνιος 2018

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\vartheta) = \frac{p\vartheta^p}{x^{p+1}}, \quad x \geqslant \vartheta > 0, \quad p > 2,$$

όπου p γνωστή σταθερά.

α. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta}$ της παραμέτρου ϑ και να δειχθεί ότι είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta) = \vartheta^k$.

γ. Έστω ότι n μεγάλο. Να δοθεί ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ της κατανομής σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση. α. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$\begin{aligned} L(\vartheta|\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = p^n \vartheta^{np} \prod_{i=1}^{n} \left[x_i^{-p-1} I_{[\vartheta,\infty)}(x_i)\right] = p^n \vartheta^{np} I_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{-p-1} \\ &= \begin{cases} p^n \vartheta^{np} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{-p-1}, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = X_{(1)}$.

Θα δείξουμε ότι η $X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Επειδή το στήριγμα $S = [\vartheta, \infty)$ της κατανομής εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ, η κατανομή δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και, κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας για την Ε.Ο.Κ. Επομένως, θα δουλέψουμε με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher για την επάρκεια και με τον ορισμό για την πληρότητα. Έχουμε

$$f(\underline{x};\vartheta) = p^n \vartheta^{np} I_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{-p-1} = g\left(T(\underline{x}),\vartheta\right) \cdot h(\underline{x}),$$

όπου $T(\underline{x}) = x_{(1)}$, $g(t,\vartheta) = \vartheta^{np} I_{[\vartheta,\infty)}(t)$ και $h(\underline{x}) = p^n \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{-p-1}$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $X_{(1)}$ είναι πλήρης, οπότε χρειάζεται να γνωρίζουμε την κατανομή της. Υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής των X_i. Για $x \geqslant \vartheta$, έχουμε

$$F(x;\vartheta) = \int_{\vartheta}^{x} f(y;\vartheta)dy = \int_{\vartheta}^{x} \frac{p\vartheta^p}{y^{p+1}}dy = -\left[\frac{\vartheta^p}{y^p}\right]_{\vartheta}^{x} = 1 - \left(\frac{\vartheta}{x}\right)^p.$$

Βρίσκουμε τώρα την κατανομή της $X_{(1)}$. Για $t \geqslant \vartheta$, γνωρίζουμε ότι

$$f_T(t) = nf(t;\vartheta)\left[1 - F(t;\vartheta)\right]^{n-1} = n\frac{p\vartheta^p}{t^{p+1}}\left(\frac{\vartheta}{t}\right)^{np-p} = \frac{np\vartheta^{np}}{t^{np+1}}.$$

Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall\vartheta \in (0,\infty)$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \int_{\vartheta}^{\infty} f_T(t)\varphi(t)dt = np\vartheta^{np}\int_{\vartheta}^{\infty} t^{-np-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,\infty) \Rightarrow$$

$$\int_{\vartheta}^{\infty} t^{-np-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,\infty).$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μάς δίνει ότι

$$-\vartheta^{-np-1}\varphi\left(\vartheta\right) = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,\infty) \Rightarrow \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης.

β. Προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi(T)$ τέτοια ώστε $E_\vartheta\left[\psi(T)\right] = g(\vartheta)$. Δοκιμάζουμε

$$\begin{aligned} E\left(T^k\right) &= \int_{\vartheta}^{\infty} t^k f_T(t)dt = \int_{\vartheta}^{\infty} np\vartheta^{np}t^{k-np-1}dt \overset{k-np<0}{=} np\vartheta^{np}\left[\frac{t^{k-np}}{k-np}\right]_{\vartheta}^{\infty} \\ &= -np\vartheta^{np}\frac{\vartheta^{k-np}}{k-np} = \frac{np\vartheta^k}{np-k} \Rightarrow E\left(\frac{np-k}{np}\cdot T^k\right) = \vartheta^k. \end{aligned}$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\delta(\underline{X}) = \left(1 - \frac{k}{np}\right)T^k$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(1)}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ για $k < np$.

Εναλλακτικά, επειδή το στήριγμα της κατανομής εξαρτάται από το ϑ, μπορούμε, πιο γενικά, να υπολογίσουμε ότι

$$E[\psi(T)] = \int_{\vartheta}^{\infty} f_T(t)\psi(t)dt = np\vartheta^{np}\int_{\vartheta}^{\infty} t^{-np-1}\psi(t)dt = g(\vartheta) \Rightarrow$$

$$np\int_{\vartheta}^{\infty} t^{-np-1}\psi(t)dt = \vartheta^{-np}g(\vartheta) \Rightarrow -np\vartheta^{-np-1}\psi(\vartheta) = -np\vartheta^{-np-1}g(\vartheta) + \vartheta^{-np}g'(\vartheta),$$

αφού $g(\vartheta) = \vartheta^k$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Άρα, τελικά,

$$\psi(\vartheta) = g(\vartheta) - \frac{\vartheta g'(\vartheta)}{np}, \quad \forall \vartheta \in (0,\infty) \supseteq [\vartheta,\infty) \Rightarrow$$

$$\psi(T) = g(T) - \frac{Tg'(T)}{np} = T^k - \frac{kT^k}{np} = \left(1 - \frac{k}{np}\right)T^k.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T)$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ για $k < np$.

γ. Θα υπολογίσουμε πρώτα τη μέση τιμή και τη διασπορά της κατανομής

$$E(X) = \int_{\vartheta}^{\infty} xf(x;\vartheta)dx = p\vartheta^p\int_{\vartheta}^{\infty} x^{-p}dx = p\vartheta^p\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_{\vartheta}^{\infty} \overset{p\geq 2}{=} \frac{p\vartheta}{p-1},$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{\vartheta}^{\infty} x^2f(x;\vartheta)dx = p\vartheta^p\int_{\vartheta}^{\infty} x^{1-p}dx = p\vartheta^p\left[\frac{x^{2-p}}{2-p}\right]_{\vartheta}^{\infty} \overset{p\geq 2}{=} \frac{p\vartheta^2}{p-2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \frac{p\vartheta^2}{p-2} - \frac{p^2\vartheta^2}{(p-1)^2} \\ &= \frac{p^3\vartheta^2 - 2p^2\vartheta^2 + p\vartheta^2 - p^3\vartheta^2 + 2p^2\vartheta^2}{(p-2)(p-1)^2} = \frac{p\vartheta^2}{(p-2)(p-1)^2}.\end{aligned}$$

Από κεντρικό οριακό θεώρημα, έπεται ότι

$$Q = \frac{\overline{X}_n - \frac{p\vartheta}{p-1}}{\sqrt{\frac{p\vartheta^2}{(p-2)(p-1)^2}}}\sqrt{n} = \left[\frac{(p-1)\overline{X}_n}{\vartheta} - p\right]\sqrt{\frac{n(p-2)}{p}} \xrightarrow{d} Z_1 = N(0,1).$$

Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$ για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = Z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το προσεγγιστικό Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \left[\frac{(p-1)\overline{X}_n}{\vartheta} - p\right]\sqrt{\frac{n(p-2)}{p}} \leqslant c_2 \Leftrightarrow$$

$$p + c_1\sqrt{\frac{p}{n(p-2)}} \leqslant \frac{(p-1)\overline{X}_n}{\vartheta} \leqslant p + c_2\sqrt{\frac{p}{n(p-2)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{p + c_2\sqrt{\frac{p}{n(p-2)}}} \leqslant \frac{\vartheta}{(p-1)\overline{X}_n} \leqslant \frac{1}{p + c_1\sqrt{\frac{p}{n(p-2)}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p\overline{X}_n}{p + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p}{n(p-2)}}} \leqslant \frac{p\vartheta}{p-1} \leqslant \frac{p\overline{X}_n}{p - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p}{n(p-2)}}}.$$

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από τη διωνυμική κατανομή με σ.π.

$$f(x;p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, N, \quad p \in \Theta = (0,1),$$

και N γνωστό.

α. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. του p.

β. Να υπολογιστεί το κάτω φράγμα διασποράς της ανισότητας Cramér - Rao για το p.

γ. Να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα και η συνέπεια της Α.Ε.Ε.Δ. του p.

δ. Έστω ότι ρωτήσαμε 100 ανθρώπους για το κατά πόσο ακούν ράδιο στο αυτοκίνητό τους το πρωί και 65 από αυτούς απάντησαν θετικά. Δώστε την εκτίμηση της πιθανότητας οι οδηγοί να ακούν ράδιο στο αμάξι τους το πρωί και το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της.

Λύση. α. Το στήριγμα $S = \{0, 1, \ldots, N\}^n$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του p και

$$\begin{aligned} f(\underline{x};p) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;p) = \exp\left\{\log p \sum_{i=1}^n x_i + \log(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right)\right\} \prod_{i=1}^n \binom{N}{x_i} \\ &= \exp\left\{\log\frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^n x_i - n\log\frac{1}{1-p}\right\}\prod_{i=1}^n \binom{N}{x_i}, \end{aligned}$$

όπου $Q(p) = \log\frac{p}{1-p}$ και $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^n x_i$. Το $Q(\Theta) = \left\{\log\frac{p}{1-p} : p \in (0,1)\right\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση T είναι επαρκής για το p και πλήρης. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$E\left(\overline{X}\right) = E(X_1) = Np \Rightarrow E\left(\frac{\overline{X}}{N}\right) = p.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\delta_n(\underline{X}) = \frac{\overline{X}}{N}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του p.

β. Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q'(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \neq 0$ συνεχή συνάρτηση στο $(0,1)$. Άρα, οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Εφόσον οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αρκεί να υπολογίσουμε την πληροφορία κατά Fisher της παρατήρησης X_1 για το p. Έχουμε

$$f(x;p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \Rightarrow \log f(x;p) = \log \binom{N}{x} + x \log p + (N-x) \log(1-p) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \log f(x;p) = \frac{x}{p} - \frac{N-x}{1-p} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial p^2} \log f(x;p) = -\frac{x}{p^2} - \frac{N-x}{(1-p)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_{X_1}(p) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log f(X_1;p)\right] &= \frac{E(X_1)}{p^2} + \frac{N - E(X_1)}{(1-p)^2} = \frac{Np}{p^2} + \frac{N - Np}{(1-p)^2} \\ &= \frac{N}{p(1-p)} \Rightarrow I_{\underline{X}}(p) = n \cdot I_{X_1}(p) = \frac{nN}{p(1-p)} \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Επομένως, το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao για το p ισούται με

$$\frac{1}{I_{\underline{X}}(p)} = \frac{p(1-p)}{nN}.$$

γ. Υπολογίζουμε τη διασπορά της Α.Ε.Ε.Δ. $\delta_n(\underline{X})$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\overline{X}}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{nN^2}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{Np(1-p)}{nN^2} = \frac{p(1-p)}{nN} = \frac{1}{I_{\underline{X}}(p)}.$$

Άρα, η Α.Ε.Ε.Δ. $\delta_n(\underline{X})$ είναι και αποτελεσματική εκτιμήτρια του p. Η $\delta_n(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του p και παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left[\delta_n(\underline{X})\right] = 0$. Από πρόταση 3.12, η $\delta_n(\underline{X})$ είναι και συνεπής για το p.

δ. Έχουμε δείγμα μεγέθους $n = 100$ από την κατανομή Bernoulli(p). Με βάση τα δεδομένα που έχουμε, μία "λογική" εκτίμηση του p θα ήταν η $\overline{x} = \frac{65}{100} = 0.65$. Σχετικά με το Δ.Ε. για το p, βλέπε παράδειγμα 4.22 (σελίδα 72).

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\vartheta) = (\vartheta + 5)x^{\vartheta+4}, \quad 0 < x < 1.$$

α. Χρησιμοποιώντας το λήμμα Neyman - Pearson, να βρεθεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ σε ε.σ.σ. α.

β. Ποια η συνάρτηση ισχύος $\pi(\vartheta)$, για $\vartheta \geqslant \vartheta_0$;

Λύση. α. Αρχικά δουλεύουμε με τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Γνωρίζουμε ότι

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = (\vartheta+5)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\vartheta+4} \Rightarrow \ell(\vartheta|\underline{x}) = n\log(\vartheta+5) + (\vartheta+4)\sum_{i=1}^{n} \log x_i.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow n\left[\log(\vartheta_0+5) - \log(\vartheta_1+5)\right] + (\vartheta_0-\vartheta_1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i < c \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_0-\vartheta_1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i < c^* = c - n\left[\log(\vartheta_0+5) - \log(\vartheta_1+5)\right] \overset{\vartheta_0-\vartheta_1<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\log x_i > c_\alpha = \frac{c^*}{\vartheta_0-\vartheta_1}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i > c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι $X_i \sim \text{Beta}(\vartheta+5, 1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.11 (σελίδα 30), υπολογίζουμε ότι $T = \sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{X_i} \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0+5)$, υπό την H_0. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, θέτουμε $Q = 2(\vartheta_0+5)\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{X_i} \sim \chi^2_{2n}$. Λύνοντας την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^{n}\log X_i > c_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c^*_\alpha = -2(\vartheta_0+5)c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, υπολογίζουμε ότι $P_{\vartheta_0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\log X_i > c_\alpha\right) = P_{\vartheta_0}\left(Q < c^*_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}\left(Q > c^*_\alpha\right) = 1-\alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}$. Ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2(\vartheta_0+5)\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{x_i} < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2(\vartheta_0+5)\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{1}{x_i} \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Γνωρίζουμε ότι

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{(\vartheta+4)\sum_{i=1}^{n}\log x_i + n\log(\vartheta+5)\right\}, \quad \text{όπου}$$

$Q(\vartheta) = \vartheta + 4$ γνησίως αύξουσα και $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\log X_i$. Συνεπώς, η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα Μ.Λ.Π. ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$. Επομένως, $\sup\limits_{\vartheta\leqslant\vartheta_0} E_\vartheta\left[\varphi(\underline{X})\right] = E_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha$ και ο φ είναι Ο.Ι.Ε. μεγέθους α για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

β. Για $\vartheta \geqslant \vartheta_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\pi(\vartheta) &= E_\vartheta\left[\varphi(\underline{X})\right] = P_\vartheta\left[2(\vartheta_0+5)\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{X_i} < \chi^2_{2n;1-\alpha}\right]\\ &= P_\vartheta\left[2(\vartheta+5)\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{X_i} < \chi^2_{2n;1-\alpha}\cdot\frac{\vartheta+5}{\vartheta_0+5}\right] = F_Y\left(\chi^2_{2n;1-\alpha}\cdot\frac{\vartheta+5}{\vartheta_0+5}\right),\end{aligned}$$

όπου $Y = -2(\vartheta+5)\sum\limits_{i=1}^{n}\log X_i \sim \chi^2_{2n} \equiv \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

7.6 Φεβρουάριος 2016

Θέμα 1. Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα από Διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(2, p)$ με σ.π.

$$f(x; p) = \binom{2}{x} p^x (1-p)^{2-x}, \quad x = 0, 1, 2, \quad 0 < p < 1.$$

α. Αν με $\overline{X}_\nu$ συμβολίσουμε τον δειγματικό μέσο, τότε βρείτε αμερόληπτη εκτιμήτρια του p της μορφής $c \cdot \overline{X}_\nu$, όπου c άγνωστη σταθερά. Δείξτε ότι είναι και συνεπής εκτιμήτρια του p.

β. Δείξτε ότι η παρακάτω εκτιμήτρια του p είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη και συνεπής

$$T_\nu = \frac{1}{2\nu+2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i + d\right), \quad d \in (0, 2).$$

γ. Για $p = \frac{1}{2}$, $d = 1$, βρείτε, με ασυμπτωτική προσέγγιση της κατανομής της T_ν, ακέραιο ν, ώστε

$$P\left(\left|T_\nu - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{8}\right) \approx 0.95.$$

Δεχθείτε ότι $\Phi(2) = 0.975$.

Λύση. α. Ζητάμε

$$E\left(c \cdot \overline{X}_\nu\right) = c \cdot E(X_1) = 2cp = p \Rightarrow c = \frac{1}{2},$$

$$\text{Var}\left(\frac{\overline{X}_\nu}{2}\right) = \frac{1}{4}\text{Var}(\overline{X}_\nu) = \frac{1}{4\nu}\text{Var}(X_1) = \frac{2p(1-p)}{4\nu} = \frac{p(1-p)}{2\nu} \Rightarrow$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\text{Var}\left(\frac{\overline{X}_\nu}{2}\right) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{p(1-p)}{2\nu} = 0.$$

Από πρόταση 3.12, έπεται ότι η $\frac{\overline{X}_\nu}{2}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του p.

β. Υπολογίζουμε ότι

$$E(T_\nu) = \frac{1}{2\nu+2}\left[\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i) + d\right] = \frac{2\nu p + d}{2\nu+2} \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} E(T_\nu) = p,$$

$$\mathrm{Var}\,(T_\nu) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{1}{(2\nu+2)^2}\sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{2\nu p(1-p)}{4(\nu+1)^2} \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\mathrm{Var}(T_\nu) = 0.$$

Από πρόταση 3.12, έπεται ότι η T_ν είναι συνεπής εκτιμήτρια του p.

γ. Για $p = \frac{1}{2}$, $d = 1$, παίρνουμε ότι

$$E\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \nu E(X_1) = 2\nu p = \nu,$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \nu\mathrm{Var}(X_1) = 2\nu p(1-p) = \frac{\nu}{2}.$$

Από κεντρικό οριακό θεώρημα, προκύπτει ότι

$$\sqrt{\frac{2}{\nu}}\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i - \nu\right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Υπολογίζουμε την ασυμπτωτική κατανομή της T_ν

$$T_\nu - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(\nu+1)}\left[\sum_{i=1}^{\nu} X_i + 1 - (\nu+1)\right] = \frac{1}{2(\nu+1)}\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i - \nu\right) \Rightarrow$$

$$2(\nu+1)\sqrt{\frac{2}{\nu}}\left(T_\nu - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\nu}}\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i - \nu\right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική κατανομή της T_ν, ζητάμε

$$\begin{aligned} P\left(\left|T_\nu - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{8}\right) &= P\left[2(\nu+1)\sqrt{\frac{2}{\nu}}\left|T_\nu - \frac{1}{2}\right| < \frac{\nu+1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right] \\ &\approx P\left(|Z| < \frac{\nu+1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right) = \Phi\left(\frac{\nu+1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right) - \Phi\left(-\frac{\nu+1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\nu+1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right) - 1 = 0.95 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{\nu+1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right) = 0.975 = \Phi(2) \Rightarrow \frac{\nu+1}{4}\sqrt{\frac{2}{\nu}} = 2 \Rightarrow \frac{2(\nu+1)^2}{\nu} = 64 \Rightarrow$$

$$\nu^2 - 30\nu + 1 = 0 \Rightarrow \nu = \frac{30 \pm \sqrt{896}}{2} = \frac{30 \pm 8\sqrt{14}}{2} = 15 \pm 4\sqrt{14} \Rightarrow$$

$$\nu = \left\lceil 15 + 4\sqrt{14}\right\rceil \approx 30.$$

Θέμα 2. Έστω $X \sim \text{Exp}(\vartheta)$ και $Y \sim \text{Gamma}(3, \vartheta)$ δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $\vartheta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας της Y,

$$f_Y(y; \vartheta) = \frac{\vartheta^3}{2} y^2 e^{-\vartheta y}, \quad y > 0.$$

α. Βρείτε με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher επαρκή σ.σ. $T(X, Y)$ του ϑ.

β. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ (πλήρης αιτιολόγηση).

γ. Να κατασκευαστεί $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.

Λύση. α. Λόγω της ανεξαρτησίας των X και Y, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x, y; \vartheta) &= f_X(x; \vartheta) f_Y(y; \vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x} \cdot \frac{\vartheta^3}{2} y^2 e^{-\vartheta y} = \frac{\vartheta^4}{2} y^2 e^{-\vartheta(x+y)} \\ &= g(T(x, y), \vartheta) \cdot h(x, y), \end{aligned}$$

όπου $T(x, y) = x + y$, $g(t, \vartheta) = \vartheta^4 e^{-\vartheta t}$ και $h(x, y) = \frac{y^2}{2}$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X, Y) = X + Y$ είναι επαρκής για το ϑ.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$\ell(\vartheta | x, y) = \log f(x, y; \vartheta) = 4 \log \vartheta - \log 2 + 2 \log y - \vartheta(x + y) \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta | x, y) = \frac{4}{\vartheta} - (x + y) = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \frac{4}{x + y} \quad \text{και} \quad \ell''(\vartheta | x, y) = -\frac{4}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta | x, y)$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0, \infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε.

γ. Έχουμε ότι $X \sim \text{Exp}(\vartheta) \equiv \text{Gamma}(1, \vartheta)$ και $Y \sim \text{Gamma}(3, \vartheta)$. Συνεπώς, $X + Y \sim \text{Gamma}(4, \vartheta)$. Από σημείωση 3.7, έπεται ότι η $Q = 2\vartheta(X + Y) \sim \chi^2_8$ είναι ποσότητα οδηγός. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{8; 1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{8; \frac{\alpha}{2}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant 2\vartheta(X + Y) \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{8; 1-\frac{\alpha}{2}}}{2(X + Y)} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{8; \frac{\alpha}{2}}}{2(X + Y)}.$$

Θέμα 3. Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα από διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$

με
$$f(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n, \quad 0 < p < 1,$$
όπου n, p άγνωστες παράμετροι.

α. Εξετάστε κατά πόσο η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Να εκτιμηθούν τα n και p με τη μέθοδο των ροπών. Ποια συνθήκη θα πρέπει να πληρούν τα δεδομένα για να είναι πράγματι εκτιμήτριες;

γ. Έστω n γνωστό. Βρείτε επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση για το p.

δ. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του p (n γνωστό).

Λύση. α. Το στήριγμα $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο n, άρα η κατανομή δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Βλέπε παράδειγμα 3.43 (σελίδα 56).

γ. Βλέπε θέμα 2, Ιούνιος 2018 (σελίδα 140).

δ. Βλέπε θέμα 2, Ιούνιος 2018 (σελίδα 140).

Θέμα 4. Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $X \sim \text{Exp}(\vartheta)$ και $Y \sim \text{Exp}(5\vartheta)$ με $\vartheta > 0$.

α. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $g(\vartheta) = 5\sqrt{\vartheta} + 8$.

β. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α.
[Υπόδειξη: Μελετήστε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W = 5Y$.]

Λύση. α. Θα βρούμε πρώτα την Ε.Μ.Π. του ϑ. Λόγω ανεξαρτησίας των X και Y, έχουμε

$$L(\vartheta|x, y) = f(x;\vartheta) f(y;\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x} \cdot 5\vartheta e^{-5\vartheta y} = 5\vartheta^2 e^{-\vartheta(x+5y)} \Rightarrow$$

$$\ell(\vartheta|x, y) = \log 5 + 2\log\vartheta - \vartheta(x+5y) \Rightarrow \ell'(\vartheta|x, y) = \frac{2}{\vartheta} - (x+5y) = 0 \Rightarrow$$

$$\widehat{\vartheta} = \frac{2}{x+5y} \quad \text{και} \quad \ell''(\vartheta|x, y) = -\frac{2}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|x, y)$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta = (0, \infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Από την ιδιότητα του αναλλοίωτου των Ε.Μ.Π., έπεται ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $g(\vartheta) = 5\sqrt{\vartheta} + 8$ είναι η $g(\widehat{\vartheta}) = 5\sqrt{\widehat{\vartheta}} + 8 = 5\sqrt{\frac{2}{x+5y}} + 8$, αφού η g είναι 1-1 συνάρτηση.

β. Υπολογίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta_0|x, y) - \ell(\vartheta_1|x, y) < c \Leftrightarrow 2\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0)(x+5y) < c \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)(x + 5y) < c^* = c - 2(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1) \overset{\vartheta_1 - \vartheta_0 > 0}{\Leftrightarrow}$$
$$x + 5y < c_\alpha = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & x + 5y < c_\alpha \\ 0, & x + 5y \geqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπολογίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W = 5Y$. Για $w > 0$, έχουμε

$$F_W(w) = P(5Y \leqslant w) = F_Y\left(\frac{w}{5}\right) = 1 - e^{-5\vartheta\frac{w}{5}} = 1 - e^{-\vartheta w}.$$

Άρα $W = 5Y \sim \text{Exp}(\vartheta) \Rightarrow X + 5Y \sim \text{Gamma}(2, \vartheta)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, θέτουμε $Q = 2\vartheta_0(X + 5Y) \sim \chi^2_4$, υπό την H_0. Λύνοντας την ανισότητα $X + 5Y < c_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c^*_\alpha = 2\vartheta_0 c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, έχουμε ότι $P_{\vartheta_0}(X + 5Y < c_\alpha) = P_{\vartheta_0}(Q < c^*_\alpha) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}(Q > c^*_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{4;1-\alpha}$. Ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0(x + 5y) < \chi^2_{4;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0(x + 5y) \geqslant \chi^2_{4;1-\alpha} \end{cases}.$$

7.7 Φεβρουάριος 2015

Θέμα 1. Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \vartheta)$.

α. Να δείξετε την ισότητα

$$E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(X; \vartheta)\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(X; \vartheta)\right].$$

β. Έστω $x_1, x_2 \ldots, x_\nu$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \vartheta)$, όπου μ γνωστό. Κάνοντας χρήση της ανισότητας Cramér - Rao, να βρείτε αμερόληπτο εκτιμητή ελάχιστης διασποράς του ϑ.

Λύση. α. Από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(X; \vartheta)\right] &= \int_S f(x; \vartheta) \cdot \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(x; \vartheta)dx \\ &= \int_S f(x; \vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial\vartheta}U(x, \vartheta)dx \\ &= \int_S \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}[f(x; \vartheta) \cdot U(x, \vartheta)] - \frac{\partial}{\partial\vartheta}f(x; \vartheta) \cdot U(x, \vartheta)\right]dx, \end{aligned}$$

όπου $U(x, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} f(x; \vartheta)$. Ισχύει η επιπλέον συνθήκη ομαλότητας, οπότε

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[f(x; \vartheta) \cdot U(x, \vartheta) \right] dx &= \int_S \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[f(x; \vartheta) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \vartheta} f(x; \vartheta)}{f(x; \vartheta)} \right] dx \\ &= \int_S \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} f(x; \vartheta) dx = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \int_S f(x; \vartheta) dx = 0.\end{aligned}$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\partial}{\partial \vartheta} f(x; \vartheta) \cdot U(x, \vartheta) dx &= \int_S f(x; \vartheta) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \vartheta} f(x; \vartheta)}{f(x; \vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(x; \vartheta) dx \\ &= \int_S f(x; \vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(x; \vartheta) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(x; \vartheta) dx \\ &= E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(X; \vartheta) \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε δείξει το ζητούμενο.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το ϑ

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i; \vartheta) = (2\pi\vartheta)^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\vartheta} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2 \right\} \Rightarrow$$

$$\log f(\underline{x}; \vartheta) = -\frac{\nu \log(2\pi)}{2} - \frac{\nu \log \vartheta}{2} - \frac{1}{2\vartheta} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}U(\underline{X}, \vartheta) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\underline{X}; \vartheta) = -\frac{\nu}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{2\vartheta^2} \left[\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2 - \nu\vartheta \right] \\ &= \frac{\nu}{2\vartheta^2} \left[\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2 - \vartheta \right] = k(\vartheta) \left[T(\underline{X}) - \vartheta \right],\end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{\nu}{2\vartheta^2} \neq 0$, $\forall \vartheta > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η $T(\underline{X}) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ. Συνεπώς, η $T(\underline{X})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Θέμα 2. Έστω $x_1, x_2 \dots, x_\nu$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$.

α. Αν θεωρήσουμε ότι το σ^2 είναι γνωστό, να πραγματοποιήσετε τον έλεγχο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ σε ε.σ.σ. α.

β. Πώς τροποποιείται ο παραπάνω έλεγχος αν το σ^2 δεν είναι γνωστό;

γ. Συλλέγουμε δεδομένα και έστω ότι είναι της μορφή $x_i = 12 + y_i$, όπου $\sum_{i=1}^{\nu} y_i = 200$ και $\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 = 598$. Να πραγματοποιήσετε τον έλεγχο για $\mu_0 = 13$, $\nu = 100$ και $\alpha = 0.05$. [Δίνεται ότι $Z_{0.025} \approx 2$.]

Λύση. α. Βλέπε παράδειγμα 5.19 (σελίδα 97).

β. Βλέπε παράδειγμα 5.20 (σελίδα 98).

γ. Υπολογίζουμε ότι

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = 12 + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} y_i = 14,$$

$$\begin{aligned} s_X^2 &= \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}[12+y_i-(12+\overline{y})]^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\overline{y})^2 \\ &= \frac{1}{\nu-1}\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \nu\overline{y}^2\right) = \frac{598-400}{99} = 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|t| = \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s_X}\sqrt{\nu} = \frac{14-13}{\sqrt{2}}\cdot 10 \approx 7.07 > t_{\nu-1;\frac{\alpha}{2}} = t_{99;0.025} \approx Z_{0.025} \approx 2 \Rightarrow \underline{x} \in K.$$

Για την προσέγγιση $t_{99;0.025} \approx Z_{0.025}$, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\nu = 100$ αρκετά μεγάλο. Άρα, απορρίπτουμε την H_0 σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

Θέμα 3. Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $X \sim \text{Exp}(\vartheta)$ και $Y \sim \text{Exp}(5\vartheta)$ με $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$.

γ. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη ποσότητα οδηγό, να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για το $\frac{1}{\vartheta}$ σε συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$. Να αποδεικνύετε ό,τι χρησιμοποιείτε για την επίλυση της άσκησης.
[Υπόδειξη: Μπορείτε να μελετήσετε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W = 5Y$.]

Λύση. α. Το στήριγμα $S = (0,\infty)^2$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και, λόγω της ανεξαρτησίας των X και Y, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x,y;\vartheta) &= f(x;\vartheta)f(y;\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x}\cdot 5\vartheta e^{-5\vartheta y} = 5\vartheta^2 e^{-\vartheta(x+5y)} \\ &= 5\exp\{-\vartheta(x+5y)+2\vartheta\}, \end{aligned}$$

όπου $Q(\vartheta) = -\vartheta$ και $T(x,y) = x+5y$. Το $Q(\Theta) = \{-\vartheta : \vartheta \in (0,\infty)\} = (-\infty,0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X,Y) = X+5Y$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Όμοια με το θέμα 4, Φεβρουάριος 2016 (σελίδα 146), υπολογίζουμε ότι $g(\widehat{\vartheta}) = \frac{1}{\widehat{\vartheta}} = \frac{x+5y}{2}$.

γ. Όμοια με το θέμα 4, Φεβρουάριος 2016 (σελίδα 146), ορίζουμε την ποσότητα οδηγό $Q = 2\vartheta(X+5Y) \sim \chi_4^2$. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{4;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{4;\frac{\alpha}{2}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $\frac{1}{\vartheta}$

$$c_1 \leqslant 2\vartheta(X+5Y) \leqslant c_2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{X+5Y}{\chi^2_{4;\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \frac{1}{\vartheta} \leqslant 2 \cdot \frac{X+5Y}{\chi^2_{4;1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

7.8 Απρίλιος 2014

Θέμα 1. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ από κατανομή με αθροιστική συνάρτηση $F(x;\vartheta) = \frac{x}{\vartheta}$, όπου $\vartheta > 0$ και $0 < x_i < \vartheta$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

α. Εξετάστε αν η συγκεκριμένη κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta) = \vartheta^k$ (χωρίς να κάνετε χρήση Ε.Μ.Π.).

γ. Έστω τώρα y μία και μόνο παρατήρηση από τη συγκεκριμένη κατανομή. Να βρεθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.
[Υπόδειξη: Να βρείτε την κατανομή της $\frac{Y}{\vartheta}$.]

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι $X_i \sim U(0, \vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Προφανώς, αυτή η κατανομή δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ., αφού το στήριγμα $S = (0, \vartheta)$ εξαρτάται από το ϑ.

β. Στο παράδειγμα 3.4 (σελίδα 24), δείξαμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Θα δείξουμε τώρα ότι η $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι πλήρης, οπότε χρειάζεται να βρούμε την κατανομή της. Για $t \in (0, \vartheta)$, έχουμε

$$f_T(t) = nf(t;\vartheta)\,[F(t;\vartheta)]^{n-1} = n \cdot \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{n-1} = \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n}.$$

Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall \vartheta > 0$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \int_0^\vartheta f_T(t)\varphi(t)dt = \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta > 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^\vartheta t^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μάς δίνει ότι

$$\vartheta^{n-1}\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta > 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (0, \infty) \supseteq (0, \vartheta).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι πλήρης.

Προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi(T)$ τέτοια ώστε $E_\vartheta\left[\psi(T)\right] = g(\vartheta)$. Δοκιμάζουμε

$$\begin{aligned} E\left(T^k\right) &= \int_0^\vartheta t^k f_T(t)dt = \int_0^\vartheta \frac{nt^{k+n-1}}{\vartheta^n}dt \overset{k+n>0}{=} n\vartheta^{-n}\left[\frac{t^{k+n}}{k+n}\right]_0^\vartheta \\ &= n\vartheta^{-n}\frac{\vartheta^{k+n}}{k+n} = \frac{n\vartheta^k}{k+n} \Rightarrow E\left(\frac{k+n}{n}\cdot T^k\right) = \vartheta^k. \end{aligned}$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\delta(\underline{X}) = \frac{k+n}{n}\cdot T^k$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(n)}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ για $k > -n$.

Εναλλακτικά, επειδή το στήριγμα της κατανομής εξαρτάται από το ϑ, μπορούμε, πιο γενικά, να υπολογίσουμε ότι

$$E_\vartheta\left[\psi(T)\right] = \int_0^\vartheta f_T(t;\vartheta)\psi(t)dt = \int_0^\vartheta \frac{nt^{n-1}}{\vartheta^n}\psi(t)dt = g(\vartheta) \Rightarrow$$

$$n\int_0^\vartheta t^{n-1}\psi(t)dt = \vartheta^n g(\vartheta) \Rightarrow n\vartheta^{n-1}\psi(\vartheta) = n\vartheta^{n-1}g(\vartheta) + \vartheta^n g'(\vartheta),$$

αφού $g(\vartheta) = \vartheta^k$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Άρα, τελικά,

$$\psi(\vartheta) = g(\vartheta) + \frac{\vartheta g'(\vartheta)}{n}, \quad \forall\vartheta \in (0,\infty) \supseteq (0,\vartheta) \Rightarrow$$

$$\psi(T) = g(T) + \frac{Tg'(T)}{n} = T^k + \frac{kT^k}{n} = \left(1 + \frac{k}{n}\right)T^k.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T)$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ για $k > -n$.

γ. Βρίσκουμε την κατανομή της $Q = \frac{Y}{\vartheta}$. Για $y \in (0,1)$, έχουμε

$$F_Q(y) = P\left(\frac{Y}{\vartheta} \leqslant y\right) = F_Y(\vartheta y) = \frac{\vartheta y}{\vartheta} = y.$$

Δηλαδή, η $Q \sim U(0,1)$ είναι μία αντιστρεπτή ποσότητα. Για το Δ.Ε. ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2, ώστε

$$P(Q < c_1) = F_Q(c_1) = c_1 = \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = 1 - F_Q(c_2) = 1 - c_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{Y}{\vartheta} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{Y}{0.975} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{Y}{0.025}.$$

Θέμα 2. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ από την κατανομή

$$f(x;\vartheta) = p\vartheta x^{p-1} e^{-\vartheta x^p}, \quad x \geqslant 0, \quad \vartheta > 0, \quad p \text{ γνωστό.}$$

α. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ σε ε.σ.σ. α. Ελέγξτε αν ο έλεγχος είναι Ο.Ι.Ε.
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλο μετασχηματισμό για την εύρεση της κρίσιμης περιοχής.]

β. Έστω n μεγάλο. Βρείτε $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.

Λύση. α. Αρχικά δουλεύουμε με την απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Υπολογίζουμε ότι

$$\log f(x;\vartheta) = \log p + \log \vartheta + (p-1)\log x - \vartheta x^p \Rightarrow$$

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = n\log p + n\log\vartheta + (p-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \vartheta\sum_{i=1}^{n} x_i^p.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow n\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^{n} x_i^p < c \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^{n} x_i^p < c^* = c - n\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \overset{\vartheta_1 - \vartheta_0 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p < c_\alpha = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p < c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \geqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Θα υπολογίσουμε την κατανομή της $W_i = X_i^p$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $w > 0$, έχουμε

$$F_{W_i}(w) = P\left(X_i^p \leqslant w\right) = P\left(X_i \leqslant w^{\frac{1}{p}}\right) = F_{X_i}\left(w^{\frac{1}{p}}\right) \Rightarrow$$

$$f_{W_i}(w) = \frac{1}{p} w^{\frac{1}{p}-1} f_{X_i}\left(w^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p} w^{\frac{1}{p}-1} \cdot p\vartheta w^{1-\frac{1}{p}} e^{-\vartheta w} = \vartheta e^{-\vartheta w}.$$

Δηλαδή $W_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, θέτουμε $Q = 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p \sim \chi^2_{2n}$, υπό την H_0. Λύνοντας την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p < c_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε ότι $Q < c^*_\alpha = 2\vartheta_0 c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, υπολογίζουμε ότι $P_{\vartheta_0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p < c_\alpha\right) = P_{\vartheta_0}\left(Q < c^*_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}\left(Q > c^*_\alpha\right) = 1-\alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}$. Ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

β. Γνωρίζουμε ότι $E(T) = \frac{n}{\vartheta}$ και $\mathrm{Var}(T) = \frac{n}{\vartheta^2}$. Από κεντρικό οριακό θεώρημα, προκύπτει ότι

$$Q = \frac{T - \frac{n}{\vartheta}}{\frac{\sqrt{n}}{\vartheta}} = \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i^p - \sqrt{n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$ για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$\lim_{n\to\infty} P(Q < c_1) = P(Z < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Q > c_2) = P(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = Z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το ασυμπτωτικό Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i^p - \sqrt{n} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{n} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \frac{\sqrt{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p} \leqslant \vartheta \leqslant \left(\sqrt{n} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \frac{\sqrt{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^p}.$$

Θέμα 3. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ από κατανομή $\mathrm{Gamma}(k, \vartheta)$ με k γνωστό και

$$f(x;\vartheta) = \frac{\vartheta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\vartheta x}, \quad x > 0, \quad \vartheta > 0.$$

α. Δείξτε ότι η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ. Βρείτε την κανονική μορφή της και δώστε τους τρόπους υπολογισμού της μέσης τιμής, της διασποράς και της ροπογεννήτριας της $T(X)$.

β. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. $U(\underline{x}) = U(x_1, \ldots, x_n)$ του $\frac{1}{\vartheta}$.

γ. Δείξτε ότι η $U(\underline{x})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του $\frac{1}{\vartheta}$. Είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$;

δ. Υπολογίστε $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το $\frac{1}{\vartheta}$.
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλο μετασχηματισμό του $\sum_{i=1}^{n} X_i$.]

Λύση. α. Το στήριγμα $S=(0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο του ϑ και

$$f(x;\vartheta)=\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp\left\{-\vartheta x+k\log\vartheta\right\}, \quad \text{όπου}$$

$$h(x)=\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}, \quad Q(\vartheta)=-\vartheta, \quad T(x)=x, \quad A(\vartheta)=-k\log\vartheta.$$

Θέτουμε $\eta=Q(\vartheta)=-\vartheta \Rightarrow \vartheta=-\eta$. Επομένως,

$$f(x;\eta)=\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp\left\{\eta x+k\log(-\eta)\right\}, \text{ όπου } A(\eta)=-k\log(-\eta)\Rightarrow$$

$$E\left[T(X)\right]=E(X)=A'(\eta)=-\frac{k}{\eta}=\frac{k}{\vartheta}, \ \mathrm{Var}\left[T(X)\right]=\mathrm{Var}(X)=A''(\eta)=\frac{k}{\eta^2}=\frac{k}{\vartheta^2},$$

$$\begin{aligned} M_T(u)=M_X(u)&=E\left(e^{uX}\right)=\exp\left\{A(u+\eta)-A(\eta)\right\}\\ &=\exp\left\{k\log(-\eta)-k\log(-u-\eta)\right\}=\exp\left\{k\log\frac{\eta}{u+\eta}\right\}\\ &=\left(\frac{\eta}{u+\eta}\right)^k=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta-u}\right)^k. \end{aligned}$$

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$\log f(x;\vartheta)=k\log\vartheta-\log\Gamma(k)+(k-1)\log x-\vartheta x\Rightarrow$$

$$\ell(\vartheta|\underline{x})=\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i;\vartheta)=nk\log\vartheta-n\log\Gamma(k)+(k-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i-\vartheta\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta|\underline{x})=\frac{nk}{\vartheta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Rightarrow U(\underline{x})=\widehat{\vartheta}=\frac{k}{\overline{x}}, \quad \text{όπου}$$

$$\ell''(\vartheta|\underline{x})=-\frac{nk}{\vartheta^2}<0, \quad \forall\vartheta>0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $\Theta=(0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Από την ιδιότητα του αναλλοίωτου των Ε.Μ.Π., έπεται ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $g(\vartheta)=\frac{1}{\vartheta}$ είναι η $g(\widehat{\vartheta})=\frac{1}{\widehat{\vartheta}}=\frac{\overline{x}}{k}$, αφού η g είναι 1-1 συνάρτηση.

γ. Από θεώρημα 2.3, έπεται ότι η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $T(\underline{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Το $Q(\Theta)=\{-\vartheta:\vartheta\in(0,\infty)\}=(-\infty,0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η T είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Υπολογίζουμε ότι

$$E\left(\frac{\overline{X}}{k}\right) = \frac{E(X_1)}{k} = \frac{1}{\vartheta}.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $U(\underline{X}) = \frac{\overline{X}}{k}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του $\frac{1}{\vartheta}$.

Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q'(\vartheta) = -1 \neq 0$ συνεχή συνάρτηση στο $(0, \infty)$. Άρα, οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Εφόσον οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αρκεί να υπολογίσουμε την πληροφορία κατά Fisher της παρατήρησης X_1 για το ϑ. Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(x; \vartheta) = \frac{k}{\vartheta} - x \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \log f(x; \vartheta) = -\frac{k}{\vartheta^2} \Rightarrow$$

$$I_{X_1}(\vartheta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \log f(X_1; \vartheta)\right] = \frac{k}{\vartheta^2} \Rightarrow I_{\underline{X}}(\vartheta) = n \cdot I_{X_1}(\vartheta) = \frac{nk}{\vartheta^2} \in (0, \infty).$$

Επομένως, το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao για την $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$ ισούται με

$$\frac{[g'(\vartheta)]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)} = \frac{1}{\vartheta^4} \cdot \frac{\vartheta^2}{nk} = \frac{1}{nk\vartheta^2} \Rightarrow$$

$$\text{Var}\left(\frac{\overline{X}}{k}\right) = \frac{1}{k^2}\text{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{nk^2}\text{Var}(X_1) = \frac{1}{nk^2} \cdot \frac{k}{\vartheta^2} = \frac{1}{nk\vartheta^2} = \frac{[g'(\vartheta)]^2}{I_{\underline{X}}(\vartheta)}.$$

Επομένως, η $U(\underline{X}) = \frac{\overline{X}}{k}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$.

δ. Γνωρίζουμε ότι $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(nk, \vartheta)$ από ιδιότητες ροπογεννητριών. Από σημείωση 3.7, έπεται ότι $Q = 2\vartheta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2nk}$ είναι μία αντιστρεπτή ποσότητα. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{2nk; 1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{2nk; \frac{\alpha}{2}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $\frac{1}{\vartheta}$

$$c_1 \leqslant 2\vartheta \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{2}{\chi^2_{2nk; \frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant \frac{1}{\vartheta} \leqslant \frac{2}{\chi^2_{2nk; 1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

7.9 Σεπτέμβριος 2013

Θέμα 1. Έστω X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από κατανομές με αντίστοιχες σ.π.π.

$$f_{X_i}(x_i; \vartheta) = k_i \vartheta^{k_i} x_i^{-k_i - 1}, \quad x_i \geqslant \vartheta > 0,$$

όπου k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, γνωστές θετικές σταθερές.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο ϑ.

β. Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς για το ϑ^r.

γ. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του ϑ. Είναι αυτή αμερόληπτη;

Λύση. α. Επειδή το στήριγμα $S = [\vartheta, \infty)$ της κατανομής εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ, η κατανομή δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ. και, κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας για την Ε.Ο.Κ. Επομένως, θα δουλέψουμε με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher για την επάρκεια και με τον ορισμό για την πληρότητα. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(\underline{x}; \vartheta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \vartheta) = \vartheta^{n\overline{k}} \prod_{i=1}^{n} k_i x_i^{-k_i - 1} I_{[\vartheta, \infty)}(x_i) \\ &= \vartheta^{n\overline{k}} I_{[\vartheta, \infty)}\left(x_{(1)}\right) \prod_{i=1}^{n} k_i x_i^{-k_i - 1} = g\left(T(\underline{x}), \vartheta\right) \cdot h(\underline{x}), \end{aligned}$$

όπου $\overline{k} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, $T(\underline{x}) = x_{(1)}$, $g(t, \vartheta) = \vartheta^{n\overline{k}} I_{[\vartheta, \infty)}(t)$ και $h(\underline{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} k_i x_i^{-k_i - 1}$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης, οπότε χρειάζεται να βρούμε την κατανομή της. Υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής των X_i. Για $x \geqslant \vartheta$, έχουμε

$$F_{X_i}(x; \vartheta) = \int_{\vartheta}^{x} f(y; \vartheta) dy = \int_{\vartheta}^{x} k_i \vartheta^{k_i} y^{-k_i - 1} dy = -\left[\vartheta^{k_i} y^{-k_i}\right]_{\vartheta}^{x} = 1 - \left(\frac{\vartheta}{x}\right)^{k_i}.$$

Βρίσκουμε τώρα την κατανομή της $X_{(1)}$. Για $t \geqslant \vartheta$, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P\left(X_{(1)} \leqslant t\right) = 1 - P\left(X_{(1)} > t\right) = 1 - P\left(X_1 > t, \ldots, X_n > t\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i > t\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - F_{X_i}(t; \vartheta)\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\vartheta}{t}\right)^{k_i} \\ &= 1 - \left(\frac{\vartheta}{t}\right)^{n\overline{k}} \Rightarrow f_t(t) = n\overline{k} \vartheta^{n\overline{k}} t^{-n\overline{k} - 1}. \end{aligned}$$

Έστω ότι $E_\vartheta[\varphi(T)] = 0$, $\forall \vartheta \in (0,\infty)$. Παίρνουμε

$$E_\vartheta[\varphi(T)] = \int_\vartheta^\infty f_T(t)\varphi(t)dt = n\overline{k}\vartheta^{n\overline{k}} \int_\vartheta^\infty t^{-n\overline{k}-1}\varphi(t)dt = 0,\ \forall \vartheta \in (0,\infty) \Rightarrow$$

$$\int_\vartheta^\infty t^{-n\overline{k}-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,\infty).$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μάς δίνει ότι

$$-\vartheta^{-n\overline{k}-1}\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,\infty) \Rightarrow \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης.

β. Προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση $\psi(T)$, ώστε $E_\vartheta[\psi(T)] = g(\vartheta)$. Επειδή το στήριγμα της κατανομής εξαρτάται από το ϑ, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$E[\psi(T)] = \int_\vartheta^\infty f_T(t)\psi(t)dt = n\overline{k}\vartheta^{n\overline{k}} \int_\vartheta^\infty t^{-n\overline{k}-1}\psi(t)dt = g(\vartheta) \Rightarrow$$

$$n\overline{k}\int_\vartheta^\infty t^{-n\overline{k}-1}\psi(t)dt = \vartheta^{-n\overline{k}}g(\vartheta) \Rightarrow$$

$$-n\overline{k}\vartheta^{-n\overline{k}-1}\psi(\vartheta) = -n\overline{k}\vartheta^{-n\overline{k}-1}g(\vartheta) + \vartheta^{-n\overline{k}}g'(\vartheta),$$

αφού $g(\vartheta) = \vartheta^r$ παραγωγίσιμη. Άρα, τελικά

$$\psi(\vartheta) = g(\vartheta) - \frac{\vartheta g'(\vartheta)}{n\overline{k}}, \quad \forall \vartheta \in (0,\infty) \supseteq [\vartheta,\infty) \Rightarrow$$

$$\psi(T) = g(T) - \frac{Tg'(T)}{n\overline{k}} = T^r - \frac{rT^r}{n\overline{k}} = \left(1 - \frac{r}{n\overline{k}}\right)\cdot T^r.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T)$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ για $r < n\overline{k}$.

γ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$L(\vartheta|\underline{x}) = \begin{cases} \vartheta^{n\overline{k}}\prod\limits_{i=1}^n\left(k_i x_i^{-k_i-1}\right), & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = x_{(1)}$.

Θέμα 2. Έστω X τυχαία μεταβλητή από κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;a,b) = \frac{a}{b^a}x^{a-1}e^{-\frac{x^a}{b^a}}, \quad x > 0, \quad a,b > 0.$$

α. Να εξεταστεί αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Αν $a = 2$, να υπολογιστούν οι $E(X^2)$ και $\text{Var}(X^2)$.

γ. Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από την παραπάνω κατανομή με $a = 2$. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της συνάρτησης $g(b) = b^2$ και να δειχθεί ότι αυτή είναι Α.Ε.Ε.Δ. και συνεπής εκτιμήτρια της $g(b)$.

Λύση. α. Για $x > 0$, $a > 0$ και $b > 0$, έχουμε

$$f(x; a, b) = \exp\left\{(a-1)\log x - b^{-a}x^a + \log a - a\log b\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $b^{-a}x^a$ δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο μίας συνάρτησης μόνο του $\underline{\vartheta} = (a, b)$ και μίας συνάρτησης μόνο του x. Επομένως, η δοσμένη κατανομή με διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων $\underline{\vartheta} = (a, b)$ δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Αν $a = 2$ γνωστή σταθερά, τότε για $x > 0$ και $b > 0$ έχουμε

$$f(x; b) = 2x\exp\left\{-\frac{1}{b^2}\cdot x^2 - 2\log b\right\}, \quad \text{όπου}$$

$$h(x) = 2x, \quad Q(b) = -\frac{1}{b^2}, \quad T(x) = x^2, \quad A(b) = 2\log b.$$

Άρα, η δοσμένη κατανομή με $a = 2$ γνωστό ανήκει στη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. Θέτουμε $\eta = Q(b) = -\frac{1}{b^2} < 0 \overset{b>0}{\Rightarrow} b = \sqrt{-\frac{1}{\eta}}$. Επομένως,

$$f(x; \eta) = 2x\exp\left\{\eta x^2 + \log(-\eta)\right\}, \quad \text{όπου}$$

$$A(\eta) = -\log(-\eta) \Rightarrow E\left[T(X)\right] = E(X^2) = A'(\eta) = -\frac{1}{\eta} = b^2,$$

$$\text{Var}\left[T(X)\right] = \text{Var}(X^2) = A''(\eta) = \frac{1}{\eta^2} = b^4.$$

γ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$\log f(x; b) = \log 2 + \log x - \frac{1}{b^2}\cdot x^2 - 2\log b \Rightarrow$$

$$\ell(b|\underline{x}) = n\log 2 + \sum_{i=1}^{n}\log x_i - \frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2n\log b \Rightarrow$$

$$\ell'(b|\underline{x}) = \frac{2}{b^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{2n}{b} = 0 \Rightarrow \widehat{b} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{όπου}$$

$$\ell''(b|\underline{x}) = -\frac{6}{b^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \frac{2n}{b^2} = \frac{2}{b^2}\left(n - \frac{3}{b^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) \Rightarrow \ell''(\widehat{b}|\underline{x}) = \frac{2}{\widehat{b}^2}(n - 3n) = -\frac{4n}{\widehat{b}^2} < 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(b|\underline{x})$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{b}$. Υπολογίζοντας τα όρια της συνάρτησης $L\left(b|\underline{x}\right)$ ως προς b στα 0^+ και ∞, επαληθεύουμε ότι το $\widehat{b}$ είναι σημείο ολικού μεγίστου

$$\lim_{b\to\infty} L\left(b|\underline{x}\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{2^n}{b^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \prod_{i=1}^n x_i = 0\cdot 1\cdot \prod_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\lim_{b\to 0^+} L\left(b|\underline{x}\right) = \lim_{b\to 0^+} \frac{2^n}{b^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \prod_{i=1}^n x_i = 0.$$

Από την ιδιότητα του αναλλοίωτου των Ε.Μ.Π., έπεται ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $g(b) = b^2$ είναι η $U_n(\underline{x}) = g(\widehat{b}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$, αφού η g είναι 1-1 συνάρτηση στο $(0,\infty)$.

Το $Q(\Theta) = \left\{-\frac{1}{b^2} : b\in(0,\infty)\right\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ είναι επαρκής για το b και πλήρης. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, υπολογίζουμε ότι $E\left[U_n(\underline{x})\right] = E\left(X_1^2\right) = b^2$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\widehat{b}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του b^2. Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $U_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $E\left(X_1^2\right) = b^2$.

Θέμα 3. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από κατανομή Bernoulli(p).

α. Έστω ότι θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο $H_0 : p = p_0 = 0.49$ vs. $H_1 : p = p_1 = 0.51$. Θεωρώντας ότι το n είναι μεγάλο, υπολογίστε, κατά προσέγγιση, το μέγεθος του δείγματος n έτσι ώστε οι δύο πιθανότητες σφάλματος να είναι περίπου ίσες με 0.01.

β. Θεωρώντας ότι το n δεν είναι μεγάλο, πραγματοποιήστε βήμα-βήμα τους υπολογισμούς για την κατασκευή ενός $100(1-\alpha)\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για την παράμετρο p και εξηγήστε γιατί δεν είναι δυνατός ο ακριβής υπολογισμός του επιθυμητού διαστήματος εμπιστοσύνης.

Λύση. α. Λόγω ανεξαρτησίας, υπολογίζουμε ότι

$$\log f(x;p) = x\log p + (1-x)\log(1-p) \Rightarrow$$

$$\ell(p|\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \log p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right)\log(1-p) = \sum_{i=1}^n x_i \log\frac{p}{1-p} + n\log(1-p).$$

$$\ell(p_0|\underline{x}) - \ell(p_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow \log\frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}\sum_{i=1}^n x_i + n\log\frac{1-p_0}{1-p_1} < c \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n x_i > c_\alpha = \left(c - n\log\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)\left[\log\frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}\right]^{-1}, \text{ αφού}$$

$$\frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)} = \frac{0.49 \cdot 0.49}{0.51 \cdot 0.51} < 1 \Rightarrow \log \frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)} < 0.$$

Υπό την H_0, δηλαδή όταν $p = p_0$, γνωρίζουμε από το κεντρικό οριακό θεώρημα ότι

$$Q = \frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i > c_\alpha$ ως προς Q

$$\sum_{i=1}^{n} X_i > c_\alpha \Leftrightarrow Q > c^*_\alpha = \frac{\frac{c_\alpha}{n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}.$$

Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$, υπολογίζουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > c_\alpha\right) = \lim_{n\to\infty} P_{p_0}\left(Q > c^*_\alpha\right) = P_{p_0}(Z > c^*_\alpha) = \alpha.$$

Δηλαδή $c^*_\alpha = Z_\alpha$. Επομένως, παίρνουμε τον ασυμπτωτικό έλεγχο

$$\varphi_n(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} > Z_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \leqslant Z_\alpha \end{cases}.$$

Τώρα, ζητάμε

$$\begin{aligned} P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= P_{p_1}\left(\underline{X} \notin K\right) = P_{p_1}\left(\frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \leqslant Z_\alpha\right) \\ &= P_{p_1}\left(\frac{\overline{X}_n - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n} \leqslant \frac{Z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + (p_0-p_1)\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{Z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + (p_0-p_1)\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right) = 0.01 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \left[\frac{\Phi^{-1}(0.01)\sqrt{p_1(1-p_1)} - Z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)}}{p_0 - p_1}\right]^2 \\ &= \left[\frac{Z_{0.99}\sqrt{0.51 \cdot 0.49} - Z_{0.01}\sqrt{0.49 \cdot 0.51}}{0.49 - 0.51}\right]^2 \\ &= \left(\frac{2 \cdot 2.33 \cdot \sqrt{0.49 \cdot 0.51}}{0.02}\right)^2 = 10000 \cdot 2.33^2 \cdot 0.49 \cdot 0.51 \approx 13567. \end{aligned}$$

β. Βλέπε παράδειγμα 4.22 (σελίδα 72). Εδώ, επειδή το n δεν είναι αρκετά μεγάλο, δεν είναι δυνατή η εύρεση κατάλληλης αντιστρεπτής ποσότητας. Επίσης, δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός κατάλληλων σταθερών c_1, c_2, ώστε ο συντελεστής εμπιστοσύνης του διαστήματος να είναι ακριβώς $1-\alpha$.

Θέμα 4. Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομή με σ.π.π.

$$f(u;\vartheta) = \frac{p}{\vartheta} u^{p-1} e^{-\frac{u^p}{\vartheta}}, \quad u>0, \quad p>0 \text{ γνωστό.}$$

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια $\delta = \delta(\underline{u})$ του ϑ.

β. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.
[Υπόδειξη: Να βρείτε την κατανομή του $\frac{2n\delta}{\vartheta}$.]

γ. Αν $U_1 = \frac{1}{4}$, $U_2 = \frac{1}{2}$, $U_3 = \frac{1}{4}$ και $p=2$, ποιο θα είναι το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha = 90\%$.

Λύση. α. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{U}$ για το ϑ

$$\log f(u;\vartheta) = \log p - \log\vartheta + (p-1)\log u - \frac{u^p}{\vartheta} \Rightarrow$$

$$\log f(\underline{u};\vartheta) = \sum_{i=1}^n \log f(u_i;\vartheta) = n\log p - n\log\vartheta + (p-1)\sum_{i=1}^n \log u_i - \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n u_i^p \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U(\underline{u},\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{u};\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^n u_i^p = \frac{1}{\vartheta^2}\left(\sum_{i=1}^n u_i^p - n\vartheta\right) \\ &= \frac{n}{\vartheta^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i^p - \vartheta\right) = k(\vartheta)\left[\delta(\underline{u}) - \vartheta\right], \end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta^2} \neq 0$, $\forall\vartheta>0$. Συμπεραίνουμε ότι η $\delta(\underline{U}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n U_i^p$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ.

β. Θα υπολογίσουμε την κατανομή της $X_i = U_i^p$ για $i=1,2,\ldots,n$. Για $x>0$, έχουμε

$$F_{X_i}(x) = P\left(U_i^p \leqslant x\right) = P\left(U_i \leqslant x^{\frac{1}{p}}\right) = F_{U_i}\left(x^{\frac{1}{p}}\right) \Rightarrow$$

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1} f_{U_i}\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}\cdot\frac{p}{\vartheta}x^{1-\frac{1}{p}}e^{-\frac{w}{\vartheta}} = \frac{1}{\vartheta}e^{-\frac{x}{\vartheta}}.$$

Δηλαδή, $X_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\vartheta})$ για $i=1,2,\ldots,n \Rightarrow T = \sum\limits_{i=1}^n U_i^p \sim \text{Gamma}(n,\frac{1}{\vartheta})$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, ορίζουμε στην αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{2}{\vartheta}\cdot T = \frac{2n\delta}{\vartheta} \sim \chi^2_{2n}$. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q<c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q>c_1) = 1-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q>c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{2}{\vartheta} \cdot T \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{2}{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n U_i^p \leqslant \vartheta \leqslant \frac{2}{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n U_i^p.$$

γ. Βρίσκουμε στους πίνακες με τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 ότι $\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{6;0.05} \approx 12.59$ και $\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{6;0.95} \approx 1.64$. Υπολογίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n U_i^p = \sum_{i=1}^3 U_i^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

Επομένως, το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης είναι το $[0.0596, 0.4573]$.

7.10 Ιούνιος 2013

Θέμα 1. Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $X \sim N(0, \vartheta^2)$, $Y \sim N(0, 4\vartheta^2)$ και $\vartheta \in (0, \infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς της $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

δ. Με κατάλληλη αντιστρεπτή ποσότητα, να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για το ϑ^2 με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

Λύση. α. Έχουμε ότι

$$f(x; \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\vartheta^2}\right\} \quad \text{και} \quad f(y; \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\vartheta^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{8\vartheta^2}\right\}.$$

Θα δείξουμε ότι η κατανομή του δείγματος (X, Y) ανήκει στην Ε.Ο.Κ. Το στήριγμα $S = \mathbb{R}^2$ είναι ανεξάρτητο του ϑ. Επειδή οι X και Y είναι ανεξάρτητες, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x, y; \vartheta) = f(x; \vartheta) f(y; \vartheta) &= \frac{1}{4\pi\vartheta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\vartheta^2} - \frac{y^2}{8\vartheta^2}\right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \exp\left\{-\frac{4x^2 + y^2}{8\vartheta^2} - 2\log\vartheta\right\}, \end{aligned}$$

όπου $Q(\vartheta) = -\frac{1}{8\vartheta^2}$ και $T(x, y) = 4x^2 + y^2$. Το $Q(\Theta) = \left\{-\frac{1}{8\vartheta^2} : \vartheta > 0\right\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X, Y) = 4X^2 + Y^2$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Θέλουμε να βρούμε την Α.Ε.Ε.Δ. της ϑ^2. Εφόσον στο προηγούμενο ερώτημα μας ζητήθηκε να βρούμε μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση T για το ϑ, αν καταφέρουμε να βρούμε μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ^2 που είναι συνάρτηση της T, τότε θα έχουμε άμεσα το αποτέλεσμα από πόρισμα 3.2. Λαμβάνοντας υπόψιν τη σημείωση 3.7, δουλεύουμε ως εξής

$$X \sim N(0,\vartheta^2) \Rightarrow \frac{X}{\vartheta} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{X}{\vartheta}\right)^2 \sim \chi_1^2 \quad \text{και}$$

$$Y \sim N(0,4\vartheta^2) \Rightarrow \frac{Y}{2\vartheta} \sim N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{Y}{2\vartheta}\right)^2 \sim \chi_1^2.$$

Αφού X και Y ανεξάρτητες, παίρνουμε ότι

$$Q = \frac{X^2}{\vartheta^2} + \frac{Y^2}{4\vartheta^2} = \frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2} \sim \chi_2^2 \equiv \text{Gamma}\left(1,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$E(Q) = E\left(\frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2}\right) = 2 \Rightarrow E\left(\frac{4X^2+Y^2}{8}\right) = \vartheta^2.$$

Έπεται ότι η $\delta(X,Y) = \frac{4X^2+Y^2}{8}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Υπολογίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta|x,y) = -\log(4\pi) - \frac{4x^2+y^2}{8\vartheta^2} - 2\log\vartheta \Rightarrow \ell'(\vartheta|x,y) = \frac{4x^2+y^2}{4\vartheta^3} - \frac{2}{\vartheta} = 0 \Rightarrow$$

$$\widehat{\vartheta}^2 = \frac{4x^2+y^2}{8} \overset{\vartheta\geq 0}{\Rightarrow} \widehat{\vartheta} = \sqrt{\frac{4x^2+y^2}{8}} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\vartheta|x,y) = -3\cdot\frac{4x^2+y^2}{4\vartheta^4} + \frac{2}{\vartheta^2} = \frac{1}{\vartheta^2}\left(2 - 3\cdot\frac{4x^2+y^2}{4\vartheta^2}\right) \Rightarrow$$

$$\ell''(\widehat{\vartheta}|x,y) = \frac{1}{\widehat{\vartheta}^2}\left(2 - 3\cdot\frac{4x^2+y^2}{4\widehat{\vartheta}^2}\right) = \frac{1}{\widehat{\vartheta}^2}\left(2 - \frac{3\cdot 8}{4}\right) = -\frac{4}{\widehat{\vartheta}^2} < 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta|x,y)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{\vartheta} = \sqrt{\frac{4x^2+y^2}{8}}$. Υπολογίζοντας τα όρια της συνάρτησης $L(\vartheta|x,y)$ ως προς ϑ στα 0^+ και ∞, επαληθεύουμε ότι το $\widehat{\vartheta}$ είναι σημείο ολικού μεγίστου

$$\lim_{\vartheta\to\infty} L(\vartheta|x,y) = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{4\pi\vartheta^2}\exp\left\{-\frac{4x^2+y^2}{8\vartheta^2}\right\} = 0\cdot 1 = 0,$$

$$\lim_{\vartheta\to 0^+} L(\vartheta|x,y) = \lim_{\vartheta\to 0+} \frac{1}{4\pi\vartheta^2}\exp\left\{-\frac{4x^2+y^2}{8\vartheta^2}\right\} = 0.$$

δ. Θέλουμε να κατασκευάσουμε διάστημα εμπιστοσύνης, άρα ακολουθούμε τα βήματα που έχουμε περιγράψει. Έχουμε υπολογίσει ότι $Q = \frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2} \sim \chi_2^2$, οπότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την τυχαία μεταβλητή Q ως ποσότητα οδηγό. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{2;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{2;\frac{\alpha}{2}}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ^2

$$c_1 \leqslant \frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{4X^2+Y^2}{4\chi^2_{2;\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \vartheta^2 \leqslant \frac{4X^2+Y^2}{4\chi^2_{2;1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\vartheta) = \frac{2\vartheta x}{(1+x^2)^{\vartheta+1}}, \quad x > 0,$$

όπου $\vartheta \in (0,\infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$ και να ελεγχθεί αν αυτή είναι συνεπής για το $\frac{1}{\vartheta}$.
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την κατανομή της $Y = \log\left(1+X^2\right)$.]

β. Να βρεθεί ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$, όπου $\vartheta_1 < \vartheta_0$, σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$.

γ. Για τις παραπάνω υποθέσεις, να βρεθεί προσεγγιστική κρίσιμη περιοχή σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α για μεγάλο ν.

Λύση. α. Βλέπε θέμα 1, Σεπτέμβριος 2019 (σελίδα 126).

β. Γνωρίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow \nu\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^{\nu}\log\left(1+x_i^2\right) < c \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^{\nu}\log\left(1+x_i^2\right) < c^* = c - \nu\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \overset{\vartheta_1-\vartheta_0<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}\log\left(1+x_i^2\right) > c_\alpha = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{\nu}\log\left(1+x_i^2\right) > c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{\nu}\log\left(1+x_i^2\right) \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Θα υπολογίσουμε την κατανομή της $Y_i = \log\left(1 + X_i^2\right)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Για $y > 0$, έχουμε

$$F_{Y_i}(y) = P\left(\log\left(1 + X_i^2\right) \leqslant y\right) = P\left(|X_i| \leqslant \sqrt{e^y - 1}\right) = F_{X_i}\left(\sqrt{e^y - 1}\right) \Rightarrow$$

$$f_{Y_i}(y) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 1}} \cdot f_{X_i}\left(\sqrt{e^y - 1}\right) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 1}} \cdot \frac{2\vartheta\sqrt{e^y - 1}}{e^{(\vartheta+1)y}} = \vartheta e^{-\vartheta y}.$$

Δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) \sim \text{Gamma}(\nu, \vartheta)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, βρίσκουμε $Q = 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) \sim \chi^2_{2\nu}$, υπό την H_0. Λύνοντας την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) > c_\alpha$ ως προς Q, έχουμε $Q > c^*_\alpha = 2\vartheta_0 c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $P_{\vartheta_0}\left[\sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) > c_\alpha\right] = P_{\vartheta_0}\left(Q > c^*_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{2\nu;\alpha}$. Ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) > \chi^2_{2\nu;\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) \leqslant \chi^2_{2\nu;\alpha} \end{cases}.$$

γ. Υπό την H_0, δηλαδή όταν $T = \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) \sim \text{Gamma}(\nu, \vartheta_0)$, γνωρίζουμε από το κεντρικό οριακό θεώρημα ότι

$$W = \frac{\vartheta_0}{\sqrt{\nu}}\left[\sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) - \frac{\nu}{\vartheta_0}\right] = \frac{\vartheta_0}{\sqrt{\nu}} \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) - \sqrt{\nu} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) > c_\alpha$ ως προς W

$$\sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) > c_\alpha \Leftrightarrow W > c^{**}_\alpha = \frac{\vartheta_0 c_\alpha}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}.$$

Από τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0, 1)$, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to\infty} P_{\vartheta_0}\left(\underline{X} \in K_\nu\right) &= \lim_{\nu\to\infty} P_{\vartheta_0}\left[\sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) > c_\alpha\right] = \lim_{\nu\to\infty} P_{\vartheta_0}\left(W > c^{**}_\alpha\right) \\ &= P_{\vartheta_0}(Z > c^{**}_\alpha) = \alpha \Rightarrow c^{**}_\alpha = Z_\alpha. \end{aligned}$$

Επομένως, παίρνουμε τον ασυμπτωτικό έλεγχο

$$\varphi_\nu(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) > Z_\alpha \frac{\sqrt{\nu}}{\vartheta_0} + \frac{\nu}{\vartheta_0} \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) \leqslant Z_\alpha \frac{\sqrt{\nu}}{\vartheta_0} + \frac{\nu}{\vartheta_0} \end{cases}.$$

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[2\vartheta, 3\vartheta]$, όπου $\vartheta \in (0, \infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

γ. Να κατασκευασθεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης (ίσων ουρών) για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων του παραπάνω δείγματος με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ $(0 < \alpha < 1)$ για μεγάλο ν.

Λύση. α. Θα εφαρμόσουμε το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher. Έχουμε ότι $f(x_i;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} I_{[2\vartheta,3\vartheta]}(x_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Επομένως, λόγω ανεξαρτησίας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^\nu} \prod_{i=1}^{\nu} I_{[2\vartheta,3\vartheta]}(x_i) = \frac{1}{\vartheta^\nu} I_{[2\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) I_{(0,3\vartheta]}\left(x_{(\nu)}\right) \\ &= g\left(\underline{T}(\underline{x}), \vartheta\right) \cdot h(\underline{x}), \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(x_{(1)}, x_{(\nu)}\right)$, $g(t_1, t_2, \vartheta) = \frac{1}{\vartheta^\nu} I_{[2\vartheta,\infty)}(t_1)\, I_{(0,3\vartheta]}(t_2)$ και $h(\underline{x}) = 1$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, προκύπτει ότι η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(\nu)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ.

β. Βλέπε παράδειγμα 3.31 (σελίδα 50).

γ. Γνωρίζουμε ότι $E(X_1) = \frac{2\vartheta+3\vartheta}{2} = \frac{5\vartheta}{2}$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{(3\vartheta-2\vartheta)^2}{12} = \frac{\vartheta^2}{12}$. Από κεντρικό οριακό θεώρημα, έπεται ότι

$$Q = \frac{\overline{X}_\nu - \frac{5\vartheta}{2}}{\frac{\vartheta}{\sqrt{12}}}\sqrt{\nu} = 2\sqrt{3\nu}\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\vartheta} - \frac{5}{2}\right) \xrightarrow{d} Z = N(0,1).$$

Αξιοποιούμε την τυχαία μεταβλητή Q για την κατασκευή του ασυμπτωτικού Δ.Ε. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$ για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$\lim_{\nu\to\infty} P(Q < c_1) = P(Z < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{και}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} P(Q > c_2) = P(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = Z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Επομένως, το ασυμπτωτικό Δ.Ε. ίσων ουρών δίνεται από τη σχέση

$$c_1 \leqslant 2\sqrt{3\nu}\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\vartheta} - \frac{5}{2}\right) \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{c_1 + 5\sqrt{3\nu}}{2\sqrt{3\nu}} \leqslant \frac{\overline{X}_\nu}{\vartheta} \leqslant \frac{c_2 + 5\sqrt{3\nu}}{2\sqrt{3\nu}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5\sqrt{3\nu}}{5\sqrt{3\nu} + Z_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \overline{X}_\nu \leqslant \frac{5\vartheta}{2} \leqslant \frac{5\sqrt{3\nu}}{5\sqrt{3\nu} - Z_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \overline{X}_\nu.$$

7.11 Ιανουάριος 2013

Θέμα 1. Έστω $X_i \sim U\left[0, \frac{\vartheta}{k_i}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, γνωστές θετικές σταθερές.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο ϑ.

β. Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς για την $g(\vartheta) = \vartheta^{-r}$.

γ. Έστω $X_i \sim U[0, 2\vartheta]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τυχαίο δείγμα. Να βρεθούν Α.Ε.Ε.Δ. για την $E(X_1)$ και την $\mathrm{Var}(X_1)$.

δ. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ. Είναι αυτή αμερόληπτη για το ϑ;

Λύση. α. Θέτουμε $U_i = k_i X_i \sim U[0, \vartheta]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Βλέπε θέμα 1, Απρίλιος 2014 (σελίδα 150). Παίρνουμε ότι η $T(\underline{U}) = U_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Βλέπε θέμα 1, Απρίλιος 2014 (σελίδα 150). Η $\psi(T) = \left(1 - \frac{r}{n}\right) T^{-r}$, όπου $T(\underline{U}) = U_{(n)}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta) = \vartheta^{-r}$ για $r < n$.

γ. Θέτουμε $k_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα η $T(\underline{U}) = U_{(n)} = \frac{X_{(n)}}{2}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, παίρνουμε ότι η $\psi_1(T) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) U_{(n)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) X_{(n)}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $E(X_1) = \vartheta$ και η $\psi_2(T) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left[U_{(n)}\right]^2 = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left[X_{(n)}\right]^2$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\vartheta^2}{3}$.

δ. Βλέπε παράδειγμα 3.29 (σελίδα 49). Παίρνουμε ότι $\widehat{\vartheta} = u_{(n)}$.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_r$ τυχαίο δείγμα από $\mathrm{Gamma}(\nu, \vartheta)$ με ν γνωστό και σ.π.π.

$$f(x; \vartheta) = \frac{\vartheta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\vartheta x}, \quad x > 0, \quad \nu, \vartheta > 0.$$

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση και Ε.Μ.Π. για το ϑ και να δοθεί η κατανομή της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης (χωρίς απόδειξη).

β. Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ και να ελεγχθεί αν είναι Ο.Ι.Ε.

γ. Να υπολογιστεί $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.

Λύση. α. Λόγω ανεξαρτησίας, υπολογίζουμε ότι

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \exp\left\{-\vartheta \sum_{i=1}^{r} x_i + r\nu \log \vartheta\right\} \frac{1}{[\Gamma(\nu)]^r} \prod_{i=1}^{r} x_i^{\nu-1}.$$

Το στήριγμα $S = (0, \infty)^r$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από το ϑ, όποτε, σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim \text{Gamma}(r\nu, \vartheta)$ είναι επαρκής για το ϑ. Για την Ε.Μ.Π. του ϑ, βλέπε θέμα 3, Απρίλιος 2014 (σελίδα 153).

β. Αρχικά δουλεύουμε με την εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Γνωρίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta|\underline{x}) = r\nu \log \vartheta - r \log \Gamma(\nu) + (\nu - 1) \sum_{i=1}^{r} \log x_i - \vartheta \sum_{i=1}^{r} x_i.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell(\vartheta_0|\underline{x}) - \ell(\vartheta_1|\underline{x}) < c \Leftrightarrow r\nu \left(\log \vartheta_0 - \log \vartheta_1\right) + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \sum_{i=1}^{r} x_i < c \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0) \sum_{i=1}^{r} x_i < c^* = c - r\nu \left(\log \vartheta_0 - \log \vartheta_1\right) \overset{\vartheta_1 - \vartheta_0 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_i < c_\alpha = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{r} x_i < c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^{r} x_i \geqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπό την H_0, δηλαδή όταν $\vartheta = \vartheta_0$, γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=1}^{r} X_i \sim \text{Gamma}(r\nu, \vartheta_0)$. Τότε, σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, $T = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{r} X_i \sim \chi^2_{2r\nu}$. Λύνοντας την ανισότητα $\sum_{i=1}^{r} X_i < c_\alpha$ ως προς T, βρίσκουμε ότι $T < c^*_\alpha = 2\vartheta_0 c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, έχουμε ότι $P_{\vartheta_0}\left(\sum_{i=1}^{r} X_i < c_\alpha\right) = P_{\vartheta_0}\left(T < c^*_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow P_{\vartheta_0}\left(T > c^*_\alpha\right) = 1 - \alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{2r\nu;1-\alpha}$. Ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{r} x_i < \chi^2_{2r\nu;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{r} x_i \geqslant \chi^2_{2r\nu;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

γ. Βλέπε θέμα 3, Απρίλιος 2014 (σελίδα 153). Ομοίως, λύνουμε την ανισότητα

$c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς το ϑ

$$c_1 \leqslant 2\vartheta \sum_{i=1}^{r} X_i \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2r\nu;1-\frac{\alpha}{2}}}{2r\overline{X}} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{2r\nu;\frac{\alpha}{2}}}{2r\overline{X}}.$$

Θέμα 3. Έστω X τυχαία μεταβλητή από κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x > 0, \quad \mu, \sigma > 0.$$

α. Να εξεταστεί αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Να υπολογιστούν οι $E(\log X)$, $\mathrm{Var}(\log X)$, $E\left[(\log X)^2\right]$, $\mathrm{Var}\left[(\log X)^2\right]$ και $\mathrm{Cov}\left[\log X, (\log X)^2\right]$.

γ. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την παραπάνω κατανομή με σ^2 γνωστό. Να δείξετε ότι η Ε.Μ.Π. της παραμέτρου μ είναι Α.Ε.Ε.Δ., συνεπής και αποτελεσματική για το μ.

Λύση. α. Το στήριγμα $S = (0, \infty)$ της κατανομής είναι ανεξάρτητο του διανύσματος (μ, σ^2) των αγνώστων παραμέτρων και

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{\mu}{\sigma^2}\log x - \frac{1}{2\sigma^2}(\log x)^2 - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \log\sigma \right\}, \quad \text{όπου}$$

$$h(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}, \quad \underline{Q}(\mu,\sigma^2) = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right), \quad \underline{T}(x) = \left(\log x, (\log x)^2\right) \quad \text{και}$$

$$A(\mu,\sigma^2) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma.$$

Άρα, η κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Θέτουμε

$$\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right) = \underline{Q}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta_2} \quad \text{και} \quad \mu = -\frac{\eta_1}{2\eta_2} \Rightarrow$$

$$f(x;\underline{\eta}) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \eta_1 \log x + \eta_2(\log x)^2 + \frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{\log(-2\eta_2)}{2} \right\}, \ \underline{\eta} \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0),$$

$$\text{όπου} \quad A(\underline{\eta}) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} - \frac{\log(-2\eta_2)}{2} \Rightarrow E\left[T_1(X)\right] = E\left(\log X\right) = \frac{\partial A}{\partial \eta_1} = -\frac{\eta_1}{2\eta_2} = \mu,$$

$$E\left[T_2(X)\right] = E\left[(\log X)^2\right] = \frac{\partial A}{\partial \eta_2} = \frac{\eta_1^2}{4\eta_2^2} - \frac{1}{2\eta_2} = \mu^2 + \sigma^2,$$

$$\mathrm{Var}\left[T_1(X)\right] = \mathrm{Var}\left(\log X\right) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1^2} = -\frac{1}{2\eta_2} = \sigma^2,$$

$$\mathrm{Var}\left[T_2(X)\right] = \mathrm{Var}\left[(\log X)^2\right] = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_2^2} = -\frac{\eta_1^2}{2\eta_2^3} + \frac{1}{2\eta_2^2} = 4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4 \quad \text{και}$$

$$\mathrm{Cov}\left[T_1(X), T_2(X)\right] = \mathrm{Cov}\left[\log X, (\log X)^2\right] = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = \frac{\eta_1}{2\eta_2^2} = 2\mu\sigma^2.$$

γ. Υπολογίζουμε ότι

$$\ell(\mu|\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{n\log(2\pi)}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (\log x_i)^2 - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - n\log\sigma \Rightarrow$$

$$\ell'(\mu|\underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{n\mu}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \widehat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i \quad \text{και}$$

$$\ell''(\mu|\underline{x}) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η $\ell(\mu|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\widehat{\mu}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $E\left(\log X_1\right) = \mu$.

Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = \mathbb{R}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q'(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \neq 0$ συνεχή συνάρτηση. Άρα, οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Εφόσον οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αρκεί να υπολογίσουμε την πληροφορία κατά Fisher της παρατήρησης X_1 για το μ. Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\log f(x;\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\log x - \frac{\mu}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\log f(x;\mu) = -\frac{1}{\sigma^2} \Rightarrow$$

$$I_{X_1}(\mu) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\log f(X_1;\mu)\right] = \frac{1}{\sigma^2} \Rightarrow I_{\underline{X}}(\mu) = n \cdot I_{X_1}(\mu) = \frac{n}{\sigma^2} \in (0,\infty).$$

Βλέπουμε ότι $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(\log X_1\right) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{[g'(\mu)]^2}{I_{\underline{X}}(\mu)}$, όπου $g(\mu) = \mu$. Άρα, η $\widehat{\mu}_n$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ. Επομένως, είναι κι η Α.Ε.Ε.Δ. του μ.

Θέμα 4. Έστω X_1, X_2, X_3, X_4 ανεξάρτητες τ.μ. με $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_2 \sim N\left(\frac{\mu}{2}, 2\right)$, $X_3 \sim N(2\mu, 1)$, $X_4 \sim N(3\mu, 2\sigma^2)$ και μ, σ^2 άγνωστα.

α. Να βρεθεί η σχέση που οδηγεί στην εύρεση της Ε.Μ.Π. του ζεύγους (μ, σ^2).

β. Έστω $\mu = 0$. Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$ με $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

γ. Για $\mu = 0$, να υπολογιστεί $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το σ^2.

Λύση. α. Έχουμε ότι

$$f_{X_1}(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},\ f_{X_2}(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\frac{\mu}{2})^2}{4}\right\},$$

$$f_{X_3}(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-2\mu)^2}{2}\right\},\ f_{X_4}(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-3\mu)^2}{4\sigma^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\ell(\mu,\sigma^2|\underline{x}) = -\log\left(8\pi^2\right) - \log\sigma^2 - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(2x-\mu)^2}{16} - \frac{(x-2\mu)^2}{2} - \frac{(x-3\mu)^2}{4\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu}(\mu,\sigma^2|\underline{x}) = \frac{x-\mu}{\sigma^2} + \frac{2x-\mu}{8} + 2\cdot(x-2\mu) - 3\cdot\frac{x-3\mu}{2\sigma^2} = 0 \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2}(\mu,\sigma^2|\underline{x}) = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4} + \frac{(x-3\mu)^2}{4\sigma^4} = 0.$$

β. Έχουμε $X_1 \sim N(0,\sigma^2)$, $X_2 \sim N(0,2)$, $X_3 \sim N(0,1)$ και $X_4 \sim N(0,2\sigma^2)$. Αφού η κατανομή των X_2, X_3 δεν εξαρτάται από το σ^2, η συμπερασματολογία μας θα βασιστεί στις X_1, X_4. Γνωρίζουμε ότι

$$\ell\left(\sigma^2|x_1,x_4\right) = -\frac{\log(8\pi)}{2} - \log\sigma^2 - \frac{x_1^2}{2\sigma^2} - \frac{x_4^2}{4\sigma^2} = -\frac{\log(8\pi)}{2} - \log\sigma^2 - \frac{2x_2^1 + x_4^2}{4\sigma^2}.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση

$$\ell\left(\sigma_0^2|x_1,x_4\right) - \ell\left(\sigma_1^2|x_1,x_4\right) < c \Leftrightarrow \log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2 + \left(\frac{1}{4\sigma_1^2} - \frac{1}{4\sigma_0^2}\right)\left(2x_1^2 + x_4^2\right) < c \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{4\sigma_0^2\sigma_1^2}\left(2x_1^2 + x_4^2\right) < c^* = c - \log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2 \overset{\sigma_0^2-\sigma_1^2<0}{\Leftrightarrow}$$

$$2x_1^2 + x_4^2 > c_\alpha = \frac{4\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}\cdot c^*.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(x_1,x_4) = \begin{cases} 1, & 2x_1^2 + x_4^2 > c_\alpha \\ 0, & 2x_1^2 + x_4^2 \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Λαμβάνοντας υπόψιν τη σημείωση 3.7, δουλεύουμε ως εξής

$$X_1 \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_1}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{X_1^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2 \quad \text{και}$$

$$X_4 \sim N(0,2\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_4}{\sigma\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{X_4^2}{2\sigma^2} \sim \chi_1^2.$$

Αφού X_1 και X_4 ανεξάρτητες, υπό την H_0, παίρνουμε ότι

$$Q = \frac{X_1^2}{\sigma_0^2} + \frac{X_4^2}{2\sigma_0^2} = \frac{2X_1^2 + X_4^2}{2\sigma_0^2} \sim \chi_2^2.$$

Λύνοντας την ανισότητα $2X_1^2 + X_4^2 > c_\alpha$ ως προς Q, παίρνουμε $Q > c_\alpha^* = \frac{c_\alpha}{2\sigma_0^2}$.

Σύμφωνα με τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, καταλήγουμε ότι $P_{\sigma_0^2}\left(2X_1^2+X_4^2>c_\alpha\right)=P_{\sigma_0^2}\left(Q>c_\alpha^*\right)=\alpha\Rightarrow c_\alpha^*=\chi^2_{2;\alpha}$. Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(x_1,x_4)=\begin{cases}1, & 2x_1^2+x_4^2>2\sigma_0^2\chi^2_{2;\alpha}\\ 0, & 2x_1^2+x_4^2\leqslant 2\sigma_0^2\chi^2_{2;\alpha}\end{cases}.$$

γ. Βλέπε θέμα 1, Ιούνιος 2013 (σελίδα 162). Ομοίως, λύνουμε την ανισότητα $c_1\leqslant Q\leqslant c_2$ ως προς σ^2

$$c_1\leqslant\frac{2X_1^2+X_4^2}{2\sigma^2}\leqslant c_2\Leftrightarrow\frac{2X_1^2+X_4^2}{2\chi^2_{2;\frac{\alpha}{2}}}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{2X_1^2+X_4^2}{2\chi^2_{2;1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

7.12 Σεπτέμβριος 2012

Θέμα 1. Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x;\vartheta)=\frac{1}{2\vartheta\sqrt{x}}e^{-\frac{\sqrt{x}}{\vartheta}},\quad x>0,$$

όπου $\vartheta>0$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση T για το ϑ.

β. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια για το ϑ. Επίσης, δώστε την αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του ϑ και εξετάστε αν είναι συνεπής για το ϑ.

γ. Να βρεθεί η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του $\frac{1}{\vartheta}$.

Λύση: α. Θα δείξουμε ότι η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. Το στήριγμα $S=(0,\infty)$ είναι ανεξάρτητο του ϑ και, λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε ότι

$$f(\underline{x};\vartheta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta)=2^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}-n\log\vartheta\right\}\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{x_i}},$$

όπου $Q(\vartheta)=-\dfrac{1}{\vartheta}$ και $T(\underline{x})=\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{x_i}$. Το σύνολο $Q(\Theta)=\left\{-\dfrac{1}{\vartheta}:\vartheta>0\right\}=(-\infty,0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})=\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{X_i}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το ϑ

$$\log f(\underline{x};\vartheta)=-n\log 2-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}-n\log\vartheta-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\log x_i\Rightarrow$$

$$U(\underline{x},\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{x};\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} - \frac{n}{\vartheta} = \frac{n}{\vartheta^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} - \vartheta\right)$$
$$= k(\vartheta)\left[\delta_n(\underline{x}) - \vartheta\right],$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta^2} \neq 0$, $\forall\vartheta > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η $\delta_n(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ. Έπεται άμεσα ότι η στατιστική συνάρτηση $\delta_n(\underline{X})$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ. Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\delta_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $E\left(\sqrt{X_1}\right) = E\left[\delta_n(\underline{X})\right] = \vartheta$.

γ. Υπολογίζουμε πρώτα την κατανομή της $Y_i = \sqrt{X_i}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, ως εξής

$$F_{Y_i}(y) = P\left(\sqrt{X_i} \leqslant y\right) = F_{X_i}\left(y^2\right) \Rightarrow f_{Y_i}(y) = 2yf_{X_i}\left(y^2\right) = 2y\cdot\frac{1}{2\vartheta y}\cdot e^{-\frac{y}{\vartheta}} = \frac{1}{\vartheta}\cdot e^{-\frac{y}{\vartheta}}.$$

Άρα, $Y_i \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Συμπεραίνουμε ότι $T = \sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{X_i} \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{\vartheta}\right)$. Θέλουμε να βρούμε συνάρτηση ψ, ώστε $E\left[\psi(T)\right] = \frac{1}{\vartheta}$. Δοκιμάζουμε

$$E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t}f_T(t)dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\vartheta^n\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\frac{t}{\vartheta}}dt = \frac{1}{\vartheta^n(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-\frac{t}{\vartheta}}dt$$
$$= \frac{1}{\vartheta^n(n-1)!}\cdot\vartheta^{n-1}(n-2)! = \frac{1}{(n-1)\vartheta} \Rightarrow E\left(\frac{n-1}{T}\right) = \frac{1}{\vartheta}.$$

Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\psi(T) = \frac{n-1}{T}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του $\frac{1}{\vartheta}$.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\vartheta) = \frac{2\vartheta}{3}(2 - \vartheta x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\vartheta},$$

όπου $\vartheta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί η εκτιμήτρια ροπών δ του ϑ. Στη συνέχεια, να εξεταστεί αν η $\frac{1}{\delta}$ είναι συνεπής για το $\frac{1}{\vartheta}$.

β. Για δείγμα μεγέθους $n = 1$ από την παραπάνω κατανομή, να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

γ. Για δείγμα μεγέθους $n = 1$, να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης 90%.
[Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της $\frac{1}{\vartheta X_1}$.]

Λύση: α. Υπολογίζουμε τη ροπή πρώτης τάξης της κατανομής

$$m_1 = E(X_1) = \int_0^{\frac{1}{\vartheta}} xf(x;\vartheta)dx = \int_0^{\frac{1}{\vartheta}}\left(\frac{4\vartheta x}{3} - \frac{2\vartheta^2x^2}{3}\right)dx = \left[\frac{2\vartheta x^2}{3} - \frac{2\vartheta^2x^3}{9}\right]_0^{\frac{1}{\vartheta}}$$
$$= \frac{2}{3\vartheta} - \frac{2}{9\vartheta} = \frac{4}{9\vartheta}.$$

Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \frac{4}{9\widetilde{\vartheta}} = \overline{X} \Rightarrow \delta_n(\underline{X}) = \widetilde{\vartheta}_n = \frac{4}{9\overline{X}_n}.$$

Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\overline{X}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $E(X_1) = \frac{4}{9\vartheta}$. Από θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, η $\widetilde{\vartheta}_n = g\left(\overline{X}_n\right) = \frac{4}{9\overline{X}_n}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του $g\left(\frac{4}{9\vartheta}\right) = \vartheta$, αφού η g είναι συνεχής στο $\Theta = (0, \infty)$.

β. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανοφάνεια $L(\vartheta|x_1) = \frac{2}{3}\left(2\vartheta - x_1\vartheta^2\right)$ υπό τον περιορισμό $0 < \vartheta \leqslant \frac{1}{x_1}$. Η παραβολή $g(\vartheta) = -x_1\vartheta^2 + 2\vartheta$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\vartheta = -\frac{2}{2(-x_1)} = \frac{1}{x_1}$. Επομένως, η Ε.Μ.Π. του ϑ είναι η $\widehat{\vartheta} = \frac{1}{x_1}$.

γ. Υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής της X_1. Για $x \in \left(0, \frac{1}{\vartheta}\right]$, έχουμε

$$F(x;\vartheta) = \int_0^x f(y;\vartheta)dy = \int_0^x \left(\frac{4\vartheta}{3} - \frac{2\vartheta^2 y}{3}\right)dy = \left[\frac{4\vartheta y}{3} - \frac{\vartheta^2 y^2}{3}\right]_0^x = \frac{4\vartheta x - \vartheta^2 x^2}{3}.$$

Θα βρούμε την κατανομή της $Q = \frac{1}{\vartheta X_1}$. Για $y \geqslant 1$, έχουμε

$$F_Q(y) = P\left(\frac{1}{\vartheta X_1} \leqslant y\right) = P\left(X_1 \geqslant \frac{1}{\vartheta y}\right) = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{y} - \frac{1}{y^2}\right) = 1 - \frac{4}{3y} + \frac{1}{3y^2}.$$

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τυχαία μεταβλητή Q ως ποσότητα οδηγό. Για το Δ.Ε. ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2, ώστε

$$P(Q < c_1) = F_Q(c_1) = 1 - \frac{4}{3c_1} + \frac{1}{3c_1^2} = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 2.85c_1^2 - 4c_1 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{4 \pm \sqrt{4.6}}{2 \cdot 2.85} \Rightarrow c_1 \approx 0.325 \quad \acute{\eta} \quad c_1 \approx 1.078.$$

Η ρίζα $c_1 \approx 0.325 < 1$ απορρίπτεται, αφού το στήριγμα της κατανομής της Q είναι το $[1, \infty)$. Στη συνέχεια,

$$P(Q > c_2) = 1 - F_Q(c_2) = \frac{4}{3c_2} - \frac{1}{3c_2^2} = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 0.15c_2^2 - 4c_2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{4 \pm \sqrt{15.4}}{2 \cdot 0.15} \Rightarrow c_2 \approx 0.252 \quad \acute{\eta} \quad c_2 \approx 26.414.$$

Η ρίζα $c_2 \approx 0.252 < 1$ απορρίπτεται, αφού το στήριγμα της κατανομής της Q είναι το $[1, \infty)$. Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant \frac{1}{\vartheta X_1} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{26.414 \cdot X_1} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{1}{1.078 \cdot X_1}.$$

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x}$, $x > 0$, $\vartheta > 0$, και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y;\vartheta) = k\vartheta e^{-k\vartheta y}$, $y > 0$, $\vartheta > 0$, όπου k γνωστή θετική σταθερά.

α. Να βρεθεί εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας και επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α.

γ. Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

Λύση: α. Λόγω ανεξαρτησίας, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} f(\underline{x}, \underline{y}; \vartheta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) \prod_{i=1}^{m} f(y_i;\vartheta) = k^m \vartheta^{n+m} \exp\left\{ -\vartheta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k \sum_{i=1}^{m} y_i \right) \right\} \\ &= g\left(T(\underline{x}, \underline{y}), \vartheta\right) h\left(\underline{x}, \underline{y}\right), \end{aligned}$$

όπου $T(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i + k \sum_{i=1}^{m} y_i$, $g(t,\vartheta) = \vartheta^{n+m} e^{-\vartheta t}$ και $h\left(\underline{x}, \underline{y}\right) = k^m$. Από το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η $T(\underline{X}, \underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_i + k \sum_{i=1}^{m} Y_i$ είναι επαρκής για το ϑ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας του δείγματος

$$\ell(\vartheta | \underline{x}, \underline{y}) = m \log k + (n+m) \log \vartheta - \vartheta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k \sum_{i=1}^{m} y_i \right) \Rightarrow$$

$$\ell'(\vartheta | \underline{x}, \underline{y}) = \frac{n+m}{\vartheta} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k \sum_{i=1}^{m} y_i \right) = 0 \Rightarrow \widehat{\vartheta} = \frac{n+m}{n\overline{x} + km\overline{y}} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\vartheta | \underline{x}, \underline{y}) = -\frac{n+m}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell(\vartheta | \underline{x}, \underline{y})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε.

β. Αρχικά δουλεύουμε με την εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Γνωρίζουμε ότι

$$\ell(\vartheta_0 | \underline{x}, \underline{y}) - \ell(\vartheta_1 | \underline{x}, \underline{y}) < c \Leftrightarrow$$

$$(n+m)(\log \vartheta_0 - \log \vartheta_1) + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k \sum_{i=1}^{m} y_i \right) < c \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i\right) < c^* = c - (n+m)\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \overset{\vartheta_1-\vartheta_0>0}{\Leftrightarrow}$$

$$T(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i < c_\alpha = \frac{c^*}{\vartheta_1-\vartheta_0}.$$

Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x},\underline{y}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} y_i < c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \leqslant c_\alpha \end{cases},$$

όπου θέσαμε $\gamma = 0$ επειδή η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Υπό την H_0, γνωρίζουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n,\vartheta_0)$ και $\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i \sim \text{Gamma}(m,k\vartheta_0)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.7, παίρνουμε ότι $2\vartheta_0\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$ και $2k\vartheta_0\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i \sim \chi^2_{2m}$. Άρα $Q = 2\vartheta_0 T \sim \chi^2_{2n+2m}$. Λύνοντας την ανισότητα $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i < c_\alpha$ ως προς Q, βρίσκουμε $T < c^*_\alpha = 2\vartheta_0 c_\alpha$. Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2, παίρνουμε ότι $P_{\vartheta_0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i < c_\alpha\right) = P_{\vartheta_0}\left(Q < c^*_\alpha\right) = \alpha \Rightarrow c^*_\alpha = \chi^2_{2n+2m;1-\alpha}$. Ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x},\underline{y}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right) < \chi^2_{2n+2m;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right) \geqslant \chi^2_{2n+2m;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

γ. Έχουμε υπολογίσει ποσότητα οδηγό $Q = 2\vartheta\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i\right) \sim \chi^2_{2n+2m}$. Χρησιμοποιούμε τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2

$$P(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_1 = \chi^2_{2n+2m;1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{2n+2m;0.975} \quad \text{και}$$

$$P(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c_2 = \chi^2_{2n+2m;\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{2n+2m;0.025}.$$

Τέλος, λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ

$$c_1 \leqslant 2\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + k\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) \leqslant c_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\chi^2_{2n+2m;0.975}}{2\left(n\overline{X}+km\overline{Y}\right)} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\chi^2_{2n+2m;0.025}}{2\left(n\overline{X}+km\overline{Y}\right)}.$$

7.13 Μάρτιος 2012

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x;\vartheta) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x-\vartheta}{2}}, \quad x \geqslant \vartheta,$$

όπου $\vartheta \in \mathbb{R}$ άγνωστη παράμετρος. Να βρεθούν:

α. η εκτιμήτρια ροπών του ϑ,

β. η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του e^{ϑ},

γ. η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του ϑ.

Λύση: α. Υπολογίζουμε τη ροπή πρώτης τάξης τη κατανομής

$$m_1 = E(X_1) = \int_{\vartheta}^{\infty} xf(x;\vartheta)dx = \int_{\vartheta}^{\infty} \frac{x}{2}e^{-\frac{x-\vartheta}{2}}dx = \int_0^{\infty} \frac{y+\vartheta}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy$$
$$= \vartheta \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy + \int_0^{\infty} y \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy = \vartheta + 2.$$

Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης

$$m_1 = M_1 \Rightarrow E(X_1) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i \Rightarrow \widetilde{\vartheta} = \overline{X} - 2.$$

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος

$$L(\vartheta|\underline{x}) = 2^{-\nu}e^{-\frac{\nu\overline{x}}{2}}e^{\frac{\nu\vartheta}{2}}I_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) = \begin{cases} 2^{-\nu}e^{-\frac{\nu\overline{x}}{2}}e^{\frac{\nu\vartheta}{2}}, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta|\underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = x_{(1)}$.

γ. Θα βρούμε πρώτα μία επαρκή στατιστική συνάρτηση για το ϑ. Έχουμε

$$f(\underline{x};\vartheta) = 2^{-\nu}e^{-\frac{\nu\overline{x}}{2}}e^{\frac{\nu\vartheta}{2}}I_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) = g\left(T(\underline{x}),\vartheta\right) \cdot h(\underline{x}),$$

όπου $T(\underline{x}) = x_{(1)}$, $g(t,\vartheta) = e^{\frac{\nu\vartheta}{2}}I_{[\vartheta,\infty)}(t)$ και $h(\underline{x}) = 2^{-\nu}e^{-\frac{\nu\overline{x}}{2}}$. Από παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Για να δείξουμε ότι είναι και πλήρης, θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε την κατανομή της. Βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής των X_i. Για $x \geqslant \vartheta$, έχουμε

$$F(x;\vartheta) = \int_{\vartheta}^{x} f(y;\vartheta)dy = \int_{\vartheta}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{y-\vartheta}{2}} dy = \int_{0}^{x-\vartheta} \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} du = 1 - e^{-\frac{x-\vartheta}{2}}.$$

Βρίσκουμε τώρα την κατανομή της T. Για $t \geqslant \vartheta$, έχουμε

$$f_T(t) = \nu f(t;\vartheta)\left[1 - F(t;\vartheta)\right]^{\nu-1} = \nu \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{t-\vartheta}{2}} \cdot e^{-(\nu-1)\frac{t-\vartheta}{2}} = \frac{\nu}{2} e^{-\nu\frac{t-\vartheta}{2}}.$$

Έστω ότι $E_{\vartheta}[\varphi(T)] = 0$, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε

$$E_{\vartheta}[\varphi(T)] = \int_{\vartheta}^{\infty} f_T(t)\varphi(t)dt = \frac{\nu}{2} e^{\frac{\nu\vartheta}{2}} \int_{\vartheta}^{\infty} e^{-\frac{\nu t}{2}} \varphi(t)dt = 0, \ \forall \vartheta \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\int_{\vartheta}^{\infty} e^{-\frac{\nu t}{2}} \varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μάς δίνει ότι

$$-e^{-\frac{\nu\vartheta}{2}} \varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης. Ακριβώς όπως στο πρώτο ερώτημα, υπολογίζουμε ότι $E(T) = \vartheta + \frac{2}{\nu}$. Επομένως, η $\psi(T) = T - \frac{2}{\nu}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x;\lambda) = (\lambda+1)(1-x)^{\lambda}, \quad 0 < x < 1,$$

όπου $\lambda > -1$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το λ.

β. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια δ για την παραμετρική συνάρτηση $\frac{1}{1+\lambda}$, το αντίστοιχο κάτω φράγμα Cramér - Rao και η πληροφορία κατά Fisher του δείγματος για το λ.

γ. Να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια δ είναι συνεπής για το $\frac{1}{1+\lambda}$.

δ. Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το λ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση: α. Θα δείξουμε ότι η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. Το στήριγμα $S = (0,1)$ είναι ανεξάρτητο του λ και, λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε ότι

$$f(\underline{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\lambda) = \exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^{\nu} \log(1-x_i) + \nu \log(\lambda+1)\right\},$$

όπου $Q(\lambda) = \lambda$ και $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log(1 - x_i)$. Το $Q(\Theta) = \{\lambda : \lambda > -1\} = (-1, \infty)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log(1-x_i)$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης.

β. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το λ

$$\log f(\underline{x}; \lambda) = \lambda \sum_{i=1}^{\nu} \log(1 - x_i) + \nu \log(\lambda + 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U(\underline{x}, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(\underline{x}; \lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \log(1 - x_i) + \frac{\nu}{\lambda + 1} \\ &= -\nu \left(\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \log \frac{1}{1 - X_i} - \frac{1}{\lambda + 1} \right) = k(\lambda) \left[\delta_\nu(\underline{x}) - g(\lambda) \right], \end{aligned}$$

όπου $k(\lambda) = -\nu \neq 0$, $\forall \lambda > -1$. Συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\delta_\nu(\underline{X}) = \frac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log \frac{1}{1-X_i}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda+1}$. Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (-1, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. με $Q'(\lambda) = 1 \neq 0$ συνεχή συνάρτηση. Άρα, οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Υπολογίζουμε την πληροφορία κατά Fisher του δείγματος για το λ

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log f(\underline{x}; \lambda) = -\frac{\nu}{(\lambda + 1)^2} \Rightarrow I_{\underline{X}}(\lambda) = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log f(\underline{X}; \lambda) \right] = \frac{\nu}{(\lambda + 1)^2} \in (0, \infty).$$

Επομένως, το κάτω φράγμα της Cramér - Rao για την $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda+1}$ ισούται με

$$\frac{[g'(\lambda)]^2}{I_{\underline{X}}(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda + 1)^4} \cdot \frac{(\lambda + 1)^2}{\nu} = \frac{1}{\nu(\lambda + 1)^2}.$$

γ. Προφανώς, η $\delta_\nu(\underline{X})$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ, αφού είναι αποτελεσματική για το λ. Επίσης, γνωρίζουμε ότι

$$\operatorname{Var}\left[\delta_\nu(\underline{X})\right] = \frac{[g'(\lambda)]^2}{I_{\underline{X}}(\lambda)} = \frac{1}{\nu(\lambda + 1)^2} \Rightarrow \lim_{\nu \to \infty} \operatorname{Var}\left[\delta_\nu(\underline{X})\right] = 0.$$

Από πρόταση 3.12, έπεται ότι είναι συνεπής εκτιμήτρια της $\frac{1}{\lambda+1}$.

δ. Βλέπε παράδειγμα 4.4 (σελίδα 63), όπου $\vartheta = \lambda + 1$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς λ

$$c_1 \leqslant 2(\lambda + 1)T \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2_{2\nu;1-\frac{\alpha}{2}}}{2 \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log \frac{1}{1-X_i}} - 1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\chi^2_{2\nu;\frac{\alpha}{2}}}{2 \sum\limits_{i=1}^{\nu} \log \frac{1}{1-X_i}} - 1.$$

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες παρατηρήσεις, όπου η X_i ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, k_i\vartheta]$ με $\vartheta > 0$ άγνωστη παράμετρο και k_i γνωστές θετικές σταθερές, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση και η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

β. Για τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, η κρίσιμη περιοχή είναι

$$K = \left\{ \underline{x} : \max_{i=1,\ldots,\nu} \frac{X_i}{k_i} > c \right\}.$$

Να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιεί η σταθερά c, ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α, και να υπολογισθεί η ισχύς του ελέγχου για $\vartheta > \vartheta_0$.

γ. Έστω $\nu \geqslant 30$ μεγάλο. Να βρεθεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

Λύση: α. Θέτουμε $U_i = \frac{X_i}{k_i} \sim U[0, \vartheta]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Βλέπε παραδείγματα 3.4 (σελίδα 24) και 3.29 (σελίδα 49). Παίρνουμε ότι η $U_{(\nu)} = \max\limits_{i=1,\ldots,\nu} \frac{X_i}{k_i}$ είναι επαρκής για το ϑ και $\widehat{\vartheta} = U_{(\nu)}$.

β. Γνωρίζουμε ότι $F_{U_{(\nu)}}(u) = \left(\frac{u}{\vartheta}\right)^\nu$ για $u \in (0, \vartheta)$. Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c και το μέγεθος δείγματος ν, κάνουμε χρήση της σχέσης

$$P_{\vartheta_0}(\underline{U} \in K) = P_{\vartheta_0}\left(U_{(\nu)} > c\right) = 1 - \left(\frac{c}{\vartheta_0}\right)^\nu = \alpha \Rightarrow c = \vartheta_0 \cdot (1 - \alpha)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Για $\vartheta > \vartheta_0$, υπολογίζουμε ότι

$$\beta(\vartheta) = P_\vartheta(\underline{U} \in K) = P_\vartheta\left(U_{(\nu)} > \vartheta_0 \cdot (1 - \alpha)^{\frac{1}{\nu}}\right) = 1 - (1 - \alpha)\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^\nu.$$

γ. Βλέπε παράδειγμα 4.19 (σελίδα 71). Παίρνουμε το ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης

$$\frac{2\sqrt{3\nu}}{\sqrt{3\nu} + Z_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \overline{U}_\nu \leqslant \vartheta \leqslant \frac{2\sqrt{3\nu}}{\sqrt{3\nu} - Z_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \overline{U}_\nu, \text{ όπου } \overline{U}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \frac{X_i}{k_i}.$$

7.14 Σεπτέμβριος 2011

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη στο $(-\vartheta, \vartheta)$.

α. Να βρεθεί ο αμερόληπτος εκτιμητής ελάχιστης διασποράς της $g(\vartheta) = \vartheta^k$.

β. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της $\mathrm{Var}(X_1)$.

Λύση: α. Στο παράδειγμα 3.9 (σελίδα 29) αποδείξαμε ότι $Y_i = |X_i| \sim U(0, \vartheta)$,

$i = 1, 2, \ldots, n$. Βλέπε θέμα 1, Απρίλιος 2014 (σελίδα 150). Ομοίως, παίρνουμε ότι η $\psi_1(T) = \left(1 + \frac{k}{n}\right) T^k$, όπου $T(\underline{X}) = Y_{(n)} = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$, είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g_1(\vartheta) = \vartheta^k$ για $k > -n$.

β. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι η $\psi_2(T) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) T^2$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $g_2(\vartheta) = \operatorname{Var}(X_1) = \frac{\vartheta^2}{3}$.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x; a, b) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad x \geqslant b,$$

όπου $a, b > 0$ γνωστά.

α. Εξετάστε αν η $f(x; a, b)$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ζεύγος (a, b).

γ. Να βρεθεί Ε.Μ.Π. για το ζεύγος (a, b).

δ. Για $b = 1$, να εξετάσετε την πληρότητα.

Λύση: α. Βλέπουμε άμεσα ότι η κατανομή $f(x; a, b)$ δεν ανήκει στην Ε.Ο.Κ., αφού το στήριγμα $S = [b, \infty)$ εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο b.

β. Λόγω ανεξαρτησίας, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} f(\underline{x}; a, b) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; a, b) = a^n b^{na} I_{[b,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \exp\left\{-(a+1)\sum_{i=1}^n \log x_i\right\} \\ &= g\left(\underline{T}(\underline{x}), a, b\right) \cdot h(\underline{x}), \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^n \log x_i, x_{(1)}\right)$, $g(t_1, t_2, a, b) = a^n b^{na} I_{[b,\infty)}(t_2) e^{-(a+1)t_1}$, $h(\underline{x}) = 1$. Από το παραγοντικό κριτήριο των Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{x})$ είναι επαρκής για το ζεύγος (a, b).

γ. Έχουμε

$$L(a, b|\underline{x}) = \begin{cases} a^n b^{na} \prod\limits_{i=1}^n x_i^{-a-1}, & b \leqslant x_{(1)} \\ 0, & b > x_{(1)} \end{cases}.$$

Σταθεροποιούμε το a και μεγιστοποιούμε ως προς b. Για $b \leqslant x_{(1)}$, η $L(a, b|\underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς b, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $\widehat{b} = \widehat{b}(\underline{x}) = x_{(1)}$. Τώρα, μεγιστοποιούμε την $\ell\left(a, x_{(1)}|\underline{x}\right)$ ως προς a

$$\ell\left(a, x_{(1)}|\underline{x}\right) = n \log a + na \log x_{(1)} - (a+1)\sum_{i=1}^n \log x_i \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial a}\left(a, x_{(1)}|\underline{x}\right) = \frac{n}{a} + n\log x_{(1)} - \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0 \Rightarrow$$

$$\widehat{a} = \widehat{a}(\underline{x}) = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\log\frac{x_i}{x_{(1)}}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2}\left(a, x_{(1)}|\underline{x}\right) = -\frac{n}{a^2} < 0,\ \forall a > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell\left(a, x_{(1)}|\underline{x}\right)$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $(0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε.

Στην ειδική περίπτωση όπου $\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i = n\log x_{(1)}$, δηλαδή $x_1 = \cdots = x_n = x_{(1)}$, έχουμε $\ell\left(a, x_1|\underline{x}\right) = n\log a - n\log x_1$, δηλαδή η πιθανοφάνεια είναι μη-φραγμένη στο $[x_1,\infty)$. Άρα, δεν υπάρχει η Ε.Μ.Π του a. Όμως, $P(X_1 = \cdots = X_n) = 0$, δηλαδή η Ε.Μ.Π. του a υπάρχει και είναι μοναδική με πιθανότητα 1.

δ. Για $b = 1$, το στήριγμα $S = [1,\infty)$ της κατανομής είναι ανεξάρτητο του a και

$$f(\underline{x}; a) = \exp\left\{-(a+1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i + n\log a)\right\},$$

όπου $Q(a) = -a-1$ και $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i$. Το $Q(\Theta) = \{-a-1 : a > 0\} = (-\infty,-1)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\log X_i$ είναι επαρκής για το a και πλήρης.

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την $N(\mu, 1)$.

α. Να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$.

β. Να βρεθεί το μέγεθος δείγματος n, ώστε η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ να είναι ίση με β.

γ. Ποια η ισχύς του ελέγχου για $n = 16$, $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$ και $\alpha = 1\%$;

δ. Να κατασκευαστεί Ο.Ι.Ε. για τις υποθέσεις $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$ σε ε.σ.σ. α.

Λύση: α. Δε γνωρίζουμε τη σχέση των μ_0 και μ_1, οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις. Για την περίπτωση όπου $\mu_1 > \mu_0$, βλέπε παράδειγμα 5.2 (σελίδα 79). Ομοίως, για την περίπτωση όπου $\mu_1 < \mu_0$, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} < c_\alpha \\ 0, & \overline{x} \geqslant c_\alpha \end{cases}.$$

Χρησιμοποιώντας τα άνω ποσοστιαία σημεία της κατανομής $N(0,1)$, έχουμε ότι

$$P_{\mu_0}(\overline{X} < c_\alpha) = P_{\mu_0}\left[(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n} < c_\alpha^*\right] = \alpha \Rightarrow P_{\mu_0}\left[(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n} > c_\alpha^*\right] = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$c^*_\alpha = Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha.$$

Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & (\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n} < -Z_\alpha \\ 0, & (\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n} \geqslant -Z_\alpha \end{cases}.$$

β. Στην περίπτωση όπου $\mu_1 > \mu_0$, ζητάμε

$$\begin{aligned} P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= P_{\mu_1}(\underline{X} \notin K) = P_{\mu_1}\left[(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n} \leqslant Z_\alpha\right] \\ &= P_{\mu_1}\left[(\overline{X} - \mu_1)\sqrt{n} \leqslant Z_\alpha + (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}\right] \\ &= \Phi\left(Z_\alpha + (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}\right) = \beta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Z_\alpha + (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} = \Phi^{-1}(\beta) = Z_{1-\beta} = -Z_\beta \Rightarrow n = \left\lceil \left(\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \right\rceil.$$

Ομοίως, στην περίπτωση όπου $\mu_1 < \mu_0$, ζητάμε

$$\begin{aligned} P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= P_{\mu_1}(\underline{X} \notin K) = P_{\mu_1}\left[(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n} \geqslant -Z_\alpha\right] \\ &= P_{\mu_1}\left[(\overline{X} - \mu_1)\sqrt{n} \geqslant (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha\right] \\ &= 1 - \Phi\left((\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha\right) = \beta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\beta) = Z_\beta \Rightarrow n = \left\lceil \left(\frac{Z_\beta + Z_\alpha}{\mu_0 - \mu_1}\right)^2 \right\rceil.$$

γ. Είμαστε στην περίπτωση $\mu_1 < \mu_0$, οπότε

$$\begin{aligned} \beta_\varphi(\mu_1) &= P_{\mu_1}(\underline{X} \in K) = P_{\mu_1}\left[(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n} < -Z_\alpha\right] \\ &= P_{\mu_1}\left[(\overline{X} - \mu_1)\sqrt{n} < (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha\right] = \Phi\left((\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha\right) \\ &= \Phi(4 - Z_{0.01}) = \Phi(4 - 2.33) \approx 0.95. \end{aligned}$$

δ. Βλέπε παρατήρηση 5.2 (σελίδα 80).

Θέμα 4. Έστω ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$ πελατών σε ένα αυτοματοποιημένο σύστημα στο διαδίκτυο ακολουθούν την κατανομή με σ.π.π.

$$f(r;\vartheta) = \frac{p}{\vartheta} r^{p-1} e^{-\frac{r^p}{\vartheta}}, \quad r > 0, \quad p > 0 \text{ γνωστό}.$$

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια $\delta = \delta(\underline{R})$ του ϑ.

β. Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

[Υπόδειξη: Να βρείτε την κατανομή του $\frac{2\nu\delta}{\vartheta}$.]

γ. Αν $R_1 = \frac{1}{4}$, $R_2 = \frac{1}{2}$, $R_3 = \frac{1}{4}$ και $p = 2$, ποιο θα είναι το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha = 90\%$;

Λύση: Βλέπε θέμα 4, Σεπτέμβριος 2013 (σελίδα 161).

7.15 Φεβρουάριος 2010

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\vartheta) = \frac{a\vartheta^a}{x^{a+1}}, \quad x \geqslant \vartheta > 0,$$

όπου a γνωστή σταθερά.

α. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. $\widehat{\vartheta}$ της παραμέτρου ϑ και να δειχθεί ότι είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της $g(\vartheta) = \vartheta^k$.

Λύση. Βλέπε θέμα 1, Ιούνιος 2018 (σελίδα 137).

Θέμα 2. Έστω $X \sim \text{Gamma}\left(a, \frac{1}{b}\right)$ με σ.π.π.

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b^a\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}, \quad x > 0, \quad a, b > 0.$$

α. Να εξεταστεί αν η κατανομή Gamma(a, b) ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

β. Να υπολογιστούν οι $E(X)$, $\text{Var}(X)$ και $\text{Cov}(X, \log X)$.

γ. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή Gamma(a, b) με a γνωστό. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της παραμέτρου b. Είναι αυτή Α.Ε.Ε.Δ. του b; Είναι συνεπής για το b;

Λύση. α. Το στήριγμα $S = (0, \infty)$ της κατανομής είναι ανεξάρτητο του (a, b) και

$$f(x;a,b) = \frac{1}{x} \exp\left\{a \log x - \frac{1}{b} x - a \log b - \log \Gamma(a)\right\}, \quad \text{όπου}$$

$$h(x) = \frac{1}{x}, \ \underline{Q}(a,b) = \left(a, -\frac{1}{b}\right), \ \underline{T}(x) = (\log x, x), \ A(a,b) = a \log b + \log \Gamma(a).$$

β. Θέτουμε

$$\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \left(a, -\frac{1}{b}\right) = \underline{Q}(a,b) \Rightarrow a = \eta_1 \quad \text{και} \quad b = -\frac{1}{\eta_2} \Rightarrow$$

$$f(x;\underline{\eta}) = \frac{1}{x} \exp\left\{\eta_1 \log x + \eta_2 x + \eta_1 \log(-\eta_2) - \log \Gamma(\eta_1)\right\}, \ \underline{\eta} \in (0, \infty) \times (-\infty, 0),$$

όπου $\quad A(\underline{\eta}) = \log\Gamma(\eta_1) - \eta_1 \log(-\eta_2) \Rightarrow E\left[T_2(X)\right] = E\left(X\right) = \dfrac{\partial A}{\partial \eta_2} = -\dfrac{\eta_1}{\eta_2} = ab,$

$$\operatorname{Var}\left[T_2(X)\right] = \operatorname{Var}\left(X\right) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1^2} = \frac{\eta_1}{\eta_2^2} = ab^2 \quad \text{και}$$

$$\operatorname{Cov}\left[T_1(X), T_2(X)\right] = \operatorname{Cov}\left(\log X, X\right) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = -\frac{1}{\eta_2} = b.$$

γ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας των δεδομένων

$$\ell(b|\underline{x}) = (a-1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i - na\log b - n\log\Gamma(a) \Rightarrow$$

$$\ell'(b|\underline{x}) = \frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{na}{b} = 0 \Rightarrow \widehat{b}_n = \frac{\overline{x}}{a} \quad \text{και}$$

$$\ell''(b|\underline{x}) = -\frac{2}{b^3}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{b^2} = \frac{1}{b^2}\left(na - \frac{2}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Rightarrow$$

$$\ell''(\widehat{b}_n|\underline{x}) = \frac{1}{\widehat{b}_n^2}\left(na - 2na\right) = -\frac{na}{\widehat{b}_n^2} < 0.$$

Επομένως, η $\ell(b|\underline{x})$ παρουσιάζει πράγματι μέγιστο στο $\widehat{b}_n = \frac{\overline{x}}{a}$. Υπολογίζοντας τα όρια της συνάρτησης $L\left(b|\underline{x}\right)$ ως προς b στα 0^+ και ∞, επαληθεύουμε ότι το $\widehat{b}$ είναι σημείο ολικού μεγίστου

$$\lim_{b\to\infty} L\left(b|\underline{x}\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{na}\left[\Gamma(a)\right]^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} = 0 \cdot 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} = 0,$$

$$\lim_{b\to 0^+} L\left(b|\underline{x}\right) = \lim_{b\to 0^+} \frac{1}{b^{na}\left[\Gamma(a)\right]^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} = 0.$$

Το σύνολο $Q(\Theta) = \left\{-\frac{1}{b} : b > 0\right\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το b και πλήρης. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, υπολογίζουμε ότι $E(\widehat{b}_n) = \frac{1}{a}E(X_1) = b$. Από πόρισμα 3.2, έπεται ότι η $\widehat{b} = \frac{\overline{x}}{a}$ είναι η Α.Ε.Ε.Δ. του b. Από ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\widehat{b}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $\frac{1}{a}E(X_1) = b$.

Θέμα 3. Έστω $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda k_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ γνωστές θετικές σταθερές.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο λ.

β. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του λ και να δειχθεί ότι είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ και ότι επιτυγχάνει το κάτω φράγμα Cramér - Rao.

Λύση. α. Θα δείξουμε ότι η κατανομή του δείγματος ανήκει στην Ε.Ο.Κ. Το στήριγμα $S = \{0, 1, 2\dots\}$ είναι ανεξάρτητο του λ και για την από κοινού σ.π. έχουμε ότι

$$f(\underline{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \exp\left\{\log\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} k_i\right\} \prod_{i=1}^{n} \frac{k_i^{x_i}}{x_i!},$$

όπου $Q(\lambda) = \log\lambda$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Το $Q(\Theta) = \{\log\lambda : \lambda > 0\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην Ε.Ο.Κ., έπεται ότι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης.

β. Θέτουμε $\overline{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$. Υπολογίζουμε ότι

$$\ell(\lambda|\underline{x}) = \log\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \log k_i - \sum_{i=1}^{n} \log{(x_i!)} \Rightarrow$$

$$\ell'(\lambda|\underline{x}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{\overline{x}}{\overline{k}} \quad \text{και}$$

$$\ell''(\lambda|\underline{x}) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0, \quad \forall\lambda > 0.$$

Δηλαδή, η $\ell\,(\lambda|\underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση στο $(0,\infty)$ και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο, το οποίο και βρήκαμε. Υπολογίζουμε ότι

$$E(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{n\overline{k}}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n\overline{k}}\sum_{i=1}^{n} \lambda k_i = \lambda.$$

Επομένως, η $\widehat{\lambda}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση score του τ.δ. $\underline{X}$ για το λ

$$U(\underline{x},\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\log f(\underline{x};\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n\overline{k}}{\lambda}\left(\frac{\overline{x}}{\overline{k}} - \lambda\right) = k(\lambda)\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right),$$

όπου $k(\lambda) = \frac{n\overline{k}}{\lambda} \neq 0$, $\forall\lambda > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η $\widehat{\lambda}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του λ.

Θέμα 4. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda = \lambda_1$ με $\lambda_1 > \lambda_0$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α. Είναι ο έλεγχος αυτός ομοιόμορφα ισχυρότατος για τις υποθέσεις $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda > \lambda_0$;

β. Να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο λ.

Λύση. α. Θέτουμε $Y_i = |X_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, έχουμε

$$F_{Y_i}(y) = P\left(|X_i| \leqslant y\right) = P(-y \leqslant X_i \leqslant y) = F_{X_i}(y) - F_{X_i}(-y) \Rightarrow$$

$$f_{Y_i}(y) = f(y;\lambda) + f(-y;\lambda) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|} + \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|-y|} = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda y} + \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda y} = \lambda e^{-\lambda y}.$$

Δηλαδή, $Y_i = |X_i| \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Βλέπε παράδειγμα 5.5 (σελίδα 82). Από λήμμα Neyman - Pearson, παίρνουμε τον Ο.Ι.Ε.

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| < c_\alpha \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant c_\alpha \end{cases}.$$

Παίρνουμε ότι $P_{\lambda_0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |X_i| < c_\alpha\right) = P_{\lambda_0}\left(2\lambda_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |X_i| < c_\alpha^*\right) = \alpha \Rightarrow c_\alpha^* = \chi^2_{2n;1-\alpha}$. Άρα, ο έλεγχος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\lambda_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\lambda_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του λ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\lambda_1 > \lambda_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι Ο.Ι.Ε. και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \lambda > \lambda_0$.

β. Βλέπε παράδειγμα 4.6 (σελίδα 64), όπου $\mu = 0$.