Εθνικο και Καποδιστριακο Πανεπιστημιο Αθηνων

Μαθηματική Στατιστική

Βασίλειος Κατσιάνος　　　Παναγιώτης Ανδρέου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Αύγουστος 2024

“*There are three kinds of lies: lies, damned lies and Statistics.*”

Mark Twain

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στο πεδίο της στατιστικής ενδιαφερόμαστε συνήθως να μελετήσουμε κάποιο φαινόμενο. Για τον λόγο αυτό, συλλέγουμε ένα δείγμα παρατηρήσεων που θεωρούμε ότι είναι πραγματοποιήσεις από κάποια κατανομή πιθανότητας με μία ή περισσότερες παραμέτρους. Στη συχνοτιστική στατιστική αντιμετωπίζουμε αυτές τις παραμέτρους ως κάποιες άγνωστες σταθερές. Στόχος μας είναι να βγάλουμε συμπεράσματα γι'αυτές και να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα συμπεράσματα για να απαντήσουμε όποιες ερωτήσεις μπορεί να έχουμε για το υπό μελέτη φαινόμενο. Όπως καταλαβαίνουμε, η μελέτη της στατιστικής απαιτεί μία ικανοποιητική γνώση κατανομών πιθανότητας και των ιδιοτήτων τους. Στο πρώτο κεφάλαιο του παρόντος συγγράμματος συνοψίζουμε κάποια χρήσιμα στοιχεία θεωρίας κατανομών και στο κεφάλαιο 2 εισάγουμε μία σημαντική οικογένεια κατανομών πιθανότητας με πολλές χρήσιμες εφαρμογές στη στατιστική.

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε να εξακριβώσουμε αν ένα νέο φάρμακο που μειώνει τη χοληστερίνη είναι αποτελεσματικό ή όχι στην πράξη. Συνταγογραφούμε το φάρμακο σε 100 εθελοντές με οικογενειακό ιστορικό ανεβασμένων επιπέδων χοληστερίνης και μετράμε αν τα επίπεδα χοληστερίνης τους μειώθηκαν μετά από 3 μήνες. Για $i = 1, 2, \dots, 100$, ορίζουμε:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{τα επίπεδα χωληστερίνης του εθελοντή } i \text{ μειώθηκαν} \\ 0, & \text{τα επίπεδα χωληστερίνης του εθελοντή } i \text{ δε μειώθηκαν} \end{cases}.$$

Θεωρούμε ότι $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ για $i = 1, 2, \dots, 100$, όπου p είναι η άγνωστη πιθανότητα επιτυχίας του νέου φαρμάκου. Ένα λογικό πρώτο βήμα σ'αυτήν τη στατιστική ανάλυση θα ήταν να προσδιορίσουμε μία καλή εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου p βάσει του δείγματος παρατηρήσεων $x_1, \dots, x_{100}$ που έχουμε συλλέξει. Κάποιος θα μπορούσε εύκολα να συμπεράνει ότι το ποσοστό των εθελοντών των οποίων τα επίπεδα χοληστερίνης μειώθηκαν μετά από 3 μήνες είναι μία λογική εκτίμηση της πιθανότητας p. Αν αυτό το ποσοστό είναι αρκετά μεγαλύτερο από 50%, τότε αυτό αποτελεί ένδειξη για την αποτελεσματικότητα του νέου φαρμάκου. Στο κεφάλαιο 3 εισάγουμε κάποιες μεθόδους εύρεσης τέτοιων εκτιμήσεων και παρουσιάζουμε διάφορα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία διαφορετικές εκτιμήσεις της ίδιας άγνωστης παραμέτρου μπορούν να συγκριθούν για να προσδιοριστεί η "καλύτερη" μεταξύ τους. Αυτά τα κριτήρια στοχεύουν κυρίως στο να εξασφαλίσουν ότι η τιμή της σημειακής εκτίμησης θα είναι κοντά στην πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου με μεγάλη πιθανότητα.

Ο υπολογισμός μίας σημειακής εκτίμησης της άγνωστης παραμέτρου δεν είναι συνήθως αρκετός, αφού η τιμή της εξαρτάται από το δείγμα που έτυχε να συλλέξουμε και δε δίνει καμία πληροφορία για το πώς θα κατανέμονται οι τιμές της ίδιας εκτίμησης βάσει δειγμάτων που άλλοι ερευνητές θα μπορούσαν να συλλέξουν. Με άλλα λόγια, θέλουμε επίσης να γνωρίζουμε ποιο είναι περίπου το εύρος των πιο πιθανών τιμών της εκτίμησης. Επομένως, καταλήγουμε στην ιδέα κατασκευής ενός διαστήματος που περιέχει όλες τις πιο πιθανές τιμές της εκτίμησης. Το διάστημα αυτό κατασκευάζεται με τέτοιον τρόπο ώστε να περιέχει την πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου με κάποιο προκαθορισμένο επίπεδο "εμπιστοσύνης". Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν καταλήξουμε σε ένα διάστημα του οποίου το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από 0.5, τότε έχουμε ισχυρή ένδειξη ότι το νέο φάρμακο είναι όντως αποτελεσματικό. Στο κεφάλαιο 4 εισάγουμε διάφορες μεθόδους κατασκευής τέτοιων διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Επιπλέον, ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε την εγκυρότητα υποθέσεων όπως το αν μία άγνωστη παράμετρος παίρνει τιμές μέσα σε ένα συγκεκριμένο σύνολο βάσει της πληροφορίας που περιέχει το δείγμα που συλλέξαμε. Για παράδειγμα μπορεί να ενδιαφερόμαστε να μάθουμε αν η πιθανότητα επιτυχίας του νέου φαρμάκου είναι μεγαλύτερη από 0.5 ή όχι, δηλαδή αν το νέο φάρμακο είναι αποτελεσματικό ή όχι. Στο κεφάλαιο 5 θεμελιώνουμε το θεωρητικό πλαίσιο σύμφωνα με το οποίο πραγματοποιούμε τέτοιους ελέγχους υποθέσεων στην κλασική στατιστική και εισάγουμε διάφορες μεθόδους εύρεσης τέτοιων κανόνων απόφασης βασισμένων στο παρατηρούμενο δείγμα.

Βασίλης Κατσιάνος
Πάνος Ανδρέου

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Κατανομών Πιθανότητας

1.1 Διακριτές Κατανομές

Ορισμός 1.1. (Συνάρτηση Πιθανότητας)

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in S = \{x_0, x_1, \dots\}$$

Πρόταση 1.1. (Ιδιότητες Συνάρτησης Πιθανότητας)

i. $0 \leqslant f_X(x) \leqslant 1$, $x \in S = \{x_0, x_1, \dots\}$,

ii. $\sum_{x \in S} f_X(x) = 1$.

Ορισμός 1.2. (Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής)

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum_{y \leqslant x} \mathbb{P}(X = y) = \sum_{y \leqslant x} f_X(y), \quad x \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 1.3. (Μέση Τιμή) Αν $\sum_{x \in S} |x| f_X(x) < \infty$, τότε:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in S} x f_X(x).$$

Ορισμός 1.4. (Δείκτρια Τυχαία Μεταβλητή)

$$X = \mathbb{1}_A(Y) = \begin{cases} 1, & Y \in A \\ 0, & Y \notin A \end{cases}$$

Ισχύει ότι $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(Y \in A) + 0 \cdot \mathbb{P}(Y \notin A) = \mathbb{P}(Y \in A)$.

Ορισμός 1.5. (Διασπορά) Αν $\sum_{x \in S} x^2 f_X(x) < \infty$, τότε:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 .$$

Θεώρημα 1.1. (Τύπος Αφηρημένου Στατιστικού)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \sum_{x \in S} g(x) f_X(x)$$

Ορισμός 1.6. (Ανεξαρτησία)

$$\begin{aligned} X, Y \text{ ανεξάρτητες} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B), \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall x \in S_X, \quad \forall y \in S_Y. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.7. (Ροπογεννήτρια)

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{x \in S} e^{tx} f_X(x)$$

Γνωστές Διακριτές Κατανομές

Κατανομή Bernoulli - Bernoulli(p), $p \in (0,1)$: Επιτυχία/αποτυχία σε 1 δοκιμή

$$f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\},$$

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p),$$

$$M_X(t) = pe^t + 1 - p, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$X, Y \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow \; X + Y \sim \text{Bin}(2, p).$$

Διωνυμική Κατανομή - Bin(N, p), $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$: Πλήθος επιτυχιών σε N δοκιμές

$$f_X(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, \quad x \in \{0, 1, \dots, N\},$$

$$\mathbb{E}(X) = Np, \quad \mathrm{Var}(X) = Np(1-p),$$

$$M_X(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^N, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$X \sim \text{Bin}(N, p), Y \sim \text{Bin}(M, p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow \; X + Y \sim \text{Bin}(N + M, p).$$

Γεωμετρική Κατανομή - Geom(p), $p \in (0,1)$: Πλήθος δοκιμών ως την πρώτη επιτυχία

$$f_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x \in \{1, 2, \dots\},$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{p^2},$$

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X, Y \sim \mathrm{Geom}(p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{NegBin}(2, p).$$

Γεωμετρική Κατανομή - $\mathrm{Geom}(p)$, $p \in (0,1)$: Πλήθος αποτυχιών ως την πρώτη επιτυχία

$$f_X(x) = p(1-p)^x, \quad x \in \{0, 1, \dots\},$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$

$$M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X, Y \sim \mathrm{Geom}(p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{NegBin}(2, p).$$

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή - $\mathrm{NegBin}(N, p)$, $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$: Πλήθος δοκιμών ως την N-οστή επιτυχία

$$f_X(x) = \binom{x-1}{N-1} p^N (1-p)^{x-N}, \quad x \in \{N, N+1, \dots\},$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{N}{p^2},$$

$$M_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^N, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X \sim \mathrm{NegBin}(N, p), Y \sim \mathrm{NegBin}(M, p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{NegBin}(N+M, p).$$

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή - $\mathrm{NegBin}(N, p)$, $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$: Πλήθος αποτυχιών ως την N-οστή επιτυχία

$$f_X(x) = \binom{x+N-1}{N-1} p^N (1-p)^x, \quad x \in \{0, 1, \dots\},$$

$$\mathbb{E}(X) = N\frac{1-p}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = N\frac{1-p}{p^2},$$

$$M_X(t) = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^N, \quad t < -\log(1-p),$$

$$X \sim \mathrm{NegBin}(N, p), Y \sim \mathrm{NegBin}(M, p) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{NegBin}(N+M, p).$$

Κατανομή Poisson - $\mathrm{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$: Πλήθος γεγονότων σε σταθερό χρονικό διάστημα

$$f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, \dots\},$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda,$$

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)},$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda), Y \sim \text{Poisson}(\mu) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu).$$

1.2 Συνεχείς Κατανομές

Ορισμός 1.8. (Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας) Συνάρτηση $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ τέτοια ώστε:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx, \quad A \subseteq \mathbb{R}.$$

Ορισμός 1.9. (Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής)

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

Πρόταση 1.2. (Ιδιότητες Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας και Κατανομής)

i. $f_X(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$,

ii. $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$,

iii. $\int_a^b f_X(x)dx = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b)$,

iv. $\mathbb{P}(X = x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

v. $f_X(x) = F'_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

vi. F_X γνησίως αύξουσα στο σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$.

Ορισμός 1.10. (Μέση Τιμή) Αν $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx < \infty$, τότε:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx.$$

Πρόταση 1.3. Αν $X \geqslant 0$, δηλαδή $f_X(x) = 0 \ \forall x < 0$, τότε:

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \int_0^{\infty} kx^{k-1} \left[1 - F_X(x)\right] dx, \quad k > 0.$$

Ειδικότερα, ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_0^{\infty} \left[1 - F_X(x)\right] dx.$$

Ορισμός 1.11. (Διασπορά) Αν $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx < \infty$, τότε:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Θεώρημα 1.2. (Τύπος Αφηρημένου Στατιστικού)

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$$

Ορισμός 1.12. (Ανεξαρτησία)

$$\begin{aligned} X, Y \text{ ανεξάρτητες} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B), \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.13. (Ροπογεννήτρια)

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx$$

Ορισμός 1.14. (Συνάρτηση Γάμμα)

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx, \quad k > 0$$

Πρόταση 1.4. (Ιδιότητες Συνάρτησης Γάμμα)

i. $\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1)$, $k > 1$,

ii. $\Gamma(k) = (k-1)!$, $k \in \mathbb{N}$.

Γνωστές Συνεχείς Κατανομές

Συνεχής Ομοιόμορφη Κατανομή - $\mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $\vartheta_1 < \vartheta_2$: Τυχαία επιλογή αριθμού στο διάστημα $[\vartheta_1, \vartheta_2]$

$$f_X(x) = \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}, \quad F_X(x) = \frac{x - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}, \quad x \in [\vartheta_1, \vartheta_2],$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2}{12},$$

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{\vartheta_2 t} - e^{\vartheta_1 t}}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases},$$

$$X \sim \mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2) \ \Rightarrow \ U = \frac{X - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \sim \mathcal{U}(0,1),$$

$$U \sim \mathcal{U}(0,1) \ \Rightarrow \ X = (\vartheta_2 - \vartheta_1)U + \vartheta_1 \sim \mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2).$$

Εκθετική Κατανομή - $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$: Χρόνος μεταξύ 2 γεγονότων

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda,$$

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \ \Rightarrow \ cX \sim \mathrm{Exp}\left(\lambda/c\right), \quad c > 0,$$

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\mu) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow \ \min\{X, Y\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda + \mu),$$

$$X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow \ X + Y \sim \mathrm{Gamma}(2, \lambda).$$

Κατανομή Γάμμα - Gamma(k, λ), $k > 0$, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{k}{\lambda^2},$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^k, \quad t < \lambda,$$

$$X \sim \mathrm{Gamma}(k, \lambda) \ \Rightarrow \ cX \sim \mathrm{Gamma}\left(k, \lambda/c\right), \quad k > 0,$$

$$X \sim \mathrm{Gamma}(k, \lambda), Y \sim \mathrm{Gamma}(\ell, \lambda) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow \ X + Y \sim \mathrm{Gamma}(k + \ell, \lambda).$$

Κανονική Κατανομή - $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2,$$

$$M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \ \Rightarrow \ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \ \Rightarrow \ X = \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right),$$

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right) \text{ ανεξάρτητες } \Rightarrow \ X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

Κατανομή Βήτα - Beta$(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\Gamma(\vartheta_1)\Gamma(\vartheta_2)} x^{\vartheta_1 - 1}(1 - x)^{\vartheta_2 - 1}, \quad x \in (0, 1),$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2 + 1)(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2},$$

$$X \sim \mathrm{Beta}(\vartheta_1, \vartheta_2) \ \Rightarrow \ 1 - X \sim \mathrm{Beta}\left(\vartheta_2, \vartheta_1\right),$$

$$X \sim \mathrm{Beta}(\vartheta, 1) \ \Rightarrow \ Y = -\log X \sim \mathrm{Exp}(\vartheta),$$

$$X \sim \text{Beta}(1, \vartheta) \;\Rightarrow\; Y = -\log(1-X) \sim \text{Exp}(\vartheta),$$

$$Y \sim \text{Exp}(\vartheta) \;\Rightarrow\; X_1 = e^{-Y} \sim \text{Beta}(\vartheta, 1) \text{ και } X_2 = 1 - e^{-Y} \sim \text{Beta}(1, \vartheta).$$

1.3 Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός 1.15. (Συνδιακύμανση) Αν $\mathbb{E}(XY) < \infty$, τότε:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Πρόταση 1.5. (Ιδιότητες Μέσης Τιμής)

i. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,

ii. $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$,

iii. X, Y ανεξάρτητες συνεπάγεται ότι $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,

iv. $a \leqslant X \leqslant b$ συνεπάγεται ότι $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$,

v. $X \leqslant Y$ συνεπάγεται ότι $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Πρόταση 1.6. (Ιδιότητες Διασποράς)

i. $\text{Var}(X) \geqslant 0$,

ii. $\text{Var}(aX + b) = a^2 \,\text{Var}(X)$,

iii. $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \,\text{Var}(X) + b^2 \,\text{Var}(Y) + 2ab \,\text{Cov}(X, Y)$,

iv. X, Y ανεξάρτητες συνεπάγεται ότι $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \,\text{Var}(X) + b^2 \,\text{Var}(Y)$,

v. X, Y ανεξάρτητες συνεπάγεται ότι $\text{Var}(XY) = \mathbb{E}\left(X^2\right) \mathbb{E}\left(Y^2\right) - [\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)]^2$.

Πρόταση 1.7. (Ιδιότητες Συνδιακύμανσης)

i. $\text{Cov}(X, a) = 0$,

ii. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$,

iii. $\text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y)$,

iv. $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \,\text{Cov}(X, Y)$,

v. $\text{Cov}(X + Y, Z + W) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(X, W) + \text{Cov}(Y, Z) + \text{Cov}(Y, W)$,

vi. X, Y ανεξάρτητες συνεπάγεται ότι $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Ορισμός 1.16. (Δεσμευμένη Μέση Τιμή της X δοθέντος ότι $Y = y$)

$$m_{X|Y}(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y) = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} x f_{X|Y}(x \mid y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x \mid y) dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ορισμός 1.17. (Δεσμευμένη Μέση Τιμή της X δοθείσης της Y)

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = m_{X|Y}(Y)$$

Θεώρημα 1.3. (Διπλής Μέσης Τιμής)

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid Y)\right] = \mathbb{E}\left[m_{X|Y}(Y)\right] = \begin{cases} \sum_{y \in S_Y} m_{X|Y}(y) f_Y(y), & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{\mathbb{R}} m_{X|Y}(y) f_Y(y) dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Πρόταση 1.8. (Ιδιότητες Ροπογεννητριών)

i. $M_X(t) = M_Y(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν X, Y ισόνομες (προερχόμενες από την ίδια οικογένεια κατανομών με ίδιες τιμές παραμέτρων),

ii. $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$,

iii. $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$,

iv. X, Y ανεξάρτητες συνεπάγεται ότι $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

Πρόταση 1.9. (Βασικές Πιθανοτικές Ανισότητες)

i. **Ανισότητα Markov**: $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$, $a > 0$

ii. **Ανισότητα Chebyshev**: $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$, $a > 0$

iii. **Ανισότητα Cauchy - Schwarz**: $[\mathbb{E}(XY)]^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right) \mathbb{E}\left(Y^2\right)$

iv. **Ανισότητα Συνδιακύμανσης**: $[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2 \leqslant \mathrm{Var}\,(X)\,\mathrm{Var}\,(Y)$

v. **Ανισότητα Jensen**: f κυρτή συνεπάγεται ότι $f\left(\mathbb{E}(X)\right) \leqslant \mathbb{E}\left[f(X)\right]$

Σημείωση 1.1. Ένας εύκολος τρόπος να θυμάται κάποιος τη φορά της ανισότητας Jensen είναι μέσω των ιδιοτήτων της διασποράς μίας τυχαίας μεταβλητής X. Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathbb{E}(X)]^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$f\left(\mathbb{E}(X)\right) \leqslant \mathbb{E}\left[f(X)\right],$$

όπου $f(x) = x^2$ κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 2

Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

2.1 Εισαγωγή

Η εκθετική οικογένεια κατανομών (ΕΟΚ) είναι μία κλάση κατανομών που περιέχει πολλές από τις γνωστές (διακριτές και συνεχείς) κατανομές. Η χρησιμότητά της έγκειται στο γεγονός ότι οι κατανομές - μέλη της χαρακτηρίζονται από γενικές ιδιότητες, πράγμα το οποίο επιτρέπει να διατυπώσουμε διάφορες προτάσεις με ισχύ για όλες αυτές τις κατανομές. Ως ειδικές περιπτώσεις αυτών των ιδιοτήτων μπορούν να προκύψουν πολλά από τα γνωστά αποτελέσματα για αυτές τις κατανομές.

Ορισμός 2.1. i. Το σύνολο Θ πάνω στο οποίο παίρνει τιμές η άγνωστη παράμετρος $\underline{\vartheta}$ κάποιας κατανομής καλείται *παραμετρικός χώρος*.

ii. Το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x; \underline{\vartheta}) > 0\}$ καλείται *στήριγμα* της κατανομής με συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x; \underline{\vartheta})$.

2.2 Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

Ορισμός 2.2. Μία κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x; \vartheta)$ για $x \in S \subseteq \mathbb{R}$ ανήκει στην (πλήρους τάξης) *μονοπαραμετρική ΕΟΚ* αν το στήριγμα S δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ και ισχύει ότι:

$$f(x; \vartheta) = h(x) e^{Q(\vartheta) T(x) - A(\vartheta)}.$$

Αν $Q(\vartheta) = \vartheta$, τότε λέμε ότι η ΕΟΚ βρίσκεται σε *κανονική μορφή*.

Σημείωση 2.1. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι οι εξής κατανομές ανήκουν στη μονοπαραμετρική ΕΟΚ: Bernoulli, διωνυμική με γνωστό πλήθος δοκιμών, γεωμετρική, αρνητική διωνυμική με γνωστό πλήθος δοκιμών, Poisson και εκθετική.

Πρόταση 2.1. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\vartheta) = h(x)e^{\vartheta T(x)-A(\vartheta)}$ σε κανονική μορφή, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\mathbb{E}[T(X)] = A'(\vartheta), \quad \mathrm{Var}[T(X)] = A''(\vartheta), \quad M_T(t) = \mathbb{E}\left[e^{tT(X)}\right] = e^{A(t+\vartheta)-A(\vartheta)}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x;\vartheta)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{\vartheta T(x)}dx = e^{A(\vartheta)}.$$

Παραγωγίζοντας αυτήν την έκφραση ως προς ϑ, μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά παραγώγισης και ολοκλήρωσης με κατάλληλη εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης για να πάρουμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{\vartheta T(x)}dx = A'(\vartheta)e^{A(\vartheta)} \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{\partial}{\partial\vartheta}e^{\vartheta T(x)}dx = A'(\vartheta)e^{A(\vartheta)} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)T(x)e^{\vartheta T(x)}dx = A'(\vartheta)e^{A(\vartheta)} \quad \Rightarrow$$

$$A'(\vartheta) = \int_{\mathbb{R}} T(x)\underbrace{h(x)e^{\vartheta T(x)-A(\vartheta)}}_{f(x;\vartheta)}dx = \mathbb{E}[T(X)].$$

Ομοίως, υπολογίζουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)T^2(x)e^{\vartheta T(x)}dx = \left[A'(\vartheta)\right]^2 e^{A(\vartheta)} + A''(\vartheta)e^{A(\vartheta)} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[T^2(X)\right] = \left[A'(\vartheta)\right]^2 + A''(\vartheta) \quad \Rightarrow$$

$$A''(\vartheta) = \mathbb{E}\left[T^2(X)\right] - \left[\mathbb{E}\left(T(X)\right)\right]^2 = \mathrm{Var}\left[T(X)\right].$$

Όσον αφορά τη ροπογεννήτρια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_T(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{tT(x)}f(x;\vartheta)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{tT(x)}h(x)e^{\vartheta T(x)-A(\vartheta)}dx \\ &= e^{-A(\vartheta)}\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{(t+\vartheta)T(x)}dx \\ &= e^{A(t+\vartheta)-A(\vartheta)}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{h(x)e^{(t+\vartheta)T(x)-A(t+\vartheta)}}_{f(x;t+\vartheta)}dx \\ &= e^{A(t+\vartheta)-A(\vartheta)}. \end{aligned}$$

□

Σημείωση 2.2. Αν $Q(\vartheta) \neq \vartheta$, τότε η ΕΟΚ μπορεί να έρθει σε κανονική μορφή με την αναπαραμέτρηση $\eta = Q(\vartheta)$.

Παράδειγμα 2.1. (Διωνυμική με γνωστό πλήθος δοκιμών)

$$
\begin{aligned}
f(x;p) &= \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} = \binom{N}{x} e^{x\log p + (N-x)\log(1-p)} \\
&= \binom{N}{x} e^{x[\log p - \log(1-p)] + N\log(1-p)} \\
&= \binom{N}{x} \exp\left\{ x\log\frac{p}{1-p} - N\log\frac{1}{1-p} \right\},
\end{aligned}
$$

$$
h(x) = \binom{N}{x}, \quad Q(p) = \log\frac{p}{1-p}, \quad T(x) = x, \quad A(p) = N\log\frac{1}{1-p}.
$$

Θεωρούμε την ακόλουθη αναπαραμέτρηση:

$$
\eta = \log\frac{p}{1-p} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (1-p)e^\eta = p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{e^\eta}{e^\eta+1} = \frac{1}{1+e^{-\eta}},
$$

$$
f(x;\eta) = \binom{N}{x} e^{\eta x - N\log(e^\eta+1)}, \quad A(\eta) = N\log\left(e^\eta+1\right).
$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$
\mathbb{E}\left[T(X)\right] = \mathbb{E}(X) = A'(\eta) = \frac{Ne^\eta}{e^\eta+1} = Np,
$$

$$
\operatorname{Var}\left[T(X)\right] = \operatorname{Var}(X) = A''(\eta) = \frac{Ne^\eta}{\left(e^\eta+1\right)^2} = \frac{Ne^\eta}{e^\eta+1}\frac{1}{e^\eta+1} = Np(1-p),
$$

$$
\begin{aligned}
M_T(t) = M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) &= e^{A(t+\eta)-A(\eta)} = e^{N\log\left(e^{t+\eta}+1\right) - N\log(e^\eta+1)} \\
&= \exp\left\{ N\log\frac{e^{t+\eta}+1}{e^\eta+1} \right\} = \left(\frac{e^t e^\eta + 1}{e^\eta+1} \right)^N \\
&= \left(\frac{e^\eta}{e^\eta+1} e^t + \frac{1}{e^\eta+1} \right)^N = \left(pe^t + 1 - p\right)^N, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}
$$

2.3 Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

Ορισμός 2.3. Μία κατανομή με άγνωστη διανυσματική παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ και συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\underline{\vartheta})$ για $x \in S \subseteq \mathbb{R}$ ανήκει στην *πολυπαραμετρική ΕΟΚ* αν το στήριγμα S δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$ και ισχύει ότι:

$$
f(x;\underline{\vartheta}) = h(x) e^{\left\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}(x) \right\rangle - A(\underline{\vartheta})},
$$

όπου $\underline{Q} : \Theta \to \mathbb{R}^d$ και $\underline{T} : S \to \mathbb{R}^d$ με $d \geqslant s$. Αν $s = d$, δηλαδή η διάσταση του διανύσματος $\underline{\vartheta}$ ισούται με τη διάσταση του συνόλου τιμών των συναρτήσεων $\underline{Q}$ και $\underline{T}$, τότε λέμε ότι η ΕΟΚ είναι *πλήρους τάξης*. Αν $\underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \underline{\vartheta}$, τότε λέμε ότι η ΕΟΚ βρίσκεται σε *κανονική μορφή*.

Σημείωση 2.3. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι οι εξής κατανομές ανήκουν στην πλήρους τάξης 2-παραμετρική ΕΟΚ: κανονική, γάμμα και βήτα. Σε αντιδιαστολή, η συνεχής ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ εύκολα βλέπουμε ότι **δεν** ανήκει στη 2-παραμετρική ΕΟΚ, αφού το στήριγμα $S = [\vartheta_1, \vartheta_2]$ εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Παράδειγμα 2.2. (Γάμμα)

$$f(x;k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} = \frac{1}{x} \exp\left\{k \log x - \lambda x - k \log \frac{1}{\lambda} - \log \Gamma(k)\right\},$$

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad \underline{Q}(k,\lambda) = (k, -\lambda), \quad \underline{T}(x) = (\log x, x), \quad A(k,\lambda) = k \log \frac{1}{\lambda} + \log \Gamma(k).$$

Άρα η κατανομή γάμμα ανήκει στην πλήρους τάξης 2-παραμετρική ΕΟΚ. □

Παράδειγμα 2.3. (Weibull) Για $k > 0$, $\lambda > 0$ και $x > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$f(x;k,\lambda) = k\lambda x^{k-1} e^{-\lambda x^k} = \frac{1}{x} \exp\left\{k \log x - \lambda x^k - \log \frac{1}{k\lambda}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος λx^k δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο μίας συνάρτησης της παραμέτρου $\underline{\vartheta} = (k, \lambda)$ και μίας συνάρτησης του x. Επομένως, η κατανομή Weibull **δεν** ανήκει στη 2-παραμετρική ΕΟΚ. Όμως, αν k είναι μία γνωστή σταθερά, τότε υπολογίζουμε ότι:

$$f(x;\lambda) = k\lambda x^{k-1} e^{-\lambda x^k} = k x^{k-1} \exp\left\{-\lambda x^k - \log \frac{1}{\lambda}\right\},$$

$$h(x) = k x^{k-1}, \quad Q(\lambda) = -\lambda, \quad T(x) = x^k, \quad A(\lambda) = \log \frac{1}{\lambda}.$$

Άρα η κατανομή Weibull με γνωστό k ανήκει στη μονοπαραμετρική ΕΟΚ. □

Πρόταση 2.2. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(x;\underline{\vartheta}) = h(x) e^{\langle \underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle - A(\underline{\vartheta})}$ σε κανονική μορφή, τότε για $j, k = 1, 2, \ldots, s$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\mathbb{E}[T_j(X)] = \frac{\partial A(\underline{\vartheta})}{\partial \vartheta_j}, \quad \mathrm{Var}[T_j(X)] = \frac{\partial^2 A(\underline{\vartheta})}{\partial \vartheta_j^2}, \quad \mathrm{Cov}[T_j(X), T_k(X)] = \frac{\partial^2 A(\underline{\vartheta})}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k},$$

$$M_{\underline{T}}(\underline{t}) = \mathbb{E}\left[e^{\langle \underline{t}, \underline{T}(X)\rangle}\right] = e^{A(\underline{t}+\underline{\vartheta}) - A(\underline{\vartheta})}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x;\underline{\vartheta}) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{\langle \underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle} dx = e^{A(\underline{\vartheta})}.$$

Παραγωγίζοντας αυτήν την έκφραση ως προς ϑ_j, μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά παραγώγισης και ολοκλήρωσης με κατάλληλη εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης για να πάρουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)T_j(x)e^{\langle \underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle}dx = \frac{\partial A}{\partial \vartheta_j}e^{A(\underline{\vartheta})} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial A}{\partial \vartheta_j} = \int_{\mathbb{R}} T_j(x)\underbrace{h(x)e^{\langle \underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle - A(\underline{\vartheta})}}_{f(x;\underline{\vartheta})}dx = \mathbb{E}[T_j(X)].$$

Παραγωγίζοντας ως προς ϑ_k, υπολογίζουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)T_j(x)T_k(x)e^{\langle \underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle}dx = \left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta_j}\frac{\partial A}{\partial \vartheta_k} + \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k}\right)e^{A(\underline{\vartheta})} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[T_j(X)T_k(X)\right] = \frac{\partial A}{\partial \vartheta_j}\frac{\partial A}{\partial \vartheta_k} + \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} = \mathbb{E}\left[T_j(X)T_k(X)\right] - \mathbb{E}\left[T_j(X)\right]\mathbb{E}\left[T_k(X)\right] = \operatorname{Cov}\left[T_j(X), T_k(X)\right].$$

Για $j = k$, παρατηρούμε ότι:

$$\operatorname{Cov}\left[T_j(X), T_j(X)\right] = \operatorname{Var}\left[T_j(X)\right] = \frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta_j^2}.$$

Όσον αφορά τη ροπογεννήτρια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_{\underline{T}}(\underline{t}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\langle \underline{t}, \underline{T}(x)\rangle} f(x;\underline{\vartheta})dx = \int_{\mathbb{R}} e^{\langle \underline{t}, \underline{T}(x)\rangle} h(x)e^{\langle \underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle - A(\underline{\vartheta})}dx \\ &= e^{-A(\underline{\vartheta})}\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{\langle \underline{t}+\underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle}dx \\ &= e^{A(\underline{t}+\underline{\vartheta})-A(\underline{\vartheta})}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{h(x)e^{\langle \underline{t}+\underline{\vartheta}, \underline{T}(x)\rangle - A(\underline{t}+\underline{\vartheta})}}_{f(x;\underline{t}+\underline{\vartheta})}dx \\ &= e^{A(\underline{t}+\underline{\vartheta})-A(\underline{\vartheta})}. \end{aligned}$$

□

Σημείωση 2.4. Αν $\underline{Q}(\underline{\vartheta}) \neq \underline{\vartheta}$, τότε η ΕΟΚ μπορεί να έρθει σε κανονική μορφή με την αναπαραμέτρηση $\underline{\eta} = \underline{Q}(\underline{\vartheta})$.

Παράδειγμα 2.4. (Κανονική με μέση τιμή ϑ_1 και διασπορά ϑ_2)

$$\begin{aligned} f(x;\underline{\vartheta}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta_2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta_2}(x-\vartheta_1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}x - \frac{1}{2\vartheta_2}x^2 - \frac{\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} - \frac{1}{2}\log\vartheta_2\right\}, \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2}\right), \quad \underline{T}(x) = \left(x, x^2\right), \quad A(\underline{\vartheta}) = \frac{\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} + \frac{1}{2}\log\vartheta_2.$$

Θεωρούμε την ακόλουθη αναπαραμέτρηση:

$$\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2}\right) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{2\eta_2}, \quad \vartheta_1 = -\frac{\eta_1}{2\eta_2},$$

$$f(x; \underline{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\eta_1 x + \eta_2 x^2 + \frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{1}{2}\log\left(-2\eta_2\right)\right\},$$

$$A(\underline{\eta}) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} - \frac{1}{2}\log\left(-2\eta_2\right).$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T_1(X)\right] = \mathbb{E}\left(X\right) = \frac{\partial A(\underline{\eta})}{\partial \eta_1} = -\frac{\eta_1}{2\eta_2} = \vartheta_1,$$

$$\mathbb{E}\left[T_2(X)\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{\partial A(\underline{\eta})}{\partial \eta_2} = \frac{\eta_1^2}{4\eta_2^2} - \frac{1}{2\eta_2} = \vartheta_1^2 + \vartheta_2,$$

$$\mathrm{Var}\left[T_1(X)\right] = \mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_1^2} = -\frac{1}{2\eta_2} = \vartheta_2,$$

$$\mathrm{Var}\left[T_2(X)\right] = \mathrm{Var}\left(X^2\right) = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_2^2} = -\frac{\eta_1^2}{2\eta_2^3} + \frac{1}{2\eta_2^2} = 4\vartheta_1^2\vartheta_2 + 2\vartheta_2^2,$$

$$\mathrm{Cov}\left[T_1(X), T_2(X)\right] = \mathrm{Cov}\left(X, X^2\right) = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = \frac{\eta_1}{2\eta_2^2} = 2\vartheta_1\vartheta_2. \quad \square$$

Ορισμός 2.4. Μία πολυδιάστατη κατανομή με άγνωστη διανυσματική παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ και από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(\underline{x}; \underline{\vartheta})$ για $\underline{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ ανήκει στην *πολυδιάστατη ΕΟΚ* αν το στήριγμα S δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$ και ισχύει ότι:

$$f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = h(\underline{x}) e^{\left\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}(\underline{x}) \right\rangle - A(\underline{\vartheta})}.$$

Πρόταση 2.3. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από κατανομή που ανήκει στη μονοδιάστατη ΕΟΚ. Τότε, η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ανήκει στην n-διάστατη ΕΟΚ με την ακόλουθη συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας:

$$f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = h^*(\underline{x}) e^{\left\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}^*(\underline{x}) \right\rangle - A^*(\underline{\vartheta})}, \quad \underline{x} \in S^n,$$

$$h^*(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i), \quad \underline{T}^*(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \underline{T}(x_i), \quad A^*(\underline{\vartheta}) = nA(\underline{\vartheta}).$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f(\underline{x};\underline{\vartheta}) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\underline{\vartheta}) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i) e^{\left\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}(x_i) \right\rangle - A(\underline{\vartheta})} \\
&= \prod_{i=1}^{n} h(x_i) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}(x_i) \right\rangle - nA(\underline{\vartheta}) \right\} \\
&= h^*(\underline{x}) \exp\left\{ \left\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \sum_{i=1}^{n} \underline{T}(x_i) \right\rangle - A^*(\underline{\vartheta}) \right\} \\
&= h^*(\underline{x}) e^{\left\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}^*(\underline{x}) \right\rangle - A^*(\underline{\vartheta})}.
\end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 3

Σημειακή Εκτιμητική

3.1 Εισαγωγή

Ορισμός 3.1. i. Ένα n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ καλείται *δείγμα* μεγέθους n.

ii. Ένα n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ καλείται *τυχαίο δείγμα* (τ.δ.) μεγέθους n αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Ορισμός 3.2. i. Μία συνάρτηση $T(\underline{X}) = T(X_1, \ldots, X_n)$ η οποία δεν εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$ καλείται *στατιστική συνάρτηση*.

ii. Μία στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ καλείται *εκτιμήτρια* της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ αν ισχύει ότι $T\left(S\right) \subseteq g(\Theta)$.

Σημείωση 3.1. Όπως γίνεται κατανοητό από τον προηγούμενο ορισμό, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε αυθαίρετη συνάρτηση του δείγματος $\underline{X}$ ως εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$, αρκεί αυτή η συνάρτηση να παίρνει τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο Θ. Αυτό από μόνο του δεν αρκεί στην πράξη για να δώσει μία καλή εκτίμηση για την πραγματική τιμή του $\underline{\vartheta}$. Για τον λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί διάφορα κριτήρια για να κρίνουμε αν μία εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$ είναι ''καλή'' ή όχι. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε αυτά τα διάφορα κριτήρια ''καλών'' εκτιμητριών, όπως η αμεροληψία, το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, η επάρκεια, η αποτελεσματικότητα και η συνέπεια. Στο τέλος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε τις 2 πιο διαδεδομένες μεθόδους εύρεσης εκτιμητριών - τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας και τη μέθοδο των ροπών.

3.2 Αμεροληψία

Ορισμός 3.3. i. Μία στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ καλείται *αμερόληπτη εκτιμήτρια* (α.ε.) της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ αν $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

ii. Η συνάρτηση $\text{bias}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right] - g(\underline{\vartheta})$ καλείται *μεροληψία* της εκτιμήτριας $T(\underline{X})$ ως προς την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$.

Ερμηνεία: Η ιδιότητα της αμεροληψίας εξασφαλίζει ότι μία εκτιμήτρια του ϑ παίρνει τιμές κοντά στην πραγματική τιμή του ϑ, όμως δε δίνει καμία πληροφορία για το πόσο συγκεντρωμένες είναι όλες οι πιο πιθανές τιμές της εκτιμήτριας γύρω από αυτήν την τιμή. Επομένως, αυτή η ιδιότητα δεν αρκεί για να χαρακτηρίσουμε μία εκτιμήτρια "καλή", αφού θα μπορούσε δυνητικά να παίρνει τιμές πολύ μακριά από την πραγματική τιμή του ϑ με μεγάλη πιθανότητα. Για να εξασφαλίσουμε ότι όλες οι πιο πιθανές τιμές της εκτιμήτριας είναι αρκετά συγκεντρωμένες γύρω από την πραγματική τιμή του ϑ, πρέπει επιπλέον να απαιτήσουμε η εκτιμήτρια να έχει όσο το δυνατόν μικρότερη διασπορά.

Σημείωση 3.2. Παρατηρούμε ότι μία στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$ αν και μόνο αν $\text{bias}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = 0\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Για δεδομένη παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ μπορεί να μην υπάρχει καμία αμερόληπτη εκτιμήτρια, μπορεί να υπάρχει μοναδική αμερόληπτη εκτιμήτρια ή μπορεί να υπάρχουν πολλές αμερόληπτες εκτιμήτριες.

Ορισμός 3.4. i. Η στατιστική συνάρτηση $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ καλείται *δειγματική μέση τιμή*.

ii. Θεωρούμε την ακόλουθη στατιστική συνάρτηση:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right),$$

η οποία καλείται *δειγματική διασπορά*.

Πρόταση 3.1. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Τότε, ισχύει ότι:

i. Η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$ είναι μία α.ε. της $g_1(\underline{\vartheta}) = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1)$.

ii. $\text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n} g_2(\underline{\vartheta})$.

iii. Η δειγματική διασπορά S^2 είναι μία α.ε. της $g_2(\underline{\vartheta}) = \text{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1)$.

Απόδειξη. i. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_i) \overset{\text{ισον.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1) = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1) = g_1(\underline{\vartheta}).$$

ii. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_i) \overset{\text{ισον.}}{=} \frac{1}{n}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1).$$

iii. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}^2\right) = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right) + \left[\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}\right)\right]^2 = \frac{1}{n}\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) + \left[\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1)\right]^2,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(S^2\right) &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(X_i^2\right) - n\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(\overline{X}^2\right)\right] \\ &= \frac{n\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) + n\left[\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1)\right]^2 - \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) - n\left[\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1)\right]^2}{n-1} \\ &= \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1) = g_2(\underline{\vartheta}).\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.1. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ με γνωστό N. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}(X_1) = Np$ και $\mathrm{Var}(X_1) = Np(1-p)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη σημείωση, έπεται ότι $\mathbb{E}(\overline{X}) = Np$ και $\mathbb{E}\left(S^2\right) = Np(1-p)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\overline{X}\right) = p, \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}S^2\right) = p(1-p).$$

Επομένως, η $T_1(\underline{X}) = \frac{1}{N}\overline{X}$ είναι μία α.ε. του p και η $T_2(\underline{X}) = \frac{1}{N}S^2$ είναι μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(p) = p(1-p)$. □

Παράδειγμα 3.2. Έστω δείγμα $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ μεγέθους 1. Θέλουμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει καμία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X)$ είναι μία α.ε. της $g(\lambda)$, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}\left[T(X)\right] = g(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{x=0}^{\infty} T(x)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \frac{1}{\lambda} \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda\sum_{x=0}^{\infty} T(x)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{x=0}^{\infty}\frac{T(x)}{x!}\lambda^{x+1} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\frac{T(x-1)}{(x-1)!}\lambda^x = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\lambda^x.$$

Εφόσον το αριστερό μέλος είναι μία δυναμοσειρά χωρίς σταθερό όρο και το δεξί μέλος είναι μία δυναμοσειρά με σταθερό όρο 1, είναι αδύνατο να είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, δεν υπάρχει καμία α.ε. της $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. $\square$

3.3 Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα

Ορισμός 3.5. Η συνάρτηση $\text{ΜΤΣ}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[(T(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta}))^2]$ καλείται *μέσο τετραγωνικό σφάλμα* (ΜΤΣ) της εκτιμήτριας $T(\underline{X})$ ως προς την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$.

Κριτήριο Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος: Μία εκτιμήτρια $T^*(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ θεωρείται "καλύτερη" από κάποια άλλη εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ σύμφωνα με το κριτήριο του ΜΤΣ αν ισχύει ότι $\text{ΜΤΣ}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T^*(\underline{X})\right] \leqslant \text{ΜΤΣ}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] \; \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Σημείωση 3.3. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$\text{ΜΤΣ}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = \text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right] + \text{bias}^2_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right].$$

Αν $\text{bias}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = 0$, δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι μία α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$, τότε παρατηρούμε ότι $\text{ΜΤΣ}_{g(\underline{\vartheta})}\left[T(\underline{X})\right] = \text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T(\underline{X})\right]$. Με άλλα λόγια, αν περιοριστούμε στις α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$, τότε "καλύτερη" μεταξύ αυτών σύμφωνα με το κριτήριο του ΜΤΣ είναι αυτή που επιτυγχάνει τη μικρότερη δυνατή διασπορά. Αυτή η α.ε. που επιτυγχάνει τη μικρότερη δυνατή διασπορά καλείται αμερόληπτη εκτιμήτρια (ομοιόμορφα) ελάχιστης διασποράς (ΑΕΕΔ) της $g(\underline{\vartheta})$ και θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητές της στην παράγραφο 3.7. Αυτό βέβαια δεν αποκλείει το γεγονός να υπάρχει κάποια μεροληπτική εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ με μικρότερο ΜΤΣ από την ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$ και άρα μικρότερο ΜΤΣ από κάθε άλλη α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$.

3.4 Επάρκεια

Ορισμός 3.6. Μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται *επαρκής* για την παράμετρο $\underline{\vartheta}$ αν η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ δεδομένου ότι $\underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ και $\forall \underline{t} \in T(S)$.

Ερμηνεία: Μία επαρκής στατιστική συνάρτηση συγκεντρώνει όλη την πληροφορία που περιέχει το δείγμα για την άγνωστη παράμετρο. Δηλαδή, αν έχουμε ένα δείγμα παρατηρήσεων, τότε αρκεί να υπολογίσουμε μέσω αυτών την τιμή μίας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης και θα έχουμε όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο, χωρίς να έχουμε πλέον πρόσβαση στις τιμές των επιμέρους παρατηρήσεων.

Θεώρημα 3.1. (Παραγοντικό Κριτήριο Neyman - Fisher) Έστω δείγμα $\underline{X}$ με από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(\underline{x}; \underline{\vartheta})$ για $\underline{\vartheta} \in \Theta$ και $\underline{x} \in S$. Μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για την παράμετρο $\underline{\vartheta}$ αν και μόνο αν υπάρχουν μη-αρνητικές συναρτήσεις g, h τέτοιες ώστε:

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = g(\underline{T}(\underline{x}),\underline{\vartheta})h(\underline{x}).$$

Απόδειξη. Έστω ότι η κατανομή του δείγματος είναι διακριτή. Αρχικά, υποθέτουμε ότι $f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = g(\underline{T}(\underline{x}),\underline{\vartheta})h(\underline{x})$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x} \mid \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}) = \frac{\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x}, \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t})}{\mathbb{P}(\underline{T}(\underline{X}) = \underline{t})}.$$

Διακρίνουμε τις εξής 2 περιπτώσεις:

1. Αν $\underline{T}(\underline{x}) \neq \underline{t}$, τότε έπεται ότι:

$$\{\underline{X} = \underline{x}\} \cap \{\underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}\} = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x}, \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x} \mid \underline{T}(\underline{x}) = \underline{t}) = 0.$$

2. Αν $\underline{T}(\underline{x}) = \underline{t}$, τότε υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x} \mid \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}) &= \frac{\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x})}{\mathbb{P}(\underline{T}(\underline{X}) = \underline{t})} = \frac{g(\underline{t},\underline{\vartheta})h(\underline{x})}{\sum_{\underline{x}:\ \underline{T}(\underline{x})=\underline{t}} f(\underline{x};\underline{\vartheta})} \\ &= \frac{g(\underline{t},\underline{\vartheta})h(\underline{x})}{\sum_{\underline{x}:\ \underline{T}(\underline{x})=\underline{t}} g(\underline{t},\underline{\vartheta})h(\underline{x})} = \frac{h(\underline{x})}{\sum_{\underline{x}:\ \underline{T}(\underline{x})=\underline{t}} h(\underline{x})},\end{aligned}$$

   το οποίο δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$.

Και στις 2 περιπτώσεις, η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x} \mid \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$, το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχει συνάρτηση $\varphi(\underline{x},\underline{t})$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x} \mid \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}) = \varphi(\underline{x},\underline{t})$. Διακρίνουμε πάλι τις εξής 2 περιπτώσεις:

1. Αν $\underline{T}(\underline{x}) \neq \underline{t}$, τότε έπεται ότι $\varphi(\underline{x},\underline{t}) = 0$.

2. Αν $\underline{T}(\underline{x}) = \underline{t}$, τότε έπεται ότι $\varphi(\underline{x},\underline{t}) = \varphi(\underline{x},\underline{T}(\underline{x})) = h(\underline{x})$ για κάποια συνάρτηση h. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}f(\underline{x};\underline{\vartheta}) &= \mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x} \mid \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t})\mathbb{P}(\underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}) = \varphi(\underline{x},\underline{t})\mathbb{P}(\underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}) \\ &= h(\underline{x})f_{\underline{T}}(\underline{t};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x})g(\underline{T}(\underline{x}),\underline{\vartheta}).\end{aligned}$$

Η απόδειξη για τη γενική περίπτωση βρίσκεται στο σύγγραμα του Keener, παράγραφος 6.4. $\square$

Σημείωση 3.4. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$. Αν $\underline{x}, \underline{y} \in S$ με $\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y})$, τότε παρατηρούμε ότι:

$$\frac{f(\underline{x}; \underline{\vartheta})}{f(\underline{y}; \underline{\vartheta})} = \frac{h(\underline{x})}{h(\underline{y})},$$

δηλαδή ο λόγος δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$. Αντιστρόφως, αν αυτός ο λόγος εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ δεν είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Πόρισμα 3.1. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

i. Αν ισχύει ότι $\underline{T} = \underline{\psi}\left(\underline{T}^*\right)$ για κάποια συνάρτηση $\underline{\psi}$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ είναι κι αυτή επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

ii. Αν ισχύει ότι $\underline{\vartheta} = \underline{\varphi}(\underline{\eta})$ για κάποια συνάρτηση $\underline{\varphi}$, τότε η $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής και για την παραμετρική συνάρτηση $\underline{\eta}$.

Απόδειξη. i. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι:

$$f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = g(\underline{T}(\underline{x}), \underline{\vartheta})h(\underline{x}) = g\left(\underline{\psi}\left(\underline{T}^*(\underline{x})\right), \underline{\vartheta}\right) h(\underline{x}) = g^*\left(\underline{T}^*(\underline{x}), \underline{\vartheta}\right) h(\underline{x}),$$

όπου $g^*\left(\underline{t}, \underline{\vartheta}\right) = g\left(\underline{\psi}(\underline{t}), \underline{\vartheta}\right)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

ii. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι:

$$f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = g(\underline{T}(\underline{x}), \underline{\vartheta})h(\underline{x}) = g\left(\underline{T}(\underline{x}), \underline{\varphi}(\underline{\eta})\right) h(\underline{x}) = g^*\left(\underline{T}(\underline{x}), \underline{\eta}\right) h(\underline{x}),$$

όπου $g^*\left(\underline{t}, \underline{\eta}\right) = g\left(\underline{t}, \underline{\varphi}(\underline{\eta})\right)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\eta}$. □

Παράδειγμα 3.3. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x}; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left[\lambda e^{-\lambda x_i} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_i)\right] = \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)^n}(\underline{x}),$$

όπου $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $g(t, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda t}$ και $h(\underline{x}) = \mathbb{1}_{(0,\infty)^n}(\underline{x})$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το λ. □

Παράδειγμα 3.4. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Laplace}(\mu, \lambda)$ με $\mu \in \mathbb{R}$, γνωστό $\lambda > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \mu) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}$ για $x \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\mu) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu|\right\},$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(\underline{t},\mu) = e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} |t_i - \mu|}$ και $h(\underline{x}) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι επαρκής για το μ. Παρατηρούμε ότι η επαρκής στατιστική συνάρτηση που υπολογίσαμε ήταν το ίδιο το δείγμα $\underline{X}$ και δε θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε καμία επαρκή στατιστική συνάρτηση με μικρότερη διάσταση από αυτή. Ο όρος $\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$ που εμφανίζεται στην από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του δείγματος δεν αποτελεί στατιστική συνάρτηση, αφού εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου μ. □

Ορισμός 3.7. Συμβολίζουμε με $X_{(k)}$ την k-οστή μικρότερη από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ για $k = 1, 2, \ldots, n$. Ειδικότερα, $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ και $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Παράδειγμα 3.5. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \frac{1}{\vartheta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(x_i) = \vartheta^{-n} \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}\left(x_{(1)}\right) \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) \\ &= \vartheta^{-n} \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \mathbb{1}_{(-\infty,\vartheta]}\left(x_{(n)}\right), \end{aligned}$$

όπου $T(\underline{x}) = x_{(n)}$, $g(t,\vartheta) = \vartheta^{-n} \mathbb{1}_{(-\infty,\vartheta]}(t)$ και $h(\underline{x}) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}\left(x_{(1)}\right)$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ. □

Παράδειγμα 3.6. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, \vartheta + 1)$. Γνωρίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}(x_i) = \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}\left(x_{(1)}\right) \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}\left(x_{(n)}\right),$$

όπου $T(\underline{x}) = \left(x_{(1)}, x_{(n)}\right)$, $g(t_1, t_2, \vartheta) = \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}(t_1) \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}(t_2)$ και $h(\underline{x}) = 1$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. □

Παράδειγμα 3.7. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $f(x;\lambda,k) = \lambda e^{-\lambda(x-k)}$ για $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{R}$ και $x \geqslant k$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\lambda,k) &= \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} (x_i - k)\right\} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[k,\infty)}(x_i) \\ &= \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + n\lambda k\right\} \mathbb{1}_{[k,\infty)}\left(x_{(1)}\right), \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, x_{(1)}\right)$, $g(t_1, t_2, \lambda, k) = \lambda^n e^{-\lambda t_1 + n\lambda k}\mathbb{1}_{[k,\infty)}(t_2)$ και $h(\underline{x}) = 1$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_{(1)}\right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta} = (\lambda, k)$. □

Πρόταση 3.2. (Επάρκεια στην ΕΟΚ) Αν η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη ΕΟΚ με $f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = h(\underline{x})e^{\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}(\underline{x})\rangle - A(\underline{\vartheta})}$ για $\underline{\vartheta} \in \Theta$ και $\underline{x} \in S$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας μπορεί να γραφτεί ως $f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = g(\underline{T}(\underline{x}), \underline{\vartheta})h(\underline{x})$, where $g(\underline{t}, \underline{\vartheta}) = e^{\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{t}\rangle - A(\underline{\vartheta})}$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται άμεσα ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής $\underline{\vartheta}$. □

Παράδειγμα 3.8. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\vartheta, \vartheta^2\right)$ με $\vartheta \neq 0$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}; \vartheta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2}|\vartheta|^{-n} \exp\left\{\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{2}\right\} \\ &= (2\pi e)^{-n/2} \exp\left\{\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\log|\vartheta|\right\}, \end{aligned}$$

όπου θέτουμε $h(\underline{x}) = (2\pi e)^{-n/2}$, $\underline{Q}(\vartheta) = \left(\frac{1}{\vartheta}, -\frac{1}{2\vartheta^2}\right)$, $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ και $A(\vartheta) = n\log|\vartheta|$. Σύμφωνα με την πρόταση για την επάρκεια στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Παρατηρούμε ότι η κατανομή του δείγματος έχει μόνο μία άγνωστη παράμετρο, ενώ η επαρκής στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ έχει διάσταση 2, δηλαδή η ΕΟΚ δεν είναι πλήρους τάξης. □

Σημείωση 3.5. Συνοψίζοντας, έχουμε 3 μεθόδους στη διάθεσή μας για να δείξουμε ότι μία στατιστική συνάρτηση είναι επαρκής για μία άγνωστη παράμετρο: τον ορισμό (συνήθως δύσχρηστος στην πράξη), το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher (πιο εύχρηστο από τον ορισμό) και την πρόταση για την επάρκεια στην ΕΟΚ (συνδυάζεται εύκολα με την πληρότητα). Ενδεικτικά, στον πίνακα 3.1 συνοψίζουμε κάποιες επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις για τις παραμέτρους κάποιων γνωστών κατανομών.

3.5 Πληρότητα

Ορισμός 3.8. Μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται *πλήρης* (για την κατανομή του δείγματος) αν η σχέση $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(\underline{T})] = 0\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ συνεπάγεται ότι $\varphi(\underline{T}) = 0$ με πιθανότητα 1 (σχεδόν βέβαια) για οποιαδήποτε συνάρτηση φ.

Bernoulli(p)	$\sum_{i=1}^{n} X_i$
Bin(N,p) με γνωστό N	
Geom(p)	
NegBin(N,p) με γνωστό N	
Poisson(λ)	
Exp(λ)	
$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ με γνωστό σ^2	
$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ με γνωστό μ	$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$
$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$	$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$
Gamma(k,λ)	$\left(\sum_{i=1}^{n} \log X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$
Beta$(\vartheta_1,\vartheta_2)$	$\left(\sum_{i=1}^{n} \log X_i, \sum_{i=1}^{n} \log(1-X_i)\right)$
$\mathcal{U}(\vartheta_1,\vartheta_2)$	$\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$

Πινακας 3.1: Σύνοψη Επαρκών Στατιστικών Συναρτήσεων

Σημείωση 3.6. Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε α.ε. του μηδενός η οποία είναι συνάρτηση μίας πλήρους στατιστικής συνάρτησης πρέπει να είναι σχεδόν ταυτοτικά ίση με το 0. Επομένως, αν υπάρχουν 2 διαφορετικές συναρτήσεις $\varphi(\underline{T})$ και $\psi(\underline{T})$ οι οποίες είναι α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ δεν μπορεί να είναι πλήρης. Αντιστρόφως, αν $\underline{T}(\underline{X})$ είναι μία πλήρης στατιστική συνάρτηση, τότε μπορεί να υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $\varphi(\underline{T})$ η οποία να είναι α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$.

Σημείωση 3.7. Αν ισχύει ότι $A(\underline{X}) = \varphi(\underline{T})$ για κάποια συνάρτηση φ και η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $A(\underline{X})$ δεν εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ δεν μπορεί να είναι πλήρης. Αντιστρόφως, αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι πλήρης, τότε η κατανομή οποιασδήποτε συνάρτησής της πρέπει να εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$. Με άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση μίας πλήρους στατιστικής συνάρτησης περιέχει πληροφορία για την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$.

Πρόταση 3.3. Αν η $\underline{T}(\underline{X})$ είναι πλήρης και ισχύει ότι $\underline{T} = \underline{\psi}\left(\underline{T}^*\right)$ για κάποια 1-1 συνάρτηση $\underline{\psi}$, τότε η $\underline{T}^*(\underline{X})$ είναι κι αυτή πλήρης.

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi\left(\underline{T}^*\right)] = 0 \ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Αφού η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι πλήρης και η συνάρτηση $\underline{\psi}$ είναι αντιστρέψιμη, έπεται ότι:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(\underline{T}^*)] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi\left(\underline{\psi}^{-1}(\underline{T})\right)] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[(\varphi \circ \underline{\psi}^{-1})(\underline{T})] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\varphi \circ \underline{\psi}^{-1})(\underline{T}) = \varphi\left(\underline{\psi}^{-1}(\underline{T})\right) = \varphi\left(\underline{T}^*\right) \overset{\text{a.s.}}{=} 0.$$

Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ είναι κι αυτή πλήρης. $\square$

Σημείωση 3.8. Στην πράξη, πρώτα βρίσκουμε μία επαρκή στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$ με κάποια από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και μετά ελέγχουμε αν αυτή είναι και πλήρης. Για να εφαρμόσουμε τον ορισμό της πληρότητας, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την κατανομή της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $T(\underline{X})$, ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)]$. Διακρίνουμε 2 σημαντικές περιπτώσεις:

i. Αν η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$, η κατανομή της $T(\underline{X})$ προκύπτει άμεσα από ιδιότητες ροπογεννητριών.

ii. Αν έχουμε τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\underline{\vartheta})$, συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$ και επαρκή στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ ή $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ για το $\underline{\vartheta}$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $T(\underline{X})$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= \mathbb{P}\left(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x\right) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \left[F(x;\underline{\vartheta})\right]^n , \end{aligned}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n f(x;\underline{\vartheta}) \left[F(x;\underline{\vartheta})\right]^{n-1} ,$$

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > x\right) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x) \cdots \mathbb{P}(X_n > x) = 1 - \left[1 - F(x;\underline{\vartheta})\right]^n , \end{aligned}$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = n f(x;\underline{\vartheta}) \left[1 - F(x;\underline{\vartheta})\right]^{n-1} .$$

Σημείωση 3.9. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)]$ διακρίνουμε τις εξής σημαντικές περιπτώσεις:

i. Η κατανομή της T είναι διακριτή: Η μέση τιμή παίρνει τη μορφή σειράς (ή αθροίσματος). Συγκεκριμένα, αν παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = \sum_{t=0}^{\infty} \varphi(t)\psi(t) \left[u(\underline{\vartheta})\right]^t = 0, \quad \forall \underline{\vartheta} \in \Theta,$$

τότε συμπεραίνουμε ότι $\varphi(t)\psi(t) = 0 \ \forall t \in T(S)$. Επιπλέον, αν $\psi(t) \neq 0$ $\forall t \in T(S)$, τότε έπεται ότι $\varphi(t) = 0 \ \forall t \in T(S)$ και έχουμε το ζητούμενο.

ii. Η κατανομή της T είναι συνεχής και το στήριγμά της είναι το $(0, \infty)$: Υποθέτουμε ότι το ολοκλήρωμα παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = \int_0^{\infty} \varphi(t)\psi(t) w(\vartheta) e^{-u(\vartheta)t} dt = w(\vartheta) \int_0^{\infty} \varphi(t)\psi(t) e^{-u(\vartheta)t} dt = 0,$$

$\forall\vartheta \in \Theta$. Επιπλέον, αν $w(\vartheta) \neq 0$ $\forall\vartheta \in \Theta$, τότε έπεται ότι:

$$\int_0^{\infty} \varphi(t)\psi(t)e^{-u(\vartheta)t}dt = 0, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi(t)\psi(t)$ στο σημείο $u(\vartheta)$. Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι 1-1 σε κλάσεις σχεδόν βέβαια ίσων συναρτήσεων. Επιπλέον, ο μετασχηματισμός Laplace της μηδενικής συνάρτησης ισούται με 0, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\varphi(t)\psi(t) = 0$ σχεδόν βέβαια. Επιπλέον, αν $\psi(t) \neq 0$, τότε καταλήγουμε ότι $\varphi(t) = 0$ σχεδόν βέβαια και έχουμε το ζητούμενο.

iii. Η κατανομή της T είναι συνεχής και το στήριγμά της είναι όλο το $\mathbb{R}$: Ομοίως, υποθέτουμε ότι το ολοκλήρωμα παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(T)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)w(\vartheta)e^{-u(\vartheta)t}dt = w(\vartheta)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)e^{-u(\vartheta)t}dt = 0,$$

$\forall\vartheta \in \Theta$. Αν, επιπλέον, $w(\vartheta) \neq 0$ $\forall\vartheta \in \Theta$, τότε παίρνουμε την εξής σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)e^{-u(\vartheta)t}dt = 0, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi(t)\psi(t)$ στο σημείο $u(\vartheta)$, ο οποίος είναι 1-1 σε κλάσεις σχεδόν βέβαια ίσων συναρτήσεων, οπότε καταλήγουμε με τον ίδιο τρόπο στο ζητούμενο.

iv. Η κατανομή της T είναι συνεχής και το στήριγμά της εξαρτάται από το ϑ: Η μέση τιμή παίρνει τη μορφή ολοκληρώματος Riemann με κάποιο άκρο ολοκλήρωσης που είναι συνάρτηση του ϑ ως εξής:

$$\mathbb{E}_{\vartheta}[\varphi(T)] = \int_a^{u(\vartheta)} \varphi(t)\psi(t)w(\vartheta)dt = w(\vartheta)\int_a^{u(\vartheta)} \varphi(t)\psi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Αν $w(\vartheta) \neq 0$ $\forall\vartheta \in \Theta$, τότε συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_a^{u(\vartheta)} \varphi(t)\psi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$u'(\vartheta)\varphi\left(u(\vartheta)\right)\psi\left(u(\vartheta)\right) = 0, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Επιπλέον, αν $u'(\vartheta)\psi\left(u(\vartheta)\right) \neq 0$ $\forall\vartheta \in \Theta$, καταλήγουμε ότι $\varphi\left(u(\vartheta)\right) = 0$ $\forall\vartheta \in \Theta$, δηλαδή $\varphi(t) = 0$ $\forall t \in u(\Theta)$. Αν $T(S) \subseteq u(\Theta)$, τότε έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3.9. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$ είναι επαρκής για το λ. Έστω ότι $\mathbb{E}_\lambda[\varphi(T)] = 0 \ \forall \lambda > 0$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\lambda[\varphi(T)] = \sum_{t=0}^{\infty} \varphi(t)\mathbb{P}_\lambda(T = t) = \sum_{t=0}^{\infty} \varphi(t)e^{-n\lambda t}\frac{(n\lambda)^t}{t!} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t!}\left(n\lambda e^{-n\lambda}\right)^t = 0,$$

$\forall \lambda > 0$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\frac{\varphi(t)}{t!} = 0$ για $t = 0, 1, \ldots$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\varphi(t) = 0$ για $t = 0, 1, \ldots$, δηλαδή η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 3.10. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ είναι επαρκής για το λ. Έστω ότι $\mathbb{E}_\lambda[\varphi(T)] = 0 \ \forall \lambda > 0$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\lambda[\varphi(T)] = \int_0^\infty f_T(t)\varphi(t)dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \lambda > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \varphi(t)t^{n-1}e^{-\lambda t}dt = 0, \quad \forall \lambda > 0.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi(t)t^{n-1}$ στο σημείο λ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.9, έπεται ότι $\varphi(t)t^{n-1} = 0 \ \forall t > 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\varphi(t) = 0 \ \forall t > 0$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 3.11. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}\left(\vartheta^2, 1\right)$ με $\vartheta \in (0, 1)$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.8, υπολογίζουμε ότι:

$$f_{X_{(1)}}(t) = \frac{n}{(1-\vartheta^2)^n}(1-t)^{n-1}, \quad t \in \left(\vartheta^2, 1\right).$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0 \ \forall \vartheta \in (0, 1)$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = \int_{\vartheta^2}^1 f_{X_{(1)}}(t)\varphi(t)dt = \frac{n}{(1-\vartheta^2)^n}\int_{\vartheta^2}^1 (1-t)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\vartheta^2}^1 (1-t)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1).$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$-2\vartheta\left(1-\vartheta^2\right)^{n-1}\varphi\left(\vartheta^2\right) = 0, \quad \forall \vartheta \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (0,1) \supseteq \left(\vartheta^2, 1\right).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 3.12. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(-\vartheta, \vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.8, υπολογίζουμε ότι:

$$f_{X_{(n)}}(t) = \frac{n}{(2\vartheta)^n}(t+\vartheta)^{n-1}, \quad f_{X_{(1)}}(t) = \frac{n}{(2\vartheta)^n}(\vartheta - t)^{n-1},$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta\left[X_{(n)}\right] &= \int_{-\vartheta}^{\vartheta} n(t+\vartheta)^{n-1}\frac{t}{(2\vartheta)^n}dt = \left[(t+\vartheta)^n\frac{t}{(2\vartheta)^n}\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} - \frac{1}{(2\vartheta)^n}\int_{-\vartheta}^{\vartheta}(t+\vartheta)^n dt \\
&= \vartheta - \frac{1}{(2\vartheta)^n}\left[\frac{1}{(n+1)}(t+\vartheta)^{n+1}\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} = \vartheta - \frac{2\vartheta}{n+1}, \\
\mathbb{E}_\vartheta\left[X_{(1)}\right] &= \int_{-\vartheta}^{\vartheta} n(\vartheta-t)^{n-1}\frac{t}{(2\vartheta)^n}dt = -\left[(\vartheta-t)^n\frac{t}{(2\vartheta)^n}\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} + \frac{1}{(2\vartheta)^n}\int_{-\vartheta}^{\vartheta}(\vartheta-t)^n dt \\
&= -\vartheta - \frac{1}{(2\vartheta)^n}\left[\frac{1}{(n+1)}(\vartheta-t)^{n+1}\right]_{-\vartheta}^{\vartheta} = -\vartheta + \frac{2\vartheta}{n+1}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_\vartheta\left[X_{(1)} + X_{(n)}\right] = 0 \ \forall\vartheta > 0$, δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $X_{(1)}+X_{(n)}$ είναι μία α.ε. του μηδενός που είναι συνάρτηση της $\underline{T}(\underline{X})$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.6, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ **δεν** είναι πλήρης. Εναλλακτικά, θέτουμε $Y_i = |X_i|$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
F_{Y_1}(y) &= \mathbb{P}\left(|X_1| \leqslant y\right) = \mathbb{P}(-y \leqslant X_1 \leqslant y) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant y) - \mathbb{P}(X_1 < -y) \\
&= F(y;\vartheta) - F(-y;\vartheta) = \frac{y+\vartheta}{2\vartheta} - \frac{-y+\vartheta}{2\vartheta} = \frac{y}{\vartheta}, \quad y \in (0,\vartheta),
\end{aligned}$$

δηλαδή $Y_i = |X_i| \sim \mathcal{U}(0,\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.5 (σελίδα 31), η στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$ είναι κι αυτή επαρκής για το ϑ. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X})$ είναι πλήρης. □

Θεώρημα 3.2. (Επάρκειας - Πληρότητας στην ΕΟΚ) Έστω ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη ΕΟΚ με $f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x})e^{\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{T}(\underline{x})\rangle - A(\underline{\vartheta})}$ για $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ και $\underline{x} \in S$. Αν η ΕΟΚ είναι πλήρους τάξης, δηλαδή $\underline{Q} : \Theta \to \mathbb{R}^s$, και το σύνολο $\underline{Q}(\Theta) = \left\{\underline{Q}(\underline{\vartheta}) : \underline{\vartheta} \in \Theta\right\} \subseteq \mathbb{R}^s$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση για την επάρκεια στην ΕΟΚ, γνωρίζουμε ήδη ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής μεταβλητών, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\underline{T}(\underline{X})$ δίνεται από $f_{\underline{T}}(\underline{t}) = r(\underline{t})e^{\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{t}\rangle - nA(\underline{\vartheta})}$ για κάποια συνάρτηση r. Έστω ότι $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\varphi(\underline{T})] = 0$ $\forall\underline{\vartheta} \in \Theta$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\varphi(\underline{T})\right] = \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\underline{t})r(\underline{t})e^{\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{t}\rangle - nA(\underline{\vartheta})}d\underline{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^s} \varphi(\underline{t})r(\underline{t})e^{-\langle -\underline{Q}(\underline{\vartheta}), \underline{t}\rangle}d\underline{t} = 0.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι ο s-διάστατος αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\varphi(\underline{t})r(\underline{t})$ υπολογισμένος στο σημείο $-\underline{Q}(\underline{\vartheta})$, ο οποίος είναι 1-1 σε κλάσεις σχεδόν βέβαια ίσων συναρτήσεων. Ο πολυδιάστατος αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace της μηδενικής συνάρτησης ισούται με 0. Αφού $r(\underline{t}) \neq 0$ από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $\underline{T}(\underline{X})$, έπεται ότι $\varphi(\underline{t}) = 0$ $\forall \underline{t} \in \mathbb{R}^s$. Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι πλήρης. $\square$

Παράδειγμα 3.13. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.4 (σελίδα 21), η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ ανήκει στη μονοδιάστατη ΕΟΚ. Σύμφωνα με την πρόταση 2.3 (σελίδα 22), η από κοινού κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη ΕΟΚ με την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{ \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2\vartheta_2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} - \frac{n}{2} \log \vartheta_2 \right\},$$

$$\underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2} \right), \quad \underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right).$$

Η διάσταση της συνάρτησης $\underline{T}(\underline{x})$ είναι ίση με τη διάσταση της παραμέτρου $\underline{\vartheta}$ και το σύνολο $\underline{Q}(\Theta) = \left\{ \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{1}{2\vartheta_2} \right) : (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \right\} = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ και πλήρης. $\square$

Παράδειγμα 3.14. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\vartheta, \vartheta^2\right)$ με $\vartheta \neq 0$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.8 (σελίδα 32), η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Παρατηρούμε ότι:

$$\underline{T}(\underline{X}) = \left(n\overline{X}, (n-1)S^2 + n\overline{X}^2 \right) = \psi\left(\overline{X}, S^2\right).$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.1 (σελίδα 30), έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ είναι κι αυτή επαρκής για το ϑ. Σύμφωνα με την πρόταση 3.1 (σελίδα 26), γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}_\vartheta\left(S^2\right) = \vartheta^2$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta\left(\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}\vartheta^2 + \vartheta^2 = \frac{n+1}{n}\vartheta^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_\vartheta\left(\frac{n}{n+1}\overline{X}^2\right) = \vartheta^2, \quad \forall \vartheta \neq 0,$$

δηλαδή υπάρχουν 2 διαφορετικές α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta^2$ οι οποίες είναι συναρτήσεις της $\underline{T}^*(\underline{X})$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.6, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ **δεν** είναι πλήρης. Παρατηρούμε ότι το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ δεν ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση, αφού η ΕΟΚ δεν είναι πλήρους τάξης. $\square$

Σημείωση 3.10. Συνοψίζοντας, έχουμε 2 μεθόδους για να ελέγξουμε αν μία στατιστική συνάρτηση είναι πλήρης: τον ορισμό (απαιτεί γνώση της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης) και το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ (εύκολο να ελέγξουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του). Ενδεικτικά, στον πίνακα 3.2 συνοψίζουμε τις κατανομές κάποιων πλήρων στατιστικών συναρτήσεων.

<table>
<tr><td>$\text{Bernoulli}(p)$</td><td rowspan="8">$\sum_{i=1}^{n} X_i$</td><td>$\text{Bin}(n,p)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Bin}(N,p)$ με γνωστό N</td><td>$\text{Bin}(nN,p)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Geom}(p)$</td><td>$\text{NegBin}(n,p)$</td></tr>
<tr><td>$\text{NegBin}(N,p)$ με γνωστό N</td><td>$\text{NegBin}(nN,p)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Poisson}(\lambda)$</td><td>$\text{Poisson}(n\lambda)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Gamma}(k,\lambda)$ με γνωστό k</td><td>$\text{Gamma}(nk,\lambda)$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ με γνωστό σ^2</td><td>$\mathcal{N}(n\mu,n\sigma^2)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Exp}(\vartheta)$</td><td rowspan="3">$\text{Gamma}(n,\vartheta)$</td></tr>
<tr><td>$\text{Beta}(\vartheta,1)$</td><td>$-\sum_{i=1}^{n}\log X_i$</td></tr>
<tr><td>$\text{Beta}(1,\vartheta)$</td><td>$-\sum_{i=1}^{n}\log(1-X_i)$</td></tr>
</table>

Πινακας 3.2: Σύνοψη Επαρκών - Πλήρων Στατιστικών Συναρτήσεων

Σημείωση 3.11. (Κατανομή χ^2 με ν βαθμούς ελευθερίας)

i. Αν $X \sim \chi^2_\nu \equiv \text{Gamma}\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)$, τότε $\mathbb{E}(X)=\nu$ και $\text{Var}(X)=2\nu$.

ii. Αν $X \sim \text{Gamma}(k,\vartheta)$, τότε $2\vartheta X \sim \text{Gamma}\left(k,\frac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_{2k}$.

iii. Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, τότε $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_1$.

iv. Αν $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ ανεξάρτητες, τότε $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$.

v. Αν $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ ανεξάρτητες, τότε $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

Σημείωση 3.12. Αν $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε έπεται ότι:

$$\mathbb{E}\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right) = n-1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(S^2\right)=\sigma^2,$$

$$\text{Var}\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right) = 2(n-1) \quad \Rightarrow \quad \text{Var}\left(S^2\right) = \frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

Θεώρημα 3.3. (Basu) Θεωρούμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης. Αν η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $\underline{A}(\underline{X})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$, τότε οι $\underline{T}(\underline{X})$ και $\underline{A}(\underline{X})$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα διπλής μέσης τιμής, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[h(\underline{A}(\underline{X}))\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathbb{E}\left(h(\underline{A}(\underline{X})) \mid \underline{T}(\underline{X})\right)\right].$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή $\mathbb{E}\left[h(\underline{A}(\underline{X}))\right]$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$ επειδή η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $\underline{A}(\underline{X})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$, ενώ η μέση τιμή $\mathbb{E}\left[h(\underline{A}(\underline{X})) \mid \underline{T}(\underline{X})\right]$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$ επειδή δεσμεύουμε σε μία επαρκή στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$. Ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση:

$$g(\underline{t}) = \mathbb{E}\left[h(\underline{A}(\underline{X})) \mid \underline{T}(\underline{X}) = \underline{t}\right] - \mathbb{E}\left[h(\underline{A}(\underline{X}))\right].$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο επιχείρημα, γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[g(\underline{T})\right] = 0 \ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Αφού η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι πλήρης, έπεται ότι:

$$g(\underline{T}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[h(\underline{A}(\underline{X})) \mid \underline{T}(\underline{X})\right] \stackrel{\text{a.s.}}{=} \mathbb{E}\left[h(\underline{A}(\underline{X}))\right].$$

Αφού η συνάρτηση h ήταν τυχούσα, συμπεραίνουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\underline{T}(\underline{X})$ και $\underline{A}(\underline{X})$ είναι ανεξάρτητες. □

Σημείωση 3.13. Μία κλασική εφαρμογή του θεωρήματος Basu έγκειται στην απόδειξη της ανεξαρτησίας των στατιστικών συναρτήσεων $\overline{X}$ και S^2 στην περίπτωση όπου $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Μάλιστα, η ανεξαρτησία της δειγματικής μέσης τιμής και της δειγματικής διασποράς χαρακτηρίζει την κανονική κατανομή - καμία άλλη κατανομή δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Σταθεροποιούμε τη διασπορά σ^2. Τότε, η στατιστική συνάρτηση $\overline{X}$ είναι επαρκής για το μ και πλήρης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}$, δηλαδή η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης S^2 δεν εξαρτάται από την τιμή του μ. Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, έπεται ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\overline{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητες. □

Ορισμός 3.9.
i. Η στατιστική συνάρτηση $R(\underline{X}) = X_{(n)} - X_{(1)}$ καλείται *δειγματικό εύρος*.

ii. Η στατιστική συνάρτηση $M(\underline{X}) = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ καλείται *δειγματικό μεσοδιάστημα*.

Παράδειγμα 3.15. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\left(\overline{X}, S^2\right)$ και $A(\underline{X}) = \frac{R(\underline{X})}{S(\underline{X})}$ είναι ανεξάρτητες. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta} = \left(\mu, \sigma^2\right)$ και πλήρης. Επιπλέον, θέτουμε $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\overline{X} = \sigma\overline{Z} + \mu$ και $X_{(i)} = \sigma Z_{(i)} + \mu$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Υπολογίζουμε ότι:

$$R(\underline{X}) = \sigma Z_{(n)} + \mu - \left[\sigma Z_{(1)} + \mu\right] = \sigma\left[Z_{(n)} - Z_{(1)}\right],$$

$$S^2(\underline{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma Z_i + \mu - \left(\sigma\overline{Z} + \mu\right)\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2,$$

$$A(\underline{X}) = \frac{Z_{(n)} - Z_{(1)}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2}},$$

δηλαδή η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $A(\underline{X})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$. Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, καταλήγουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\left(\overline{X}, S^2\right)$ και $A(\underline{X})$ είναι ανεξάρτητες. □

Παράδειγμα 3.16. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, \vartheta+1)$ με $\vartheta \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = (R, M)$ είναι επαρκής για το ϑ αλλά όχι πλήρης. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.6 (σελίδα 31), η στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\underline{T}^*(\underline{X}) = \left(\frac{2M+R}{2}, \frac{2M-R}{2}\right) = \psi\left(R, M\right).$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.1 (σελίδα 30), έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = (R, M)$ είναι κι αυτή επαρκής για το ϑ. Θέτουμε $U_i = X_i - \vartheta \sim \mathcal{U}(0,1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $X_{(i)} = U_{(i)} + \vartheta$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Υπολογίζουμε ότι:

$$R(\underline{X}) = X_{(n)} - X_{(1)} = U_{(n)} + \vartheta - \left[U_{(1)} + \vartheta\right] = U_{(n)} - U_{(1)},$$

δηλαδή η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $R(\underline{X})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = (R, M)$ **δεν** είναι πλήρης, αφού δεν είναι ανεξάρτητη από τη στατιστική συνάρτηση $R(\underline{X})$. □

Σημείωση 3.14. Ενώ η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $R(\underline{X})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ, σε συνδυασμό με τη στατιστική συνάρτηση $M(\underline{X})$ είναι επαρκής για το ϑ. Με άλλα λόγια, ενώ από μόνη της δεν περιέχει καμία πληροφορία για την τιμή του ϑ, σε συνδυασμό με κάποια άλλη στατιστική συνάρτηση δίνει κάποια πληροφορία για την ακρίβεια εκτίμησης του ϑ. Για παράδειγμα, αν παρατηρήσουμε την τιμή $m = 2$ για τη στατιστική συνάρτηση $M(\underline{X})$, τότε συμπεραίνουμε ότι το ϑ βρίσκεται στο διάστημα $[1, 2]$. Επιπλέον, αν παρατηρήσουμε την τιμή $r = 1$ για τη στατιστική συνάρτηση $R(\underline{X})$, τότε υπολογίζουμε ότι $x_{(1)} = 1.5$ και $x_{(n)} = 2.5$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ϑ είναι ακριβώς ίσο με $1.5 \in [1, 2]$. Διαφορετικά, αν $r = 0.5$, τότε $x_{(1)} = 1.75$ και $x_{(n)} = 2.25$, οπότε το ϑ βρίσκεται στο διάστημα $[1.25, 1.75] \subset [1, 2]$. Φυσικά, αν παρατηρήσουμε μόνο κάποια τιμή r, τότε δεν αντλούμε καμία πληροφορία για το ϑ.

3.6* Ελάχιστη Επάρκεια

Ορισμός 3.10. Μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ καλείται *ελάχιστα επαρκής* για το $\underline{\vartheta}$ αν είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και για κάθε άλλη επαρκή στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$ ισχύει ότι $\underline{T}(\underline{X}) = \underline{\psi}(\underline{T}^*)$ για κάποια συνάρτηση ψ.

Ερμηνεία: Μία ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$ είναι συνάρτηση κάθε άλλης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης για το $\underline{\vartheta}$, οπότε συγκεντρώνει όλη την πληροφορία που έχει το δείγμα για το $\underline{\vartheta}$ όσο πιο αποτελεσματικά γίνεται. Για παράδειγμα, το ίδιο το δείγμα είναι πάντα μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$, αλλά συνήθως μπορούμε να συμπυκνώσουμε την πληροφορία που περιέχει το δείγμα πολύ περισσότερο.

Πρόταση 3.4. Αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και $\underline{T}(\underline{X}) = \underline{\psi}\left(\underline{T}^*\right)$ για κάποια 1-1 συνάρτηση $\underline{\psi}$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ είναι κι αυτή ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ σύμφωνα με το πόρισμα 3.1 (σελίδα 30). Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{V}(\underline{X})$ είναι κι αυτή επαρκής για το $\underline{\vartheta}$. Σύμφωνα με τον ορισμό της ελάχιστης επάρκειας, υπάρχει συνάρτηση $\underline{\varphi}$ τέτοια ώστε $\underline{T} = \underline{\varphi}\left(\underline{V}\right)$. Αφού η συνάρτηση $\underline{\psi}$ είναι αντιστρέψιμη, παίρνουμε ότι $\underline{T}^* = \left(\underline{\psi}^{-1} \circ \underline{\varphi}\right)\left(\underline{V}\right)$. Αφού η επαρκής στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$ είναι συνάρτηση οποιασδήποτε άλλης τυχούσας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $\underline{V}(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$, συμπεραίνουμε ότι είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$. □

Θεώρημα 3.4. Αν υπάρχει κάποια ελάχιστα επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$, τότε κάθε στατιστική συνάρτηση που είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ που είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης, μία στατιστική συνάρτηση $\underline{M}(\underline{X})$ που είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $g\left(\underline{T}(\underline{X})\right) = \underline{T}(\underline{X}) - E\left[\underline{T}(\underline{X}) \mid \underline{M}(\underline{X})\right]$. Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή $E\left[\underline{T}(\underline{X}) \mid \underline{M}(\underline{X})\right]$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$ επειδή δεσμεύουμε στην επαρκή στατιστική συνάρτηση $\underline{M}(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$. Έστω ότι $E_{\underline{\vartheta}}\left[g(\underline{T})\right] = 0\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Αφού η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι πλήρης, έπεται ότι:

$$g(\underline{T}) \overset{\text{a.s.}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{T}(\underline{X}) = \underbrace{E\left[\underline{T}(\underline{X}) \mid \underline{M}(\underline{X})\right]}_{\underline{\psi}(\underline{M})}.$$

Αφού η στατιστική συνάρτηση $\underline{M}(\underline{X})$ είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$, συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι κι αυτή ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. □

Σημείωση 3.15. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μία ελάχιστα επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$ δεν είναι υποχρεωτικά και πλήρης.

Θεώρημα 3.5. Έστω δείγμα $\underline{X}$ με από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(\underline{x};\underline{\vartheta})$. Για δεδομένο $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε $\Theta_{\underline{x}} = \{\underline{\vartheta} \in \Theta : f(\underline{x};\underline{\vartheta})\} \subseteq \Theta$ το υποσύνολο του παραμετρικού χώρου κάτω από το οποίο είναι δυνατό να παρατηρήσουμε το δείγμα $\underline{x}$. Έστω ότι υπάρχει κάποια στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ τέτοια ώστε $\forall \underline{x}, \underline{y} \in S$ ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \quad \text{και} \quad \frac{f(\underline{x};\underline{\vartheta})}{f(\underline{y};\underline{\vartheta})} = h(\underline{x}, \underline{y}),$$

όπου h είναι μία μη-αρνητική συνάρτηση που δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta} \in \Theta_{\underline{x}}$. Τότε, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$.

Απόδειξη. Έστω $A_{\underline{t}} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{T}(\underline{x}) = \underline{t}\}$ και $\underline{x}_{\underline{t}} \in A_{\underline{t}}$. Για οποιοδήποτε δειγματικό σημείο $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι $\underline{T}\left(\underline{x}_{\underline{T}(\underline{x})}\right) = \underline{T}(\underline{x})$. Από υπόθεση, έπεται ότι $\Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{x}_{\underline{T}(\underline{x})}}$ και ο λόγος $\frac{f(\underline{x};\underline{\vartheta})}{f\left(\underline{x}_{\underline{T}(\underline{x})};\underline{\vartheta}\right)} = h(\underline{x})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta} \in \Theta_{\underline{x}}$. Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = \frac{f(\underline{x};\underline{\vartheta})}{f\left(\underline{x}_{\underline{T}(\underline{x})};\underline{\vartheta}\right)} \underbrace{f\left(\underline{x}_{\underline{T}(\underline{x})};\underline{\vartheta}\right)}_{g(\underline{T}(\underline{x}),\underline{\vartheta})} = h(\underline{x}) g\left(\underline{T}(\underline{x}), \underline{\vartheta}\right).$$

Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$. Θεωρούμε τώρα μία άλλη επαρκή στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^*(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = g^*\left(\underline{T}^*(\underline{x}), \underline{\vartheta}\right) h^*(\underline{x})$ για κάποιες συναρτήσεις g^*, h^*. Αν $\underline{T}^*(\underline{x}) = \underline{T}^*(\underline{y})$, τότε έπεται ότι:

$$\frac{f(\underline{x};\underline{\vartheta})}{f(\underline{y};\underline{\vartheta})} = \frac{g^*\left(\underline{T}^*(\underline{x}), \underline{\vartheta}\right) h^*(\underline{x})}{g^*\left(\underline{T}^*(\underline{y}), \underline{\vartheta}\right) h^*(\underline{y})} = \frac{h^*(\underline{x})}{h^*(\underline{y})},$$

δηλαδή ο λόγος δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\Theta_{\underline{x}} &= \{\underline{\vartheta} \in \Theta : f(\underline{x};\underline{\vartheta}) > 0\} = \{\underline{\vartheta} \in \Theta : g^*\left(\underline{T}^*(\underline{x}), \underline{\vartheta}\right) > 0\} \\ &= \left\{\underline{\vartheta} \in \Theta : g^*\left(\underline{T}^*(\underline{y}), \underline{\vartheta}\right) > 0\right\} = \left\{\underline{\vartheta} \in \Theta : f(\underline{y};\underline{\vartheta}) > 0\right\} = \Theta_{\underline{y}}.\end{aligned}$$

Από υπόθεση, έπεται ότι $\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y})$. Αφού η σχέση $\underline{T}^*(\underline{x}) = \underline{T}^*(\underline{y})$ συνεπάγεται ότι $\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y})$ για οποιαδήποτε τυχαία δειγματικά σημεία $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι συνάρτηση της $\underline{T}^*(\underline{X})$. Αφού η επαρκής στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$ είναι συνάρτηση οποιασδήποτε άλλης τυχούσας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}^*(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$, συμπεραίνουμε ότι είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta}$. □

Παράδειγμα 3.17. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta, \vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\Theta_{\underline{x}} = (0, \infty)$ δεν εξαρτάται από το δείγμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Υπολογίζουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
f(\underline{x}; \vartheta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^n (x_i - \vartheta)^2\right\} \\
&= (2\pi)^{-n/2}\vartheta^{-n/2} \exp\left\{\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n\vartheta}{2}\right\} \\
&= (2\pi)^{-n/2}\vartheta^{-n/2} e^{-n\vartheta/2} e^{n\overline{x}} \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\},
\end{aligned}
$$

Έστω $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Για $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι:

$$
T(\underline{x}) = T(\underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(\underline{x}; \vartheta)}{f(\underline{y}; \vartheta)} = e^{n(\overline{x} - \overline{y})}.
$$

Επομένως, η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ είναι ελάχιστα επαρκής για το ϑ. □

Παράδειγμα 3.18. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\vartheta, \vartheta^2\right)$ με $\vartheta > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\Theta_{\underline{x}} = (0, \infty)$ δεν εξαρτάται από το δείγμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.8 (σελίδα 32), γνωρίζουμε ότι:

$$
f(\underline{x}; \vartheta) = (2\pi e)^{-n/2}\vartheta^{-n} \exp\left\{\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\},
$$

Έστω $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$. Για $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι:

$$
\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(\underline{x}; \vartheta)}{f(\underline{y}; \vartheta)} = 1.
$$

Επομένως, η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ είναι ελάχιστα επαρκής για το ϑ. □

Παράδειγμα 3.19. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Laplace}(\mu, \lambda)$ με $\mu \in \mathbb{R}$, γνωστό $\lambda > 0$ και $f(x; \mu) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\mu|}$ για $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\Theta_{\underline{x}} = \mathbb{R}$ δεν εξαρτάται από το δείγμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Υπολογίζουμε ότι:

$$
f(\underline{x}; \mu) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|\right\} = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n \left|x_{(i)} - \mu\right|\right\}.
$$

Έστω $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$. Για $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι:

$$\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(\underline{x};\mu)}{f(\underline{y};\mu)} = 1.$$

Επομένως, η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ είναι ελάχιστα επαρκής για το μ. □

Παράδειγμα 3.20. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(k, \lambda)$ με $k > 0$, γνωστό $\lambda > 0$ και $f(x;k) = \frac{\lambda k^\lambda}{x^{\lambda+1}}$ για $x \geqslant k$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\Theta_{\underline{x}} = \left(0, x_{(1)}\right]$ εξαρτάται από το δείγμα $\underline{x} \in (0,\infty)^n$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};k) = \lambda^n k^{n\lambda} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\lambda-1} \mathbb{1}_{[k,\infty)}\left(x_{(1)}\right).$$

Έστω $T(\underline{X}) = X_{(1)}$. Για $\underline{x}, \underline{y} \in (0,\infty)^n$, παρατηρούμε ότι:

$$T(\underline{x}) = T(\underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \quad \text{και} \quad \frac{f(\underline{x};k)}{f(\underline{y};k)} = 1.$$

Επομένως, η $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι ελάχιστα επαρκής για το k. □

Παράδειγμα 3.21. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(k, \lambda)$ με $k > 0$, $\lambda > 0$ και $f(x;k,\lambda) = \frac{\lambda k^\lambda}{x^{\lambda+1}}$ για $x \geqslant k$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\Theta_{\underline{x}} = \left(0, x_{(1)}\right] \times (0,\infty)$ εξαρτάται από το δείγμα $\underline{x} \in (0,\infty)^n$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = \lambda^n k^{n\lambda} \exp\left\{-(\lambda+1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right\} \mathbb{1}_{[k,\infty)}\left(x_{(1)}\right).$$

Έστω $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n \log X_i, X_{(1)}\right)$. Για $\underline{x}, \underline{y} \in (0,\infty)^n$, παρατηρούμε ότι:

$$\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \quad \text{και} \quad \frac{f(\underline{x};\underline{\vartheta})}{f(\underline{y};\underline{\vartheta})} = 1.$$

Άρα η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n \log X_i, X_{(1)}\right)$ είναι ελάχιστα επαρκής για το $\underline{\vartheta} = (k, \lambda)$. □

Παράδειγμα 3.22. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, \vartheta+1)$ με $\vartheta \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\Theta_{\underline{x}} = \left[x_{(n)} - 1, x_{(1)}\right]$ εξαρτάται από το δείγμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.6 (σελίδα 31), γνωρίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}\left(x_{(1)}\right) \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}\left(x_{(n)}\right).$$

Έστω $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$. Για $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι:

$$\underline{T}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \quad \text{και} \quad \frac{f(\underline{x};\vartheta)}{f(\underline{y};\vartheta)} = 1.$$

Επομένως, η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ είναι ελάχιστα επαρκής για το ϑ. □

3.7 Αμερόληπτες Εκτιμήτριες Ελάχιστης Διασποράς

Ορισμός 3.11. Μία στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X})$ καλείται *αμερόληπτη εκτιμήτρια (ομοιόμορφα) ελάχιστης διασποράς* (ΑΕΕΔ) της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ αν είναι α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά και για κάθε άλλη α.ε. $V(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ ισχύει ότι $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[V(\underline{X})]\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Θεώρημα 3.6. Έστω $\mathcal{U}_0 = \left\{U(\underline{X}) : \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[U(\underline{X})] = 0 \text{ και } \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[U^2(\underline{X})\right] < \infty\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta\right\}$ η κλάση των α.ε. του μηδενός με πεπερασμένη διασπορά και $\delta(\underline{X})$ μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά. Τότε, η $\delta(\underline{X})$ είναι μία ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$ αν και μόνο αν $\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}), U(\underline{X})] = 0\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ και $\forall U(\underline{X}) \in \mathcal{U}_0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X})$ είναι μία ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$. Έστω $U(\underline{X}) \in \mathcal{U}_0$ και $\delta^*(\underline{X}) = \delta(\underline{X}) + \lambda U(\underline{X})$ για $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$E_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})] = E_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] + \lambda E_{\underline{\vartheta}}[U(\underline{X})] = g(\underline{\vartheta}),$$

δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $\delta^*(\underline{X})$ είναι μία α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$. Αφού η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X})$ είναι μία ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$, έπεται ότι:

$$\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})] = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] + \lambda^2 \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[U(\underline{X})] + 2\lambda \mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}), U(\underline{X})],$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\lambda^2 \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[U(\underline{X})] + 2\lambda \mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}), U(\underline{X})] \geqslant 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει η διακρίνουσα αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς λ να είναι μη-θετική, δηλαδή $\left[2\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}(\delta(\underline{X}), U(\underline{X}))\right]^2 \leqslant 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}), U(\underline{X})] = 0\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}), U(\underline{X})] = 0\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ και $\forall U(\underline{X}) \in \mathcal{U}_0$. Θεωρούμε μία α.ε. $\delta^*(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$. Τότε, παρατηρούμε ότι $E_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}) - \delta^*(\underline{X})] = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\delta(\underline{X}) - \delta^*(\underline{X}) \in \mathcal{U}_0$. Από υπόθεση και με χρήση της ανισότητας συνδιακύμανσης, συμπεραίνουμε ότι:

$$\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}), \delta(\underline{X}) - \delta^*(\underline{X})] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] = \mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X}), \delta^*(\underline{X})] \quad \Rightarrow$$

$$\left[\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(\delta(\underline{X}))\right]^2 = \left[\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}(\delta(\underline{X}), \delta^*(\underline{X}))\right]^2 \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})]\, \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})] \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})].$$

Αφού η στατιστική συνάρτηση δ^* ήταν μία τυχούσα α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$, συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X})$ είναι μία ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$. □

Πόρισμα 3.2. Έστω $U(\underline{X}) \in \mathcal{U}_0$ και $V(\underline{X})$ μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά. Αν η σταθερά $c = \frac{\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}[V(\underline{X}), U(\underline{X})]}{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[U(\underline{X})]} \neq 0$ δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ, τότε η στατιστική συνάρτηση $V^*(\underline{X}) = V(\underline{X}) - cU(\underline{X})$ είναι κι αυτή α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$ και ισχύει ότι $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V^*(\underline{X})\right] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right]$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[V^*(\underline{X})] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[V(\underline{X})] - c\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[U(\underline{X})] = g(\underline{\vartheta}),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η στατιστική συνάρτηση $V^*(\underline{X})$ είναι μία α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$. Έπειτα, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V^*(\underline{X})\right] &= \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X}) - cU(\underline{X})\right] \\
&= \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right] + c^2\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right] - 2c\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X}), U(\underline{X})\right] \\
&= \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right] + \frac{\mathrm{Cov}^2_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X}), U(\underline{X})\right]}{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right]} - 2\frac{\mathrm{Cov}^2_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X}), U(\underline{X})\right]}{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right]} \\
&= \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right] - \frac{\mathrm{Cov}^2_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X}), U(\underline{X})\right]}{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[U(\underline{X})\right]} \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right].
\end{aligned}$$

□

Σημείωση 3.16. Αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται συχνά στην προσομοίωση Monte Carlo και αναφέρεται ως η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου.

Πόρισμα 3.3. Αν υπάρχει ΑΕΕΔ για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$, τότε είναι και μοναδική.

Απόδειξη. Έστω ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\delta_1(\underline{X})$ και $\delta_2(\underline{X})$ είναι 2 διαφορετικές ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$. Τότε, έπεται ότι $\delta_1(\underline{X}) - \delta_2(\underline{X}) \in \mathcal{U}_0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι:

$$\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X}), \delta_1(\underline{X}) - \delta_2(\underline{X})\right] = \mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_2(\underline{X}), \delta_1(\underline{X}) - \delta_2(\underline{X})\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X})\right] = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_2(\underline{X})\right] = \mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X}), \delta_2(\underline{X})\right] \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{Corr}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X}), \delta_2(\underline{X})\right] = \frac{\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X}), \delta_2(\underline{X})\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X})\right]\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_2(\underline{X})\right]}} = 1.$$

Άρα, υπάρχουν σταθερές $c_0 \in \mathbb{R}$ και $c_1 > 0$ τέτοιες ώστε $\delta_1(\underline{X}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} c_0 + c_1\delta_2(\underline{X})$. Αφού ισχύει ότι $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X})\right] = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_2(\underline{X})\right]$, συμπεραίνουμε ότι $c_1^2 = 1$, το οποίο συνεπάγεται ότι $c_1 = 1$. Επιπλέον, αφού ισχύει ότι $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_1(\underline{X})\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_2(\underline{X})\right]$, έπεται ότι $c_0 = 0$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\delta_1(\underline{X}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} \delta_2(\underline{X})$. Αφού οποιεσδήποτε 2 τυχούσες ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$ πρέπει να είναι σχεδόν βέβαια ίσες μεταξύ τους, καταλήγουμε ότι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$ είναι μοναδική, δεδομένου ότι αυτή υπάρχει. □

Πόρισμα 3.4. Αν οι στατιστικές συναρτήσεις $\delta_1(\underline{X}), \ldots, \delta_d(\underline{X})$ είναι οι ΑΕΕΔ των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(\underline{\vartheta}), \ldots, g_d(\underline{\vartheta})$ αντίστοιχα, τότε η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \sum_{j=1}^{d} c_j \delta_j(\underline{X})$ είναι η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \sum_{j=1}^{d} c_j g_j(\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X})\right] = \sum_{j=1}^{d} c_j \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_j(\underline{X})\right] = \sum_{j=1}^{d} c_j g_j(\underline{\vartheta}) = g(\underline{\vartheta}),$$

δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X})$ είναι μία α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$. Θεωρούμε τώρα μία στατιστική συνάρτηση $U(\underline{X}) \in \mathcal{U}_0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη γραμμικότητα της συνδιακύμανσης, παίρνουμε ότι:

$$\mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta(\underline{X}), U(\underline{X})\right] = \sum_{j=1}^{d} c_j \mathrm{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\delta_j(\underline{X}), U(\underline{X})\right] = \sum_{j=1}^{d} c_j \cdot 0 = 0.$$

Αφού η α.ε. $\delta(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ είναι ασυσχέτιστη με κάθε τυχούσα α.ε. του 0, καταλήγουμε ότι είναι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta}) = \sum_{j=1}^{d} c_j g_j(\underline{\vartheta})$. □

Θεώρημα 3.7. (Rao - Blackwell) Έστω $V(\underline{X})$ μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά και $\underline{T}(\underline{X})$ μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\vartheta}$. Τότε, η στατιστική συνάρτηση $V^*(\underline{X}) = \mathbb{E}\left[V(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X})\right]$ είναι κι αυτή α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$ και μάλιστα ισχύει ότι $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V^*(\underline{X})\right] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right]$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα διπλής μέσης τιμής, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[V^*(\underline{X})\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathbb{E}\left(V(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X})\right)\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta}).$$

Σύμφωνα με την ανισότητα Jensen και το θεώρημα διπλής μέσης τιμής, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V^*(\underline{X})\right] &= \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\left(V^*(\underline{X}) - \underline{\vartheta}\right)^2\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\left(\mathbb{E}\left(V(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X})\right) - \underline{\vartheta}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\left(\mathbb{E}\left(V(\underline{X}) - \underline{\vartheta} \mid \underline{T}(\underline{X})\right)\right)^2\right] \leqslant \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathbb{E}\left(\left(V(\underline{X}) - \underline{\vartheta}\right)^2 \mid \underline{T}(\underline{X})\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\left(V(\underline{X}) - \underline{\vartheta}\right)^2\right] = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[V(\underline{X})\right].
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.8. (Lehmann - Scheffé) Έστω $V(\underline{X})$ μία α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$ με πεπερασμένη διασπορά. Αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης, τότε η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \mathbb{E}\left[V(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X})\right]$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια α.ε. $\delta^*(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ τέτοια ώστε $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})] < \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})]$ για κάποιο $\underline{\vartheta} \in \Theta$. Έστω $V^*(\underline{X}) = \mathbb{E}[\delta^*(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X})]$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rao - Blackwell, η στατιστική συνάρτηση $V^*(\underline{X})$ είναι μία α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$ με $\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[V^*(\underline{X})] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})]$. Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$0 = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[V^*(\underline{X}) - \delta(\underline{X})] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\mathbb{E}(\delta^*(\underline{X}) - V(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X}))].$$

Αφού η $\underline{T}(\underline{X})$ είναι πλήρης, έπεται ότι $\mathbb{E}[\delta^*(\underline{X}) - V(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X})] \overset{\text{a.s.}}{=} 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $V^*(\underline{X}) \overset{\text{a.s.}}{=} \delta(\underline{X})$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})] = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[V^*(\underline{X})] \leqslant \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta^*(\underline{X})] < \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}[\delta(\underline{X})],$$

το οποίο είναι άτοπο. Αφού καμία άλλη α.ε. της $g(\underline{\vartheta})$ δεν μπορεί να επιτύχει μικρότερη διασπορά από τη $\delta(\underline{X})$ για οποιαδήποτε τυχούσα τιμή της παραμέτρου $\underline{\vartheta} \in \Theta$, καταλήγουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \mathbb{E}[V(\underline{X}) \mid \underline{T}(\underline{X})]$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$. □

Πόρισμα 3.5. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης. Αν ισχύει ότι $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\psi(\underline{T})] = g(\underline{\vartheta})$ για κάποια συνάρτηση ψ, τότε η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \psi(\underline{T})$ είναι η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα Lehmann - Scheffé, γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \mathbb{E}[\psi(\underline{T}) \mid \underline{T}(\underline{X})]$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$. Από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής, γνωρίζουμε επίσης ότι $\mathbb{E}[\psi(\underline{T}) \mid \underline{T}(\underline{X})] = \psi(\underline{T})$. Επομένως, καταλήγουμε ότι η $\delta(\underline{X}) = \psi(\underline{T})$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$. □

Σημείωση 3.17. Συνοψίζοντας, για την εύρεση της ΑΕΕΔ μίας παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ πρέπει πρώτα να βρούμε μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ που να είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και πλήρης. Έπειτα, έχουμε τις εξής 2 επιλογές:

i. Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε μία α.ε. $V(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ και είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή $\psi(\underline{t}) = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[V(\underline{X}) \mid \underline{T} = \underline{t}]$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \psi(\underline{T})$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$ σύμφωνα με το θεώρημα Lehmann - Scheffé.

ii. Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποια συνάρτηση ψ της $\underline{T}(\underline{X})$ τέτοια ώστε $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}[\psi(\underline{T})] = cg(\underline{\vartheta}) + d$, τότε η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = \frac{\psi(\underline{T})-d}{c}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$ σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα.

Παράδειγμα 3.23. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$. Θέλουμε να βρούμε τις ΑΕΕΔ των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(p) = p^2$ και $g_2(p) = p(1-p)$. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ είναι επαρκής για το p

και πλήρης. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(T^2\right) &= \operatorname{Var}(T) + [\mathbb{E}(T)]^2 = np(1-p) + (np)^2 = np - np^2 + n^2p^2 \\ &= \mathbb{E}(T) + n(n-1)p^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\frac{T(T-1)}{n(n-1)}\right] = p^2.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, η στατιστική συνάρτηση $\psi_1(T) = \frac{T(T-1)}{n(n-1)}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g_1(p)$. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(T^2\right) = np(1-p) + n^2p^2 - n^2p + n^2p = np(1-p) - n^2p(1-p) + n\mathbb{E}(T) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left(nT - T^2\right) = n(n-1)p(1-p) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\frac{T(n-T)}{n(n-1)}\right] = p(1-p).$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, η $\psi_2(T) = \frac{T(n-T)}{n(n-1)}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g_2(p)$. □

Παράδειγμα 3.24. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Θέλουμε να βρούμε τις ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$ και του λ. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.10 (σελίδα 36), η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \operatorname{Gamma}(n, \lambda)$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(T^2\right) = \operatorname{Var}(T) + [\mathbb{E}(T)]^2 = \frac{n}{\lambda^2} + \frac{n^2}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\frac{T^2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, η στατιστική συνάρτηση $\psi_1(T) = \frac{T^2}{n(n+1)}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\lambda)$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{(n-2)!}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{n-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{T}\right) = \lambda.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, έπεται ότι η $\psi_2(T) = \frac{n-1}{T}$ είναι η ΑΕΕΔ του λ. □

Παράδειγμα 3.25. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ με γνωστό σ^2. Θέλουμε να βρούμε την ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu) = e^{\mu t}$ για $t \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι επαρκής για το μ και πλήρης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$$M_{X_1}(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\},$$

$$M_T(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\overline{X}}\right) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t/n) = [M_{X_1}(t/n)]^n = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2n}\sigma^2 t^2\right\},$$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{t\overline{X} - \frac{1}{2n}\sigma^2 t^2\right\}\right) = e^{\mu t}.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, η στατιστική συνάρτηση $\psi(\overline{X}) = \exp\left\{t\overline{X} - \frac{1}{2n}\sigma^2 t^2\right\}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\mu)$. □

Παράδειγμα 3.26. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Θέλουμε να βρούμε τις ΑΕΕΔ των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(\mu, \sigma^2) = \sigma^2$ και $g_2(\mu, \sigma^2) = \mu^2$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.13 (σελίδα 38), η $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)$ και πλήρης. Σύμφωνα με την πρόταση 3.1 (σελίδα 26), γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\psi_1\left(\overline{X}, S^2\right) = S^2$ είναι η ΑΕΕΔ της $g_1(\underline{\vartheta})$ σύμφωνα με το πόρισμα 3.5. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}^2\right) = \mathrm{Var}(\overline{X}) + \left[\mathbb{E}(\overline{X})\right]^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = \mu^2.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, η $\psi_2\left(\overline{X}, S^2\right) = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$ είναι η ΑΕΕΔ της $g_2(\underline{\vartheta})$. □

Παράδειγμα 3.27. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Αν η συνάρτηση $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, θέλουμε να βρούμε την ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Για $t \in (0, \vartheta)$, γνωρίζουμε ότι:

$$f_{X_{(n)}}(t) = \frac{n}{\vartheta^n} t^{n-1}.$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\psi(T)] = g(\vartheta)\ \forall \vartheta > 0$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\int_0^\vartheta f_{X_{(n)}}(t)\psi(t)dt = \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^{n-1}\psi(t)dt = g(\vartheta) \quad \Rightarrow$$

$$n\int_0^\vartheta t^{n-1}\psi(t)dt = \vartheta^n g(\vartheta) \quad \Rightarrow \quad n\vartheta^{n-1}\psi(\vartheta) = n\vartheta^{n-1}g(\vartheta) + \vartheta^n g'(\vartheta) \quad \Rightarrow$$

$$\psi(\vartheta) = g(\vartheta) + \frac{\vartheta}{n}g'(\vartheta), \quad \forall \vartheta \in (0, \infty) \supseteq (0, \vartheta).$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, η στατιστική συνάρτηση $\psi(T) = g(T) + \frac{T}{n}g'(T)$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(n)}$, είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$. □

Παράδειγμα 3.28. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Θέλουμε να βρούμε τις ΑΕΕΔ των $g_1(\lambda) = \lambda^k e^{-\lambda}$, $g_2(\lambda) = e^{-k\lambda}$ και $g_3(\lambda) = \lambda^k$ για $k \leqslant n$. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Poisson}(n\lambda)$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{k\}}(X_1)\right] = \mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[k!\mathbb{1}_{\{k\}}(X_1)\right] = e^{-\lambda}\lambda^k.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $V_1(\underline{X}) = k!\mathbb{1}_{\{k\}}(X_1)$ είναι μία α.ε. της $g_1(\lambda)$.

Για $t = k, k+1, \ldots$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(V_1 \mid T = t\right) &= \mathbb{E}\left(k! \mathbb{1}_{\{k\}}(X_1) \mid T = t\right) = k! \mathbb{P}\left(X_1 = k \mid T = t\right) \\
&= \frac{k! \mathbb{P}\left(X_1 = k, \sum_{i=1}^n X_i = t\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} = \frac{k! \mathbb{P}\left(X_1 = k, \sum_{i=2}^n X_i = t - k\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\
&= \frac{k! \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}\left(\sum_{i=2}^n X_i = t - k\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\
&= \frac{k! e^{-\lambda} \lambda^k / k! \cdot e^{-(n-1)\lambda} \left[(n-1)\lambda\right]^{t-k} / (t-k)!}{e^{-n\lambda} (n\lambda)^t / t!} \\
&= \frac{t!}{(t-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-k}.
\end{aligned}$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\psi_1(T) = \frac{T!}{(T-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{T-k} \mathbb{1}_{\{k, k+1, \ldots\}}(T)$ είναι η ΑΕΕΔ της $g_1(\lambda)$ σύμφωνα με το θεώρημα Lehmann - Scheffé. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{0\}}(X_1) \cdots \mathbb{1}_{\{0\}}(X_k)\right] = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_k = 0) \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{ισον.}}{=}} \left[\mathbb{P}(X_1 = 0)\right]^k = e^{-k\lambda}.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $V_2(\underline{X}) = \mathbb{1}_{\{0\}}(X_1) \cdots \mathbb{1}_{\{0\}}(X_k)$ είναι μία α.ε. της $g_2(\lambda)$. Για $k \leqslant n$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(V_2 \mid T = t\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 = 0, \ldots, X_k = 0 \mid T = t\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = 0, \ldots, X_k = 0, \sum_{i=1}^n X_i = t\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_k = 0) \mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^n X_i = t\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\
&= \frac{e^{-k\lambda} e^{-(n-k)\lambda} \left[(n-k)\lambda\right]^t / t!}{e^{-n\lambda} (n\lambda)^t / t!} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^t.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Lehmann - Scheffé, έπεται ότι η $\psi_2(T) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^T$ είναι η ΑΕΕΔ της $g_2(\lambda)$. Έστω ότι $\mathbb{E}_\lambda[\psi_3(T)] = g_3(\lambda)\ \forall \lambda > 0$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \psi_3(t) e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!} = \lambda^k \quad \Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t \psi_3(t)}{t!} \lambda^t = \lambda^k e^{n\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t \psi_3(t)}{t!} \lambda^t = \lambda^k \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\lambda)^t}{t!} \quad \Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t \psi_3(t)}{t!} \lambda^t = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t}{t!} \lambda^{t+k} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t \psi_3(t)}{t!} \lambda^t = \sum_{t=k}^{\infty} \frac{n^{t-k}}{(t-k)!} \lambda^t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{n^t \psi_3(t)}{t!} = \begin{cases} 0, & t = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \frac{n^{t-k}}{(t-k)!}, & t = k, k+1, \ldots \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \psi_3(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \binom{t}{k} \frac{k!}{n^k}, & t = k, k+1, \ldots \end{cases}.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5, έπεται ότι η $\psi_3(T) = \binom{T}{k}\frac{k!}{n^k}\mathbb{1}_{\{k,k+1,\dots\}}(T)$ είναι η ΑΕΕΔ της $g_3(\lambda)$. $\square$

Σημείωση 3.18. Αν $X_1,\dots,X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε $(X_1 \mid \sum_{i=1}^n X_i = t) \sim \text{Bin}\left(t, \frac{1}{n}\right)$ ανεξαρτήτως από την τιμή λ.

3.8 Ανισότητα Cramér - Rao

Ορισμός 3.12. i. Η συνάρτηση $\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta)$ καλείται *συνάρτηση score* του δείγματος $\underline{X}$ για την παράμετρο ϑ.

ii. Η παραμετρική συνάρτηση $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}^2_{\underline{X}}(\vartheta)\right]$ καλείται *πληροφορία κατά Fisher* του δείγματος $\underline{X}$ για την παράμετρο ϑ.

Πρόταση 3.5. i. Αν $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες, τότε $\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}_{X_i}(\vartheta)$.

ii. Αν $g(\eta)=\vartheta$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\eta) = \mathcal{I}_{\underline{X}}\left(g(\eta)\right)\left[g'(\eta)\right]^2$.

Απόδειξη. i. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\prod_{i=1}^n f(X_i;\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\sum_{i=1}^n \log f(X_i;\vartheta)\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(X_i;\vartheta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}_{X_i}(\vartheta).\end{aligned}$$

ii. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\underline{X}}(\eta) &= \mathbb{E}_\eta\left[\mathcal{S}^2_{\underline{X}}(\eta)\right] = \mathbb{E}_\eta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\log f(\underline{X};\eta)\right)^2\right] = \mathbb{E}_\vartheta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right)^2\right]\\ &= \mathbb{E}_\vartheta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta)\right)^2\right]\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right)^2 = \mathcal{I}_{\underline{X}}\left(g(\eta)\right)\left[g'(\eta)\right]^2.\end{aligned}$$

$\square$

Συνθήκες Ομαλότητας: Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ είναι συνεχής με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{x};\vartheta)$ για $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και $\underline{x} \in S$. Ορίζουμε τις ακόλουθες συνθήκες ομαλότητας:

I. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

II. Το στήριγμα $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x};\vartheta) > 0\}$ δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ.

III. $\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta) < \infty$ $\forall \underline{x} \in S$ και $\forall\vartheta \in \Theta$.

IV. $\int_S \frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = 0$ $\forall\vartheta\in\Theta$.

V. $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) \in (0,\infty)$ $\forall\vartheta\in\Theta$.

Πρόταση 3.6. Έστω ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες ομαλότητας:

VI. $\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} f(\underline{x};\vartheta) < \infty \ \forall \underline{x} \in S$ και $\forall \vartheta \in \Theta$.

VII. $\int_S \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} = \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \int_S f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$.

Τότε, έπεται ότι:

$$\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = -\mathbb{E}_\vartheta \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} \mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) \right] = -\mathbb{E}_\vartheta \left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \log f(\underline{X};\vartheta) \right].$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta \left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \log f(\underline{X};\vartheta) \right] &= \int_S f(\underline{x};\vartheta) \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \log f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} = \int_S f(\underline{x};\vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta} \mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) d\underline{x} \\
&= \int_S \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} \left[f(\underline{x};\vartheta) \mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) \right] - \mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta) \right] d\underline{x},
\end{aligned}$$

όπου $\mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(\underline{x};\vartheta) = \frac{1}{f(\underline{x};\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta)$ είναι η συνάρτηση score. Σύμφωνα με τη συνθήκη ομαλότητας VII, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left[f(\underline{x};\vartheta) \mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) \right] d\underline{x} &= \int_S \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left[f(\underline{x};\vartheta) \frac{1}{f(\underline{x};\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta) \right] d\underline{x} \\
&= \int_S \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} = \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \int_S f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} = 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}
-\mathbb{E}_\vartheta \left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \log f(\underline{X};\vartheta) \right] &= \int_S \mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} \\
&= \int_S \mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) f(\underline{x};\vartheta) \frac{1}{f(\underline{x};\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} \\
&= \int_S \mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta) f(\underline{x};\vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} \\
&= \int_S f(\underline{x};\vartheta) \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(\underline{x};\vartheta) \right]^2 d\underline{x} \\
&= \mathbb{E}_\vartheta \left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f(\underline{X};\vartheta) \right)^2 \right] = \mathbb{E}_\vartheta \left[\mathcal{S}^2_{\underline{X}}(\vartheta) \right] = \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta).
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.7. Έστω δείγμα $\underline{X}$ από κατανομή που ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας I-V.

i. Ισχύει ότι $\mathbb{E}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = 0$ και $\mathrm{Var}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}^2_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) \ \forall \vartheta \in \Theta$.

ii. Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{I}_{X_i}(\vartheta)$.

iii. Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες, τότε $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = n\mathcal{I}_{X_1}(\vartheta)$.

Απόδειξη. i. Σύμφωνα με τη συνθήκη ομαλότητας IV, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] &= \int_S f(\underline{x};\vartheta)\mathcal{S}_{\underline{x}}(\vartheta)d\underline{x} = \int_S f(\underline{x};\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} \\
&= \int_S f(\underline{x};\vartheta)\frac{1}{f(\underline{x};\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} \\
&= \int_S \frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$\mathrm{Var}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}^2_{\underline{X}}(\vartheta)\right] - \left[\mathbb{E}_\vartheta\left(\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right)\right]^2 = \mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}^2_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta).$$

ii. Αφού οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, έπεται ότι:

$$\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = \mathrm{Var}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathrm{Var}_\vartheta\left[\sum_{i=1}^n \mathcal{S}_{X_i}(\vartheta)\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{X_i}(\vartheta)\right] = \sum_{i=1}^n \mathcal{I}_{X_i}(\vartheta).$$

iii. Αφού οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, έπεται ότι:

$$\mathcal{I}_{X_1}(\vartheta) = \mathcal{I}_{X_2}(\vartheta) = \cdots = \mathcal{I}_{X_n}(\vartheta) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{I}_{X_i}(\vartheta) = n\mathcal{I}_{X_1}(\vartheta).$$

□

Θεώρημα 3.9. (Ανισότητα Cramér - Rao) Έστω δείγμα $\underline{X}$ με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{x};\vartheta)$ για $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και $\underline{x} \in S$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας I-V. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι μία εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ με πεπερασμένη διασπορά και ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη ομαλότητας:

VIII. $\int_S T(\underline{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S T(\underline{x})f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\ \forall\vartheta \in \Theta$,

όπου $\mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right] = g(\vartheta) + \mathrm{bias}_{g(\vartheta)}\left[T(\underline{X})\right]$. Τότε, έπεται ότι:

$$\mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right] \geqslant \frac{1}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\right]^2, \quad \forall\vartheta \in \Theta.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ομαλότητας VII και IV, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right] &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_S T(\underline{x})f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \int_S T(\underline{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} \\
&= \int_S T(\underline{x})f(\underline{x};\vartheta)\frac{1}{f(\underline{x};\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_S f(\underline{x};\vartheta)T(\underline{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{x};\vartheta)d\underline{x} = \mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] \\
&= \mathrm{Cov}_\vartheta\left[T(\underline{X}),\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] + \mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathrm{Cov}_\vartheta\left[T(\underline{X}),\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right],
\end{aligned}
$$

όπου $\mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = 0$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Κάνοντας χρήση της ανισότητας συνδιακύμανσης, συμπεραίνουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\right]^2 &= \left[\mathrm{Cov}_\vartheta\left(T(\underline{X}),\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right)\right]^2 \\
&\leqslant \mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\mathrm{Var}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta),
\end{aligned}
$$

όπου $\mathrm{Var}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$
\mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right] \geqslant \frac{1}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]\right]^2.
$$

□

Πόρισμα 3.6. Αν η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, τότε έπεται ότι:

$$
\mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right] \geqslant \frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}, \quad \forall\vartheta \in \Theta.
$$

Απόδειξη. Αν η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι α.ε. της $g(\vartheta)$, τότε ισχύει ότι $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbb{E}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right] = g'(\vartheta)$, οπότε το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Cramér - Rao. □

Ορισμός 3.13. i. Μία α.ε. $T(\underline{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ που επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao, δηλαδή για την οποία ισχύει ότι:

$$
\mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right] = \frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}, \quad \forall\vartheta \in \Theta,
$$

καλείται *αποτελεσματική* (ή αποδοτική) εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$.

ii. Θεωρούμε μία α.ε. $T(\underline{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$. Ο ακόλουθος λόγος:

$$
e_{g(\vartheta)}\left[T(\underline{X})\right] = \frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2/\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}{\mathrm{Var}_\vartheta\left[T(\underline{X})\right]} \in [0,1],
$$

καλείται *αποτελεσματικότητα* (ή αποδοτικότητα) της $T(\underline{X})$ ως προς $g(\vartheta)$.

Σημείωση 3.19. Παρατηρούμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν $e_{g(\vartheta)}\left[T(\underline{X})\right] = 1 \ \forall\vartheta \in \Theta$. Αν η $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$, τότε είναι η μοναδική ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Αν η $T(\underline{X})$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$, τότε δεν είναι απαραίτητα αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$. Σε αυτήν την περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει καμία αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$.

Πρόταση 3.8. Μία στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $k(\vartheta) \neq 0$ τέτοια ώστε $\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = k(\vartheta)\left[T(\underline{X}) - g(\vartheta)\right]\ \forall\vartheta \in \Theta$. Τότε, ισχύει ότι $k(\vartheta) = \frac{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}{g'(\vartheta)}$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν είναι α.ε. της $g(\vartheta)$ και επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η $T(\underline{X})$ επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao αν και μόνο αν η ανισότητα συνδιακύμανσης που επικαλεστήκαμε στην απόδειξη της ανισότητας Cramér - Rao ισχύει ως ισότητα $\forall\vartheta \in \Theta$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η ανισότητα συνδιακύμανσης ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $c_0(\vartheta)$ και $c_1(\vartheta) \neq 0$ τέτοιες ώστε $T(\underline{X}) = c_0(\vartheta) + c_1(\vartheta)\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\ \forall\vartheta \in \Theta$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$g(\vartheta) = \mathbb{E}\left[T(\underline{X})\right] = c_0(\vartheta) + c_1(\vartheta)\mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = c_0(\vartheta),$$

$$0 = c_0'(\vartheta) + c_1'(\vartheta)\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) + c_1(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) \quad \Rightarrow$$

$$g'(\vartheta) + c_1'(\vartheta)\mathbb{E}_\vartheta\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] + c_1(\vartheta)\mathbb{E}_\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1(\vartheta) = \frac{g'(\vartheta)}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}.$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$T(\underline{X}) = g(\vartheta) + \frac{g'(\vartheta)}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \underbrace{\frac{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}{g'(\vartheta)}}_{k(\vartheta)}\left[T(\underline{X}) - g(\vartheta)\right].$$

□

Πρόταση 3.9. Έστω ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη μονοπαραμετρική ΕΟΚ με $f(\underline{x};\vartheta) = h(\underline{x})e^{Q(\vartheta)T(\underline{x}) - A(\vartheta)}$ για $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και $\underline{x} \in S$. Αν ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $Q : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $Q'(\vartheta) \neq 0\ \forall\vartheta \in \Theta$, τότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Επιπλέον, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)}$. Μάλιστα, υπάρχει αποτελεσματική εκτιμήτρια της $h(\vartheta)$ αν και μόνο αν η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ και η $h(\vartheta)$ είναι της μορφής $h(\vartheta) = c_0 + c_1 g(\vartheta)$ για κάποιες σταθερές $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$.

Απόδειξη. Οι συνθήκες ομαλότητας I και II ικανοποιούνται από υπόθεση. Μπορούμε να δείξουμε ότι ικανοποιούνται κι όλες οι υπόλοιπες συνθήκες ομαλότητας με κατάλληλη χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\underline{X};\vartheta) = Q'(\vartheta)T(\underline{X}) - A'(\vartheta) = Q'(\vartheta)\left[T(\underline{X}) - \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)}\right].$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)}$. Σύμφωνα με την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $c_0(\vartheta)$ και $c_1(\vartheta) \neq 0$ τέτοιες ώστε $\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = c_0(\vartheta) + c_1(\vartheta)T(\underline{X})\ \forall \vartheta \in \Theta$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{X};\vartheta) = T(\underline{X}) \underbrace{\int c_1(\vartheta)d\vartheta}_{C_1(\vartheta)+A_1(\underline{X})} + \underbrace{\int c_0(\vartheta)d\vartheta}_{C_0(\vartheta)+A_0(\underline{X})} \quad \Leftrightarrow$$

$$f(\underline{x};\vartheta) = \underbrace{e^{A_0(\underline{x})+A_1(\underline{x})T(\underline{x})}}_{h(\underline{x})} e^{C_1(\vartheta)T(\underline{x})+C_2(\vartheta)}.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $Q(\vartheta) = C_1(\vartheta)$ και $A(\vartheta) = -C_2(\vartheta)$. □

Παράδειγμα 3.29. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{x};p) = \log p \sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{X}}(p) &= \frac{\partial}{\partial p}\log f(\underline{X};p) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{p(1-p)}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - np\right) = \frac{n}{p(1-p)}\left(\overline{X} - p\right),\end{aligned}$$

όπου $k(p) = \frac{n}{p(1-p)} \neq 0\ \forall p \in (0,1)$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(p) = p$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην ΕΟΚ με την εξής από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(\underline{x};p) = \exp\left\{n\left[\log p - \log(1-p)\right]\overline{x} - n\log\frac{1}{1-p}\right\},$$

όπου $T(\underline{x}) = \overline{x}$, $Q(p) = n\left[\log p - \log(1-p)\right]$ και $A(p) = n\log\frac{1}{1-p}$. Υπολογίζουμε ότι:

$$Q'(p) = \frac{n}{p} + \frac{n}{1-p} = \frac{n}{p(1-p)} \neq 0, \quad A'(p) = \frac{n}{1-p},$$

οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Σύμφωνα με την πρόταση 3.9, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(p) = \frac{A'(p)}{Q'(p)} = p$. Εναλλακτικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log f(\underline{X}; p) = -\frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{(1-p)^2} \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\underline{X}}(p) &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log f(\underline{X}; p) \right] = \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) - \frac{1}{(1-p)^2} \left[n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \right] \\ &= \frac{np}{p^2} + \frac{n-np}{(1-p)^2} = \frac{n}{p(1-p)} \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}(X_1) = p = g(p), \quad \operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n} \operatorname{Var}(X_1) = \frac{1}{n} p(1-p) = \frac{[g'(p)]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(p)}.$$

Επομένως, η $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του p. □

Παράδειγμα 3.30. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \vartheta) = \frac{\log \vartheta}{\vartheta - 1} \vartheta^x$ για $\vartheta > 1$ και $x \in (0, 1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{x}; \vartheta) = n \log \log \vartheta - n \log(\vartheta - 1) + \log \vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\underline{X}; \vartheta) = \frac{n}{\vartheta \log \vartheta} - \frac{n}{\vartheta - 1} + \frac{1}{\vartheta} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \frac{1}{\vartheta} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n\vartheta}{\vartheta - 1} + \frac{n}{\log \vartheta} \right) = \frac{n}{\vartheta} \left[\overline{X} - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta - 1} - \frac{1}{\log \vartheta} \right) \right], \end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} \neq 0 \ \forall \vartheta > 1$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta - 1} - \frac{1}{\log \vartheta}$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (1, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με την εξής από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \exp \left\{ n\overline{x} \log \vartheta - n \left[\log(\vartheta - 1) + \log \frac{1}{\log \vartheta} \right] \right\},$$

όπου $T(\underline{x}) = \overline{x}$, $Q(\vartheta) = n \log \vartheta$ και $A(\vartheta) = n \left[\log(\vartheta - 1) + \log \frac{1}{\log \vartheta} \right]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$Q'(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} \neq 0, \quad A'(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta - 1} - \frac{n}{\vartheta \log \vartheta},$$

οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Σύμφωνα με την πρόταση 3.9, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)} = \frac{\vartheta}{\vartheta-1} - \frac{1}{\log\vartheta}$. Παρατηρούμε ότι θα ήταν εξαιρετικά χρονοβόρο να υπολογίσουμε τη διασπορά της $T(\underline{X})$ για να τη συγκρίνουμε με το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao. □

Σημείωση 3.20. Αν γνωρίζουμε μία α.ε. της $g(\vartheta)$, τότε αρκεί να υπολογίσουμε τη διασπορά της και να τη συγκρίνουμε με το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao για να ελέγξουμε αν είναι αποτελεσματική. Διαφορετικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.8 ή την πρόταση 3.9 για να ελέγξουμε αν υπάρχει αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta)$. Ενδεικτικά, στον πίνακα 3.3 συνοψίζουμε την πληροφορία κατά Fisher μίας παρατήρησης για τις παραμέτρους κάποιων γνωστών κατανομών.

Bernoulli(p)	$1/p(1-p)$
Bin(N,p) με γνωστό N	$N/p(1-p)$
Poisson(λ)	$1/\lambda$
Exp(ϑ)	$1/\vartheta^2$
Beta$(\vartheta,1)$	
Beta$(1,\vartheta)$	
Gamma(k,λ) με γνωστό k	k/λ^2
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ με γνωστό σ^2	$1/\sigma^2$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ με γνωστό μ	$1/2\sigma^4$

Πινακας 3.3: Σύνοψη Πληροφοριών κατά Fisher

3.9* Πολυδιάστατη Ανισότητα Cramér - Rao

Ορισμός 3.14. Θεωρούμε 2 τυχαία διανύσματα $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_r) \in \mathbb{R}^r$ και $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \in \mathbb{R}^s$. Τότε, ορίζουμε:

- $E(\underline{X}) = [E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_r)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^r$ το διάνυσμα μέσων τιμών του $\underline{X}$;
- $\mathrm{Var}(\underline{X}) = E\left(\underline{X}\,\underline{X}^{\mathrm{T}}\right) - E(\underline{X})\,[E(\underline{X})]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ τον πίνακα συνδιακύμανσης του $\underline{X}$;
- $\mathrm{Cov}(\underline{X},\underline{Y}) = E\left(\underline{X}\,\underline{Y}^{\mathrm{T}}\right) - E(\underline{X})\,[E(\underline{Y})]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{r\times s}$ τον πίνακα συνδιακύμανσης μεταξύ $\underline{X}$ και $\underline{Y}$.

Πρόταση 3.10. Θεωρούμε 2 τυχαία διανύσματα $\underline{X} \in \mathbb{R}^r$, $\underline{Y} \in \mathbb{R}^s$, 2 σταθερούς πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times s}$ και 2 σταθερά διανύσματα $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{d} \in \mathbb{R}^m$. Τότε, γνωρίζουμε ότι:

i. $E(A\underline{X} + \underline{c}) = AE(\underline{X}) + \underline{c}$,

ii. $E(A\underline{X} + B\underline{Y}) = AE(\underline{X}) + BE(\underline{Y})$,

iii. $\text{Var}(A\underline{X} + \underline{c}) = A\text{Var}(\underline{X})A^{\text{T}}$,

iv. $\text{Var}(\underline{X})$ είναι συμμετρικός και θετικά ημι-ορισμένος, δηλαδή $\underline{u}^{\text{T}}\text{Var}(\underline{X})\underline{u} \geqslant 0$ $\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^r$.

v. $\text{Cov}(\underline{X}, \underline{c}) = \underline{0}$,

vi. $\text{Cov}(\underline{X}, \underline{X}) = \text{Var}(\underline{X})$,

vii. $\text{Cov}(\underline{Y}, \underline{X}) = [\text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y})]^{\text{T}}$,

viii. $\text{Cov}(A\underline{X} + \underline{c}, B\underline{Y} + \underline{d}) = A\text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y})B^{\text{T}}$,

ix. $\text{Var}(A\underline{X} + B\underline{Y}) = A\text{Var}(\underline{X})A^{\text{T}} + B\text{Var}(\underline{Y})B^{\text{T}} + A\text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y})B^{\text{T}} + B\text{Cov}(\underline{Y}, \underline{X})A^{\text{T}}$,

x. $\underline{X}, \underline{Y}$ ανεξάρτητα $\Rightarrow \text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \underline{0} \Rightarrow E\left(\underline{X}\underline{Y}^{\text{T}}\right) = E(\underline{X})\left[E(\underline{Y})\right]^{\text{T}}$.

Ορισμός 3.15. i. Η συνάρτηση $\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = \nabla_{\underline{\vartheta}} \log f(\underline{X}; \underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^s$ καλείται *συνάρτηση score* του δείγματος $\underline{X}$ για την παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \mathbb{R}^s$.

ii. Η παραμετρική συνάρτηση $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\mathcal{S}_{\underline{X}}^{\text{T}}(\vartheta)\right] \in \mathbb{R}^{s\times s}$ καλείται *πίνακας πληροφορίας κατά Fisher* του δείγματος $\underline{X}$ για την παράμετρο $\underline{\vartheta}$.

Πρόταση 3.11. Αν $\underline{g}(\underline{\eta}) = \underline{\vartheta}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με Ιακωβιανό πίνακα $\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\eta}) \in \mathbb{R}^{s\times d}$, τότε $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\eta}) = \mathcal{J}_{\underline{g}}^{\text{T}}(\underline{\eta})\mathcal{I}_{\underline{X}}\left(\underline{g}(\underline{\eta})\right)\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\eta}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\eta}) &= \mathbb{E}_{\underline{\eta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\eta})\mathcal{S}_{\underline{X}}^{\text{T}}(\underline{\eta})\right] = \mathbb{E}_{\underline{\eta}}\left[\nabla_{\underline{\eta}} \log f(\underline{X}; \underline{\eta})\nabla_{\underline{\eta}}^{\text{T}} \log f(\underline{X}; \underline{\eta})\right] \\
&= \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{J}_{\underline{g}}^{\text{T}}(\underline{\eta})\nabla_{\underline{\vartheta}} \log f(\underline{X}; \underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}}^{\text{T}} \log f(\underline{X}; \underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\eta})\right] \\
&= \mathcal{J}_{\underline{g}}^{\text{T}}(\underline{\eta})\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\nabla_{\underline{\vartheta}} \log f(\underline{X}; \underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}}^{\text{T}} \log f(\underline{X}; \underline{\vartheta})\right]\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\eta}) \\
&= \mathcal{J}_{\underline{g}}^{\text{T}}(\underline{\eta})\mathcal{I}_{\underline{X}}\left(\underline{g}(\underline{\eta})\right)\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\eta}).
\end{aligned}$$

□

Συνθήκες Ομαλότητας: Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ είναι συνεχής με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{x}; \underline{\vartheta})$ για $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ και $\underline{x} \in S$. Ορίζουμε τις ακόλουθες συνθήκες ομαλότητας:

I. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$.

II. Το στήριγμα $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) > 0\}$ δεν εξαρτάται από την τιμή $\underline{\vartheta}$.

III. $\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) < \infty$ $\forall \underline{x} \in S$ και $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ για $j = 1, 2, \ldots, s$.

IV. $\int_S \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int_S f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) d\underline{x} = 0$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ για $j = 1, 2, \ldots, s$.

V. Ο πίνακας $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{s\times s}$ είναι θετικά ορισμένος $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Πρόταση 3.12. Έστω ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες ομαλότητας:

VI. $\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_j\partial\vartheta_k} f(\underline{x};\underline{\vartheta}) < \infty$ $\forall \underline{x} \in S$ και $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ για $j,k = 1,2,\ldots,s$.

VII. $\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_j\partial\vartheta_k} f(\underline{x};\underline{\vartheta}) d\underline{x} = \frac{\partial^2}{\partial\vartheta_j\partial\vartheta_k} \int_S f(\underline{x};\underline{\vartheta}) d\underline{x} = 0$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$ για $j,k = 1,2,\ldots,s$.

Τότε, έπεται ότι $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = -\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right]$, όπου $\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης $\log f(\underline{X};\underline{\vartheta})$, δηλαδή ο Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης $\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 3.6 (σελίδα 54). □

Πρόταση 3.13. Έστω δείγμα $\underline{X}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας I-V. Τότε, έπεται ότι $\mathbb{E}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = \underline{0}$ και $\text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\mathcal{S}_{\underline{X}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta})\right] = \mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 3.7 (σελίδα 54). □

Λήμμα 3.1. (Πολυδιάστατη Ανισότητα Συνδιακύμανσης) Έστω 2 τυχαία διανύσματα $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{Y} \in \mathbb{R}^m$ με θετικά ορισμένους πίνακες συνδιακύμανσης. Τότε, έπεται ότι ο πίνακας $\text{Var}(\underline{X}) - \text{Cov}(\underline{X},\underline{Y})\left[\text{Var}(\underline{Y})\right]^{-1}\text{Cov}(\underline{Y},\underline{X})$ είναι θετικά ημι-ορισμένος.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}(\underline{X}) = \mathbb{E}(\underline{Y}) = 0$. Για σταθερό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, γνωρίζουμε ότι ο πίνακας $(\underline{X} + A\underline{Y})(\underline{X} + A\underline{Y})^{\mathrm{T}}$ είναι θετικά ημι-ορισμένος. Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$(\underline{X} + A\underline{Y})(\underline{X} + A\underline{Y})^{\mathrm{T}} = \underline{X}\underline{X}^{\mathrm{T}} + A\underline{Y}\underline{X}^{\mathrm{T}} + \underline{X}\underline{Y}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + A\underline{Y}\underline{Y}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[(\underline{X} + A\underline{Y})(\underline{X} + A\underline{Y})^{\mathrm{T}}\right] = \text{Var}(\underline{X}) + A\text{Cov}(\underline{Y},\underline{X}) + \text{Cov}(\underline{X},\underline{Y})A^{\mathrm{T}} + A\text{Var}(\underline{Y})A^{\mathrm{T}}.$$

Έστω $A = -\text{Cov}(\underline{X},\underline{Y})\left[\text{Var}(\underline{Y})\right]^{-1}$. Αφού $\text{Cov}(\underline{Y},\underline{X}) = \left[\text{Cov}(\underline{X},\underline{Y})\right]^{\mathrm{T}}$, έπεται ότι:

$$\mathbb{E}\left[(\underline{X} + A\underline{Y})(\underline{X} + A\underline{Y})^{\mathrm{T}}\right] = \text{Var}(\underline{X}) - \text{Cov}(\underline{X},\underline{Y})\left[\text{Var}(\underline{Y})\right]^{-1}\text{Cov}(\underline{Y},\underline{X}).$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι ο πίνακας $\text{Var}(\underline{X}) - \text{Cov}(\underline{X},\underline{Y})\left[\text{Var}(\underline{Y})\right]^{-1}\text{Cov}(\underline{Y},\underline{X})$ είναι θετικά ημι-ορισμένος. □

Θεώρημα 3.10. (Πολυδιάστατη Ανισότητα Cramér - Rao) Έστω δείγμα $\underline{X}$ με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{x};\underline{\vartheta})$ για $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ και $\underline{x} \in S$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας I-V. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι μία εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^d$ με πεπερασμένη διασπορά και ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη ομαλότητας:

VIII. $\int_S T_h(\underline{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta_j} f(\underline{x};\underline{\vartheta}) d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\int_S T_h(\underline{x}) f(\underline{x};\underline{\vartheta}) d\underline{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T_h(\underline{X})\right]$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$, όπου $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T_h(\underline{X})\right] = g_h(\underline{\vartheta}) + \text{bias}_{g_h(\underline{\vartheta})}\left[T_h(\underline{X})\right]$ για $h = 1, 2, \ldots, d$. Τότε, ο πίνακας $\text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] - \mathcal{J}_{\underline{m}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{m}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ είναι θετικά ημι-ορισμένος $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$, όπου $\mathcal{J}_{\underline{m}} \in \mathbb{R}^{d\times s}$ ο Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης $\underline{m}(\underline{\vartheta}) = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\underline{T}(\underline{X})\right]$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ομαλότητας VII και IV, υπολογίζουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\underline{\vartheta}} m_h(\underline{\vartheta}) &= \nabla_{\underline{\vartheta}}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T_h(\underline{X})\right] = \nabla_{\underline{\vartheta}}\int_S T_h(\underline{x})f(\underline{x};\underline{\vartheta})d\underline{x} \\
&= \int_S T_h(\underline{x})\nabla_{\underline{\vartheta}} f(\underline{x};\underline{\vartheta})d\underline{x} = \int_S T_h(\underline{x})f(\underline{x};\underline{\vartheta})\frac{1}{f(\underline{x};\underline{\vartheta})}\nabla_{\underline{\vartheta}} f(\underline{x};\underline{\vartheta})d\underline{x} \\
&= \int_S f(\underline{x};\underline{\vartheta})T_h(\underline{x})\nabla_{\underline{\vartheta}}\log f(\underline{x};\underline{\vartheta})d\underline{x} = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T_h(\underline{X})\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] \\
&= \text{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[T_h(\underline{X}), \mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] + \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T_h(\underline{X})\right]\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] \\
&= \text{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[T_h(\underline{X}), \mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right],
\end{aligned}
$$

όπου $\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = 0$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Τότε, έπεται ότι:

$$
\text{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\underline{T}(\underline{X}), \mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right]\left[\text{Var}\left(\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right)\right]^{-1}\text{Cov}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}), \underline{T}(\underline{X})\right] = \mathcal{J}_{\underline{m}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{m}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta}),
$$

όπου $\text{Var}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = \mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Χρησιμοποιώντας την πολυδιάστατη ανισότητα συνδιακύμανσης, καταλήγουμε ότι ο πίνακας $\text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] - \mathcal{J}_{\underline{m}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{m}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta})$ είναι θετικά ημι-ορισμένος. □

Πόρισμα 3.7. Αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι α.ε. της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$, τότε ο πίνακας $\text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] - \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{g}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta})$ είναι θετικά ημι-ορισμένος $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

Απόδειξη. Αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι α.ε. της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$, τότε ισχύει ότι $\underline{m}(\underline{\vartheta}) = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] = \underline{g}(\underline{\vartheta})$, οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την πολυδιάστατη ανισότητα Cramér - Rao. □

Ορισμός 3.16. Μία α.ε. $\underline{T}(\underline{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta})$ που επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao, δηλαδή για την οποία ισχύει ότι $\text{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] = \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{g}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta})$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$, καλείται *αποτελεσματική* (ή αποδοτική) εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$.

Πρόταση 3.14. Μία στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta})$ αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $K(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{d\times s}$ τέτοια ώστε $K(\underline{\vartheta})\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = \underline{T}(\underline{X}) - \underline{g}(\underline{\vartheta})$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Τότε, ισχύει ότι $K(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$ αν και μόνο αν είναι α.ε. της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$ και επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η $T(\underline{X})$ επιτυγχάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao αν και μόνο αν η ανισότητα συνδιακύμανσης που επικαλεστήκαμε στην απόδειξη της ανισότητας Cramér - Rao ισχύει ως ισότητα $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η ανισότητα συνδιακύμανσης ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $\underline{c}_0(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^d$ και $C_1(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{d\times s}$ τέτοιες ώστε $\underline{T}(\underline{X}) = \underline{c}_0(\underline{\vartheta}) + C_1(\underline{\vartheta})\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \mathbb{E}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] = \underline{c}_0(\underline{\vartheta}) + C_1(\underline{\vartheta})\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = \underline{c}_0(\underline{\vartheta}),$$

$$0 = \mathcal{J}_{\underline{c}_0}(\underline{\vartheta}) + \frac{\partial C_1}{\partial \underline{\vartheta}}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) + C_1(\underline{\vartheta})\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta}) + \frac{\partial C_1}{\partial \underline{\vartheta}}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] + C_1(\underline{\vartheta})\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta}).$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$\underline{T}(\underline{X}) = \underline{g}(\underline{\vartheta}) + \underbrace{\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})}_{K(\underline{\vartheta})}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}).$$

□

Πρόταση 3.15. Έστω ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πλήρους τάξης πολυδιάστατη πολυπαραμετρική ΕΟΚ με $f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = h(\underline{x})e^{\langle \underline{Q}(\underline{\vartheta}),\underline{T}(\underline{x})\rangle - A(\underline{\vartheta})}$ για $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ και $\underline{x} \in S$. Αν ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$ και η συνάρτηση $\underline{Q} : \Theta \to \mathbb{R}^s$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη με αντιστρέψιμο Ιακωβιανό πίνακα $\mathcal{J}_{\underline{Q}}$, τότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Επιπλέον, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}}A(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^s$.

Απόδειξη. Οι συνθήκες ομαλότητας I και II ικανοποιούνται από υπόθεση. Μπορούμε να δείξουμε ότι ικανοποιούνται κι όλες οι υπόλοιπες συνθήκες ομαλότητας με κατάλληλη χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) &= \nabla_{\underline{\vartheta}} \log f(\underline{X};\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{Q}}(\underline{\vartheta})\underline{T}(\underline{X}) - \nabla_{\underline{\vartheta}}A(\underline{\vartheta}) \\ &= \mathcal{J}_{\underline{Q}}(\underline{\vartheta})\left[\underline{T}(\underline{X}) - \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}}A(\underline{\vartheta})\right].\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}}A(\underline{\vartheta})$. □

Παράδειγμα 3.31. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta_1,\vartheta_2)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \left(\vartheta_1, \vartheta_1^2 + \vartheta_2\right)$, ενώ η δειγματική διασπορά S^2 δεν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ_2. Παρατηρούμε ότι ο παραμετρικός χώρος $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.13 (σελίδα 38), η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με:

$$\underline{T}(\underline{x}) = \left(\overline{x}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right), \quad \underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \left(\frac{n\vartheta_1}{\vartheta_2}, -\frac{n}{2\vartheta_2}\right), \quad A(\underline{\vartheta}) = \frac{n\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} + \frac{n}{2}\log\vartheta_2.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$\nabla_{\underline{\vartheta}} A(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{n\vartheta_1}{\vartheta_2} \\ -\frac{n\vartheta_1^2}{2\vartheta_2^2} + \frac{n}{2\vartheta_2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\vartheta_2} & -\frac{n\vartheta_1}{\vartheta_2^2} \\ 0 & \frac{n}{2\vartheta_2^2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_2}{n} & \frac{2\vartheta_1\vartheta_2}{n} \\ 0 & \frac{2\vartheta_2^2}{n} \end{bmatrix},$$

οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Σύμφωνα με την πρόταση 3.15, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}} A(\underline{\vartheta}) = \left(\vartheta_1, \vartheta_1^2 + \vartheta_2\right)$. Εναλλακτικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{x};\underline{\vartheta}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\vartheta_2 - \frac{1}{2\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta_1)^2,$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = \nabla_{\underline{\vartheta}} \log f(\underline{X};\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \vartheta_1) \\ -\frac{n}{2\vartheta_2} + \frac{1}{2\vartheta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \vartheta_1)^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\mathcal{S}_{\underline{X}}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\vartheta_2} & -\frac{1}{\vartheta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \vartheta_1) \\ -\frac{1}{\vartheta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \vartheta_1) & \frac{n}{2\vartheta_2^2} - \frac{1}{\vartheta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \vartheta_1)^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = -\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = \begin{bmatrix} \frac{n}{\vartheta_2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\vartheta_2^2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\vartheta_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.4 (σελίδα 21), γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_1^2 + \vartheta_2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Var}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_2}{n} & \frac{2\vartheta_1\vartheta_2}{n} \\ \frac{2\vartheta_1\vartheta_1}{n} & \frac{4\vartheta_1^2\vartheta_2+2\vartheta_2^2}{n} \end{bmatrix} = \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{g}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta}).$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.14, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) &= \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_2}{n} & 0 \\ \frac{2\vartheta_1\vartheta_2}{n} & \frac{2\vartheta_2^2}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \vartheta_1) \\ -\frac{n}{2\vartheta_2} + \frac{1}{2\vartheta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \vartheta_1)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{X} - \vartheta_1 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \vartheta_1^2 - \vartheta_2 \end{bmatrix} = \underline{T}(\underline{X}) - \underline{g}(\underline{\vartheta}). \end{aligned}$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$. Ορίζουμε $h(\underline{\vartheta}) = \vartheta_2$ και υπολογίζουμε ότι $\mathcal{J}_h(\underline{\vartheta}) = (0, 1)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.12 (σελίδα 39), γνωρίζουμε ότι:

$$\mathrm{Var}\left(S^2\right) = \frac{2}{n-1}\vartheta_2^2 > \frac{2}{n}\vartheta_2^2 = \mathcal{J}_h(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_h^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta}),$$

οπότε η δειγματική διασπορά S^2 δεν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ_2. Εφόσον η S^2 είναι η ΑΕΕΔ του ϑ_2, σύμφωνα με το παράδειγμα 3.26 (σελίδα 51), έπεται ότι δεν υπάρχει καμία αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ_2. □

3.10 Ασυμπτωτική Κατανομή Εκτιμητριών

Ορισμός 3.17. (Σύγκλιση Ακολουθίας Τυχαίων Μεταβλητών)

i. **Σχεδόν βέβαια σύγκλιση**: $X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$

ii. **Σύγκλιση κατά πιθανότητα**: $X_n \overset{p}{\to} X \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$ για κάθε $\varepsilon > 0$

iii. **Σύγκλιση κατά κατανομή**: $X_n \overset{d}{\to} X \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ για κάθε σημείο συνέχειας x της συνάρτησης κατανομής F_X

Ορισμός 3.18. i. Μία στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ καλείται *ισχυρά συνεπής* εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ αν $T_n(\underline{X}) \overset{\text{a.s.}}{\to} g(\underline{\vartheta})$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

ii. Μία στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ καλείται (ασθενώς) *συνεπής* εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ αν $T_n(\underline{X}) \overset{p}{\to} g(\underline{\vartheta})$ $\forall \underline{\vartheta} \in \Theta$.

iii. Μία στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ έχει *ασυμπτωτική κατανομή* αν υπάρχει ακολουθία $(r_n)_{n\geqslant 1}$ με $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ τέτοια ώστε $r_n\left[T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})\right] \overset{d}{\to} Y$ για κάποια τυχαία μεταβλητή Y.

Ερμηνεία: Η ιδιότητα της συνέπειας εξασφαλίζει ότι όλες οι πιο πιθανές τιμές μίας εκτιμήτριας του ϑ θα συγκεντρώνονται ολοένα και πιο κοντά στην πραγματική τιμή του ϑ, καθώς συλλέγουμε ολοένα και περισσότερα δεδομένα. Επομένως, δε δίνει καμία πληροφορία για τις ιδιότητες που έχει μία εκτιμήτρια βασισμένη σε ένα δείγμα συγκεκριμένου μεγέθους, αλλά μόνο για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της.

Όλα τα αποτελέσματα που αφορούν την ασυμπτωτική κατανομή εκτιμητριών είναι συνέπειες γνωστών αποτελεσμάτων στον κλάδο της μετροθεωρητικής θεωρίας πιθανοτήτων. Θα αναφέρουμε αυτά τα χρήσιμα πιθανοθεωρητικά αποτελέσματα χωρίς απόδειξη και θα χτίσουμε επάνω σε αυτά για να αποδείξουμε όλα τα αναγκαία αποτελέσματα στην ασυμπτωτική στατιστική. Οι αποδείξεις αυτών των πιθανοθεωρητικών αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε κλασικό εγχειρίδιο θεωρίας πιθανοτήτων όπως το "Probability and Measure" του Patrick Billingsley και το "Probability Theory και Examples" του Rick Durrett.

Πρόταση 3.16. i. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{p} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{d} X$.

ii. Αν $X = c$ είναι μία εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $\mathbb{P}(X = c) = 1$, τότε $X_n \xrightarrow{p} c \;\Leftrightarrow\; X_n \xrightarrow{d} c$.

iii. Αν $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}/p} X$ και $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}/p} Y$, τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}/p} X + Y$ και $X_nY_n \xrightarrow{\text{a.s.}/p} XY$. Αν $Y_n \neq 0$ και $Y \neq 0$, τότε $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\text{a.s.}/p} \frac{X}{Y}$.

Πόρισμα 3.8. Αν η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$, τότε είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, γνωρίζουμε ότι $T_n(\underline{X}) \xrightarrow{\text{a.s.}} g(\underline{\vartheta})$ συνεπάγεται ότι $T_n(\underline{X}) \xrightarrow{p} g(\underline{\vartheta})$. □

Θεώρημα 3.11. (Slutsky) Αν $X_n \xrightarrow{d} X$ και $Y_n \xrightarrow{d} c$, τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$ και $X_nY_n \xrightarrow{d} cX$. Αν $Y_n \neq 0$ και $c \neq 0$, τότε $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$.

Ορισμός 3.19. i. Η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ καλείται *ασυμπτωτικά αμερόληπτη* εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta})$.

ii. Η $T_n(\underline{X})$ καλείται *ασυμπτωτικά αποτελεσματική* (ή αποδοτική) εκτιμήτρια του ϑ αν ισχύει ότι $\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}\left(0, \mathcal{I}_{X_1}^{-1}(\vartheta)\right)$, δηλαδή είναι ασυμπτωτικά κανονική με ασυμπτωτική διασπορά που ισούται με το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao.

Σημείωση 3.21. Η ιδιότητα της ασυμπτωτικής αποτελεσματικότητας εξασφαλίζει ότι η διασπορά μίας εκτιμήτριας του ϑ γίνεται όσο το δυνατόν μικρότερη, καθώς συλλέγουμε ολοένα και περισσότερα δεδομένα, ακόμα κι αν δεν επιτυγχάνει τη μικρότερη δυνατή διασπορά για δείγματα δεδομένου μεγέθους.

Πρόταση 3.17. (Ικανές Συνθήκες για τη Συνέπεια μίας Εκτιμήτριας)

i. Αν η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ με $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = 0$, τότε είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

ii. Αν η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ με $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = 0$, τότε είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$

iii. Αν $r_n\left[T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})\right] \xrightarrow{d} Y$ για κάποια ακολουθία $(r_n)_{n\geqslant 1}$ με $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, τότε η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. i. Σύμφωνα με την ανισότητα Chebyshev, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[|T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right]}{\varepsilon^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[|T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| \geqslant \varepsilon\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[|T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| < \varepsilon\right] = 1.$$

ii. Σύμφωνα με την ανισότητα Markov, γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[|T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| \geqslant \varepsilon\right] &= \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[(T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta}))^2 \geqslant \varepsilon^2\right] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[(T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta}))^2\right] \\ &= \frac{\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] + \left[\mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(T_n(\underline{X})\right) - g(\underline{\vartheta})\right]^2}{\varepsilon^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[|T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| \geqslant \varepsilon\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[|T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})| < \varepsilon\right] = 1.$$

iii. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, συμπεραίνουμε ότι:

$$T_n(\underline{X}) = \frac{1}{r_n} \cdot r_n\left[T_n(\underline{X}) - g(\underline{\vartheta})\right] + g(\underline{\vartheta}) \overset{d}{\to} 0 \cdot Y + g(\underline{\vartheta}) = g(\underline{\vartheta}).$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.16, καταλήγουμε ότι $T_n(\underline{X}) \overset{p}{\to} g(\underline{\vartheta})$. □

Θεώρημα 3.12. (Θεώρημα Συνεχούς Απεικόνισης) Αν $X_n \overset{\text{a.s.}/p/d}{\to} X$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε $g\left(X_n\right) \overset{\text{a.s.}/p/d}{\to} g(X)$.

Πόρισμα 3.9. Αν η $T_n(\underline{X})$ είναι (ισχυρά) συνεπής εκτιμήτρια του ϑ και η συνάρτηση $g : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η $g\left(T_n(\underline{X})\right)$ είναι (ισχυρά) συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης, γνωρίζουμε ότι $T_n(\underline{X}) \overset{\text{a.s.}/p}{\to} \vartheta$ συνεπάγεται ότι $g\left(T_n(\underline{X})\right) \overset{\text{a.s.}/p}{\to} g(\vartheta)$. □

Θεώρημα 3.13. (Μέθοδος Δέλτα) Αν $r_n\left(X_n - \vartheta\right) \overset{d}{\to} Y$, όπου $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, και η συνάρτηση $g : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $g'(\vartheta) \neq 0$, τότε έπεται ότι $r_n\left[g\left(X_n\right) - g(\vartheta)\right] \overset{d}{\to} g'(\vartheta)Y$.

Θεώρημα 3.14*. (Μέθοδος Δέλτα Δεύτερης Τάξης) Έστω ότι $r_n\left(X_n - \vartheta\right) \overset{d}{\to} Y$, όπου $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$. Αν η συνάρτηση $g : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με $g'(\vartheta) = 0$ και $g''(\vartheta) \neq 0$, τότε έπεται ότι $r_n^2\left[g\left(X_n\right) - g(\vartheta)\right] \overset{d}{\to} \frac{1}{2}g''(\vartheta)Y^2$.

Θεώρημα 3.15. (Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών) Αν $\left(X_n\right)_{n\geqslant 1}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$, τότε $\overline{X}_n \overset{p}{\to} \mu$.

Θεώρημα 3.16. (Ισχυρός Νόμος Μεγάλων Αριθμών) Αν $\left(X_n\right)_{n\geqslant 1}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$, τότε $\overline{X}_n \overset{\text{a.s.}}{\to} \mu$.

Πόρισμα 3.10. Η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X}) = \overline{X}_n$ είναι μία ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta}) = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1)$.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών. $\square$

Θεώρημα 3.17. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) Αν $(X_n)_{n\geqslant 1}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή $\mathbb{E}(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$ και διασπορά $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0,\infty)$, τότε $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$.

Λήμμα 3.2. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$, τότε ισχύει ότι $U = F(X;\underline{\vartheta}) \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Απόδειξη. Αφού η συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$ είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι είναι κι αντιστρέψιμη. Για $u \in (0,1)$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_U(u) = \mathbb{P}\left[F(X;\underline{\vartheta}) \leqslant u\right] = \mathbb{P}\left[X \leqslant F^{-1}(u;\underline{\vartheta})\right] = F\left(F^{-1}(u;\underline{\vartheta});\underline{\vartheta}\right) = u.$$

$\square$

Θεώρημα 3.18. Αν οι τυχαίες μεταβλητές $U_1,\ldots,U_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ είναι ανεξάρτητες, τότε $nU_{(1)} \xrightarrow{d} Y$ και $n\left[1 - U_{(n)}\right] \xrightarrow{d} V$, όπου $Y, V \sim \mathrm{Exp}(1)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Πόρισμα 3.11. Αν $X_1,\ldots,X_n$ είναι τ.δ. με συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$, τότε $nF\left[X_{(1)};\underline{\vartheta}\right] \xrightarrow{d} Y$ και $n\left[1 - F\left(X_{(n)};\underline{\vartheta}\right)\right] \xrightarrow{d} V$, όπου $Y, V \sim \mathrm{Exp}(1)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα, έπεται ότι $U_i = F\left(X_i;\underline{\vartheta}\right) \sim \mathcal{U}(0,1)$ για $i = 1,2,\ldots,n$, το οποίο συνεπάγεται ότι $U_{(1)} = F\left[X_{(1)};\underline{\vartheta}\right]$ και $U_{(n)} = F\left[X_{(n)};\underline{\vartheta}\right]$. Συνεπώς, το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει από άμεση εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος. $\square$

Λήμμα 3.3. Έστω $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Τότε, η τυχαία μεταβλητή $X = F^{-1}(U;\underline{\vartheta})$ έχει συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $F_U(u) = \mathbb{P}(U \leqslant u) = u$ για $u \in (0,1)$. Για $x \in S$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(X \leqslant x) = \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[F^{-1}(U;\underline{\vartheta}) \leqslant x\right] \\ &= \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[F(x;\underline{\vartheta}) \geqslant U\right] = F_U\left(F(x;\underline{\vartheta});\underline{\vartheta}\right) = F(x;\underline{\vartheta}). \end{aligned}$$

$\square$

Θεώρημα 3.19.* Αν οι τυχαίες μεταβλητές $U_1, \ldots, U_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ είναι ανεξάρτητες, τότε έπεται ότι:

$$\sqrt{n}\left[\text{median}(\underline{U}) - \frac{1}{2}\right] \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}\left(0, 1/4\right).$$

Πόρισμα 3.12.* Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι τ.δ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\underline{\vartheta})$, συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$ και $m = F^{-1}\left(1/2;\underline{\vartheta}\right)$ είναι η θεωρητική διάμεσος της κατανομής, τότε έπεται ότι:

$$\sqrt{n}\left[\text{median}(\underline{X}) - m\right] \xrightarrow{d} V \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(m;\underline{\vartheta})}\right).$$

Απόδειξη. Έστω $g(x) = F^{-1}(x;\underline{\vartheta})$. Αφού η συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$ είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $g\left(1/2\right) = m$. Έπειτα, υπολογίζουμε ότι:

$$x = F\left(g(x);\underline{\vartheta}\right) \quad \Rightarrow \quad g'(x)F'\left(g(x);\underline{\vartheta}\right)) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{f\left(g(x);\underline{\vartheta}\right))} \quad \Rightarrow \quad g'\left(1/2\right) = \frac{1}{f(m;\underline{\vartheta})} \neq 0.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και $g(U_1), g(U_2), \ldots, g(U_n)$ έχουν την ίδια κατανομή, το οποίο συνεπάγεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\text{median}(\underline{X})$ και $g\left(\text{median}(\underline{U})\right)$ έχουν επίσης την ίδια κατανομή. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο δέλτα στην ασυμπτωτική κατανομή του προηγούμενου θεωρήματος, καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left[\text{median}(\underline{X}) - m\right] &\stackrel{d}{=} \sqrt{n}\left[g\left(\text{median}(\underline{U})\right) - g\left(1/2\right)\right] \\ &\xrightarrow{d} g'\left(1/2\right)Y = \frac{1}{f(m;\underline{\vartheta})}Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(m;\underline{\vartheta})}\right).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.18.* Αν $\underline{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{ns})$ και $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_s)$, τότε ισχύει ότι $\underline{X}_n \xrightarrow{\text{a.s.}/p} \underline{X} \;\Leftrightarrow\; X_{nj} \xrightarrow{\text{a.s.}/p} X_j$ για $j = 1, 2, \ldots, s$.

Θεώρημα 3.20.* (Cramér – Wold) Αν $\underline{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{ns})$ και $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_s)$, τότε ισχύει ότι $\underline{X}_n \xrightarrow{d} \underline{X} \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{s} c_j X_{nj} \xrightarrow{d} \sum_{j=1}^{s} c_j X_j \;\forall \underline{c} = (c_1, \ldots, c_s) \in \mathbb{R}^s$.

Ορισμός 3.20.* Ένα τυχαίο διάνυσμα $\underline{X} \in \mathbb{R}^s$ ακολουθεί τη (μη-εκφυλισμένη) *πολυδιάστατη κανονική* κατανομή με διάνυσμα μέσων τιμών $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^s$ και θετικά ορισμένο πίνακα συνδιακύμανσης $\Sigma \in \mathbb{R}^{s\times s}$, δηλαδή $\underline{X} \sim \mathcal{N}_s\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$, αν έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x};\underline{\mu},\Sigma) = (2\pi)^{-s/2}\left|\Sigma\right|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\right\}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^s.$$

Πρόταση 3.19* Αν $\underline{X} \sim \mathcal{N}_s(\underline{\mu}, \Sigma)$, $A \in \mathbb{R}^{d\times s}$ και $\underline{c} \in \mathbb{R}^d$, τότε συμπεραίνουμε ότι $A\underline{X} + \underline{c} \sim \mathcal{N}_d\left(A\underline{\mu} + \underline{c}, A\Sigma A^{\mathrm{T}}\right)$.

Θεώρημα 3.21* (Πολυδιάστατο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) Αν $(\underline{X}_n)_{n\geqslant 1}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων διανυσμάτων με $\mathbb{E}(\underline{X}_1) = \underline{\mu} \in \mathbb{R}^s$ και θετικά ορισμένο πίνακα συνδιακύμανσης $\mathrm{Var}(\underline{X}_1) = \Sigma \in \mathbb{R}^{s\times s}$, τότε ισχύει ότι $\sqrt{n}\left(\overline{\underline{X}}_n - \underline{\mu}\right) \xrightarrow{d} \underline{Y} \sim \mathcal{N}_s\left(\underline{0}, \Sigma\right)$.

Θεώρημα 3.22* (Πολυδιάστατη Μέθοδος Δέλτα) Έστω ότι $r_n\left(\underline{X}_n - \underline{\vartheta}\right) \xrightarrow{d} \underline{Y} \in \mathbb{R}^s$, όπου $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$. Αν η συνάρτηση $\underline{g} : \Theta \to \mathbb{R}^d$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη με Ιακωβιανό πίνακα $\mathcal{J}_{\underline{g}} \in \mathbb{R}^{d\times s}$ και ο πίνακας $\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(\underline{Y})\mathcal{J}_{\underline{g}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ είναι θετικά ορισμένος, τότε έπεται ότι $r_n\left[\underline{g}\left(\underline{X}_n\right) - \underline{g}(\underline{\vartheta})\right] \xrightarrow{d} \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})Y$.

Θεώρημα 3.23* (Πολυδιάστατη Μέθοδος Δέλτα Δεύτερης Τάξης) Θεωρούμε ότι $r_n\left(\underline{X}_n - \underline{\vartheta}\right) \xrightarrow{d} \underline{Y} \in \mathbb{R}^s$, όπου $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$. Αν η συνάρτηση $g : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι 2 φορές συνεχώς διαφορίσιμη με $\nabla_{\underline{\vartheta}}^{\mathrm{T}} g(\underline{\vartheta})\mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(\underline{Y})\nabla_{\underline{\vartheta}} g(\underline{\vartheta}) = 0$ και Εσσιανό πίνακα $\mathcal{H}_g(\underline{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{s\times s}$, τότε $r_n^2\left[g\left(\underline{X}_n\right) - g(\underline{\vartheta})\right] \xrightarrow{d} \frac{1}{2}\underline{Y}^{\mathrm{T}}\mathcal{H}_g(\underline{\vartheta})\underline{Y}$.

Σημείωση 3.22. Συνοψίζοντας, υπάρχει πληθώρα διαθέσιμων μεθόδων για την εύρεση μίας (ισχυρά) συνεπούς εκτιμήτριας $T_n(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$:

i. Οι ορισμοί των συγκλίσεων ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών.

ii. Δείχνοντας ότι η $T_n(\underline{X})$ είναι (ασυμπτωτικά) αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\underline{\vartheta})$ με $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}\left[T_n(\underline{X})\right] = 0$.

iii. Συνδυάζοντας τους νόμους των μεγάλων αριθμών με το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης και την πρόταση 3.16.

iv. Δείχνοντας ότι η $T_n(\underline{X})$ έχει ασυμπτωτική κατανομή μέσω ενός συνδυασμού του ορισμού της σύγκλισης κατά κατανομή, του θεωρήματος Slutsky, του θεωρήματος συνεχούς απεικόνισης, της μεθόδου δέλτα, του κεντρικού οριακού θεωρήματος και του πορίσματος 3.11.

Παράδειγμα 3.32. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Θέλουμε να βρούμε (ισχυρά) συνεπείς εκτιμήτριες του σ^2 και της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu, \sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma}$. Θέλουμε επίσης να δείξουμε ότι $\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.12 (σελίδα 39), γνωρίζουμε ότι η δειγματική διασπορά S_n^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2 και ισχύει ότι $\mathrm{Var}\left(S_n^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.17, η S_n^2 είναι συνεπής εκτιμήτρια του σ^2. Εναλλακτικά, γνωρίζουμε ότι:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2\right).$$

Σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι:

$$\overline{X}_n \overset{\text{a.s.}}{\to} \mu, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \text{Var}(X_1) + [\mathbb{E}(X_1)]^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.16, έπεται ότι $S_n^2 \overset{\text{a.s.}}{\to} 1 \cdot \left[\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \mu^2\right] = \sigma^2$, δηλαδή η S_n^2 είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια του σ^2. Επιπλέον, έπεται ότι η $\frac{\overline{X}_n}{S_n}$ είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της $g(\mu, \sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma}$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \overset{d}{\to} Y \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, καταλήγουμε ότι:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \overset{d}{\to} \frac{1}{\sigma} Y = Z \sim \mathcal{N}(0,1). \quad \square$$

Παράδειγμα 3.33. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X}) = \frac{1}{\overline{X}_n}$ είναι (ισχυρά) συνεπής εκτιμήτρια του λ και να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική κατανομή της. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.24 (σελίδα 50), γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ και $\mathbb{E}\left[T_n(\underline{X})\right] = \frac{n\lambda}{n-1} \to \lambda$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή η $T_n(\underline{X})$ είναι ασυμπτωτική αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[T_n^2(\underline{X})\right] &= n^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{n^2 \lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-3} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{n^2 \lambda^n}{(n-1)!} \frac{(n-3)!}{\lambda^{n-2}} = \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)(n-2)},
\end{aligned}$$

$$\text{Var}\left[T_n(\underline{X})\right] = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2} = \frac{n^2\lambda^2}{(n-2)(n-1)^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.17, η $T_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του λ. Σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι $\overline{X}_n \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda}$. Επομένως, η $T_n(\underline{X})$ είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια του λ, σύμφωνα με την πρόταση 3.16. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \overset{d}{\to} Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right)$, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα. Εφόσον η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (0, \infty)$ με $g'(1/\lambda) = -\lambda^2 \neq 0$, καταλήγουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}) - \lambda\right] \overset{d}{\to} g'(1/\lambda)\, Y = -\lambda^2 Y \sim \mathcal{N}\left(0, \lambda^2\right),$$

σύμφωνα με τη μέθοδο δέλτα. $\square$

Παράδειγμα 3.34. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(k, \lambda)$ με $k > 0$, γνωστό $\lambda > 2$, $f(x;k) = \frac{\lambda k^\lambda}{x^{\lambda+1}}$ και $F(x;k) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\lambda$ για $x \geqslant k$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν η στατιστική συνάρτηση $X_{(1)}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του k και να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική κατανομή της. Γνωρίζουμε ότι:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{n\lambda}, \quad f_{X_{(1)}}(x) = \frac{n\lambda k^{n\lambda}}{x^{n\lambda+1}},$$

δηλαδή $X_{(1)} \sim \text{Pareto}(k, n\lambda)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = n\lambda k^{n\lambda} \int_k^{\infty} \frac{1}{x^{n\lambda}} dx = \frac{n\lambda k^{n\lambda}}{n\lambda - 1} \frac{1}{k^{n\lambda-1}} = \frac{n\lambda k}{n\lambda - 1} \overset{n\to\infty}{\to} k,$$

δηλαδή η $X_{(1)}$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια του k. Επιπλέον, έπεται ότι:

$$\mathbb{E}\left[X_{(1)}^2\right] = n\lambda k^{n\lambda} \int_k^{\infty} \frac{1}{x^{n\lambda-1}} dx = \frac{n\lambda k^{n\lambda}}{n\lambda - 2} \frac{1}{k^{n\lambda-2}} = \frac{n\lambda k^2}{n\lambda - 2},$$

$$\text{Var}\left[X_{(1)}\right] = \frac{n\lambda k^2}{n\lambda - 2} - \frac{n^2\lambda^2 k^2}{(n\lambda - 1)^2} = \frac{n\lambda k^2}{(n\lambda-1)^2(n\lambda-2)} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.17, η $X_{(1)}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του k. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.11, γνωρίζουμε ότι:

$$nF\left[X_{(1)}; k\right] = n\left[1 - \left(\frac{k}{X_{(1)}}\right)^{\lambda}\right] = -nk^{\lambda}\left[\frac{1}{X_{(1)}^{\lambda}} - \frac{1}{k^{\lambda}}\right] \overset{d}{\to} Y \sim \text{Exp}(1).$$

Εφόσον η συνάρτηση $g(x) = x^{-1/\lambda}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (0, \infty)$ με $g'\left(k^{-\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda}k^{\lambda+1} \neq 0$, έπεται ότι:

$$n\left[X_{(1)} - k\right] \overset{d}{\to} -k^{-\lambda} g'\left(k^{-\lambda}\right) Y = \frac{k}{\lambda} Y = V \sim \text{Exp}\left(\lambda/k\right),$$

σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky σε συνδυασμό με τη μέθοδο δέλτα. Εναλλακτικά, για $x \in (0, \infty)$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[n\left(X_{(1)} - k\right) \leqslant x\right] &= F_{X_{(1)}}\left(\frac{x}{n} + k\right) = 1 - \left(\frac{k}{x/n + k}\right)^{n\lambda} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{x/k}{n}\right)^{-n\lambda} \overset{n\to\infty}{\to} 1 - e^{-\lambda x/k},\end{aligned}$$

η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $V \sim \text{Exp}\left(\lambda/k\right)$, οπότε καταλήγουμε ότι $n\left[X_{(1)} - k\right] \overset{d}{\to} V$. □

Παράδειγμα 3.35. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T_n(\underline{X}) = \min\left\{\overline{X}_n, 1 - \overline{X}_n\right\}$ είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(p) = \min\{p, 1-p\}$ και να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική κατανομή της. Σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι $\overline{X}_n \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}(X_1) = p$. Εφόσον η συνάρτηση $g(p) = \min\{p, 1-p\}$ είναι συνεχής στο $\Theta = (0, 1)$, η $T_n(\underline{X})$ είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια της

$g(p)$, σύμφωνα με το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - p\right) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα. Εφόσον η συνάρτηση $g(p) = \min\{p, 1-p\}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη για $p \neq \frac{1}{2}$ με $|g'(p)| = 1$, έπεται ότι:

$$\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}) - \min\{p, 1-p\}\right] \xrightarrow{d} g'(p)\, Y \sim \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right),$$

σύμφωνα με τη μέθοδο δέλτα. Για $p = \frac{1}{2}$, παρατηρούμε ότι:

$$T_n(\underline{X}) - \min\{p, 1-p\} = \min\left\{\overline{X}_n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \overline{X}_n\right\} = -\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right|.$$

Εφόσον η συνάρτηση $g(x) = -|x|$ είναι συνεχής, καταλήγουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}) - \min\{p, 1-p\}\right] = -\sqrt{n}\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| \xrightarrow{d} -|Y|,$$

όπου $Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$, σύμφωνα με το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης. □

3.11 Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Ορισμός 3.21. Η από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ ως συνάρτηση του $\underline{\vartheta}$ καλείται *συνάρτηση πιθανοφάνειας* του δείγματος $\underline{X}$ για το ϑ και συμβολίζεται με $\mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x}) = f(\underline{x}; \underline{\vartheta})$.

Σημείωση 3.23. Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε $\mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \underline{\vartheta})$.

Ερμηνεία: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας εκφράζει το πόσο πιθανό είναι να έχουμε παρατηρήσει το δείγμα $\underline{x}$ ως συνάρτηση της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$. Επομένως, μία ''λογική'' εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$ προκύπτει αν μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας ως προς $\underline{\vartheta}$. Με αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε ως εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου την τιμή του $\underline{\vartheta}$ για την οποία είναι όσο το δυνατόν περισσότερο πιθανό να έχουμε παρατηρήσει το δείγμα $\underline{x}$.

Ορισμός 3.22. Η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ για την οποία μεγιστοποιείται η συνάρτηση πιθανοφάνειας, δηλαδή $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X}) = \arg\max_{\underline{\vartheta} \in \Theta} \mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{X})$, καλείται *εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας* (ΕΜΠ) του $\underline{\vartheta}$.

Σημείωση 3.24.
i. Για μία άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$ μπορεί να μην υπάρχει καμία ΕΜΠ, μπορεί να υπάρχει μοναδική ΕΜΠ ή μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία ΕΜΠ, δηλαδή μπορεί η συνάρτηση πιθανοφάνειας να έχει πολλαπλά ολικά μέγιστα.

ii. Επειδή η συνάρτηση $g(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$, τα σημεία μεγίστου της *συνάρτησης λογαριθμο-πιθανοφάνειας* $\ell(\underline{\vartheta} \mid \underline{x}) = \log \mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$

ταυτίζονται με τα σημεία μεγίστου της συνάρτησης πιθανοφάνειας $\mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$. Για λόγους ευκολίας και αριθμητικής ευστάθειας (τα γινόμενα μετατρέπονται σε αθροίσματα), προτιμάται συνήθως η μεγιστοποίηση της συνάρτησης λογαριθμο-πιθανοφάνειας.

iii. Αν η συνάρτηση λογαριθμο-πιθανοφάνειας $\ell(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$ είναι μερικώς παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Theta_0 \subseteq \Theta$, τότε υποψήφια ολικά μέγιστα της $\ell(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$ προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων $\frac{\partial \ell(\underline{\vartheta}|\underline{x})}{\partial \vartheta_j} = 0$ για $j = 1, 2, \ldots, s$.

Πρόταση 3.20. Αν η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X})$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta}$ και η $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ είναι η μοναδική ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$, τότε $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X}) = \underline{\psi}\,(\underline{T})$ για κάποια συνάρτηση $\underline{\psi}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x}) = f(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = g\,(\underline{T}(\underline{x}); \underline{\vartheta})\, h(\underline{x}).$$

Αφού η συνάρτηση $h(\underline{x})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$, συμπεραίνουμε ότι η μοναδική ΕΜΠ $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$ είναι η τιμή του $\underline{\vartheta}$ που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $g\,(\underline{T}(\underline{x}); \underline{\vartheta})$. Επομένως, καταλήγουμε ότι η ΕΜΠ $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$ εξαρτάται από το δείγμα $\underline{X}$ μέσω της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$. □

Πρόταση 3.21. Έστω δείγμα $\underline{X}$ από κατανομή που ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας της ανισότητας Cramér - Rao. Αν η πληροφορία κατά Fisher $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)$ είναι παραγωγίσιμη στο Θ και η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ είναι μία αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ, τότε η $T(\underline{X})$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta) = \vartheta$, γνωρίζουμε ότι $\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)\,[T(\underline{X}) - \vartheta]$ $\forall \vartheta \in \Theta$. Αφού η συνάρτηση score είναι η παράγωγος της συνάρτησης λογαριθμο-πιθανοφάνειας ως προς ϑ, θέτοντας την ίση με το 0 και λύνοντας την εξίσωση οδηγεί στην εύρεση της ΕΜΠ του ϑ. Αφού $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) \in (0, \infty)$, έπεται ότι $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = T(\underline{X})$. Έπειτα, υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \mathcal{I}'_{\underline{X}}(\vartheta)\,[T(\underline{X}) - \vartheta] - \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta), \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\widehat{\vartheta}) = -\mathcal{I}_{\underline{X}}(\widehat{\vartheta}) < 0.$$

Συνεπώς, η αποτελεσματική εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ του ϑ είναι κι η ΕΜΠ του ϑ. □

Σημείωση 3.25. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, δηλαδή η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$ δεν είναι υποχρεωτικά και αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$. Μάλιστα, υπάρχουν περιπτώσεις που η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$ δεν είναι καν α.ε. του $\underline{\vartheta}$.

Πρόταση 3.22. (Ιδιότητα του Αναλλοίωτου) Αν η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ είναι η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$, τότε η $\underline{g}(\widehat{\underline{\vartheta}})$ είναι η ΕΜΠ της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta})$, δηλαδή ισχύει ότι $\widehat{\underline{g}(\underline{\vartheta})} = \underline{g}(\widehat{\underline{\vartheta}})$.

Απόδειξη. Έστω ότι η συνάρτηση $\underline{g}$ είναι 1-1. Ορίζουμε:

$$\mathcal{L}^*(\underline{\eta} \mid \underline{x}) = \mathcal{L}\left(\underline{g}^{-1}(\underline{\eta}) \mid \underline{x}\right) = \mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x}).$$

Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{L}^*\left(\underline{g}(\widehat{\underline{\vartheta}}) \mid \underline{x}\right) = \mathcal{L}\left(\underline{g}^{-1}(\underline{g}(\widehat{\underline{\vartheta}})) \mid \underline{x}\right) = \mathcal{L}\left(\widehat{\underline{\vartheta}} \mid \underline{x}\right).$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\underline{\eta}} = \widehat{\underline{g}(\underline{\vartheta})} = \underline{g}(\widehat{\underline{\vartheta}})$. Η απόδειξη για τη γενική περίπτωση απαιτεί την έννοια της επαγομένης συνάρτησης πιθανοφάνειας και βρίσκεται στο σύγγραμμα των Casella και Berger, παράγραφος 7.2. □

Παράδειγμα 3.36. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda \mid \underline{x}) = \log \mathcal{L}(\lambda \mid \underline{x}) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda}(\underline{x}) = \frac{1}{\overline{x}}, \quad \frac{\partial^2 \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\lambda \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0, \infty)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\lambda}(\underline{X}) = \frac{1}{\overline{X}}$ είναι η ΕΜΠ του λ. □

Παράδειγμα 3.37. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bin}(N, p)$ με γνωστό N. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(p \mid \underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log \binom{N}{x_i} + \log p \sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-p)\left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

$$\frac{\partial \ell(p \mid \underline{x})}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}\left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(1-\widehat{p}) \sum_{i=1}^{n} x_i = \widehat{p}\left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \quad \Rightarrow \quad \widehat{p}(\underline{x}) = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{N}\overline{x},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(p \mid \underline{x})}{\partial p^2} = -\frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{(1-p)^2}\left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) < 0, \quad \forall p \in (0,1),$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(p \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0, 1)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{p}(\underline{X}) = \frac{1}{N}\overline{X}$ είναι η ΕΜΠ του p. Αν $x_1 = \cdots = x_n = 0$, παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(p \mid \underline{x}) = (1-p)^{nN}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Theta = (0,1)$ και δεν έχει κανένα μέγιστο, οπότε δεν υπάρχει η ΕΜΠ του p. Αν $x_1 = \cdots = x_n = N$, παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(p \mid \underline{x}) = p^{nN}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα στο $\Theta = (0,1)$ και δεν έχει κανένα μέγιστο, οπότε δεν υπάρχει η ΕΜΠ του p. □

Παράδειγμα 3.38. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \vartheta)$ με γνωστό μ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$\frac{\partial \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta} = -\frac{n}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vartheta}(\underline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta^2} = \frac{n}{2\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = -\frac{n}{2\vartheta^2}\left[\frac{2}{n\vartheta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - 1\right],$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\widehat{\vartheta} \mid \underline{x})}{\partial \vartheta^2} = -\frac{n}{2\widehat{\vartheta}^2} < 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid \underline{x})$ έχει μέγιστο στο $\widehat{\vartheta}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \lim_{\vartheta\to\infty}(2\pi\vartheta)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} = 0,$$

$$\lim_{\vartheta\to 0^+}\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \lim_{\vartheta\to 0^+}(2\pi\vartheta)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} = 0.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Αν $x_1 = \cdots = x_n = \mu$, παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = (2\pi\vartheta)^{-n/2}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Theta = (0,\infty)$ και δεν έχει κανένα μέγιστο. Όμως ισχύει ότι $\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = \mu) = 0$, δηλαδή η ΕΜΠ του ϑ υπάρχει και είναι μοναδική με πιθανότητα 1. □

Παράδειγμα 3.39. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \frac{1}{\vartheta^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(x_i) = \frac{1}{\vartheta^n}\mathbb{1}_{[0,\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) = \begin{cases}\vartheta^{-n}, & \vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \vartheta < x_{(n)}\end{cases}.$$

Για $\vartheta \geqslant x_{(n)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(n)}$. □

Παράδειγμα 3.40. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(2\vartheta, 3\vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) &= \frac{1}{\vartheta^n}\mathbb{1}_{[2\vartheta,3\vartheta]}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{1}_{[2\vartheta,3\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) = \frac{1}{\vartheta^n}\mathbb{1}_{[2\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{1}_{(-\infty,3\vartheta]}\left(x_{(n)}\right) \\ &= \begin{cases}\vartheta^{-n}, & 2\vartheta \leqslant x_{(1)} \text{ και } 3\vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases} = \begin{cases}\vartheta^{-n}, & \frac{1}{3}x_{(n)} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{1}{2}x_{(1)} \\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}.\end{aligned}$$

Για $\vartheta \in \left[\frac{1}{3}x_{(n)}, \frac{1}{2}x_{(1)}\right]$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{1}{3}X_{(n)}$. □

Παράδειγμα 3.41. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, \vartheta+1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) &= \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}\left(x_{(n)}\right) = \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{1}_{(-\infty,\vartheta+1]}\left(x_{(n)}\right)\\ &= \begin{cases}1, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \text{ και } \vartheta \geqslant x_{(n)}-1\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases} = \begin{cases}1, & x_{(n)}-1 \leqslant \vartheta \leqslant x_{(1)}\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}.\end{aligned}$$

Για $\vartheta \in \left[x_{(n)}-1, x_{(1)}\right]$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι σταθερή, οπότε έχει άπειρα ολικά μέγιστα $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) \in \left[X_{(n)}-1, X_{(1)}\right]$. □

Σημείωση 3.26. Στην περίπτωση διανυσματικής παραμέτρου $\underline{\vartheta} \in \mathbb{R}^2$, μπορούμε να δοκιμάσουμε να κάνουμε διαδοχική μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας ως προς κάθε άγνωστη παράμετρο χωριστά ως εξής:

$$\max_{(\vartheta_1,\vartheta_2)\in\Theta} \mathcal{L}(\vartheta_1,\vartheta_2 \mid \underline{x}) = \max_{\vartheta_2\in\Theta_2}\left\{\max_{\vartheta_1\in\Theta_1}\mathcal{L}(\vartheta_1,\vartheta_2 \mid \underline{x})\right\}.$$

Αυτή η μέθοδος βέβαια μπορεί να οδηγήσει στην επίλυση του αρχικού προβλήματος μεγιστοποίησης μόνο αν η μεγιστοποίηση ως προς ϑ_1 οδηγήσει σε ολικό μέγιστο το οποίο δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ_2.

Παράδειγμα 3.42. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vartheta_1,\vartheta_2 \mid \underline{x}) &= \frac{1}{(\vartheta_2-\vartheta_1)^n}\mathbb{1}_{[\vartheta_1,\infty)}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{1}_{(-\infty,\vartheta_2]}\left(x_{(n)}\right)\\ &= \begin{cases}(\vartheta_2-\vartheta_1)^{-n}, & \vartheta_1 \leqslant x_{(1)} \text{ και } \vartheta_2 \geqslant x_{(n)}\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}.\end{aligned}$$

Για $(\vartheta_1,\vartheta_2) \in \left(-\infty, x_{(1)}\right] \times \left[x_{(n)}, \infty\right)$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα ως προς ϑ_1 και γνησίως φθίνουσα ως προς ϑ_2, οπότε έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$. □

Παράδειγμα 3.43. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ με $f(x;\lambda,k) = \lambda e^{-\lambda(x-k)}$ για $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{R}$ και $x \geqslant k$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\lambda, k \mid \underline{x}) = \lambda^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i + n\lambda k\right\}\mathbb{1}_{[k,\infty)}\left(x_{(1)}\right).$$

Αρχικά, σταθεροποιούμε το λ και μεγιστοποιούμε ως προς k. Για $k \leqslant x_{(1)}$, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα ως προς k, οπότε έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{k}(\underline{X}) = X_{(1)}$. Στη συνέχεια, μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση $\ell\left(\lambda, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)$ ως προς λ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell\left(\lambda, x_{(1)} \mid \underline{x}\right) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + n\lambda x_{(1)},$$

$$\frac{\partial \ell\left(\lambda, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i + n x_{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda}(\underline{x}) = \frac{1}{\overline{x} - x_{(1)}},$$

$$\frac{\partial^2 \ell\left(\lambda, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell\left(\lambda, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)$ είναι γνησίως κοίλη ως προς λ στο $(0, \infty)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \left(\frac{1}{\overline{X} - X_{(1)}}, X_{(1)}\right)$ είναι η ΕΜΠ του $\widehat{\vartheta} = (\lambda, k)$. Αν $x_1 = \cdots = x_n$, παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}\left(\lambda, x_{(1)} \mid \underline{x}\right) = \lambda^n$, δηλαδή η συνάρτηση $\mathcal{L}\left(\lambda, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς λ στο διάστημα $(0, \infty)$ και δεν έχει κανένα μέγιστο. Όμως ισχύει ότι $\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n) = 0$, δηλαδή η ΕΜΠ του λ υπάρχει και είναι μοναδική με πιθανότητα 1. $\square$

Παράδειγμα 3.44. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ΕΜΠ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta}) = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{\vartheta_2}}$ και να συγκρίνουμε το ΜΤΣ της ΕΜΠ του ϑ_2 με το ΜΤΣ της ΑΕΕΔ του ϑ_2. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid \underline{x}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\vartheta_2 - \frac{1}{2\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta_1)^2.$$

Αρχικά, σταθεροποιούμε το ϑ_2 και μεγιστοποιούμε ως προς ϑ_1:

$$\frac{\partial \ell(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid \underline{x})}{\partial \vartheta_1} = \frac{1}{\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vartheta}_1(\underline{x}) = \overline{x},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid \underline{x})}{\partial \vartheta_1^2} = -\frac{n}{\vartheta_2} < 0, \quad \forall \vartheta_1 \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta_1, \vartheta_2 \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη ως προς ϑ_1 και έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\vartheta}_1$. Στη συνέχεια, μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση $\ell(\overline{x}, \vartheta_2 \mid \underline{x})$ ως προς ϑ_2. Υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\partial \ell(\overline{x}, \vartheta_2 \mid \underline{x})}{\partial \vartheta_2} = -\frac{n}{2\vartheta_2} + \frac{1}{2\vartheta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vartheta}_2(\underline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\overline{x}, \vartheta_2 \mid \underline{x})}{\partial \vartheta_2^2} = \frac{n}{2\vartheta_2^2} - \frac{1}{\vartheta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = -\frac{n}{2\vartheta_2^2}\left[\frac{2}{n\vartheta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 - 1\right],$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\widehat{\vartheta}_1, \widehat{\vartheta}_2 \mid \underline{x})}{\partial \vartheta_2^2} = -\frac{n}{2\widehat{\vartheta}_2^2} < 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\overline{x}, \vartheta_2 \mid \underline{x})$ έχει μέγιστο στο $\widehat{\vartheta}_2$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{\vartheta_2 \to \infty} \mathcal{L}\left(\overline{x}, \vartheta_2 \mid \underline{x}\right) = \lim_{\vartheta_2 \to \infty} (2\pi\vartheta_2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\vartheta_2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \right\} = 0,$$

$$\lim_{\vartheta_2 \to 0^+} \mathcal{L}\left(\overline{x}, \vartheta_2 \mid \underline{x}\right) = \lim_{\vartheta_2 \to 0^+} (2\pi\vartheta_2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\vartheta_2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \right\} = 0.$$

Επομένως, η $\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, \frac{n-1}{n} S^2\right)$ είναι η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου, η στατιστική συνάρτηση $g(\widehat{\underline{\vartheta}}) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{\overline{X}}{S}$ είναι η ΕΜΠ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta}) = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{\vartheta_2}}$. Για να γίνει κατανοητό πόσο σημαντική είναι αυτή η ιδιότητα της ΕΜΠ, αρκεί να αναλογιστούμε πόσο περίπλοκη θα ήταν η διαδικασία για την εύρεση της ΑΕΕΔ της $g(\underline{\vartheta})$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.26 (σελίδα 51), η δειγματική διασπορά S^2 είναι η ΑΕΕΔ του ϑ_2. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.12 (σελίδα 39), γνωρίζουμε ότι $\text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(S^2\right) = \operatorname{Var}\left(S^2\right) = \frac{2}{n-1}\vartheta_2^2$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{n} S^2\right) = \frac{n-1}{n}\vartheta_2, \quad \text{bias}_{\vartheta_2}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) = \mathbb{E}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) - \vartheta_2 = -\frac{1}{n}\vartheta_2,$$

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{n-1}{n} S^2\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{2}{n-1}\vartheta_2^2 = \frac{2(n-1)}{n^2}\vartheta_2^2,$$

$$\text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) = \operatorname{Var}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) + \text{bias}^2_{\vartheta_2}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) = \frac{2n-1}{n^2}\vartheta_2^2.$$

Συγκρίνουμε τα ΜΤΣ των 2 εκτιμητριών ως εξής:

$$\text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(\widehat{\vartheta}_2\right) < \text{ΜΤΣ}_{\vartheta_2}\left(S^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad -3n+1 < 0.$$

Άρα η μεροληπτική ΕΜΠ του ϑ_2 έχει μικρότερο ΜΤΣ από την ΑΕΕΔ του ϑ_2. □

Θεώρημα 3.24.* Έστω δείγμα $\underline{X}$ με από κοινού συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας $f(\underline{x};\vartheta)$ για $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και $\underline{x} \in S$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες ομαλότητας:

I. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

II. Το στήριγμα $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x};\vartheta) > 0\}$ δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ.

III. $\frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\underline{x};\vartheta) < \infty \ \forall \underline{x} \in S$ και $\forall \vartheta \in \Theta$.

IV. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας $\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{X})$ έχει μοναδικό μέγιστο $\widehat{\vartheta}_n(\underline{X})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

V. Η παράμετρος ϑ είναι *ταυτοποιήσιμη*, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος είναι 1-1 ως προς ϑ.

Τότε, η ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}_n(\underline{X})$ του ϑ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ.

Θεώρημα 3.25.* Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες επιπλέον συνθήκες ομαλότητας:

VI. $\frac{\partial^3}{\partial \vartheta^3} f(\underline{x}; \vartheta) < \infty \ \forall \underline{x} \in S$ και $\forall \vartheta \in \Theta$.

VII. $\int_S \frac{\partial^3}{\partial \vartheta^3} f(\underline{x}; \vartheta) d\underline{x} = \frac{\partial^3}{\partial \vartheta^3} \int_S f(\underline{x}; \vartheta) d\underline{x} = 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$.

VIII. $\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) \in (0, \infty) \ \forall \vartheta \in \Theta$.

IX. Για κάθε $\vartheta \in \Theta$, υπάρχει $\delta_\vartheta > 0$ και συνάρτηση $M(\underline{x}, \vartheta)$ με $\mathbb{E}_\vartheta \left[M(\underline{X}, \vartheta) \right] < \infty$ τέτοια ώστε:

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_*^3} \log f(\underline{x}; \vartheta_*) \right| \leqslant M(\underline{x}, \vartheta), \quad \forall \underline{x} \in S, \quad \forall \vartheta_* \in [\vartheta - \delta_\vartheta, \vartheta + \delta_\vartheta].$$

Τότε, ισχύει ότι $\sqrt{n} \left(\widehat{\vartheta}_n - \vartheta \right) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N} \left(0, \mathcal{I}_{X_1}^{-1}(\vartheta) \right)$, δηλαδή η ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}_n(\underline{X})$ του ϑ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ.

Σημείωση 3.27.* Έστω ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη μονοπαραμετρική ΕΟΚ με $f(\underline{x}; \vartheta) = h(\underline{x}) e^{Q(\vartheta) T(\underline{x}) - A(\vartheta)}$. Αν ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $Q : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $Q'(\vartheta) \neq 0 \ \forall \vartheta \in \Theta$, τότε οι συνθήκες ομαλότητας I-III και VI-VIII ικανοποιούνται, δηλαδή αρκεί να ελέγξουμε την ισχύ των συνθηκών IV, V και IX.

Σημείωση 3.28. Παρατηρούμε ότι η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$ έχει πολλές "καλές" ιδιότητες κάτω από προϋποθέσεις, ειδικά για μεγάλα δείγματα. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη, ασυμπτωτικά αποτελεσματική, συνεπής, συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης και κατέχει την ιδιότητα του αναλλοίωτου, σε αντίθεση με την ΑΕΕΔ του $\underline{\vartheta}$. Ενδεικτικά, στον πίνακα 3.4 συνοψίζουμε τις ΕΜΠ των παραμέτρων κάποιων γνωστών κατανομών.

Bernoulli(p)	$\overline{X}$
Poisson(λ)	
Bin(N, p) με γνωστό N	$\overline{X}/N$
Exp(λ)	$1/\overline{X}$
Gamma(k, λ) με γνωστό k	$k/\overline{X}$
Beta($\vartheta, 1$)	$-n/\sum_{i=1}^n \log X_i$
Beta($1, \vartheta$)	$-n/\sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ με γνωστό μ	$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2/n$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\left(\overline{X}, (n-1)S^2/n\right)$
$\mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2)$	$\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$

Πινακας 3.4: Σύνοψη Εκτιμητριών Μέγιστης Πιθανοφάνειας

3.12 Εκτιμήτριες Μεθόδου Ροπών

Ορισμός 3.23. Έστω δείγμα $\underline{X}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$. Για $k = 1, 2, \ldots$, ορίζουμε τις ακόλουθες ποσότητες:

i. *Θεωρητική (ή πληθυσμιακή) ροπή* τάξης k: $\mu_k = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}(X_1^k)$.

ii. *Δειγματική ροπή* τάξης k: $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$.

Για $k = 2, 3, \ldots$, ορίζουμε τις εξής επιπλέον ποσότητες:

iii. *Θεωρητική (ή πληθυσμιακή) κεντρική ροπή* τάξης k: $\mu_k^* = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[(X_1 - \mu_1)^k\right]$.

iv. *Δειγματική κεντρική ροπή* τάξης k: $M_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^k$.

Μέθοδος των Ροπών: Σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(X_1^k\right) = \mu_k,$$

$$M_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^k \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[(X_1 - \mu_1)^k\right] = \mu_k^*.$$

Θεωρώντας οποιεσδήποτε από τις εξισώσεις $M_k = \mu_k$ για $k = 1, 2, \ldots$ και $M_k^* = \mu_k^*$ για $k = 2, 3, \ldots$, ώστε να πάρουμε ένα σύστημα συνολικά s εξισώσεων, το οποίο μπορούμε να λύσουμε ως προς την άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$, καταλήγουμε σε μία *ροποεκτιμήτρια* $\widetilde{\underline{\vartheta}}(\underline{X})$ του $\underline{\vartheta}$. Προφανώς, η ροποεκτιμήτρια δεν είναι μοναδική, αφού εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος εξισώσεων.

Σημείωση 3.29. Φτιάχνουμε ένα σύστημα εξισώσεων ξεκινώντας από τις ροπές χαμηλότερης τάξης, οι οποίες θεωρητικά είναι πιο εύκολα υπολογίσιμες. Συνήθως δουλεύουμε με τις κεντρικές ροπές, αφού ισχύει ότι $\mu_2^* = \mathrm{Var}_{\underline{\vartheta}}(X_1)$, η τιμή της οποίας είναι πιο άμεσα γνωστή από την τιμή της ροπής $\mu_2 = \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left(X_1^2\right)$. Αν η θεωρητική ροπή πρώτης τάξης μ_1 δεν είναι γνωστή, τότε αντικαθίσταται από την αντίστοιχη δειγματική ροπή $M_1 = \overline{X}$. Αν οι θεωρητικές ροπές μ_k και μ_k^* δεν εξαρτώνται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$ για κάποιο k, τότε παραλείπουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις και συνεχίζουμε με τις ροπές της επόμενης τάξης.

Παράδειγμα 3.45. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\lambda}(\underline{X}) = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η ροποεκτιμήτρια του λ ταυτίζεται με την ΕΜΠ του λ. □

Παράδειγμα 3.46. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \vartheta)$ με γνωστό μ. Παρατηρούμε ότι η θεωρητική ροπή πρώτης τάξης $\mu_1 = \mu$ δεν εξαρτάται από τη τιμή του ϑ, οπότε την παραλείπουμε. Εξισώνουμε τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης:

$$\mu_2^* = M_2^* \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η ροποεκτιμήτρια του ϑ ταυτίζεται με την ΕΜΠ του ϑ. □

Παράδειγμα 3.47. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta_1,\vartheta_2)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}_1(\underline{X}) = \overline{X},$$

$$\mu_2^* = M_2^* \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}_2(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η ροποεκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$ ταυτίζεται με την ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$. □

Παράδειγμα 3.48. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{Gamma}(k,\lambda)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{\lambda} = \overline{X},$$

$$\mu_2^* = M_2^* \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{\lambda^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda}\overline{X} = \frac{n-1}{n}S^2 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\lambda}(\underline{X}) = \frac{n\overline{X}}{(n-1)S^2} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{k}(\underline{X}) = \overline{X}\widetilde{\lambda}(\underline{X}) = \frac{n\overline{X}^2}{(n-1)S^2}.$$

Σε αντίθεση με την ΕΜΠ του $\underline{\vartheta} = (k,\lambda)$, η οποία δεν έχει κλειστή μορφή και μπορεί να υπολογιστεί μόνο αριθμητικά, παρατηρούμε ότι η ροποεκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$ είναι αρκετά εύκολα υπολογίσιμη. Παρατηρούμε όμως ότι δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $\underline{T}(\underline{X}) = (\sum_{i=1}^{n}X_i, \sum_{i=1}^{n}\log X_i)$ για το $\underline{\vartheta}$. □

Παράδειγμα 3.49. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{U}(0,\vartheta)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta}{2} = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}(\underline{X}) = 2\overline{X}.$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η ροποεκτιμήτρια του ϑ δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ για το ϑ, αφού οι ροποεκτιμήτριες είναι πάντα συναρτήσεις μόνο των δειγματικών ροπών. □

Παράδειγμα 3.50. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{U}(-\vartheta,\vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Παρατηρούμε ότι η θεωρητική ροπή πρώτης τάξης $\mu_1 = 0$ δεν εξαρτάται από τη τιμή του ϑ, οπότε την παραλείπουμε. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{x^2}{2\vartheta} dx = \frac{\vartheta^2}{3}.$$

Εξισώνουμε τις ροπές δεύτερης τάξης:

$$\mu_2 = M_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta^2}{3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}(\underline{X}) = \sqrt{3M_2(\underline{X})}. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.51. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\overline{X},$$

$$\mu_2^* = M_2^* \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2}{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2 - \vartheta_1 = 2S\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}} \quad \Rightarrow$$

$$\widetilde{\vartheta}_1(\underline{X}) = \overline{X} - S\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}}, \quad \widetilde{\vartheta}_2(\underline{X}) = \overline{X} + S\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.52. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $f(x; \lambda, k) = \lambda e^{-\lambda(x-k)}$ για $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{R}$ και $x \geqslant k$. Θέτουμε $Y_i = X_i - k$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}(X_1 - k \leqslant y) = F(y + k; \lambda, k), \quad f_{Y_1}(y) = f(y + k; \lambda, k) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y > 0,$$

δηλαδή $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως, έπεται ότι:

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(Y_1) + k = \frac{1}{\lambda} + k, \quad \mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(Y_1) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} + k = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad k = \overline{X} - \frac{1}{\lambda},$$

$$\mu_2^* = M_2^* \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\widetilde{\lambda}(\underline{X}) = \frac{1}{S}\sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{k}(\underline{X}) = \overline{X} - S\sqrt{\frac{n-1}{n}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.53. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bin}(N, p)$. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης και τις κεντρικές ροπές δεύτερης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad Np = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\overline{X}}{p},$$

$$\mu_2^* = M_2^* \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$Np(1-p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{p}(\underline{X}) = 1 - \frac{n-1}{n\overline{X}}S^2 \quad \Rightarrow$$

$$\widetilde{N}(\underline{X}) = \frac{n\overline{X}^2}{n\overline{X} - (n-1)S^2}.$$

Για να αποτελεί η στατιστική συνάρτηση $(\widetilde{N}, \widetilde{p})$ εκτιμήτρια του (N, p), θα πρέπει να παίρνει τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο $\Theta = \mathbb{N} \times (0,1)$ και να συμφωνεί με το στήριγμα της κατανομής του δείγματος. Για τον λόγο αυτό, θέτουμε τους εξής περιορισμούς:

- $(n-1)S^2 < n\overline{X}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\widetilde{p}(\underline{X}) \in (0,1)$,
- $\widetilde{N}(\underline{X}) \in \mathbb{N}$ και $\widetilde{N}(\underline{X}) \geqslant X_{(n)}$ το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$\widetilde{N}(\underline{X}) = \max\left\{\left\lfloor \frac{n\overline{X}^2}{n\overline{X} - (n-1)S^2} \right\rfloor, X_{(n)}\right\}. \quad \square$$

Σημείωση 3.30. Παρότι οι ροποεκτιμήτριες είναι συνήθως πιο εύκολα υπολογίσιμες σε σύγκριση με εκτιμήτριες άλλων ειδών, στερούνται κάποιων "καλών" ιδιοτήτων. Για παράδειγμα, δεν είναι απαραίτητα συναρτήσεις κάποιας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης και δεν παίρνουν εγγυημένα τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο.

Κεφάλαιο 4

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

4.1 Εισαγωγή

Για δεδομένο δείγμα $\underline{x}$ από κατανομή με άγνωστη παράμετρο ϑ έχουμε μάθει να υπολογίζουμε μία σημειακή εκτίμηση του ϑ, όπως η ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}(\underline{x})$, η ΑΕΕΔ $\delta(\underline{x})$, η αποτελεσματική εκτιμήτρια $T(\underline{x})$ ή η ροποεκτιμήτρια $\widetilde{\vartheta}(\underline{x})$. Οι τιμές αυτές αποτελούν κάποιες "καλές" εκτιμήσεις της πραγματικής τιμής του ϑ, σύμφωνα με τα κριτήρια που μελετήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, ο απλός υπολογισμός μίας σημειακής εκτίμησης του ϑ δε δίνει καμία πληροφορία σχετικά με την αβεβαιότητα που έχουμε για τη σημειακή εκτίμησή μας, δηλαδή κατά πόσο θα μπορούσε να απέχει η πραγματική τιμή του ϑ από τη σημειακή εκτίμηση που υπολογίσαμε από το δείγμα μας. Επομένως, οδηγούμαστε στην ιδέα της κατασκευής ενός διαστήματος γύρω από τη σημειακή εκτίμηση μέσα στο οποίο να περιέχεται με κάποια δεδομένη "βεβαιότητα" η πραγματική τιμή του ϑ.

Ορισμός 4.1. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, θεωρούμε ένα τυχαίο διάστημα της μορφής $\mathcal{I}_{g(\underline{\vartheta});1-\alpha}(\underline{X}) = [L(\underline{X}), U(\underline{X})]$ τέτοιο ώστε:

$$\inf_{\underline{\vartheta}\in\Theta} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}), U(\underline{X}) \geqslant g(\underline{\vartheta})\right] = \inf_{\underline{\vartheta}\in\Theta} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})\right] = 1-\alpha,$$

το οποίο καλείται $100(1-\alpha)\%$ *διάστημα εμπιστοσύνης* (ΔΕ) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$. Η ποσότητα $1-\alpha$ καλείται *συντελεστής εμπιστοσύνης* του ΔΕ.

Ερμηνεία: Έστω ότι επιλέγουμε $\alpha = 0.05$, συλλέγουμε ένα δείγμα $\underline{x}$ και κατασκευάζουμε με βάση αυτό ένα 95% ΔΕ $\mathcal{I}_{\vartheta;0.95}(\underline{x}) = [0.9, 1.2]$ για το ϑ. Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ότι η πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου ϑ ανήκει στο διάστημα $[0.9, 1.2]$ με πιθανότητα 95%. Όμως, αυτή η ερμηνεία του ΔΕ είναι **λανθασμένη**. Στην κλασική στατιστική, η παράμετρος ϑ θεωρείται ότι είναι μία άγνωστη σταθερά, οπότε είτε θα ανήκει είτε δε θα ανήκει στο διάστημα $[0.9, 1.2]$. Εφόσον το ϑ δεν είναι τυχαία μεταβλητή, δεν μπορούμε να προσδώσουμε πιθανότητα στο ενδεχόμενο $0.9 \leqslant \vartheta \leqslant 1.2$. Κάποιες σωστές ερμηνείες ενός 95% ΔΕ για το ϑ περιγράφονται ακολούθως.

Αν επαναλαμβάναμε K φορές τη διαδικασία συλλογής του δείγματος $\underline{X}$ και για καθένα από αυτά τα δείγματα $\underline{x}_k$ επαναλαμβάναμε τη διαδικασία υπολογισμού του 95% ΔΕ για το ϑ, τότε το 95% από αυτά τα ΔΕ θα περιείχαν την πραγματική τιμή του ϑ. Με άλλα λόγια, το διάστημα είναι αυτό που μεταβάλλεται, εφόσον εξαρτάται από το παρατηρούμενο δείγμα, και όχι η άγνωστη παράμετρος, η οποία παραμένει πάντα σταθερή. Αυτή η ερμηνεία του ΔΕ απορρέει από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών ως εξής:

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{[L(\underline{x}_k),U(\underline{x}_k)]}(\vartheta) \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathbb{E}_\vartheta\left[\mathbb{1}_{[L(\underline{X}),U(\underline{X})]}(\vartheta)\right] = \mathbb{P}_\vartheta\left[L(\underline{X}) \leqslant \vartheta \leqslant U(\underline{X})\right],$$

όπου $\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{[L(\underline{x}_k),U(\underline{x}_k)]}(\vartheta)$ είναι ακριβώς το ποσοστό των παρατηρούμενων ΔΕ που θα περιείχαν την πραγματική τιμή του ϑ. Παρατηρούμε ότι το 5% των ΔΕ που θα κατασκευάζαμε με αυτόν τον τρόπο δε θα περιείχαν εξ ορισμού την πραγματική τιμή του ϑ.

Υπάρχει 95% πιθανότητα ένα ΔΕ που θα υπολογιστεί από ένα μελλοντικό δείγμα $\underline{X}$ να περιέχει την πραγματική τιμή του ϑ. Σημειώνουμε ότι αυτή η πιθανοτική ερμηνεία αφορά και πάλι το ΔΕ και όχι την άγνωστη παράμετρο ϑ, η οποία παραμένει σταθερή. Από τη στιγμή που δεν έχουμε παρατηρήσει ακόμα το δείγμα με βάση το οποίο θα κατασκευάσουμε το ΔΕ, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι τυχαίο. Επομένως, το ΔΕ το οποίο θα κατασκευάσουμε με βάση αυτό θα είναι κι αυτό τυχαίο και μπορούμε να του αποδώσουμε την προηγούμενη πιθανοτική ερμηνεία.

4.2 Μέθοδος Αντιστρεπτής Ποσότητας

Ορισμός 4.2. Μία τυχαία μεταβλητή $Q\left(\underline{X}, g(\underline{\vartheta})\right)$ καλείται *αντιστρεπτή ποσότητα* για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$ αν εξαρτάται από την τιμή της $g(\underline{\vartheta})$ αλλά η κατανομή της δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$.

Σημείωση 4.1. Παρατηρούμε ότι η αντιστρεπτή ποσότητα Q δεν καθιστά στατιστική συνάρτηση, εφόσον εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου $\underline{\vartheta}$. Η μέθοδος αντιστρεπτής ποσότητας στοχεύει στην κατασκευή ΔΕ για τα οποία η πιθανότητα $\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})\right]$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$. Επομένως, έπεται ότι:

$$\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})\right] = 1-\alpha, \quad \forall \underline{\vartheta} \in \Theta.$$

Μέθοδος Αντιστρεπτής Ποσότητας $\to$ Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Προσδιορίζουμε μία "καλή" εκτιμήτρια $T(\underline{X})$ της $g(\underline{\vartheta})$ ή μία επαρκή στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ για το $\underline{\vartheta}$.
2. Προσδιορίζουμε την κατανομή της $T(\underline{X})$.
3. Προσδιορίζουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα $Q\left(\underline{X}, g(\underline{\vartheta})\right)$. Η μέθοδος προσδιορισμού κατάλληλης Q εξαρτάται από την κατανομή της $T(\underline{X})$.
4. Προσδιορίζουμε σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε $\mathbb{P}(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = 1 - \alpha$.
5. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $g(\underline{\vartheta})$ και καταλήγουμε σε μία ανισότητα της μορφής $L(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U(\underline{X})$. Το διάστημα $[L(\underline{X}), U(\underline{X})]$ είναι ένα $100(1-\alpha)\%$ ΔΕ για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$.

Ορισμός 4.3. Αν $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $X \sim \chi^2_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ορίζουμε:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/\nu}} \sim t_\nu.$$

Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την κατανομή *Student's t* με ν βαθμούς ελευθερίας.

Ορισμός 4.4. Αν $X \sim \chi^2_{\nu_1}$ και $Y \sim \chi^2_{\nu_2}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ορίζουμε:

$$F = \frac{X/\nu_1}{Y/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}.$$

Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή F ακολουθεί την κατανομή *F του Snedecor* με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας.

Πρόταση 4.1. i. Αν $X_n \sim t_n$, τότε $X_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

ii. Αν $T \sim t_\nu$, τότε $T^2 \sim F_{1,\nu}$.

iii. Αν $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$, τότε $F^{-1} \sim F_{\nu_2,\nu_1}$.

Απόδειξη. i. Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή $Y \sim \chi^2_n$ η οποία είναι ανεξάρτητη από την τυχαία μεταβλητή $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Τότε, υπάρχουν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim \chi^2_1$ τέτοιες ώστε οι τυχαίες μεταβλητές Y και $\sum_{i=1}^n Y_i$ να είναι ισόνομες. Αφού $\mathbb{E}(Y_1) = 1$, έπεται ότι $\overline{Y} \xrightarrow{p} 1$, σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι:

$$X_n \stackrel{d}{=} \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \stackrel{d}{=} \frac{Z}{\sqrt{\overline{Y}}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

σύμφωνα με το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης και το θεώρημα Slutsky.

ii. Θεωρούμε τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $X \sim \chi^2_\nu$.

Τότε, οι τυχαίες μεταβλητές T και $\frac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$ είναι ισόνομες. Αφού $Z^2 \sim \chi^2_1$, έπεται ότι:

$$T^2 \overset{d}{=} \frac{Z^2}{X/\nu} \sim F_{1,\nu}.$$

iii. Θεωρούμε τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X \sim \chi^2_{\nu_1}$ και $Y \sim \chi^2_{\nu_2}$. Τότε, οι τυχαίες μεταβλητές F και $\frac{X/\nu_1}{Y/\nu_2}$ είναι ισόνομες. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι:

$$F^{-1} \overset{d}{=} \frac{Y/\nu_2}{X/\nu_1} \sim F_{\nu_2,\nu_1}.$$

□

Σημείωση 4.2. Το πιο δύσκολο βήμα κατασκευής ενός ΔΕ σύμφωνα με τη μέθοδο αντιστρεπτής ποσότητας είναι η εύρεση της ίδιας της αντιστρεπτής ποσότητας, αφού η διαδικασία εύρεσής της εξαρτάται πάντα από την εκάστοτε κατανομή της $T(\underline{X})$. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε την $T(\underline{X})$ σε μία αντιστρεπτή ποσότητα $Q\left(\underline{X}, g(\underline{\vartheta})\right)$ που να ακολουθεί κάποια από τις εξής 4 κατανομές: $\mathcal{N}(0,1)$, χ^2_ν, t_ν, F_{ν_1,ν_2}. Για τον μετασχηματισμό αυτό χρησιμοποιούμε είτε κάποια από τις ιδιότητες της κατανομής χ^2 που αναφέρονται στη σημείωση 3.11 (σελίδα 39) είτε τους ορισμούς των κατανομών t_ν, F_{ν_1,ν_2}. Προφανώς, η επιλογή κατάλληλης αντιστρεπτής ποσότητας δεν είναι μοναδική.

Σημείωση 4.3. Συνοψίζουμε τις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται οι 4 προαναφερθείσες κατανομές για την κατασκευή ΔΕ.

i. Κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$:
   - ΔΕ για τη μέση τιμή της κανονικής κατανομής όταν η διασπορά της είναι γνωστή.
   - Ασυμπτωτικά ΔΕ με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

ii. Κατανομή χ^2_ν:
   - ΔΕ για τη διασπορά της κανονικής κατανομής.
   - ΔΕ για μία θετική παράμετρο κάποιας συνεχούς κατανομής με στήριγμα που δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου.

iii. Κατανομή t_ν: ΔΕ για τη μέση τιμή της κανονικής κατανομής όταν η διασπορά της είναι άγνωστη.

iv. Κατανομή F_{ν_1,ν_2}:
   - ΔΕ για τον λόγο των διασπορών 2 ανεξάρτητων κανονικών κατανομών.

- ΔΕ για τον λόγο 2 θετικών παραμέτρων 2 ανεξάρτητων συνεχών κατανομών με στηρίγματα που δεν εξαρτώνται από τις τιμές των παραμέτρων.

Σημείωση 4.4. i. Αν έχουμε τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(k, \vartheta)$ με γνωστό k, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{X_{(n)}-k}{\vartheta-k} \sim \mathrm{Beta}(n, 1)$.

ii. Αν έχουμε τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, k)$ με γνωστό k, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{k-X_{(1)}}{k-\vartheta} \sim \mathrm{Beta}(n, 1)$.

Ορισμός 4.5. Έστω τυχαία μεταβλητή X με στήριγμα S και συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$ η σταθερά $c \in S$ για την οποία $\mathbb{P}(X > c) = \alpha$ ή ισοδύναμα $F(c) = 1-\alpha$ καλείται *άνω α-ποσοστιαίο σημείο* της κατανομής.

Σημείωση 4.5. Αν η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ είναι συνεχής, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο στήριγμα S, οπότε είναι αντιστρέψιμη. Επομένως, ισχύει ότι $c = F^{-1}(1-a)$. Σε αυτήν την περίπτωση, το άνω α-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής είναι το σημείο που ”αφήνει” δεξιά του εμβαδόν ίσο με α στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X. Συμβολίζουμε τα άνω α-ποσοστιαία σημεία των κατανομών $\mathcal{N}(0,1)$, χ^2_ν, t_ν, F_{ν_1,ν_2} με Z_α, $\chi^2_{\nu;\alpha}$, $t_{\nu;\alpha}$, $F_{\nu_1,\nu_2;\alpha}$ αντίστοιχα.

Σημείωση 4.6. Οι κατανομές $\mathcal{N}(0,1)$ και t_ν είναι συμμετρικές γύρω από το 0, δηλαδή ισχύει ότι $f(-c) = f(c)$ και $F(-c) = 1 - F(c)$. Επομένως, παρατηρούμε ότι $\mathbb{P}(X > c) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(X > -c) = 1-\alpha$, δηλαδή το c είναι το άνω α-ποσοστιαίο σημείο τους αν και μόνο αν το $-c$ είναι το άνω $(1-\alpha)$-ποσοστιαίο σημείο τους ή ισοδύναμα $Z_{1-\alpha} = -Z_a$ και $t_{\nu;1-\alpha} = -t_{\nu;\alpha}$. Σε αντιδιαστολή, οι κατανομές χ^2_ν και F_{ν_1,ν_2} έχουν στήριγμα το $(0,\infty)$ και δεν παρουσιάζουν κάποια συμμετρία. Σύμφωνα με τις ιδιότητες της κατανομής F_{ν_1,ν_2}, ισχύει όμως ότι $F_{\nu_1,\nu_2;1-\alpha} = \frac{1}{F_{\nu_2,\nu_1;\alpha}}$.

Σημείωση 4.7. Η μέθοδος αντιστρεπτής ποσότητας δεν προσδιορίζει κάποιον συγκεκριμένο τρόπο υπολογισμού των σταθερών c_1, c_2. Η επιλογή αυτή θα μπορούσε θεωρητικά να γίνει με άπειρους δυνατούς τρόπους, όμως συνήθως γίνεται με έναν από τους εξής 2 τρόπους:

i. $\mathbb{P}(Q < c_1) = \mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2}$ που οδηγεί στην κατασκευή ΔΕ *ίσων ουρών*.

ii. Ελαχιστοποίηση της στατιστικής συνάρτησης $\ell(\underline{X}) = U(\underline{X}) - L(\underline{X})$ ή της μέσης τιμής $\mathbb{E}\left[\ell(\underline{X})\right]$ ως προς (c_1, c_2), η οποία οδηγεί στην κατασκευή ΔΕ *ελαχίστου μήκους*.

Τα ΔΕ ελαχίστου μήκους είναι πιο ισχυρά από τα ΔΕ ίσων ουρών, όμως είναι συνήθως δύσκολο να κατασκευαστούν. Σε κάποιες περιπτώσεις ενδέχεται αυτά τα 2 είδη ΔΕ να ταυτίζονται.

Σημείωση 4.8. Αν η κατανομή της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι συνεχής, οι σταθερές c_1, c_2 των ΔΕ ίσων ουρών επιλέγονται ώστε το c_1 να "αφήνει" εμβαδόν $\frac{\alpha}{2}$ αριστερά του και το c_2 να "αφήνει" εμβαδόν $\frac{\alpha}{2}$ δεξιά του στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Q. Με αυτόν τον τρόπο, "περισσεύει" εμβαδόν $1-\alpha$ μεταξύ των σταθερών c_1, c_2, το οποίο είναι το επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης. Με άλλα λόγια, το c_1 επιλέγεται ως το άνω $(1-\frac{\alpha}{2})$-ποσοστιαίο σημείο και το c_2 ως το άνω $\frac{\alpha}{2}$-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της Q.

Σημείωση 4.9. Σχετικά με την κατασκευή των ΔΕ ελαχίστου μήκους διακρίνουμε τις εξής 2 σημαντικές περιπτώσεις:

i. Αν το μήκος του ΔΕ είναι πολλαπλάσιο της συνάρτησης $c_2 - c_1$, τότε προσδιορίζουμε τις σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε το ΔΕ να περιέχει τις τιμές της αντιστρεπτής ποσότητας Q με την υψηλότερη πυκνότητα. Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της καμπύλης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Q.

ii. Διαφορετικά, παραγωγίζουμε τον περιορισμό $\mathbb{P}(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = 1-\alpha$ ως προς c_1, προσέχοντας ότι το c_2 είναι συνάρτηση του c_1, και λύνουμε ως προς $\frac{\partial c_2}{\partial c_1}$. Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε το μήκος του ΔΕ ως προς c_1, αντικαθιστούμε την παράγωγο $\frac{\partial c_2}{\partial c_1}$ και συμπεραίνουμε τη μονοτονία του μήκους ως προς c_1.

   - Αν το μήκος είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του c_1, τότε το c_1 πρέπει να πάρει την ελάχιστη δυνατή τιμή πάνω στο στήριγμα της αντιστρεπτής ποσότητας Q και το c_2 προσδιορίζεται έτσι ώστε $\mathbb{P}(Q \leqslant c_2) = 1-\alpha$.
   - Αν το μήκος είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του c_1, τότε το c_2 πρέπει να πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή πάνω στο στήριγμα της αντιστρεπτής ποσότητας Q και το c_1 προσδιορίζεται έτσι ώστε $\mathbb{P}(Q \geqslant c_1) = 1-\alpha$.

Παράδειγμα 4.1. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $F(x;k) = 1-e^{-\lambda(x-k)}$ για γνωστό $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{R}$ και $x \geqslant k$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.43 (σελίδα 78), η στατιστική συνάρτηση $\widehat{k}(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι η ΕΜΠ του k. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.52 (σελίδα 84), γνωρίζουμε ότι $Y_i = X_i - k \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε $Y_{(1)} = X_{(1)} - k \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$. Εφόσον η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y_{(1)}$ δεν εξαρτάται από την τιμή του k, αποτελεί μία κατάλληλη αντιστρεπτή ποσότητα Q. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς k:

$$c_1 \leqslant X_{(1)} - k \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad X_{(1)} - c_2 \leqslant k \leqslant X_{(1)} - c_1.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-n\lambda c_1} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{n\lambda}\log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-n\lambda c_2} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{n\lambda} \log \frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[X_{(1)} + \frac{1}{n\lambda} \log \frac{\alpha}{2}, X_{(1)} + \frac{1}{n\lambda} \log \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $c_2 - c_1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \infty)$. Αφού θέλουμε το ΔΕ να έχει το ελάχιστο μήκος, αυτό ισοδυναμεί με το να περιέχει τις τιμές της Q με την υψηλότερη πυκνότητα. Επομένως, το διάστημα επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_1 = 0$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_2 έτσι ώστε:

$$\mathbb{P}(Q \leqslant c_2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-n\lambda c_2} = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{n\lambda} \log \alpha.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ελαχίστου μήκους:

$$\left[X_{(1)} + \frac{1}{n\lambda} \log \alpha, X_{(1)}\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.2. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, \vartheta + 1)$ με $\vartheta \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.16 (σελίδα 41), η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Για $x \in [\vartheta, \vartheta + 1]$, υπολογίζουμε ότι $F_{X_{(n)}}(x) = (x - \vartheta)^n$. Ορίζουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα $Q = X_{(n)} - \vartheta$. Για $y \in [0, 1]$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_Q(y) = \mathbb{P}\left[X_{(n)} - \vartheta \leqslant y\right] = F_{X_{(n)}}(y + \vartheta) = y^n,$$

δηλαδή $Q \sim \mathrm{Beta}(n, 1)$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant X_{(n)} - \vartheta \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad X_{(n)} - c_2 \leqslant \vartheta \leqslant X_{(n)} - c_1.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - c_2^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[X_{(n)} - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}, X_{(n)} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $c_2 - c_1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

Αφού θέλουμε το ΔΕ να έχει το ελάχιστο μήκος, αυτό ισοδυναμεί με το να περιέχει τις τιμές της Q με την υψηλότερη πυκνότητα. Επομένως, το διάστημα επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_2 = 1$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_1 έτσι ώστε:

$$\mathbb{P}(Q \geqslant c_1) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - c_1^n = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_1 = \alpha^{1/n}.$$

Τελικά, ένα ΔΕ ελαχίστου μήκους για το ϑ είναι το $\left[X_{(n)} - 1, X_{(n)} - \alpha^{1/n}\right]$. □

Παράδειγμα 4.3. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, k)$ με γνωστό k. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.42 (σελίδα 78), η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Για $x \in [\vartheta, k]$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \left(\frac{k-x}{k-\vartheta}\right)^n.$$

Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{k - X_{(1)}}{k-\vartheta}$. Για $y \in [0, 1]$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_Q(y) = \mathbb{P}\left[\frac{k - X_{(1)}}{k-\vartheta} \leqslant y\right] = 1 - F_{X_{(1)}}\left(k - (k-\vartheta)y\right) = \left[\frac{k - k + (k-\vartheta)y}{k-\vartheta}\right]^n = y^n,$$

δηλαδή $Q \sim \mathrm{Beta}(n, 1)$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \frac{k - X_{(1)}}{k-\vartheta} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad k - \frac{k - X_{(1)}}{c_1} \leqslant \vartheta \leqslant k - \frac{k - X_{(1)}}{c_2}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - c_2^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[k - \left[k - X_{(1)}\right]\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}, k - \left[k - X_{(1)}\right]\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $\left[k - X_{(1)}\right]\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\ell(c_1, c_2) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}$ υπό τον εξής περιορισμό:

$$\mathbb{P}(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad F_Q(c_2) - F_Q(c_1) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_2^n - c_1^n = 1 - \alpha.$$

Αρχικά, παραγωγίζουμε τον περιορισμό ως προς c_2:

$$nc_2^{n-1} - nc_1^{n-1}\frac{\partial c_1}{\partial c_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c_1}{\partial c_2} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-1}.$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ℓ ως προς c_2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_2} = -\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial c_1}{\partial c_2} + \frac{1}{c_2^2} = -\frac{1}{c_1^2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-1} + \frac{1}{c_2^2} = \frac{c_1^{n+1} - c_2^{n+1}}{c_1^{n+1}c_2^2} < 0.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $c_2 \in [0,1]$. Εφόσον το μήκος του ΔΕ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς c_2, συμπεραίνουμε ότι το ΔΕ επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_2 = 1$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_1 έτσι ώστε:

$$\mathbb{P}(Q \geqslant c_1) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - c_1^n = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_1 = \alpha^{1/n}.$$

Τελικά, ένα ΔΕ ελαχίστου μήκους για το ϑ είναι το $\left[k - \left(k - X_{(1)}\right)\alpha^{-1/n}, X_{(1)}\right]$. □

Παράδειγμα 4.4. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(k, \lambda)$ με $k > 0$, γνωστό $\lambda > 0$ και $F(x; k) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\lambda$ για $x \geqslant k$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.43 (σελίδα 78), η στατιστική συνάρτηση $\widehat{k}(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι η ΕΜΠ του k. Για $x \geqslant k$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{n\lambda},$$

δηλαδή $X_{(1)} \sim \text{Pareto}(k, n\lambda)$. Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{X_{(1)}}{k}$. Για $y \geqslant 1$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_Q(y) = \mathbb{P}\left[\frac{X_{(1)}}{k} \leqslant y\right] = F_{X_{(1)}}(ky) = 1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{n\lambda},$$

δηλαδή $Q \sim \text{Pareto}(1, n\lambda)$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς k:

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(1)}}{k} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{(1)}}{c_2} \leqslant k \leqslant \frac{X_{(1)}}{c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{c_1^{n\lambda}} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n\lambda},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_2^{n\lambda}} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n\lambda}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[X_{(1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n\lambda}, X_{(1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n\lambda}\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $X_{(1)}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\ell(c_1, c_2) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}$ υπό τον εξής περιορισμό:

$$\mathbb{P}(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad F_Q(c_2) - F_Q(c_1) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_1^{-n\lambda} - c_2^{-n\lambda} = 1 - \alpha.$$

Αρχικά, παραγωγίζουμε τον περιορισμό ως προς c_1:

$$-\frac{n\lambda}{c_1^{n\lambda+1}} + \frac{n\lambda}{c_2^{n\lambda+1}}\frac{\partial c_2}{\partial c_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c_2}{\partial c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n\lambda+1}.$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ℓ ως προς c_1:

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_1} = -\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial c_2}{\partial c_1} = -\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n\lambda+1} = \frac{c_2^{n\lambda-1} - c_1^{n\lambda-1}}{c_1^{n\lambda+1}} > 0.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $c_1 \geqslant 1$. Εφόσον το μήκος του ΔΕ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του c_1, το ΔΕ επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_1 = 1$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_2 έτσι ώστε:

$$\mathbb{P}(Q \leqslant c_2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{c_2^{n\lambda}} = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_2 = \alpha^{-1/n\lambda}.$$

Τελικά, ένα ΔΕ ελαχίστου μήκους για το k είναι το $\left[\alpha^{1/n\lambda}X_{(1)}, X_{(1)}\right]$. □

Παράδειγμα 4.5. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$ με γνωστό k. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(nk, \lambda)$ είναι επαρκής για το λ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.11 (σελίδα 39), ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\lambda T \sim \chi^2_{2nk}$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς λ:

$$c_1 \leqslant 2\lambda\sum_{i=1}^n X_i \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_1}{2\sum_{i=1}^n X_i} \leqslant \lambda \leqslant \frac{c_2}{2\sum_{i=1}^n X_i}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{2nk;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{2nk;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\chi^2_{2nk;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{\chi^2_{2nk;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n X_i}\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.6. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Laplace}(\mu, \lambda)$ με γνωστό $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ και $f(x; \lambda) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\mu|}$ για $x \in \mathbb{R}$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$ είναι επαρκής για το λ. Θέτουμε $Y_i = |X_i - \mu|$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(|X - \mu| \leqslant y\right) = \mathbb{P}(\mu - y \leqslant X \leqslant \mu + y) = F(\mu + y; \lambda) - F(\mu - y; \lambda),$$

$$f_{Y_1}(y) = f(\mu + y; \lambda) + f(\mu - y; \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|-y|} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} = \lambda e^{-\lambda y},$$

δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε έπεται ότι $T(\underline{X}) \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\lambda T \sim \chi^2_{2n}$ και υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$, $c_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|}, \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|} \right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.7. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Beta}(1, \vartheta)$ με $f(x; \vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1}$ για $x \in (0, 1)$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η $T(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)$ είναι επαρκής για το ϑ. Θέτουμε $Y_i = -\log(1 - X_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(-\log(1 - X_1) \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(1 - X_1 \geqslant e^{-y}\right) = F\left(1 - e^{-y}; \vartheta\right),$$

$$f_{Y_1}(y) = e^{-y} f\left(1 - e^{-y}; \vartheta\right) = e^{-y} \vartheta \left(1 - 1 + e^{-y}\right)^{\vartheta - 1} = \vartheta e^{-\vartheta y},$$

δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε έπεται ότι $T(\underline{X}) \sim \text{Gamma}(n, \vartheta)$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\vartheta T \sim \chi^2_{2n}$ και υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$, $c_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[-\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)}, -\frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)} \right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.8. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda(x-k)}$ για $\lambda > 0$, γνωστό $k \in \mathbb{R}$ και $x \geqslant k$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.1 (σελίδα 92), γνωρίζουμε ότι $Y_i = X_i - k \sim \text{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i - nk \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\lambda T \sim \chi^2_{2n}$ και υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$ και $c_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$. Τελικά, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n X_i - 2nk}, \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n X_i - 2nk} \right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.9. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(k, \lambda)$ με γνωστό $k > 0$, $\lambda > 0$, $f(x; \lambda) = \frac{\lambda k^\lambda}{x^{\lambda+1}}$ και $F(x; \lambda) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\lambda$ για $x > k$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda \mid \underline{x}) = n \log \lambda + n\lambda \log k - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^n \log x_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + n \log k - \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\widehat{\lambda}(\underline{x}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i - n \log k} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{k}}, \qquad \frac{\partial^2 \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \quad \forall \lambda > 0.$$

Θέτουμε $Y_i = \log \frac{X_i}{k}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(\log \frac{X_1}{k} \leqslant y\right) = F\left(pe^y; \lambda\right) = 1 - \frac{k^\lambda}{k^\lambda e^{\lambda y}} = 1 - e^{-\lambda y},$$

δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{X_i}{k} \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = 2\lambda T \sim \chi^2_{2n}$ και υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$, $c_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} \log X_i - 2n \log k}, \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} \log X_i - 2n \log k}\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.10. Έστω 2 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ και $Y_1, \ldots, Y_m \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ΔΕ για τον λόγο $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $T_1(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda_1)$ και $T_2(\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \text{Gamma}(m, \lambda_2)$ είναι επαρκείς για τις παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε $Q_1 = 2\lambda_1 T_1 \sim \chi^2_{2n}$ και $Q_2 = 2\lambda_2 T_2 \sim \chi^2_{2m}$. Εφόσον τα 2 δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έπεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές Q_1 και Q_2 είναι ανεξάρτητες. Επομένως, κατασκευάζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{Q_1/2n}{Q_2/2m} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \sim F_{2n,2m}.$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$:

$$c_1 \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \leqslant c_2 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = F_{2n,2m;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = F_{2n,2m;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[F_{2n,2m;1-\alpha/2} \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}, F_{2n,2m;\alpha/2} \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}\right]. \quad \square$$

4.3 ΔΕ για Ένα Κανονικό Πληθυσμό

Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ΔΕ για τις παραμέτρους μ και σ^2. Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις τις οποίες παρουσιάζουμε στα παραδείγματα αυτής της παραγράφου.

Παράδειγμα 4.11. Η διασπορά σ^2 είναι γνωστή. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.44 (σελίδα 79), η στατιστική συνάρτηση $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$ είναι η ΕΜΠ του μ. Επομένως, ορίζουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς μ:

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{X} - c_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} - c_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = Z_{\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(c_2 - c_1)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι συμμετρική και μονοκόρυφη γύρω από το 0. Αφού θέλουμε το ΔΕ να έχει το ελάχιστο μήκος, αυτό ισοδυναμεί με το να περιέχει τις τιμές της Q με την υψηλότερη πυκνότητα. Επομένως, το διάστημα επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_2 = -c_1$, δηλαδή το ΔΕ ελαχίστου μήκους ταυτίζεται με το ΔΕ ίσων ουρών. □

Σημείωση 4.10. Παρατηρούμε ότι το μήκος του προηγούμενου ΔΕ είναι ίσο με $\ell = 2Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, δηλαδή δεν εξαρτάται από το δείγμα $\underline{X}$. Ισχύουν τα εξής:

- Το μήκος του ΔΕ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του μεγέθους n του δείγματος, δηλαδή το ΔΕ αποκτάει όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια όσο συλλέγουμε καινούργιες παρατηρήσεις για το δείγμα μας.
- Το μήκος του ΔΕ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση της διασποράς σ^2, δηλαδή όσο μικρότερη είναι η μεταβλητότητα των παρατηρήσεων του δείγματος τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια του ΔΕ που θα κατασκευάσουμε.
- Εφόσον ισχύει ότι $Z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ και η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής Φ της κατανομής $\mathcal{N}(0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, συ-

μπεραίνουμε ότι το μήκος του ΔΕ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του α ή ισοδύναμα γνησίως αύξουσα συνάρτηση του συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$. Με άλλα λόγια, όσο μεγαλύτερη "εμπιστοσύνη" θέλουμε να έχουμε ότι η πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου θα περιλαμβάνεται μέσα στο ΔΕ τόσο μεγαλύτερο θα πρέπει να είναι το ΔΕ που θα κατασκευάσουμε.

Παράδειγμα 4.12. Η διασπορά σ^2 είναι ίση με 4. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο μέγεθος δείγματος n, ώστε το 99% ΔΕ για τη μέση τιμή μ να έχει μήκος το πολύ ίσο με 0.1. Εφόσον $\alpha = 0.01$, απαιτούμε το εξής:

$$\ell = 2Z_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 0.1 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 4Z_{0.005}^2\frac{\sigma^2}{0.01} \approx 10615.83,$$

δηλαδή το ελάχιστο μέγεθος δείγματος που χρειαζόμαστε είναι $n = 10616$. □

Παράδειγμα 4.13. Η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη και θέλουμε να κατασκευάσουμε ΔΕ για τη μέση τιμή μ. Η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ δεν αποτελεί πλέον αντιστρεπτή ποσότητα, επειδή εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου σ^2. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.26 (σελίδα 51), η στατιστική συνάρτηση $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ είναι η ΑΕΕΔ του σ^2. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.11, γνωρίζουμε ότι $V = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές Z και V είναι ανεξάρτητες σύμφωνα με το θεώρημα Basu. Επομένως, κατασκευάζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{S/\sigma} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς μ:

$$c_1 \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{X} - c_2\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} - c_1\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = t_{n-1;1-\alpha/2} = -t_{n-1;\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = t_{n-1;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\overline{X} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $\frac{S}{\sqrt{n}}(c_2 - c_1)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αντιστρεπτής ποσότητας Q είναι συμμετρική και μονοκόρυφη γύρω από το 0, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΔΕ ελαχίστου μήκους ταυτίζεται με το ΔΕ ίσων ουρών, ακριβώς όπως στο παράδειγμα 4.11. □

Παράδειγμα 4.14. Η μέση τιμή μ είναι γνωστή. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.38 (σελίδα 77), η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ είναι η ΕΜΠ του σ^2. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.11, ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{n}{\sigma^2}\widehat{\sigma}^2 \sim \chi^2_n$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς σ^2:

$$c_1 \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c_2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{1}{c_1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{n;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{n;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2, \frac{1}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.15. Η μέση τιμή μ είναι άγνωστη και θέλουμε να κατασκευάσουμε ΔΕ ίσων ουρών για τη διασπορά σ^2. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ είναι η ΑΕΕΔ του σ^2, οπότε ορίζουμε μία αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι $c_1 = \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$, $c_2 = \chi^2_{n-1;\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2, \frac{1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]. \quad \square$$

4.4 ΔΕ για Δύο Ανεξάρτητους Κανονικούς Πληθυσμούς

Έστω 2 ανεξάρτητα τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ και $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ΔΕ για τη διαφορά μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_2$ και τον λόγο διασπορών $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$. Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις τις οποίες παρουσιάζουμε στα παραδείγματα αυτής της παραγράφου.

Παράδειγμα 4.16. Οι διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 είναι γνωστές. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{1}{n}\sigma_1^2\right)$ και $\overline{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{1}{m}\sigma_2^2\right)$ είναι οι ΕΜΠ των μ_1 και μ_2 αντίστοιχα. Αφού τα 2 δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\overline{X}$ και $\overline{Y}$ είναι ανεξάρτητες, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{m}\sigma_2^2\right)$. Κατασκευάζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{m}\sigma_2^2}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Ακριβώς όπως στο παράδειγμα 4.11 (σελίδα 99), υπολογίζουμε ότι $c_1 = -Z_{\alpha/2}$, $c_2 = Z_{\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\overline{X} - \overline{Y} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{m}\sigma_2^2}, \overline{X} - \overline{Y} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{m}\sigma_2^2}\right].$$

Σημειώνουμε ότι το ΔΕ ελαχίστου μήκους για τη διαφορά μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_2$ ταυτίζεται με το παραπάνω ΔΕ ίσων ουρών. □

Παράδειγμα 4.17. Οι διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 είναι άγνωστες αλλά ίσες με μία κοινή διασπορά σ^2. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζουμε την ακόλουθη τυχαία μεταβλητή:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

η οποία δεν αποτελεί πλέον αντιστρεπτή ποσότητα, επειδή εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου σ^2. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ και $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ είναι 2 διαφορετικές ΑΕΕΔ του σ^2 βασισμένες στα δείγματα $\underline{X}$ και $\underline{Y}$ αντίστοιχα, οπότε η *συγκεντρωτική δειγματική διασπορά* (pooled sample variance) $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ είναι η ΑΕΕΔ του σ^2 βασισμένη και στα 2 δείγματα μαζί. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $V_1 = \frac{n-1}{\sigma^2}S_1^2 \sim \chi^2_{n-1}$ και $V_2 = \frac{m-1}{\sigma^2}S_2^2 \sim \chi^2_{m-1}$. Αφού τα 2 δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές V_1 και V_2 είναι ανεξάρτητες. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.11, προκύπτει ότι:

$$W = \frac{n+m-2}{\sigma^2}S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2} = V_1 + V_2 \sim \chi^2_{n+m-2}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, οι τυχαίες μεταβλητές Z και W είναι ανεξάρτητες, οπότε κατασκευάζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{Z}{\sqrt{W/(n+m-2)}} = \frac{\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}}{S_p/\sigma} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}.$$

Ακριβώς όπως στο παράδειγμα 4.13 (σελίδα 100), έπεται ότι $c_1 = -t_{n+m-2;\alpha/2}$,

$c_2 = t_{n+m-2;\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\overline{X} - \overline{Y} - t_{n+m-2;\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}, \overline{X} - \overline{Y} + t_{n+m-2;\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right].$$

Σημειώνουμε ότι το ΔΕ ελαχίστου μήκους για τη διαφορά μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_2$ ταυτίζεται με το παραπάνω ΔΕ ίσων ουρών. □

Παράδειγμα 4.18. Οι μέσες τιμές μ_1 και μ_2 είναι γνωστές. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2$ και $\widehat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_2)^2$ είναι οι ΕΜΠ των σ_1^2 και σ_2^2 αντίστοιχα. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $V_1 = \frac{n}{\sigma_1^2}\widehat{\sigma}_1^2 \sim \chi_n^2$ και $V_2 = \frac{m}{\sigma_2^2}\widehat{\sigma}_2^2 \sim \chi_m^2$. Αφού τα 2 δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές V_1 και V_2 είναι ανεξάρτητες. Επομένως, κατασκευάζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{V_1/n}{V_2/m} = \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_2)^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n,m}.$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$c_1 \leqslant \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c_2}\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2} \leqslant \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leqslant \frac{1}{c_1}\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = F_{n,m;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = F_{n,m;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{F_{n,m;\alpha/2}}\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}, \frac{1}{F_{n,m;1-\alpha/2}}\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}\right] = \left[F_{m,n;1-\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}, F_{m,n;\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.19. Οι μέσες τιμές μ_1 και μ_2 είναι άγνωστες και θέλουμε να κατασκευάσουμε ΔΕ ίσων ουρών για τον λόγο διασπορών $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$. Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ και $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ είναι οι ΑΕΕΔ των σ_1^2 και σ_2^2 αντίστοιχα. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $V_1 = \frac{n-1}{\sigma_1^2}S_1^2 \sim \chi_{n-1}^2$ και $V_2 = \frac{m-1}{\sigma_2^2}S_2^2 \sim \chi_{m-1}^2$. Αφού τα 2 δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές V_1 και V_2 είναι ανεξάρτητες. Επομένως, κατασκευάζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{V_1/(n-1)}{V_2/(m-1)} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n-1,m-1}.$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έπεται ότι $c_1 = F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}$, $c_2 = F_{n-1,m-1;\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{F_{n-1,m-1;\alpha/2}}\frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{1}{F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right] = \left[F_{m-1,n-1;1-\alpha/2}\frac{S_1^2}{S_2^2}, F_{m-1,n-1;\alpha/2}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right]. \quad \square$$

4.5 Ασυμπτωτικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Ορισμός 4.6. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, θεωρούμε ένα τυχαίο διάστημα της μορφής $\mathcal{I}_{g(\underline{\vartheta});1-\alpha}(\underline{X}) = [L_n(\underline{X}), U_n(\underline{X})]$ τέτοιο ώστε:

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{\underline{\vartheta}\in\Theta}\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}\left[L_n(\underline{X}) \leqslant g(\underline{\vartheta}) \leqslant U_n(\underline{X})\right] = 1-\alpha,$$

το οποίο καλείται $100(1-\alpha)\%$ *ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης* για την παραμετρική συνάρτηση $g(\underline{\vartheta})$.

Σημείωση 4.11. Για την κατασκευή ενός ασυμπτωτικού ΔΕ αρκεί η εύρεση μίας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $Q_n(\underline{X}, g(\underline{\vartheta}))$ η οποία εξαρτάται από το $\underline{\vartheta}$ μόνο μέσω της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underline{\vartheta})$ και συγκλίνει κατά κατανομή σε μία τυχαία μεταβλητή με κατανομή ανεξάρτητη της άγνωστης παραμέτρου ϑ. Για τον σκοπό αυτό, κάνουμε χρήση των μεθόδων εύρεσης ασυμπτωτικών κατανομών που μελετήθηκαν στην παράγραφο 3.10.

Παράδειγμα 4.20. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \text{Pareto}(k,\lambda)$ με $k>0$, γνωστό $\lambda>2$ και $F(x;k) = 1-\left(\frac{k}{x}\right)^\lambda$ για $x \geqslant k$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.34 (σελίδα 72), γνωρίζουμε ότι $n\left[X_{(1)}-k\right] \xrightarrow{d} Y \sim \text{Exp}(\lambda/k)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, έπεται ότι:

$$Q_n = n\left[\frac{X_{(1)}}{k}-1\right] \xrightarrow{d} \frac{1}{k}Y = V \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_n \leqslant c_2$ ως προς k:

$$c_1 \leqslant n\left[\frac{X_{(1)}}{k}-1\right] \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{(1)}}{1+c_2/n} \leqslant k \leqslant \frac{X_{(1)}}{1+c_1/n}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Q_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(V<c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{\lambda}\log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Q_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(V>c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{\lambda}\log\frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{X_{(1)}}{1-\log(\alpha/2)/n\lambda}, \frac{X_{(1)}}{1-\log(1-\alpha/2)/n\lambda}\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.21. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.33 (σελίδα 72), γνωρίζουμε ότι $\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}\left(0, \lambda^2\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, έπεται ότι:

$$Q_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\lambda \overline{X}_n} - 1\right) \xrightarrow{d} \frac{1}{\lambda} Y = Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_n \leqslant c_2$ ως προς λ:

$$c_1 \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{1}{\lambda \overline{X}_n} - 1\right) \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\overline{X}_n\left(1 + c_2/\sqrt{n}\right)} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\overline{X}_n\left(1 + c_1/\sqrt{n}\right)}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = Z_{\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{\overline{X}_n\left(1 + Z_{\alpha/2}/\sqrt{n}\right)}, \frac{1}{\overline{X}_n\left(1 - Z_{\alpha/2}/\sqrt{n}\right)}\right]. \quad \square$$

Παράδειγμα 4.22. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - p\right) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}(0, p(1-p))$. Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε επίσης ότι $\overline{X}_n \xrightarrow{p} p$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, έπεται ότι:

$$Q_n = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - p\right)}{\sqrt{\overline{X}_n\left(1 - \overline{X}_n\right)}} \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} Y = Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_n \leqslant c_2$ ως προς p:

$$c_1 \leqslant \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - p\right)}{\sqrt{\overline{X}_n\left(1 - \overline{X}_n\right)}} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{X}_n - c_2\sqrt{\frac{1}{n}\overline{X}_n\left(1 - \overline{X}_n\right)} \leqslant p \leqslant \overline{X}_n - c_1\sqrt{\frac{1}{n}\overline{X}_n\left(1 - \overline{X}_n\right)}.$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έπεται ότι $c_1 = -Z_{\alpha/2}$, $c_2 = Z_{\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\overline{X}_n - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\overline{X}_n\left(1 - \overline{X}_n\right)}, \overline{X}_n + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\overline{X}_n\left(1 - \overline{X}_n\right)}\right].$$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω ασυμπτωτικό ΔΕ για το $p \in (0, 1)$ τείνει να καλύπτει ολοένα και μεγαλύτερα διαστήματα εκτός του παραμετρικού χώρου καθώς η πραγματική τιμή του p τείνει προς το 0 ή το 1. □

Παράδειγμα 4.23. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ασυμπτωτικό ΔΕ για τη μέση τιμή μ. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.32 (σελίδα 71), γνωρίζουμε ότι:

$$Q_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έπεται ότι $c_1 = -Z_{\alpha/2}$, $c_2 = Z_{\alpha/2}$. Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\overline{X}_n - Z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + Z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]. \quad \square$$

Κεφάλαιο 5

Στατιστικοί Έλεγχοι Υποθέσεων

5.1 Εισαγωγή

Στη στατιστική ανάλυση δεδομένων χρειάζεται πολλές φορές να πάρουμε κάποια απόφαση σχετικά με το αν μία στατιστική υπόθεση που έχει διατυπωθεί είναι λανθασμένη ή όχι. Αυτός ο ισχυρισμός του οποίου την εγκυρότητα καλούμαστε να ελέγξουμε καλείται *μηδενική υπόθεση* και συμβολίζεται με H_0. Ο καθορισμός της μηδενικής υπόθεσης οδηγεί στη διατύπωση μίας *εναλλακτικής υπόθεσης* την οποία συμβολίζουμε με H_1. Η απόφαση που καλούμαστε να πάρουμε είναι αν θα απορρίψουμε ή όχι τη μηδενική υπόθεση H_0 έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης H_1. Η στατιστική συνάρτηση σύμφωνα με την οποία αποφασίζουμε αν θα απορρίψουμε ή όχι την H_0 καλείται *στατιστικός έλεγχος υποθέσεων*.

Συγκεκριμένα, οι στατιστικές υποθέσεις H_0 και H_1 αφορούν τη συνάρτηση κατανομής F μίας τυχαίας μεταβλητής X, η οποία γνωρίζουμε ότι ανήκει σε μία κλάση συναρτήσεων κατανομής $\mathcal{F}$. Οι υποθέσεις H_0 και H_1 γράφονται στη μορφή $H_0 : F \in \mathcal{F}_0$ vs. $H_1 : F \in \mathcal{F}_1$, όπου $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ με $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_1 = \varnothing$. Η απόφαση που θα πάρουμε βασίζεται σε ένα δείγμα $\underline{x}$ από τη συνάρτηση κατανομής F.

Στα πλαίσια της παραμετρικής στατιστικής, η κλάση συναρτήσεων κατανομής $\mathcal{F}$ συνήθως παραμετροποιείται από μία άγνωστη παράμετρο $\underline{\vartheta}$, οπότε παίρνει τη μορφή $\mathcal{F}_{\underline{\vartheta}} = \{F(x;\underline{\vartheta}) : \underline{\vartheta} \in \Theta\}$. Επομένως, οι υποθέσεις H_0 και H_1 αφορούν συγκεκριμένα την τιμή της άγνωστης παραμέτρου $\underline{\vartheta}$. Με άλλα λόγια, οι υποθέσεις H_0 και H_1 γράφονται στη μορφή $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ με $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$.

Μία στατιστική υπόθεση καλείται *απλή* αν καθορίζει πλήρως τη συνάρτηση κατανομής $F(x;\underline{\vartheta})$. Για παράδειγμα, η μηδενική υπόθεση $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ είναι απλή αν το σύνολο Θ_0 ταυτίζεται με κάποιο μονοσύνολο $\{\underline{\vartheta}_0\}$. Διαφορετικά, καλείται *σύνθετη* υπόθεση.

Παράδειγμα 5.1. i. Ο $H_0 : X \sim \mathcal{N}(0,1)$ vs. $H_1 : X \sim \text{Laplace}(0,1)$ είναι ένας έλεγχος απλής υπόθεσης έναντι απλής υπόθεσης.

ii. Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ με γνωστό σ^2, τότε ο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ είναι ένας έλεγχος απλής υπόθεσης έναντι απλής υπόθεσης, αφού $\Theta_0 = \{\mu_0\}$ και $\Theta_1 = \{\mu_1\}$.

iii. Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ με γνωστό σ^2, τότε ο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$ είναι ένας έλεγχος απλής υπόθεσης έναντι *μονόπλευρης* σύνθετης υπόθεσης, αφού $\Theta_0 = \{\mu_0\}$ και $\Theta_1 = (\mu_0, \infty)$.

iv. Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ με γνωστό σ^2, τότε ο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ είναι ένας έλεγχος απλής υπόθεσης έναντι *αμφίπλευρης* σύνθετης υπόθεσης, αφού $\Theta_0 = \{\mu_0\}$ και $\Theta_1 = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$.

v. Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε ο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ είναι ένας έλεγχος σύνθετης υπόθεσης έναντι σύνθετης υπόθεσης, αφού $\Theta_0 = \{\mu_0\} \times (0, \infty)$ και $\Theta_1 = \{\mu_1\} \times (0, \infty)$.

Ορισμός 5.1. Μία στατιστική συνάρτηση $\varphi : S \to [0,1]$ που καθορίζει την απόφαση σχετικά με την απόρριψη ή όχι μίας μηδενικής υπόθεσης H_0 έναντι μίας εναλλακτικής υπόθεσης H_1 καλείται στατιστικός *έλεγχος*. Αν η συνάρτηση φ παίρνει την εξής μορφή:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{απορρίπτουμε την } H_0 \\ 0, & \text{δεν απορρίπτουμε την } H_0 \end{cases},$$

ο έλεγχος καλείται *μη-τυχαιοποιημένος*. Διαφορετικά, αν παίρνει την εξής μορφή:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{απορρίπτουμε την } H_0 \\ \gamma, & \text{απορρίπτουμε την } H_0 \text{ με πιθανότητα } \gamma \in (0,1) \\ 0, & \text{δεν απορρίπτουμε την } H_0 \end{cases},$$

τότε ο έλεγχος καλείται *τυχαιοποιημένος*.

Σημείωση 5.1. Ένας μη-τυχαιοποιημένος έλεγχος διαμερίζει το στήριγμα S της κατανομής του δείγματος $\underline{x}$ σε 2 ξένα υποσύνολα R και A, δηλαδή $S = R \cup A$ με $R \cap A = \varnothing$. Ισχύουν τα εξής:

- Αν $\underline{x} \in R$, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0. Το υποσύνολο R καλείται *κρίσιμη περιοχή* (ή περιοχή απόρριψης) του ελέγχου.
- Αν $\underline{x} \in A$, τότε δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0. Το υποσύνολο $A = S \setminus R$ καλείται *περιοχή αποδοχής* του ελέγχου.

Σημείωση 5.2. Όταν πραγματοποιούμε έναν έλεγχο υποθέσεων, τότε μπορεί είτε να πάρουμε τη σωστή απόφαση είτε να διαπράξουμε ένα από τα εξής 2 σφάλματα:

- Σφάλμα Τύπου I $\to$ Απορρίπτουμε την H_0, ενώ αυτή ισχύει. Ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\text{Σφάλμα Τύπου I}) = \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in R), \quad \underline{\vartheta} \in \Theta_0.$$

- Σφάλμα Τύπου II $\to$ Δεν απορρίπτουμε την H_0, ενώ αυτή δεν ισχύει. Ισχύει ότι:

$$\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \notin R), \quad \underline{\vartheta} \in \Theta_1.$$

	Δεν απορρίπτουμε την H_0	Απορρίπτουμε την H_0
Ισχύει η H_0	True Negative	Σφάλμα Τύπου I
Δεν ισχύει η H_0	Σφάλμα Τύπου II	True Positive

Πινακας 5.1: Σύνοψη Δυνατών Εκβάσεων Ελέγχου Υποθέσεων

Ορισμός 5.2. i. Η ακόλουθη συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\underline{\vartheta}) &= \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\text{Σωστή Απόρριψη της } H_0) = \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in R) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\text{Σφάλμα Τύπου II}), \quad \underline{\vartheta} \in \Theta_1,\end{aligned}$$

καλείται *ισχύς* (ή διακριτική ικανότητα) ενός ελέγχου φ

ii. Η ακόλουθη συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\pi_\varphi(\underline{\vartheta}) &= \mathbb{E}_{\underline{\vartheta}}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\text{Απόρριψη της } H_0) = \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in R) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\text{Σφάλμα Τύπου I}), & \underline{\vartheta} \in \Theta_0 \\ \beta_\varphi(\underline{\vartheta}), & \underline{\vartheta} \in \Theta_1 \end{cases},\end{aligned}$$

καλείται *συνάρτηση ισχύος* ενός ελέγχου φ.

iii. Η ακόλουθη ποσότητα:

$$\sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} \pi_\varphi(\underline{\vartheta}) = \sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\underline{X} \in R) = \sup_{\underline{\vartheta} \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}(\text{Σφάλμα Τύπου I}),$$

καλείται *μέγεθος* (της κρίσιμης περιοχής) ενός ελέγχου φ.

Σημείωση 5.3. Βασιζόμενοι σε δείγματα πεπερασμένου μεγέθους, δεν είναι εφικτό να ελαχιστοποιήσουμε ταυτόχρονα τις πιθανότητες $\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}$(Σφάλμα Τύπου I) και $\mathbb{P}_{\underline{\vartheta}}$(Σφάλμα Τύπου II). Συνήθως, μάλιστα, όσο η μία μειώνεται τόσο η άλλη αυξάνεται. Επειδή η μηδενική υπόθεση H_0 είναι η υπόθεση πάνω στην οποία στηριζόμαστε όταν πραγματοποιούμε έναν έλεγχο υποθέσεων, η εσφαλμένη απόρριψή της εγκυμονεί συνήθως τους περισσότερους κινδύνους. Για τον λόγο αυτό, προκαθορίζουμε ένα ανώτατο όριο α για τη μέγιστη δυνατή πιθανότητα σφάλματος τύπου I, δηλαδή το μέγεθος του ελέγχου, και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλαδή να μεγιστοποιήσουμε την ισχύ του ελέγχου, κάτω από αυτόν τον περιορισμό. Με άλλα λόγια, στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση β_φ υπό τον περιορισμό $\sup_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0}\pi_\varphi(\underline{\vartheta}) \leqslant \alpha$.

Ορισμός 5.3. Το ανώτατο όριο α του μεγέθους ενός ελέγχου καλείται *επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας* του ελέγχου.

Ορισμός 5.4. Ένας στατιστικός έλεγχος φ μεγέθους α, δηλαδή για τον οποίο ισχύει ότι $\sup_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0}\pi_\varphi(\underline{\vartheta}) = \alpha$, καλείται *ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος* (ΟΙΕ) αν για κάθε άλλο έλεγχο φ^* σε ε.σ.σ. α ισχύει ότι $\beta_\varphi(\underline{\vartheta}) \geqslant \beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta})\ \forall \underline{\vartheta} \in \Theta_1$.

Σημείωση 5.4.

i. Αν η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής και η μηδενική υπόθεση H_0 είναι απλή, δηλαδή $\Theta_0 = \{\underline{\vartheta}_0\}$, τότε είναι εύκολο να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο μεγέθους α, αφού $\sup_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0}\pi_\varphi(\underline{\vartheta}) = \mathbb{P}_{\underline{\vartheta}_0}(\underline{X} \in R)$.

ii. Αν η κατανομή του δείγματος είναι διακριτή, δεν είναι συνήθως εφικτή η εύρεση μη-τυχαιοποιημένου ελέγχου προκαθορισμένου μεγέθους. Σε αυτήν την περίπτωση, γίνεται χρήση τυχαιοποιημένων ελέγχων.

Παράδειγμα 5.2. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Αν είναι γνωστό ότι η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = 0.5$ vs. $H_1 : \vartheta = 0.25$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ έχει τη μορφή $R = \left\{\underline{x} \in (0,\vartheta)^n : x_{(n)} < c\right\}$ και $\mathbb{P}_{0.25}(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = 0.2$, τότε θέλουμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά c και το μέγεθος δείγματος n. Για $x \in (0, \vartheta)$, γνωρίζουμε ότι $F_{X_{(n)}}(x) = \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n$. Αρχικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{0.5}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \mathbb{P}_{0.5}(\underline{X} \in R) = \mathbb{P}_{0.5}\left[X_{(n)} < c\right] = (2c)^n = \alpha \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}0.05^{1/n}.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}_{0.25}(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = \mathbb{P}_{0.25}(\underline{X} \notin R) = \mathbb{P}_{0.25}(X_{(n)} \geqslant c) = 1 - (4c)^n = 0.2 \quad \Rightarrow$$

$$c = \frac{1}{4}0.8^{1/n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}0.05^{1/n} = \frac{1}{4}0.8^{1/n} \quad \Rightarrow \quad 16^{1/n} = 2 \quad \Rightarrow$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad c \approx 0.24. \quad \square$$

5.2 Θεμελιώδες Λήμμα Neyman - Pearson

Θεώρημα 5.1. (Θεμελιώδες Λήμμα Neyman - Pearson) Θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_1$.

- **Ύπαρξη ΟΙΕ**: Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, ο ακόλουθος έλεγχος:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x})/\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) < c \\ \gamma, & \mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x})/\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) = c \\ 0, & \mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x})/\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) > c \end{cases},$$

  όπου $c > 0$ και $\gamma \in [0,1]$ σταθερές τέτοιες ώστε $\pi_\varphi(\underline{\vartheta}_0) = \alpha$, είναι ένας ΟΙΕ μεγέθους α.

- **Μοναδικότητα ΟΙΕ**: Αν φ^* είναι ένας άλλος ΟΙΕ σε ε.σ.σ. α, τότε έπεται ότι $\varphi^*(\underline{x}) = \varphi(\underline{x})$ για κάθε $\underline{x} \in S$ για το οποίο ισχύει ότι $\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) \neq c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x})$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής. Θεωρούμε έναν άλλο έλεγχο φ^* των απλών υποθέσεων $H_0 : \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_1$ σε ε.σ.σ. α. Αφού $\varphi^*(\underline{x}) \in [0,1]$, παρατηρούμε ότι:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) < 0 \\ 0, & \mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$[\varphi^*(\underline{x}) - \varphi(\underline{x})]\,[\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x})] \geqslant 0.$$

Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_S [\varphi^*(\underline{x}) - \varphi(\underline{x})]\,[\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x})]\,d\underline{x} \\ &= \int_{R^*} \mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x})d\underline{x} - \int_R \mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x})d\underline{x} \\ &= \pi_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_0) - c\beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_1) - [\pi_\varphi(\underline{\vartheta}_0) - c\beta_\varphi(\underline{\vartheta}_1)] \\ &= \pi_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_0) - \alpha + c\,[\beta_\varphi(\underline{\vartheta}_1) - \beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_1)] \leqslant c\,[\beta_\varphi(\underline{\vartheta}_1) - \beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_1)]\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

αφού ισχύει ότι $\pi_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_0) \leqslant \alpha$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $\beta_\varphi(\underline{\vartheta}_1) \geqslant \beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_1)$ επειδή $c > 0$. Αφού ο έλεγχος φ έχει μεγαλύτερη ισχύ από κάθε άλλο τυχαίο έλεγχο σε ε.σ.σ. α, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ μεγέθους α.

Θεωρούμε τώρα έναν άλλο ΟΙΕ φ^* των απλών υποθέσεων $H_0 : \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_1$ σε ε.σ.σ. α. Τότε, θα πρέπει να ισχύει ότι $\beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_1) = \beta_\varphi(\underline{\vartheta}_1)$. Σύμφωνα με την εξίσωση 5.1, γνωρίζουμε ότι:

$$0 \leqslant \pi_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_0) - \alpha + c\,[\beta_\varphi(\underline{\vartheta}_1) - \beta_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_1)] = \pi_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_0) - \alpha,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\pi_{\varphi^*}(\underline{\vartheta}_0) \geqslant \alpha$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι ο ΟΙΕ φ^* είναι μεγέθους α και η ανισότητα 5.1 ισχύει ως ισότητα. Αφού η συνάρτηση $[\varphi^*(\underline{x}) - \varphi(\underline{x})]\,[\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x})]$ είναι μη-αρνητική και το ολοκλήρωμά της επάνω στο χωρίο S ισούται με 0, αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση ισούται με 0 επάνω στο χωρίο S. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι $\varphi^*(\underline{x}) = \varphi(\underline{x})$ για όλα τα δειγματικά σημεία $\underline{x} \in S$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) \neq c\mathcal{L}(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x})$. □

Σημείωση 5.5. Συνήθως εργαζόμαστε σε λογαριθμική κλίμακα, δηλαδή ορίζουμε τον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \ell(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - \ell(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) < c \\ \gamma, & \ell(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - \ell(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) = c \\ 0, & \ell(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{x}) - \ell(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{x}) > c \end{cases},$$

όπου $c > 0$ και $\gamma \in [0,1]$ σταθερές τέτοιες ώστε $\pi_\varphi(\underline{\vartheta}_0) = \alpha$.

Σημείωση 5.6. Για τον προσδιορισμό της σταθεράς c, ακολουθούμε μία παρόμοια διαδικασία με τη μέθοδο αντιστρεπτής ποσότητας για την κατασκευή ΔΕ. Συγκεκριμένα, λύνουμε την ανισότητα $\ell(\underline{\vartheta}_0 \mid \underline{X}) - \ell(\underline{\vartheta}_1 \mid \underline{X}) < c$ ως προς μία στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ της οποίας η κατανομή δεν εξαρτάται από την τιμή $\underline{\vartheta}_0$ κάτω από την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_0$. Η $T(\underline{X})$ συνήθως καλείται *ελεγχοσυνάρτηση* ή στατιστική συνάρτηση του ελέγχου.

Παράδειγμα 5.3. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ με γνωστό σ^2. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ με $\mu_1 > \mu_0$ και να υπολογίσουμε την ισχύ του. Γνωρίζουμε ότι:

$$\ell(\mu \mid \underline{x}) = -\frac{n}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\mu_0 \mid \underline{x}) - \ell(\mu_1 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right] < c \quad \Leftrightarrow$$

$$n\left(\mu_1^2 - \mu_0^2\right) - 2(\mu_1 - \mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i < c^* = 2\sigma^2 c \quad \Leftrightarrow$$

$$2(\mu_1 - \mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i > c^{**} = n\left(\mu_1^2 - \mu_0^2\right) - c^* \quad \overset{\mu_1 > \mu_0}{\Leftrightarrow} \quad \overline{x} > c^{***} = \frac{c^{**}}{2n(\mu_1 - \mu_0)} \quad \Leftrightarrow$$

$$T(\underline{x}) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c_\alpha = \frac{c^{***} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Απομένει να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_α, ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α, δηλαδή ώστε να ισχύει ότι $\pi_\varphi(\mu_0) = \alpha$. Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$, γνωρίζουμε ότι $T(\underline{X}) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Επομένως,

υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\mu_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\mu_0}\left[T(\underline{X}) > c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = Z_\alpha.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant Z_\alpha \end{cases}.$$

Η ισχύς του παραπάνω ελέγχου υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \beta_\varphi(\mu_1) &= \mathbb{P}_{\mu_1}(\underline{X} \in R) = \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_\alpha\right) \\ &= \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_\alpha + \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(Z_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

εφόσον $\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ υπό την ισχύ της εναλλακτικής υπόθεσης H_1, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$. □

Σημείωση 5.7. Παρατηρούμε ότι η κρίσιμη περιοχή του προηγούμενου ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή του μ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\mu_1 > \mu_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε. Με άλλα λόγια, ο προηγούμενος έλεγχος είναι ΟΙΕ για κάθε απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \mu = \mu_1^*$ με $\mu_1^* > \mu_0$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1^* : \mu > \mu_0$. Γενικότερα, ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Αν η κρίσιμη περιοχή ενός ΟΙΕ φ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$ δεν εξαρτάται από την τιμή ϑ_1, τότε ο φ είναι ΟΙΕ και για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1^* : \vartheta > \vartheta_0$.

ii. Αντίστοιχα, αν η κρίσιμη περιοχή ενός ΟΙΕ φ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 < \vartheta_0$ δεν εξαρτάται από την τιμή ϑ_1, τότε ο φ είναι ΟΙΕ και για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1^* : \vartheta < \vartheta_0$.

Σημείωση 5.8. Παρατηρούμε ότι η ισχύς του προηγούμενου ελέγχου είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας α, γνησίως αύξουσα συνάρτηση της διαφοράς μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_0$, γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της διασποράς σ^2 των παρατηρήσεων του δείγματος και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του μεγέθους δείγματος n.

Παράδειγμα 5.4. Στο προηγούμενο παράδειγμα θέλουμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο μέγεθος δείγματος n, ώστε η πιθανότητα σφάλματος τύπου II να είναι το πολύ ίση με 0.01, αν είναι γνωστό ότι $\sigma^2 = 4$, $\mu_1 = \mu_0 + 2$ και $\alpha = 1\%$. Απαιτούμε το εξής:

$$\mathbb{P}(\text{Σφάλμα Τύπου ΙΙ}) = 1 - \beta_\varphi(\mu_1) = \Phi\left(Z_\alpha - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leqslant 0.01 \quad \Rightarrow$$

$$Z_{0.01} - \sqrt{n} \leqslant \Phi^{-1}(0.01) = Z_{0.99} = -Z_{0.01} \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 4Z_{0.01}^2 \approx 21.65.$$

Επομένως, το ελάχιστο μέγεθος δείγματος που χρειαζόμαστε είναι $n = 22$. □

Παράδειγμα 5.5. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda < \lambda_0$ και να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ. Θεωρούμε την απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1^* : \lambda = \lambda_1$ με $\lambda_1 < \lambda_0$, ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson. Γνωρίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda \mid \underline{x}) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\lambda_0 \mid \underline{x}) - \ell(\lambda_1 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad n\,(\log \lambda_0 - \log \lambda_1) - (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^n x_i < c \quad \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^n x_i > c^* = n\,(\log \lambda_0 - \log \lambda_1) - c \quad \overset{\lambda_1 < \lambda_0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i > c^{**} = \frac{c^*}{\lambda_0 - \lambda_1} \quad \Leftrightarrow \quad T(\underline{x}) = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i > c_\alpha = 2\lambda_0 c^{**}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_0)$, γνωρίζουμε ότι $T\,(\underline{X}) = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{2n}$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\lambda_0}\left[T(\underline{X}) > c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2n;\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i > \chi^2_{2n;\alpha} \\ 0, & 2\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i \leqslant \chi^2_{2n;\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή λ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\lambda_1 < \lambda_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \lambda < \lambda_0$. Για $\lambda < \lambda_0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}_\lambda(\text{Σφάλμα Τύπου ΙΙ}) = \mathbb{P}_\lambda(\underline{X} \notin R) = \mathbb{P}_\lambda\left(2\lambda_0 \sum_{i=1}^n X_i \leqslant \chi^2_{2n;\alpha}\right)$$

$$= \mathbb{P}_\lambda \left(2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_0} \chi^2_{2n;\alpha} \right) = F_{\chi^2_{2n}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \chi^2_{2n;\alpha} \right).$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος τύπου II είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του λ, δηλαδή μεγαλώνει καθώς το λ πλησιάζει την τιμή λ_0. □

Παράδειγμα 5.6. Έστω δείγμα X μεγέθους 1 με $f(x;\vartheta) = 1 + \vartheta(x - 0.5)$ για $\vartheta \in (-2, 2)$ και $x \in (0, 1)$. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = 0$ vs. $H_1 : \vartheta = 1$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ και να υπολογίσουμε την ισχύ του. Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\mathcal{L}(0 \mid x)}{\mathcal{L}(1 \mid x)} < c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 + x - 0.5} < c \quad \Leftrightarrow \quad x > c_\alpha = \frac{1}{c} - \frac{1}{2}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $\vartheta = 0$, παρατηρούμε ότι $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_0 \left[\varphi(\underline{X}) \right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_0 \left(X > c_\alpha \right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = 1 - \alpha = 0.9.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x > 0.9 \\ 0, & x \leqslant 0.9 \end{cases}.$$

Τελικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\beta_\varphi(1) = \mathbb{P}_1(\underline{X} \in R) = \mathbb{P}_1(X > 0.9) = \int_{0.9}^{1} (1 + x - 0.5) \, dx = 0.145. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.7. Έστω δείγμα X μεγέθους 1. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vs. $H_1 : X \sim \text{Laplace}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 2\%$ και να υπολογίσουμε την ισχύ του. Γνωρίζουμε ότι:

$$L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad L_1(x) = \frac{1}{4} e^{-|x|/2}.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell_0(x) - \ell_1(x) < c \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{x^2}{2} + 2\log 2 + \frac{|x|}{2} < c \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - |x| > c^* = 2\left[2\log 2 - \frac{1}{2}\log(2\pi) - c \right] \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| > \frac{1 + \sqrt{1 + 4c^*}}{2} = c_\alpha \quad \text{ή} \quad |x| < \frac{1 - \sqrt{1 + 4c^*}}{2} = 1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 4c^*}}{2} = 1 - c_\alpha.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0\left(|X| > c_\alpha\right) &= \mathbb{P}_0\left(X > c_\alpha\right) + \mathbb{P}_0\left(X < -c_\alpha\right) = 1 - \Phi(c_\alpha) + \Phi(-c_\alpha) \\ &= 1 - \Phi(c_\alpha) + 1 - \Phi(c_\alpha) = 2\left[1 - \Phi(c_\alpha)\right] \leqslant \alpha \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}c_\alpha \geqslant \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = Z_{\alpha/2} = Z_{0.01} \approx 2.33 \quad \Rightarrow \quad 1 - c_\alpha < 0 \quad \Rightarrow \\ \mathbb{P}_0\left(|X| < 1 - c_\alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_0\left(|X| > c_\alpha\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha \approx 2.33.\end{gathered}$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 2.33 \\ 0, & |x| \leqslant 2.33 \end{cases}.$$

Τελικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\beta_\varphi &= \mathbb{P}_1(|x| > c_\alpha) = 1 - \mathbb{P}_1(|x| \leqslant c_\alpha) = 1 - \mathbb{P}_1(-c_\alpha \leqslant x \leqslant c_\alpha) \\ &= 1 - \int_{-c_\alpha}^{c_\alpha} \frac{1}{4} e^{-|x|/2} dx = 1 - \int_0^{c_\alpha} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-c_\alpha/2} \approx 0.31. \quad \square\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.8. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_6 \sim \text{Bernoulli}(p)$. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : p = 0.2$ vs. $H_1 : p = 0.5$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 5\%$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\ell(p \mid \underline{x}) = \log p \sum_{i=1}^{6} x_i + \log(1-p)\left(6 - \sum_{i=1}^{6} x_i\right) = \log \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{6} x_i + 6\log(1-p).$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(0.2 \mid \underline{x}) - \ell(0.5 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad \log \frac{0.2/(1-0.2)}{0.5/(1-0.5)} \sum_{i=1}^{6} x_i + 6\log\frac{1-0.2}{1-0.5} < c \quad \Leftrightarrow$$

$$\log 4 \sum_{i=1}^{6} x_i > c^* = 6\log\frac{8}{5} - c \quad \Leftrightarrow \quad T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{6} x_i > c_\alpha = \frac{c^*}{\log 4}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_6 \sim \text{Bernoulli}(0.2)$, γνωρίζουμε ότι $T\left(\underline{X}\right) = \sum_{i=1}^{6} X_i \sim \text{Bin}(6, 0.2)$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}_{0.2}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i > c_\alpha\right) = 1 - F_T(c_\alpha),$$

$$F_T(2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{6}{k} 0.2^k 0.8^{6-k} \approx 0.9 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{0.2}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i > 2\right) > \alpha,$$

$$F_T(3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{6}{k} 0.2^k 0.8^{6-k} \approx 0.98 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{0.2}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i > 3\right) < \alpha.$$

Συνεπώς, επιλέγουμε $c_\alpha = 3$ και προσδιορίζουμε τη σταθερά $\gamma \in (0,1)$ έτσι ώστε:

$$\mathbb{E}_{0.2}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \mathbb{P}_{0.2}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i > 3\right) + \gamma \mathbb{P}_{0.2}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i = 3\right) = \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{F_T(3) - (1-\alpha)}{F_T(3) - F_T(2)} \approx 0.4.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{6} x_i > 3 \\ 0.4, & \sum_{i=1}^{6} x_i = 3 \\ 0, & \sum_{i=1}^{6} x_i < 3 \end{cases}.$$

Αν $\sum_{i=1}^{6} x_i = 3$, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 με πιθανότητα 0.4. □

5.3 Ιδιότητα Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών

Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις μονόπλευρες σύνθετες υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, τότε μπορούμε πρώτα να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson για να προσδιορίσουμε έναν ΟΙΕ φ για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$. Αν δείξουμε ότι η κρίσιμη περιοχή του φ δεν εξαρτάται από την τιμή ϑ_1 και $\sup_{\vartheta \leqslant \vartheta_0} \pi_\varphi(\vartheta) = \pi_\varphi(\vartheta_0)$, δηλαδή ότι η συνάρτηση ισχύος $\pi_\varphi(\vartheta)$ είναι αύξουσα ως προς ϑ στο διάστημα $(-\infty, \vartheta_0]$, τότε ο φ είναι ΟΙΕ και για σύνθετες υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Το αντίστοιχο ισχύει και για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$, δηλαδή αρκεί να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson για να προσδιορίσουμε έναν ΟΙΕ φ για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 < \vartheta_0$. Στη συνέχεια, αρκεί να ελέγξουμε ότι η κρίσιμη περιοχή του φ δεν εξαρτάται από την τιμή ϑ_1 και η συνάρτηση ισχύος $\pi_\varphi(\vartheta)$ είναι φθίνουσα ως προς ϑ στο διάστημα $[\vartheta_0, \infty)$.

Ορισμός 5.5. Λέμε ότι η κατανομή ενός δείγματος $\underline{X}$ έχει την ιδιότητα του *μονότονου λόγου πιθανοφανειών* (ΜΛΠ) ως προς κάποια στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ αν ο λόγος πιθανοφανειών $\lambda(\underline{x}) = \frac{\mathcal{L}(\vartheta_2|\underline{x})}{\mathcal{L}(\vartheta_1|\underline{x})}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{x})$ στο σύνολο $\{\underline{x} \in S : \mathcal{L}(\vartheta_1 \mid \underline{x}) > 0 \text{ ή } \mathcal{L}(\vartheta_2 \mid \underline{x}) > 0\}$ για κάθε ζεύγος τιμών $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta$ με $\vartheta_1 < \vartheta_2$.

Σημείωση 5.9. Αν ο λόγος πιθανοφανειών $\lambda(\underline{x})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς κάποια $T(\underline{x})$, τότε προφανώς είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς τη $-T(\underline{x})$, οπότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς την $T^*(\underline{X}) = -T(\underline{X})$.

Πρόταση 5.1. Αν η από κοινού κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη μονοπαραμετρική ΕΟΚ με $f(\underline{x};\vartheta) = h(\underline{x})e^{Q(\vartheta)T(\underline{x})-A(\vartheta)}$ και η συνάρτηση $Q:\Theta\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$.

Απόδειξη. Έστω $\vartheta_1,\vartheta_2\in\Theta$ με $\vartheta_1<\vartheta_2$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{\mathcal{L}(\vartheta_2 \mid \underline{x})}{\mathcal{L}(\vartheta_1 \mid \underline{x})} = \frac{h(\underline{x})e^{Q(\vartheta_2)T(\underline{x})-A(\vartheta_2)}}{h(\underline{x})e^{Q(\vartheta_1)T(\underline{x})-A(\vartheta_1)}} = \underbrace{e^{A(\vartheta_1)-A(\vartheta_2)-[Q(\vartheta_1)-Q(\vartheta_2)]T(\underline{x})}}_{g(T(\underline{x}))}.$$

Αφού η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα, γνωρίζουμε ότι $Q(\vartheta_1)-Q(\vartheta_2)<0$. Έστω $t_1\leqslant t_2$. Τότε, συμπεραίνουμε ότι:

$$[Q(\vartheta_1)-Q(\vartheta_2)]\,t_1 \geqslant [Q(\vartheta_1)-Q(\vartheta_2)]\,t_2 \quad\Rightarrow\quad g(t_1)\leqslant g(t_2).$$

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι ο λόγος πιθανοφανειών $\lambda(\underline{X})$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$. □

Σημείωση 5.10. Αν η συνάρτηση $Q:\Theta\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η συνάρτηση $Q^*(\vartheta) = -Q(\vartheta)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = -T(\underline{X})$.

Λήμμα 5.1. Αν h_1,h_2 είναι 2 αύξουσες συναρτήσεις και X μία τυχαία μεταβλητή, τότε ισχύει ότι $\mathrm{Cov}\left[h_1(X),h_2(X)\right]\geqslant 0$.

Απόδειξη. Έστω 2 τυχαίες μεταβλητές X_1,X_2 οι οποίες έχουν την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή X. Αν $X_1\leqslant X_2$, τότε ισχύει ότι $h_1(X_1)-h_1(X_2)\leqslant 0$ και $h_2(X_1)-h_2(X_2)\leqslant 0$. Ομοίως, αν $X_1\geqslant X_2$, τότε ισχύει ότι $h_1(X_1)-h_1(X_2)\geqslant 0$ και $h_2(X_1)-h_2(X_2)\geqslant 0$. Και στις 2 περιπτώσεις, έπεται ότι:

$$[h_1(X_1)-h_1(X_2)]\,[h_2(X_1)-h_2(X_2)]\geqslant 0.$$

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές X_1,X_2 έχουν την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή X, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathbb{E}\left[(h_1(X_1)-h_1(X_2))\,(h_2(X_1)-h_2(X_2))\right]\\
&= \mathbb{E}\left[h_1(X_1)h_2(X_1)\right]+\mathbb{E}\left[h_1(X_2)h_2(X_2)\right]\\
&\qquad\qquad -\mathbb{E}\left[h_1(X_1)\right]\mathbb{E}\left[h_2(X_2)\right]-\mathbb{E}\left[h_1(X_2)\right]\mathbb{E}\left[h_2(X_1)\right]\\
&= 2\mathbb{E}\left[h_1(X)h_2(X)\right]-2\mathbb{E}\left[h_1(X)\right]\mathbb{E}\left[h_2(X)\right] = 2\mathrm{Cov}\left[h_1(X),h_2(X)\right].
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 5.2. (Karlin - Rubin) Έστω ότι η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς κάποια στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$.

i. Θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, ένας ΟΙΕ μεγέθους α ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) > c \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c \\ 0, & T(\underline{x}) < c \end{cases} .$$

ii. Θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \geqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_0$. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, ένας ΟΙΕ μεγέθους α ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) < c \\ \gamma, & T(\underline{x}) = c \\ 0, & T(\underline{x}) > c \end{cases} .$$

Οι σταθερές $c \in \mathbb{R}$ και $\gamma \in [0,1]$ προσδιορίζονται έτσι ώστε $\pi_\varphi(\vartheta_0) = \alpha$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η κατανομή του δείγματος είναι συνεχής και ενδιαφερόμαστε για την πρώτη περίπτωση. Έστω $\vartheta < \vartheta_0$. Τότε, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(\vartheta_0) - \pi_\varphi(\vartheta) &= \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] - \mathbb{E}_\vartheta[\varphi(\underline{X})] = \int_S \varphi(\underline{x}) [f(\underline{x};\vartheta_0) - f(\underline{x};\vartheta)]\, d\underline{x} \\ &= \int_S \varphi(\underline{x}) \left[\frac{f(\underline{x};\vartheta_0)}{f(\underline{x};\vartheta)} - 1 \right] f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} = \mathbb{E}_\vartheta \left[\varphi(\underline{X}) \left(\frac{f(\underline{X};\vartheta_0)}{f(\underline{X};\vartheta)} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο έλεγχος φ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$. Αφού $\vartheta < \vartheta_0$, γνωρίζουμε επίσης ότι ο λόγος πιθανοφανειών $\frac{f(\underline{X};\vartheta_0)}{f(\underline{X};\vartheta)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta \left[\frac{f(\underline{X};\vartheta_0)}{f(\underline{X};\vartheta)} \right] = \int_S \frac{f(\underline{x};\vartheta_0)}{f(\underline{x};\vartheta)} f(\underline{x};\vartheta) d\underline{x} = \int_S f(\underline{x};\vartheta_0) d\underline{x} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}_\vartheta \left[\frac{f(\underline{X};\vartheta_0)}{f(\underline{X};\vartheta)} - 1 \right] = 0.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι:

$$0 \leqslant \mathrm{Cov}_\vartheta \left[\varphi(\underline{X}), \frac{f(\underline{X};\vartheta_0)}{f(\underline{X};\vartheta)} - 1 \right] = \mathbb{E}_\vartheta \left[\varphi(\underline{X}) \left(\frac{f(\underline{X};\vartheta_0)}{f(\underline{X};\vartheta)} - 1 \right) \right] = \pi_\varphi(\vartheta_0) - \pi_\varphi(\vartheta),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\pi_\varphi(\vartheta) \leqslant \pi_\varphi(\vartheta_0) = \alpha$ για $\vartheta < \vartheta_0$. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι ο έλεγχος φ είναι ΟΙΕ μεγέθους α. □

Σημείωση 5.11. Αν εφαρμόζαμε το λήμμα Neyman - Pearson για τις απλές υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 < \vartheta_0$, τότε θα έπρεπε να λύσουμε την ανισότητα $\mathcal{L}(\vartheta_0 \mid \underline{x}) < c\mathcal{L}(\vartheta_1 \mid \underline{x})$ για να προσδιορίσουμε την κρίσιμη περιοχή του ελέγχου. Αφού $\vartheta_1 < \vartheta_0$, ο λόγος $\frac{\mathcal{L}(\vartheta_0|\underline{x})}{\mathcal{L}(\vartheta_1|\underline{x})}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$ σύμφωνα με την ιδιότητα ΜΛΠ. Επομένως, θα ισχύει ότι $\mathcal{L}(\vartheta_0 \mid \underline{x}) < c\mathcal{L}(\vartheta_1 \mid \underline{x})$ αν και μόνο αν $T(\underline{X}) > c_\alpha$ για κάποια άλλη σταθερά c_α. Το αντίστοιχο μπορούμε να παρατηρήσουμε και για την πρώτη περίπτωση.

Παράδειγμα 5.9. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ με γνωστό μ. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$. Παρατηρούμε ότι:

$$f\left(\underline{x}; \sigma^2\right) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2}\log\sigma^2\right\},$$

όπου $Q\left(\sigma^2\right) = -\frac{1}{2\sigma^2}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$, οπότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$. Σύμφωνα με το θεώρημα Karlin - Rubin, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση $T(\underline{x}) < c$. Απομένει να προσδιορίσουμε τη σταθερά c έτσι ώστε $\pi_\varphi\left(\sigma_0^2\right) = \alpha$. Δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, γνωρίζουμε ότι:

$$Q\left(\underline{X}\right) = \frac{1}{\sigma_0^2} T(\underline{X}) = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$T(\underline{X}) < c \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\underline{X}\right) = \frac{1}{\sigma_0^2} T(\underline{X}) < c_\alpha = \frac{c}{\sigma_0^2},$$

$$\mathbb{E}_{\sigma_0^2}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\sigma_0^2}\left(Q < c_\alpha\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{n;1-\alpha}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\alpha} \\ 0, & \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \geqslant \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.10. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Beta}(1, \vartheta)$ με $f(x; \vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta - 1}$ για $x \in (0, 1)$. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \exp\left\{(1 - \vartheta)\sum_{i=1}^n \log\frac{1}{1 - x_i} + n\log\vartheta\right\},$$

όπου $Q(\vartheta) = 1 - \vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i)$, οπότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = -T(\underline{X})$. Σύμφωνα με το θεώρημα Karlin - Rubin, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση $T^*(\underline{x}) > c$. Δεδομένου ότι $\vartheta = \vartheta_0$, δηλαδή $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Beta}(1, \vartheta_0)$, γνωρίζουμε ότι:

$$T\left(\underline{X}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i) \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0),$$

$$Q\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 T\left(\underline{X}\right) \sim \chi^2_{2n},$$

σύμφωνα με το παράδειγμα 4.7 (σελίδα 97). Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$T^*(\underline{X}) > c \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 T(\underline{X}) = -2\vartheta_0 T^*(\underline{X}) < c_\alpha = -2\vartheta_0 c,$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left(Q < c_\alpha\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & -2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i) < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & -2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i) \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.11. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(k, \lambda)$ με $k > 0$, γνωστό $\lambda > 0$, $f(x; k) = \frac{\lambda k^\lambda}{x^{\lambda+1}}$ και $F(x; k) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\lambda$ για $x > k$. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : k \geqslant k_0$ vs. $H_1 : k < k_0$. Για $k_1 < k_2$, υπολογίζουμε τον ακόλουθο λόγο πιθανοφανειών:

$$\frac{\mathcal{L}(k_2 \mid \underline{x})}{\mathcal{L}(k_1 \mid \underline{x})} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{n\lambda} \frac{\mathbb{1}_{(k_2,\infty)}\left(x_{(1)}\right)}{\mathbb{1}_{(k_1,\infty)}\left(x_{(1)}\right)} = \lambda(T), \quad T(\underline{x}) = x_{(1)}.$$

Έστω $t_1, t_2 \in (k_1, \infty)$ με $t_1 \leqslant t_2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Για $k_1 < t_1 \leqslant t_2 < k_2$, ισχύει ότι $\lambda(t_1) = 0 = \lambda(t_2)$.
- Για $k_1 < t_1 < k_2 < t_2$, ισχύει ότι $\lambda(t_1) = 0 < \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{n\lambda} = \lambda(t_2)$.
- Για $k_1 < k_2 < t_1 \leqslant t_2$, ισχύει ότι $\lambda(t_1) = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{n\lambda} = \lambda(t_2)$.

Επομένως, η συνάρτηση $\lambda(t)$ είναι αύξουσα στο διάστημα (k_1, ∞), δηλαδή η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$. Σύμφωνα με το θεώρημα Karlin - Rubin, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση $T(\underline{x}) < c$. Δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Pareto}(k_0, \lambda)$, γνωρίζουμε ότι:

$$Q(\underline{X}) = \frac{1}{k_0} T(\underline{X}) = \frac{1}{k_0} X_{(1)} \sim \text{Pareto}(1, n\lambda),$$

σύμφωνα με το παράδειγμα 4.4 (σελίδα 95). Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$T(\underline{X}) < c \quad \Leftrightarrow \quad Q(\underline{X}) = \frac{1}{k_0} T(\underline{X}) < c_\alpha = \frac{c}{k_0},$$

$$\mathbb{E}_{k_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{k_0}\left(Q < c_\alpha\right) = \alpha \quad \Rightarrow$$
$$1 - \frac{1}{c_\alpha^{n\lambda}} = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = (1-\alpha)^{-1/n\lambda}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(1)} < k_0(1-\alpha)^{-1/n\lambda} \\ 0, & x_{(1)} \geqslant k_0(1-\alpha)^{-1/n\lambda} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.12. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Θέλουμε να βρούμε ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Για $\vartheta_1 < \vartheta_2$, υπολογίζουμε τον ακόλουθο λόγο πιθανοφανειών:

$$\frac{\mathcal{L}(\vartheta_2 \mid \underline{x})}{\mathcal{L}(\vartheta_1 \mid \underline{x})} = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^n \frac{\mathbb{1}_{(0,\vartheta_2)}\left(x_{(n)}\right)}{\mathbb{1}_{(0,\vartheta_1)}\left(x_{(n)}\right)} = \lambda(T), \quad T(\underline{x}) = x_{(n)}.$$

Έστω $t_1, t_2 \in (0, \vartheta_2)$ με $t_1 \leqslant t_2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Για $0 < t_1 \leqslant t_2 < \vartheta_1 < \vartheta_2$, ισχύει ότι $\lambda(t_1) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^n = \lambda(t_2)$.
- Για $0 < t_1 < \vartheta_1 < t_2 < \vartheta_2$, ισχύει ότι $\lambda(t_1) = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^n < \infty = \lambda(t_2)$.
- Για $0 < \vartheta_1 < t_1 \leqslant t_2 < \vartheta_2$, ισχύει ότι $\lambda(t_1) = \infty = \lambda(t_2)$.

Επομένως, η συνάρτηση $\lambda(t)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(0, \vartheta_2)$, δηλαδή η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$. Σύμφωνα με το θεώρημα Karlin - Rubin, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση $T(\underline{x}) > c$. Δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta_0)$, γνωρίζουμε ότι:

$$Q(\underline{X}) = \frac{1}{\vartheta_0} T(\underline{X}) = \frac{1}{\vartheta_0} X_{(n)} \sim \text{Beta}(n, 1),$$

σύμφωνα με τη σημείωση 4.4 (σελίδα 91). Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$T(\underline{X}) > c \quad \Leftrightarrow \quad Q(\underline{X}) = \frac{1}{\vartheta_0} T(\underline{X}) > c_\alpha = \frac{c}{\vartheta_0},$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left(Q > c_\alpha\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - c_a^n = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = (1-\alpha)^{1/n}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(n)} > \vartheta_0(1-\alpha)^{1/n} \\ 0, & x_{(n)} \leqslant \vartheta_0(1-\alpha)^{1/n} \end{cases}. \quad \square$$

Θεώρημα 5.3.* Έστω ότι η από κοινού κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην πολυδιάστατη μονοπαραμετρική ΕΟΚ με $f(\underline{x};\vartheta) = h(\underline{x})e^{Q(\vartheta)T(\underline{x})-A(\vartheta)}$ και η συνάρτηση $Q : \Theta \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη. Θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις αμφίπλευρες σύνθετες υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_1$ ή $\vartheta \geqslant \vartheta_2$ vs. $H_1 : \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. Για δεδομένο $\alpha \in (0,1)$, ένας ΟΙΕ μεγέθους α ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & c_1 < T(\underline{x}) < c_2 \\ \gamma_1, & T(\underline{x}) = c_1 \\ \gamma_2, & T(\underline{x}) = c_2 \\ 0, & T(\underline{x}) < c_1 \text{ ή } T(\underline{x}) > c_2 \end{cases}.$$

Οι σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$ προσδιορίζονται ώστε $\pi_\varphi(\vartheta_1) = \pi_\varphi(\vartheta_2) = \alpha$.

5.4 Κριτήριο Γενικευμένου Λόγου Πιθανοφανειών

Ορισμός 5.6. Θεωρούμε τις γενικές υποθέσεις $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ και $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$. Η ακόλουθη στατιστική συνάρτηση:

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\sup_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0} \mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})}{\sup_{\underline{\vartheta}\in\Theta} \mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})},$$

καλείται *γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών*.

Σημείωση 5.12. Προφανώς ισχύει ότι $0 \leqslant \lambda^*(\underline{x}) \leqslant 1\ \forall \underline{x} \in S$. Αν υπάρχουν η ΕΜΠ $\widehat{\underline{\vartheta}}$ του $\underline{\vartheta}$ και η ΕΜΠ $\widehat{\underline{\vartheta}}_0$ του $\underline{\vartheta}$ υπό την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$, δηλαδή $\widehat{\underline{\vartheta}}_0 = \arg\max_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0} \mathcal{L}(\underline{\vartheta} \mid \underline{x})$, τότε έπεται ότι:

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\mathcal{L}(\widehat{\underline{\vartheta}}_0 \mid \underline{x})}{\mathcal{L}(\widehat{\underline{\vartheta}} \mid \underline{x})}.$$

Κριτήριο Γενικευμένου Λόγου Πιθανοφανειών: Ένας έλεγχος μεγέθους α για τις υποθέσεις $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ και $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \lambda^*(\underline{x}) < c \\ \gamma, & \lambda^*(\underline{x}) = c \\ 0, & \lambda^*(\underline{x}) > c \end{cases}.$$

Οι σταθερές $c, \gamma \in [0,1]$ προσδιορίζονται έτσι ώστε $\sup_{\underline{\vartheta}\in\Theta_0} \pi_{\varphi}(\underline{\vartheta}) = \alpha$.

Σημείωση 5.13. Διαισθητικά, ο αριθμητής του λόγου $\lambda^*(\underline{x})$ εκφράζει τη μέγιστη δυνατή πιθανοφάνεια υπό την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης, ενώ ο παρονομαστής εκφράζει τη μέγιστη δυνατή πιθανοφάνεια. Αν ο αριθμητής είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή, δηλαδή ο λόγος $\lambda^*(\underline{x})$ παίρνει τιμές κοντά στο 0, τότε δεν είναι πολύ πιθανό το δείγμα $\underline{X}$ να προέρχεται από κατανομή με τιμή του $\underline{\vartheta}$ που ανήκει στο σύνολο Θ_0, οπότε απορρίπτουμε την H_0. Αν ο αριθμητής είναι αρκετά κοντά στον παρονομαστή, δηλαδή ο λόγος $\lambda^*(\underline{x})$ παίρνει τιμές κοντά στο 1, τότε δεν μπορούμε να διακρίνουμε πόσο πιθανό είναι το δείγμα $\underline{X}$ να προέρχεται από κατανομή με τιμή του $\underline{\vartheta}$ που ανήκει στο σύνολο Θ_0 σε σύγκριση με τιμή που ανήκει στο Θ, οπότε δεν απορρίπτουμε την H_0.

Παράδειγμα 5.13. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Θέλουμε να βρούμε έναν έλεγχο για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ και να υπολογίσουμε την ισχύ του. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.42 (σελίδα 78), γνωρίζουμε ότι $\widehat{\vartheta} = x_{(n)}$. Εφόσον η H_0 είναι απλή, έπεται ότι $\widehat{\vartheta}_0 = \vartheta_0$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\mathcal{L}(\vartheta_0 \mid \underline{x})}{\mathcal{L}(\widehat{\vartheta} \mid \underline{x})} = \frac{\vartheta_0^{-n} \mathbb{1}_{[0,\vartheta_0]}\left(x_{(n)}\right)}{\left[x_{(n)}\right]^{-n} \mathbb{1}_{[0,x_{(n)}]}\left(x_{(n)}\right)} = \begin{cases} \left[x_{(n)}/\vartheta_0\right]^n, & x_{(n)} \leqslant \vartheta_0 \\ 0, & x_{(n)} > \vartheta_0 \end{cases}.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\lambda^*(\underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{x_{(n)}}{\vartheta_0}\right]^n < c \text{ ή } x_{(n)} > \vartheta_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{(n)} < \vartheta_0 c^{1/n} \text{ ή } x_{(n)} > \vartheta_0.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta_0)$, γνωρίζουμε ότι:

$$Q(\underline{X}) = \frac{1}{\vartheta_0}\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{1}{\vartheta_0} X_{(n)} \sim \text{Beta}(n, 1),$$

σύμφωνα με τη σημείωση 4.4 (σελίδα 91). Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$X_{(n)} < \vartheta_0 c^{1/n} \text{ ή } X_{(n)} > \vartheta_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q < c_\alpha = c^{1/n} \text{ ή } Q > 1,$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left(Q < c_\alpha\right) + \mathbb{P}_{\vartheta_0}(Q > 1) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \alpha^{1/n}.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στον ακόλουθο έλεγχο:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & x_{(n)} < \vartheta_0 \alpha^{1/n} \text{ ή } x_{(n)} > \vartheta_0 \\ 0, & \vartheta_0 \alpha^{1/n} \leqslant x_{(n)} \leqslant \vartheta_0 \end{cases}.$$

Για $\vartheta > \vartheta_0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\vartheta) &= \mathbb{P}_\vartheta\left(X_{(n)} < \vartheta_0\alpha^{1/n}\right) + \mathbb{P}_\vartheta\left(X_{(n)} > \vartheta_0\right)\\ &= \mathbb{P}_\vartheta\left(\frac{1}{\vartheta}X_{(n)} < \alpha^{1/n}\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right) + \mathbb{P}_\vartheta\left(\frac{1}{\vartheta}X_{(n)} > \frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)\\ &= \alpha\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^n + 1 - \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^n = 1-(1-\alpha)\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^n.\end{aligned}$$

Για $\vartheta < \vartheta_0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}_\vartheta\left(X_{(n)} > \vartheta_0\right) = \mathbb{P}_\vartheta\left(\frac{1}{\vartheta}X_{(n)} > \frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right) = 0,$$

$$\mathbb{P}_\vartheta\left(X_{(n)} < \vartheta_0\alpha^{1/n}\right) = \mathbb{P}_\vartheta\left(\frac{1}{\vartheta}X_{(n)} < \alpha^{1/n}\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right) = \begin{cases}\alpha\left(\vartheta_0/\vartheta\right)^n, & \vartheta > \vartheta_0\alpha^{1/n}\\ 1, & \vartheta \leqslant \vartheta_0\alpha^{1/n}\end{cases}.$$

Τελικά, καταλήγουμε ότι:

$$\beta_\varphi(\vartheta) = \begin{cases} 1, & \vartheta \leqslant \vartheta_0\alpha^{1/n}\\ \alpha\left(\vartheta_0/\vartheta\right)^n, & \vartheta_0\alpha^{1/n} < \vartheta \leqslant \vartheta_0\\ 1-(1-\alpha)\left(\vartheta_0/\vartheta\right)^n, & \vartheta > \vartheta_0\end{cases}. \quad \square$$

Πρόταση 5.2*. Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ ή τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta_1 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_2$ vs. $H_1 : \vartheta < \vartheta_1$ ή $\vartheta > \vartheta_2$. Τότε, το κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών καθορίζει έναν έλεγχο μεγέθους α της ακόλουθης μορφής:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T(\underline{x}) < c_1 \text{ ή } T(\underline{x}) > c_2\\ \gamma_1, & T(\underline{x}) = c_1\\ \gamma_2, & T(\underline{x}) = c_2\\ 0, & c_1 < T(\underline{x}) < c_2\end{cases}.$$

Οι σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ και $\gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$ προσδιορίζονται έτσι ώστε $\pi_\varphi(\vartheta_0) = \alpha$ ή $\pi_\varphi(\vartheta_1) = \pi_\varphi(\vartheta_2) = \alpha$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.4*. (Wilks) Θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις υποθέσεις $H_0 : \underline{\vartheta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \underline{\vartheta} \in \Theta_1$, όπου $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ και $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$. Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας για την ασυμπτωτική αποτελεσματικότητα της ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$. Αν d είναι το πλήθος των περιορισμών που θέτει η μηδενική υπόθεση H_0 πάνω στον παραμετρικό χώρο Θ, τότε έπεται ότι:

$$D_n(\underline{X}) = -2\log\lambda_n^*(\underline{X}) = -2\left[\ell(\widehat{\underline{\vartheta}}_0 \mid \underline{X}) - \ell(\widehat{\underline{\vartheta}} \mid \underline{X})\right] \xrightarrow{d} Y \sim \chi^2_d.$$

Επομένως, καταλήγουμε στον ακόλουθο ασυμπτωτικό έλεγχο μεγέθους α:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & -2\log\lambda_n^*(\underline{x}) > \chi^2_{d;\alpha} \\ 0, & -2\log\lambda_n^*(\underline{x}) \leqslant \chi^2_{d;\alpha} \end{cases}.$$

5.5 Έλεγχοι Υποθέσεων για Έναν Κανονικό Πληθυσμό

Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε ελέγχους για τις υποθέσεις $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις τις οποίες παρουσιάζουμε στα παραδείγματα αυτής της παραγράφου.

Παράδειγμα 5.14. Η διασπορά σ^2 είναι γνωστή. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$ είναι η ΕΜΠ του μ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\log\lambda^*(\underline{x}) = \ell(\mu_0 \mid \underline{x}) - \ell(\widehat{\mu} \mid \underline{x}) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\mu_0^2 - 2\mu_0\sum_{i=1}^n x_i + 2\overline{x}\sum_{i=1}^n x_i - n\overline{x}^2\right) \\
&= -\frac{n}{2\sigma^2}\left(\mu_0^2 - 2\mu_0\overline{x} + 2\overline{x}^2 - \overline{x}^2\right) = -\frac{n}{2\sigma^2}\left(\overline{x} - \mu_0\right)^2.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\lambda^*(\underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\overline{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2/n} > c^* = -2\log c \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > c_\alpha = \sqrt{c^*}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$, γνωρίζουμε ότι $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > c_\alpha\right) &= \mathbb{P}_{\mu_0}(Z > c_\alpha) + \mathbb{P}_{\mu_0}(Z < -c_\alpha) \\
&= 1 - \Phi(c_\alpha) + \Phi(-c_\alpha) = 1 - \Phi(c_\alpha) + 1 - \Phi(c_\alpha) = 2\left[1 - \Phi(c_\alpha)\right] = \alpha,
\end{aligned}$$

$$\Phi(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = Z_{\alpha/2}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο έλεγχο μεγέθους α:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > Z_{\alpha/2} \\ 0, & \left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leqslant Z_{\alpha/2} \end{cases}. \quad \square$$

Σημείωση 5.14. Στον προηγούμενο έλεγχο, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leqslant Z_{\alpha/2} \right\} \\
&= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu_0 \leqslant \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \\
&= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \mu_0 \in \mathcal{I}_{\mu;1-\alpha}(\underline{x}) = \left[\overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right\},
\end{aligned}$$

όπου $\mathcal{I}_{\mu;1-\alpha}(\underline{x})$ είναι το $100(1-\alpha)\%$ ΔΕ ίσων ουρών για τη μέση τιμή μ. Με άλλα λόγια, δεν απορρίπτω την $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της $H_1 : \mu \neq \mu_0$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α αν και μόνο αν το μ_0 ανήκει στο $100(1-\alpha)\%$ ΔΕ ίσων ουρών για το μ. Αυτή η σύνδεση μεταξύ ΔΕ και ελέγχων με αμφίπλευρη εναλλακτική υπόθεση ισχύει γενικότερα και οδηγεί σε έναν εναλλακτικό τρόπο εύρεσης της κρίσιμης περιοχής ενός ελέγχου με αμφίπλευρη εναλλακτική υπόθεση.

Παράδειγμα 5.15. Η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.44 (σελίδα 79), γνωρίζουμε ότι $\widehat{\mu} = \overline{x}$ και $\widehat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S^2$. Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $\mu = \mu_0$, γνωρίζουμε ότι $\widehat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$, σύμφωνα με το παράδειγμα 3.38 (σελίδα 77). Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_0^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x} + \overline{x} - \mu_0)^2 \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2 + 2(\overline{x} - \mu_0) \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) \right] \\
&= \widehat{\sigma}^2 + (\overline{x} - \mu_0)^2 + \frac{2}{n} (\overline{x} - \mu_0) \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\overline{x} \right) = \widehat{\sigma}^2 + (\overline{x} - \mu_0)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \lambda^*(\underline{x}) &= \ell\left(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2 \mid \underline{x}\right) - \ell\left(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2 \mid \underline{x}\right) \\
&= -\frac{n}{2} \log \frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2} - \frac{1}{2\widehat{\sigma}_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 + \frac{1}{2\widehat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 \\
&= -\frac{n}{2} \log \left[1 + \frac{(\overline{x} - \mu_0)^2}{\widehat{\sigma}^2} \right] - \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = -\frac{n}{2} \log \left[1 + \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s^2} \right].
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\lambda^*(\underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{n}{2} \log \left[1 + \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s^2} \right] < c^* = \log c \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s^2} > c^{**} = e^{-2c^*/n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\overline{x} - \mu_0)^2}{s^2/n} > c^{***} = (n-1)\left(c^{**} - 1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| > c_\alpha = \sqrt{c^{***}}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, γνωρίζουμε ότι $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, σύμφωνα με το παράδειγμα 4.13 (σελίδα 100). Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] &= \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > c_\alpha\right) = \mathbb{P}_{\mu_0}(T > c_\alpha) + \mathbb{P}_{\mu_0}(T < -c_\alpha) \\ &= 1 - F_T(c_\alpha) + F_T(-c_\alpha) = 2\left[1 - F_T(c_\alpha)\right] = \alpha,\end{aligned}$$

$$F_T(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = F_T^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = t_{n-1;\alpha/2}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο έλεγχο μεγέθους α:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{n-1;\alpha/2} \\ 0, & \left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \leqslant t_{n-1;\alpha/2} \end{cases}. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.16. Η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη και θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν ασυμπτωτικό έλεγχο υποθέσεων. Υπό την ισχύ της H_0, γνωρίζουμε ότι:

$$T_n(\underline{X}) = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

σύμφωνα με το παράδειγμα 4.23 (σελίδα 106). Επομένως, καταλήγουμε στον ακόλουθο ασυμπτωτικό έλεγχο μεγέθους α:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > Z_{\alpha/2} \\ 0, & \left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \leqslant Z_{\alpha/2} \end{cases}.$$

Εναλλακτικά, γνωρίζουμε ότι:

$$D_n(\underline{X}) = -2\log\lambda_n^*(\underline{X}) = n\log\left[1 + \frac{(\overline{X}-\mu_0)^2}{\widehat{\sigma}^2}\right] \xrightarrow{d} Y \sim \chi_1^2,$$

σύμφωνα με το θεώρημα Wilks. Επομένως, καταλήγουμε στον ακόλουθο ασυμπτωτικό έλεγχο μεγέθους α:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & n\log\left[1 + \frac{(\overline{x}-\mu_0)^2}{\widehat{\sigma}^2}\right] > \chi^2_{1;\alpha} \\ 0, & n\log\left[1 + \frac{(\overline{x}-\mu_0)^2}{\widehat{\sigma}^2}\right] \leqslant \chi^2_{1;\alpha} \end{cases}. \quad \square$$

Κεφάλαιο 6

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1. Έστω δείγμα X μεγέθους 1 από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\lambda > 0$ και συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 1, 2, \ldots.$$

Να βρεθεί μία α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$.

Λύση. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X)$ είναι α.ε. της $g(\lambda)$, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}\left[T(X)\right] = g(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \sum_{x=1}^{\infty} T(x)\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^x}{x!} = 1 - e^{-\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} T(x)\frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{x=1}^{\infty} T(x)\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^x}{x!} - 2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} T(x)\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} + \sum_{x=1}^{\infty}(-1)^x\frac{\lambda^x}{x!} \quad \Rightarrow$$

$$T(x) = 1 + (-1)^x = \begin{cases} 0, & x = 1, 3, \ldots \\ 2, & x = 2, 4, \ldots \end{cases}.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(X) = 1 + (-1)^X$ είναι μία α.ε. της $g(\lambda)$.

Άσκηση 2. Έστω δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ και γνωστό συντελεστή γραμμικής συσχέτισης $\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \rho \in (-1, 1)$ για $i, j = 1, 2, \ldots, n$ με $i \neq j$. Να βρεθεί μία α.ε. του σ^2.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mu$ και $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον,

υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\overline{X}\right) &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j}\operatorname{Cov}(X_i, X_j)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 + \sum_{i\neq j}\operatorname{Corr}(X_i, X_j)\sqrt{\operatorname{Var}(X_i)\operatorname{Var}(X_j)}\right] \\
&= \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{n^2-n}{n^2}\rho\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{n-1}{n}\rho\sigma^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S^2\right) &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^2\right) - n\mathbb{E}\left(\overline{X}^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - (n-1)\rho\sigma^2 - n\mu^2\right] = (1-\rho)\sigma^2.
\end{aligned}$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\frac{1}{1-\rho}S^2$ είναι μία α.ε. του σ^2.

Άσκηση 3. Έστω δείγμα X μεγέθους 1 από κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in [0,1]$ και συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^{|x|}(1-\vartheta)^{1-|x|}, \quad x \in \{-1, 0, 1\}.$$

α. Να εξεταστεί αν ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Να ελεγχθεί αν η στατιστική συνάρτηση X είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

γ. Να ελεγχθεί αν η στατιστική συνάρτηση $|X|$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι $S = \{-1, 0, 1\}$ για $\vartheta \in (0,1)$, $S = \{0\}$ για $\vartheta = 0$ και $S = \{-1, 1\}$ για $\vartheta = 1$. Εφόσον το στήριγμα εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου ϑ, έπεται ότι η κατανομή του δείγματος δεν ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Η στατιστική συνάρτηση X είναι τετριμμένα επαρκής για το ϑ. Για $\vartheta \neq 0$, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2} = 0, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \vartheta < 1,$$

οπότε η στατιστική συνάρτηση X δεν είναι πλήρης.

γ. Η στατιστική συνάρτηση $T(X) = |X|$ είναι τετριμμένα επαρκής για το ϑ. Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0 \ \forall \vartheta \in [0,1]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = \varphi(1)\frac{\vartheta}{2} + \varphi(0)(1-\vartheta) + \varphi(1)\frac{\vartheta}{2} = \varphi(0) + [\varphi(1) - \varphi(0)]\,\vartheta = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(X) = |X|$ είναι πλήρης.

Άσκηση 4. Έστω τ.δ. $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ από τη δισδιάστατη κανονική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης $\rho \in (-1, 1)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Να βρεθεί μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ρ και να εξεταστεί αν είναι πλήρης.

Λύση. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x}, \underline{y}; \rho) = (2\pi)^{-n}\left(1-\rho^2\right)^{-n/2} \exp\left\{\frac{\rho}{1-\rho^2}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\sum_{i=1}^n \left(x_i^2 + y_i^2\right)\right\},$$

όπου θέτουμε $h(\underline{x}, \underline{y}) = (2\pi)^{-n}$, $g(t_1, t_2, \rho) = \left(1-\rho^2\right)^{-n/2} \exp\left\{\frac{\rho t_1}{1-\rho^2} - \frac{t_2}{2(1-\rho^2)}\right\}$ και $\underline{T}(\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i, \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 + y_i^2\right)\right)$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η $\underline{T}(\underline{X}, \underline{Y}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i, \sum_{i=1}^n \left(X_i^2 + Y_i^2\right)\right)$ είναι επαρκής για το ρ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y; \rho) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\left(1-\rho^2\right)x^2 + \rho^2 x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}} \exp\left\{-\frac{(y-\rho x)^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},
\end{aligned}$$

δηλαδή $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Λόγω συμμετρίας, συμπεραίνουμε ότι $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Τελικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \mathbb{E}\left(Y_1^2\right) = \mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(Y_1) = 1,$$

$$\mathbb{E}(X_1 Y_1) = \mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = \mathrm{Corr}(X_1, Y_1)\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\,\mathrm{Var}(Y_1)} = \rho.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_\rho\left[\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 + Y_i^2\right) - 2n\right] = 0 \ \forall \rho > 0$, δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 + Y_i^2\right) - 2n$ είναι μία α.ε. του μηδενός η οποία είναι συνάρτηση της $\underline{T}(\underline{X}, \underline{Y})$. Επομένως, η επαρκής στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}, \underline{Y})$ **δεν** είναι πλήρης.

Άσκηση 5. Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Να δειχθεί ότι $\mathbb{E}\left(S^2 \mid \overline{X}\right) = \overline{X}$ και $\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) < \mathrm{Var}\left(S^2\right)$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης. Παρατηρούμε ότι $T(\underline{X}) = n\overline{X} = \psi\left(\overline{X}\right)$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.1 (σελίδα 30) και την πρόταση 3.3 (σελίδα 33), συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι κι αυτή επαρκής για το λ και πλήρης. Προφανώς ισχύει ότι $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}(X_1) = \lambda$, δηλαδή η $T^*(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι μία α.ε. του λ. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), έπεται ότι η $\psi(T^*) = T^*(\underline{X}) = \overline{X}$ είναι η ΑΕΕΔ του λ. Σύμφωνα με την πρόταση 3.1 (σελίδα 26), γνωρίζουμε επίσης ότι $\mathbb{E}\left(S^2\right) = \mathrm{Var}(X_1) = \lambda$, οπότε η δειγματική διασπορά S^2 είναι κι αυτή μία α.ε. του λ. Σύμφωνα με το θεώρημα Lehmann - Scheffé, η στατιστική συνάρτηση $\psi(T^*) = \mathbb{E}\left(S^2 \mid T^*\right) = \mathbb{E}\left(S^2 \mid \overline{X}\right)$ πρέπει να είναι η ΑΕΕΔ του λ. Εφόσον η $\overline{X}$ είναι η ΑΕΕΔ του λ και είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}\left(S^2 \mid \overline{X}\right) = \overline{X}$. Επιπλέον, αφού η $\overline{X}$ είναι η ΑΕΕΔ του λ και η S^2 είναι μία άλλη α.ε. του λ, έπεται ότι $\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right) < \mathrm{Var}\left(S^2\right)$.

Άσκηση 6. Έστω δείγμα $X \sim \mathrm{Laplace}(\mu, \lambda)$ μεγέθους 1 με γνωστό $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ και $f(x; \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}$ για $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$.

Λύση. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X) = |X - \mu|$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.6 (σελίδα 96), γνωρίζουμε ότι $T(X) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Έστω ότι $\mathbb{E}_\lambda\left[\psi(T)\right] = g(\lambda)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\int_0^\infty \psi(t)\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{1+\lambda} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \psi(t)\lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \psi(t)\lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt - \frac{\lambda}{1+\lambda}\int_0^\infty (\lambda+1) e^{-(\lambda+1)t} dt \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \psi(t)\lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \left(1 - e^{-t}\right)\lambda e^{-\lambda t} dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \lambda\left[\psi(t) - 1 + e^{-t}\right] e^{-\lambda t} dt = 0.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ταυτίζεται με τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $\lambda\left[\psi(t) - 1 + e^{-t}\right]$ στο σημείο λ. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.9 (σελίδα 34), έπεται ότι $\psi(t) - 1 + e^{-t} = 0$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\psi(T) = 1 - e^{-|X-\mu|}$ είναι η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\lambda)$.

Άσκηση 7. Έστω δείγμα $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathrm{Poisson}(2\lambda)$ μεγέθους 2. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ του λ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το στήριγμα $S = \{0, 1, 2, \dots\}^2$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του λ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f(x, y; \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^y}{y!} = \frac{2^y}{x!y!} e^{(x+y)\log\lambda - 3\lambda},$$

όπου $Q(\lambda) = \log\lambda$ και $T(x, y) = x + y$. Το $Q(\Theta) = \{\log\lambda : \lambda > 0\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας -

πληρότητας στην ΕΟΚ, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X,Y) = X+Y$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης. Γνωρίζουμε ότι $T = X+Y \sim \text{Poisson}(3\lambda)$, δηλαδή $\mathbb{E}(T) = 3\lambda$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), έπεται ότι η $\psi(T) = \frac{X+Y}{3}$ είναι η ΑΕΕΔ του λ.

Άσκηση 8. Έστω δείγμα $X_i \sim \mathcal{U}\left(-i(\vartheta-1), i(\vartheta+1)\right)$ για $i = 1,2,\ldots,n$. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ του ϑ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

$$X_i \sim \mathcal{U}\left(-i(\vartheta-1), i(\vartheta+1)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_i}{i} \sim \mathcal{U}\left(-\vartheta+1, \vartheta+1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{X_i}{i} - 1 \sim \mathcal{U}\left(-\vartheta, \vartheta\right).$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.12 (σελίδα 36), έπεται ότι $Y_i = \left|\frac{X_i}{i} - 1\right| \sim \mathcal{U}(0,\vartheta)$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.27 (σελίδα 51), η $\psi(T) = g(T) + \frac{1}{n}Tg'(T)$, όπου $T(\underline{X}) = \max_i \left|\frac{X_i}{i} - 1\right|$, είναι η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{X}) = T + \frac{1}{n}T = \frac{n+1}{n}\max_i \left|\frac{X_i}{i} - 1\right|$ είναι η ΑΕΕΔ του ϑ.

Άσκηση 9. Έστω δείγμα $X_i \sim \mathcal{N}(i\mu, 1)$ για $i = 1,2,\ldots,n$. Να υπολογιστεί η ΑΕΕΔ του μ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το στήριγμα $S = \mathbb{R}^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του μ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\mu) &= (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - i\mu)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \exp\left\{\mu \sum_{i=1}^n i x_i - \frac{\mu^2}{2}\sum_{i=1}^n i^2\right\}, \end{aligned}$$

όπου $Q(\mu) = \mu$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n i x_i$. Το $Q(\Theta) = \{\mu : \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n iX_i$ είναι επαρκής για το μ και πλήρης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^n i\mathbb{E}(X_i) = \mu \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\mu.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\psi(T) = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\sum_{i=1}^n iX_i$ είναι η ΑΕΕΔ του μ.

Άσκηση 10. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\mu,\sigma^2) = \frac{\mu}{\sigma}$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, S^2\right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)$ και πλήρης. Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, οι στατιστικές συναρτήσεις $\overline{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητες. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(\frac{\overline{X}}{S}\right) = \mathbb{E}\left(\overline{X}\right)\mathbb{E}\left(\frac{1}{S}\right) = \mu\mathbb{E}\left(\frac{1}{S}\right).$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$$Q = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1} \equiv \text{Gamma}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{Q}}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2^{-(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} x^{(n-1)/2-1} e^{-x/2} dx \\
&= \frac{2^{-(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \int_0^\infty x^{(n-2)/2-1} e^{-x/2} dx \\
&= \frac{2^{-(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \frac{\Gamma\left((n-2)/2\right)}{2^{-(n-2)/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left((n-2)/2\right)}{\Gamma\left((n-1)/2\right)},
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{S}\right) = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left((n-2)/2\right)}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \frac{1}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{\overline{X}}{S}\right) = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left((n-2)/2\right)}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \frac{\mu}{\sigma}.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\psi\left(\overline{X}, S^2\right) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-2)/2)} \frac{\overline{X}}{S}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\mu, \sigma^2)$. Παρατηρούμε ότι δεν ταυτίζεται με την ΕΜΠ της $g\left(\mu, \sigma^2\right)$, την οποία υπολογίσαμε στο παράδειγμα 3.44 (σελίδα 79).

Άσκηση 11. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(p) = p^k$ για $k \in \mathbb{N}$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$ είναι επαρκής για το p και πλήρης. Για $k \leqslant n$, παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}\left(X_1 X_2 \cdots X_k\right) = \left[\mathbb{E}(X_1)\right]^k = p^k$. Επομένως, η $V(\underline{X}) = X_1 X_2 \cdots X_k$ είναι μία α.ε. της $g(p)$. Για $t = k, k+1, \ldots, n$, εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι δυαδικές, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(V \mid T = t\right) &= \mathbb{E}\left(X_1 X_2 \cdots X_k \,|T = t\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = 1 \,|T = t\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = 1, \sum_{i=1}^n X_i = t\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = 1, \sum_{i=k+1}^n X_i = t-k\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^n X_i = t-k\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = t\right)} \\
&= \frac{p^k \binom{n-k}{t-k} p^{t-k}(1-p)^{n-t}}{\binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Lehmann - Scheffé, προκύπτει ότι η ΑΕΕΔ της $g(p)$ είναι η $\psi(T) = \frac{T(T-1)\cdots(T-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \mathbb{1}_{\{k, k+1, \ldots, n\}}(T)$. Για $k > n$, έστω ότι υπάρχει κάποια α.ε.

$T(\underline{X})$ της $g(p)$. Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T(\underline{X})\right] = g(p) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\underline{x}\in\{0,1\}^n} T(\underline{x})\mathbb{P}(\underline{X} = \underline{x}) = p^k \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\underline{x}\in\{0,1\}^n} T(\underline{x})p^{n\overline{x}}(1-p)^{n(1-\overline{x})} = p^k, \quad \forall p \in (0,1).$$

Εφόσον το αριστερό μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n και το δεξί μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ακριβώς $k > n$, είναι αδύνατο να είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, δεν υπάρχει καμία α.ε. της $g(p) = p^k$ για $k > n$.

Άσκηση 12. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Να υπολογιστεί η ΑΕΕΔ του ϑ και να συγκριθεί η διασπορά της με το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao.

Λύση. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.27 (σελίδα 51), η $\psi(T) = g(T) + \frac{1}{n}Tg'(T)$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(n)}$, είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$, οπότε η $\delta(\underline{X}) = T + \frac{1}{n}T = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ είναι η ΑΕΕΔ του ϑ. Προφανώς ισχύει ότι $\mathbb{E}\left[\delta(\underline{X})\right] = \vartheta$. Για $x \in (0, \vartheta)$, υπολογίζουμε ότι:

$$f_T(t) = \frac{n}{\vartheta^n}t^{n-1}, \quad \mathbb{E}\left(T^2\right) = \int_0^{\vartheta} t^2 \frac{n}{\vartheta^n}t^{n-1}dt = \frac{n}{\vartheta^n}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^{\vartheta} = \frac{n\vartheta^2}{n+2},$$

$$\operatorname{Var}\left[\delta(\underline{X})\right] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathbb{E}\left(T^2\right) - \vartheta^2 = \frac{(n+1)^2}{n+2}\frac{\vartheta^2}{n} - \vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \vartheta^{-n}, \quad \log f(\underline{x};\vartheta) = -n\log\vartheta,$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{x};\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta}, \quad \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta)\right)^2\right] = \frac{n^2}{\vartheta^2}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\operatorname{Var}\left[\delta(\underline{X})\right] = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)} < \frac{\vartheta^2}{n^2} = \frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)},$$

όπου $g(\vartheta) = \vartheta$. Επομένως, η ΑΕΕΔ $\delta(\underline{X})$ του ϑ έχει μικρότερη διασπορά από το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao. Αυτό δεν έρχεται σε αντιπαράθεση με το πόρισμα της ανισότητας Cramér - Rao, αφού η κατανομή του δείγματος προφανώς δεν ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta)\right] = -\frac{n}{\vartheta} \neq 0,$$

$$\operatorname{Var}\left[\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{S}^2_{\underline{X}}(\vartheta)\right] - \left[\mathbb{E}\left(\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta)\right)\right]^2 = 0 \neq \mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta),$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(\underline{X};\vartheta)\right] = \frac{n}{\vartheta^2} \neq -\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta),$$

$$\mathcal{I}_{X_1}(\vartheta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(X_1;\vartheta)\right)^2\right] = \frac{1}{\vartheta^2} \neq \frac{1}{n}\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta),$$

δηλαδή καμία από τις ιδιότητες της συνάρτησης score και της πληροφορίας κατά Fisher που προκύπτουν από τις συνθήκες ομαλότητας δεν ισχύει.

Άσκηση 13. Έστω δείγμα X μεγέθους 1 από την υπεργεωμετρική κατανομή με άγνωστο πληθυσμιακό μέγεθος $\vartheta \in \mathbb{N}$, γνωστό πλήθος δυνατών επιτυχιών $K \leqslant \vartheta$ και γνωστό πλήθος δοκιμών $N \leqslant \vartheta$, δηλαδή:

$$f(x;\vartheta) = \frac{\binom{K}{x}\binom{\vartheta-K}{N-x}}{\binom{\vartheta}{N}}, \quad x \in \{\max\{N+K-\vartheta, 0\}, \ldots, K\}.$$

Να υπολογιστεί η ΕΜΠ του ϑ.

Λύση. Υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\mathcal{L}(\vartheta \mid x)}{\mathcal{L}(\vartheta-1 \mid x)} = \frac{f(x;\vartheta)}{f(x;\vartheta-1)} = \frac{\binom{K}{x}\binom{\vartheta-K}{N-x}}{\binom{K}{x}\binom{\vartheta-K-1}{N-x}}\frac{\binom{\vartheta-1}{N}}{\binom{\vartheta}{N}} = \frac{\vartheta-K}{\vartheta-K-N+x}\frac{\vartheta-N}{\vartheta}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\mathcal{L}(\vartheta \mid x)}{\mathcal{L}(\vartheta-1 \mid x)} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\vartheta-K)(\vartheta-N) < \vartheta(\vartheta-K-N+x) \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta > \frac{KN}{x},$$

δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα για $\vartheta > \frac{KN}{x}$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(X) = \left\lfloor \frac{KN}{X} \right\rfloor$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

Άσκηση 14. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gamma}(k,\lambda)$ με γνωστό $k > 2$.

α. Να υπολογιστεί η ΑΕΕΔ του λ και να εξεταστεί αν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του λ.

β. Να συγκριθούν η ΑΕΕΔ του λ και η ΕΜΠ του λ με βάση το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι το στήριγμα $S = (0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του λ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\lambda) = \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i + nk\log\lambda\right\}\frac{1}{[\Gamma(k)]^n}\prod_{i=1}^n x_i^{k-1},$$

όπου $Q(\lambda) = -\lambda$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Το $Q(\Theta) = \{-\lambda : \lambda > 0\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, έπεται ότι η $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(nk,\lambda)$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{t}\frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)} t^{nk-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)} \int_0^\infty t^{nk-2} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)} \frac{\Gamma(nk-1)}{\lambda^{nk-1}} = \frac{\lambda}{nk-1}.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), έπεται ότι η $\delta(\underline{X}) = \frac{nk-1}{T} = \frac{nk-1}{n\overline{X}}$ είναι η ΑΕΕΔ του λ. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{T^2}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)} t^{nk-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)} \int_0^\infty t^{nk-3} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)} \frac{\Gamma(nk-2)}{\lambda^{nk-2}} = \frac{\lambda^2}{(nk-1)(nk-2)},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\left[\delta(\underline{X})\right] = (nk-1)^2 \mathbb{E}\left(\frac{1}{T^2}\right) - \lambda^2 = \frac{nk-1}{nk-2}\lambda^2 - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{nk-2}.$$

Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,\infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $Q'(\lambda) = -1 \neq 0$ συνεχή συνάρτηση. Επομένως, όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται και υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{X};\lambda) = -\lambda \sum_{i=1}^n X_i + nk\log\lambda - n\log\Gamma(k) + (k-1)\sum_{i=1}^n \log X_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f(\underline{X};\lambda) = -\sum_{i=1}^n X_i + \frac{nk}{\lambda}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log f(\underline{X};\lambda) = -\frac{nk}{\lambda^2},$$

$$\mathcal{I}_{\underline{X}}(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log f(\underline{X};\lambda)\right] = \frac{nk}{\lambda^2} \in (0,\infty).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{[g'(\lambda)]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\lambda)} = \frac{\lambda^2}{nk} < \frac{\lambda^2}{nk-2} = \mathrm{Var}\left[\delta(\underline{X})\right].$$

Επομένως, η ΑΕΕΔ $\delta(\underline{X})$ δεν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του λ.

β. Εφόσον η ΑΕΕΔ $\delta(\underline{X})$ είναι α.ε. του λ, έπεται ότι:

$$\mathrm{ΜΤΣ}_\lambda\left[\delta(\underline{X})\right] = \mathrm{Var}\left[\delta(\underline{X})\right] = \frac{\lambda^2}{nk-2}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda \mid \underline{x}) = -\lambda \sum_{i=1}^n x_i + nk\log\lambda - n\log\Gamma(k) + (k-1)\sum_{i=1}^n \log x_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{nk}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda} = \frac{k}{\overline{X}}, \quad \frac{\partial^2 \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda^2} = -\frac{nk}{\lambda^2} < 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\lambda \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0, \infty)$. Επομένως, η $\widehat{\lambda}(\underline{X}) = \frac{k}{\overline{X}}$ είναι η ΕΜΠ του λ. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(\widehat{\lambda}) = nk\mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{nk\lambda}{nk-1}, \quad \text{bias}_\lambda(\widehat{\lambda}) = \mathbb{E}(\widehat{\lambda}) - \lambda = \frac{\lambda}{nk-1},$$

$$\text{Var}(\widehat{\lambda}) = \frac{n^2k^2}{(nk-1)^2}\,\text{Var}\,[\delta(\underline{X})] = \frac{n^2k^2\lambda^2}{(nk-2)(nk-1)^2},$$

$$\begin{aligned}
\text{ΜΤΣ}_\lambda(\widehat{\lambda}) = \text{Var}(\widehat{\lambda}) + \text{bias}^2_\lambda(\widehat{\lambda}) &= \frac{n^2k^2\lambda^2}{(nk-2)(nk-1)^2} + \frac{\lambda^2}{(nk-1)^2} \\
&= \frac{n^2k^2 + nk - 2}{(nk-2)(nk-1)^2}\lambda^2 = \frac{nk+2}{(nk-1)(nk-2)}\lambda^2.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\text{ΜΤΣ}_\lambda(\widehat{\lambda}) > \text{ΜΤΣ}_\lambda\,[\delta(\underline{X})] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{nk+2}{(nk-1)(nk-2)} > \frac{1}{nk-2} \quad \Leftrightarrow \quad nk+2 > nk-1.$$

Επομένως, η ΑΕΕΔ $\delta(\underline{X})$ του λ έχει μικρότερο ΜΤΣ από την ΕΜΠ $\widehat{\lambda}$ του λ.

Άσκηση 15. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta, \vartheta)$ με $\vartheta > 0$.

α. Να εξεταστεί αν η στατιστική συνάρτηση $\overline{X}$ είναι η ΑΕΕΔ του ϑ.

β. Να εξεταστεί αν υπάρχει αποτελεσματική εκτιμήτρια για κάποια παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ και να υπολογιστεί η διασπορά της.

γ. Να βρεθεί η ΕΜΠ του ϑ. Να εξεταστεί αν είναι η ΑΕΕΔ του ϑ και αν είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ.

Λύση. α. Για $\underline{x} \in S = \mathbb{R}^n$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f(\underline{x}; \vartheta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \vartheta)^2\right\} \\
&= (2\pi)^{-n/2}\vartheta^{-n/2} \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n\vartheta}{2}\right\} \\
&= (2\pi)^{-n/2}e^{n\overline{x}} \exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n\vartheta}{2} - \frac{n}{2}\log\vartheta\right\},
\end{aligned}$$

όπου $A(\vartheta) = \frac{n\vartheta}{2} + \frac{n}{2}\log\vartheta$, $Q(\vartheta) = -\frac{n}{2\vartheta}$, $T(\underline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ και $h(\underline{x}) = (2\pi)^{-n/2}e^{n\overline{x}}$. Η ΕΟΚ είναι πλήρους τάξης και το $Q(\Theta) = \left\{-\frac{n}{2\vartheta} : \vartheta > 0\right\} = (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}(\overline{X}) = \vartheta$, δηλαδή η $\overline{X}$ είναι μία α.ε. του

ϑ. Εφόσον όμως δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης $T(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, **δεν** είναι η ΑΕΕΔ του ϑ.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{X};\vartheta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n\vartheta}{2},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = -\frac{n}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{2\vartheta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\vartheta^2 - n\vartheta\right) = \frac{n}{2\vartheta^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \vartheta(\vartheta+1)\right],\end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{2\vartheta^2} \neq 0 \ \forall\vartheta > 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57), η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta(\vartheta+1)$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,\infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος $\underline{X}$ ανήκει στην ΕΟΚ με:

$$f(\underline{x};\vartheta) = (2\pi)^{-n/2}e^{n\overline{x}}\exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n\vartheta}{2} - \frac{n}{2}\log\vartheta\right\},$$

όπου $T(\underline{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $Q(\vartheta) = -\frac{n}{2\vartheta}$ και $A(\vartheta) = \frac{n\vartheta}{2} + \frac{n}{2}\log\vartheta$. Υπολογίζουμε ότι:

$$Q'(\vartheta) = \frac{n}{2\vartheta^2} \neq 0, \quad A'(\vartheta) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2\vartheta},$$

οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Σύμφωνα με την πρόταση 3.9 (σελίδα 57), η $T(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta) = \frac{A'(\vartheta)}{Q'(\vartheta)} = \vartheta(\vartheta+1)$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(\underline{X};\vartheta) = \frac{n}{2\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(\underline{X};\vartheta)\right] = \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^2\right) - \frac{n}{2\vartheta^2} \\ &= n\frac{\vartheta+1}{\vartheta^2} - \frac{n}{2\vartheta^2} = n\frac{2\vartheta+1}{2\vartheta^2} \in (0,\infty).\end{aligned}$$

Τελικά, καταλήγουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T(\underline{X})\right] = g(\underline{\vartheta}) = \vartheta(\vartheta+1), \quad \mathrm{Var}\left[T(\underline{X})\right] = \frac{\left[g'(\vartheta)\right]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)} = 2\vartheta^2\frac{2\vartheta+1}{n}.$$

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\vartheta}{2},$$

$$\frac{\partial \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta} = -\frac{n}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vartheta^2 - \vartheta + T = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vartheta_1 = \frac{1+\sqrt{1+4T}}{-2} < 0, \quad \vartheta_2 = \frac{1-\sqrt{1+4T}}{-2} > 0.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial \ell(\vartheta|\underline{x})}{\partial \vartheta} > 0$ στο $(0,\vartheta_2)$ και $\frac{\partial \ell(\vartheta|\underline{x})}{\partial \vartheta} < 0$ στο (ϑ_2,∞), οπότε η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{\sqrt{1+4T}-1}{2}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ και είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης $T(\underline{X})$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0,\infty)$. Σύμφωνα με την ανισότητα Jensen, έπεται ότι:

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\vartheta}\right) = \mathbb{E}\left[h(T)\right] < h\left(\mathbb{E}(T)\right) = \frac{\sqrt{1+4\mathbb{E}(T)}-1}{2} = \frac{\sqrt{1+4\vartheta(\vartheta+1)}-1}{2} = \vartheta,$$

Εφόσον η ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}$ είναι μεροληπτική εκτιμήτρια του ϑ, συμπεραίνουμε ότι **δεν** είναι η ΑΕΕΔ του ϑ. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta(\vartheta+1)\right] \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}\left(0, 2\vartheta^2(2\vartheta+1)\right).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (0,\infty)$ με:

$$h\left(\vartheta(\vartheta+1)\right) = \frac{\sqrt{1+4\vartheta(\vartheta+1)}-1}{2} = \vartheta,$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}, \quad h'\left(\vartheta(\vartheta+1)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+4\vartheta(\vartheta+1)}} = \frac{1}{2\vartheta+1} \neq 0.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο δέλτα, καταλήγουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\vartheta}_n - \vartheta\right) \xrightarrow{d} h'\left(\vartheta(\vartheta+1)\right)Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2\vartheta^2}{2\vartheta+1}\right).$$

Εφόσον η ασυμπτωτική διασπορά της ΕΜΠ ισούται με $\mathcal{I}_{X_1}^{-1}(\vartheta)$, συμπεραίνουμε ότι η ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}_n$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ.

Άσκηση 16.* Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n \sim$ Laplace(μ,λ) με $\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\mu,\lambda) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\mu|}$ για $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta} = (\lambda,\mu)$, να εξεταστεί αν η ΕΜΠ του μ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ και να συγκριθεί η ασυμπτωτική κατανομή της ΕΜΠ του μ με την ασυμπτωτική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $\overline{X}_n$.

Λύση. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\mu,\lambda \mid \underline{x}) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n |x_i-\mu|\right\}, \quad \ell(\mu,\lambda \mid \underline{x}) = n\log\frac{\lambda}{2} - \lambda\sum_{i=1}^n |x_i-\mu|.$$

Αρχικά, σταθεροποιούμε το λ και μεγιστοποιούμε ως προς μ:

$$\frac{\partial \ell(\mu,\lambda \mid \underline{x})}{\partial \mu} = \lambda\sum_{i=1}^n \mathrm{sign}(x_i-\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mu}(\underline{x}) = \mathrm{median}(\underline{x}).$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial \ell}{\partial \mu} > 0$ για $\mu < \mathrm{median}(\underline{x})$ και $\frac{\partial \ell}{\partial \mu} < 0$ για $\mu > \mathrm{median}(\underline{x})$, οπότε η συνάρτηση $\ell(\mu,\lambda \mid \underline{x})$ έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\mu}(\underline{X}) = \mathrm{median}(\underline{X})$. Στη συνέχεια, μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση $\ell(\widehat{\mu},\lambda \mid \underline{x})$ ως προς λ:

$$\frac{\partial \ell(\widehat{\mu},\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n |x_i-\widehat{\mu}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda}(\underline{x}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n |x_i-\widehat{\mu}|},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\widehat{\mu},\lambda \mid \underline{x})}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\widehat{\mu},\lambda \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0,\infty)$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$\widehat{\underline{\vartheta}}(\underline{x}) = \left(\mathrm{median}(\underline{x}), \frac{n}{\sum_{i=1}^n |x_i - \mathrm{median}(\underline{x})|}\right).$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$F(\mu;\mu,\lambda) = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y-\mu|} dy = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda(y-\mu)} dy = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = \frac{1}{2},$$

δηλαδή το μ είναι η θεωρητική διάμεσος της κατανομής. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι $f(\mu;\mu,\lambda) = \frac{\lambda}{2}$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.12 (σελίδα 70), συμπεραίνουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mu}_n - \mu\right) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\underline{X}}(\mu) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\log f(\underline{X};\mu)\right)^2\right] = \lambda^2 \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \mathrm{sign}(X_i-\mu)\right)^2\right] \\
&= \lambda^2 \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathrm{sign}^2(X_i-\mu)\right] + \lambda^2 \mathbb{E}\left[\sum_{i\neq j} \mathrm{sign}(X_i-\mu)\mathrm{sign}(X_j-\mu)\right] \\
&= n\lambda^2 + \lambda^2 \sum_{i\neq j} \mathbb{E}\left[\mathrm{sign}(X_i-\mu)\right]\mathbb{E}\left[\mathrm{sign}(X_j-\mu)\right] \\
&= n\lambda^2 + n(n-1)\lambda^2\left[\mathbb{P}(X_1-\mu>0) - \mathbb{P}(X_1-\mu<0)\right]^2 \\
&= n\lambda^2 + n(n-1)\lambda^2\left[1-2F(\mu;\mu,\lambda)\right]^2 = n\lambda^2 \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Εφόσον η ασυμπτωτική διασπορά της ΕΜΠ ισούται με $\mathcal{I}_{X_1}^{-1}(\mu)$, συμπεραίνουμε ότι η ΕΜΠ $\widehat{\mu}_n$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ. Τελικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda x}{2} e^{-\lambda|x-\mu|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(y+\mu)}{2} e^{-\lambda|y|} dy \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda y}{2} e^{-\lambda|y|} dy}_{\substack{\text{ολοκλήρωμα} \\ \text{περιττής συνάρτησης}}} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy}_{\substack{\text{ολοκλήρωμα} \\ \text{άρτιας συνάρτησης}}} = 0 + \mu \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_1^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda x^2}{2} e^{-\lambda|x-\mu|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(y+\mu)^2}{2} e^{-\lambda|y|} dy \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda y^2}{2} e^{-\lambda|y|} dy}_{\substack{\text{ολοκλήρωμα} \\ \text{άρτιας συνάρτησης}}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mu y e^{-\lambda|y|} dy}_{\substack{\text{ολοκλήρωμα} \\ \text{περιττής συνάρτησης}}} + \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} dy}_{\substack{\text{ολοκλήρωμα} \\ \text{άρτιας συνάρτησης}}} \\
&= \int_0^{\infty} y^2 \lambda e^{-\lambda y} dy + 0 + \mu^2 \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{2}{\lambda^2} + \mu^2.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{2}{\lambda^2}$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, καταλήγουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow{d} V \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{\lambda^2}\right).$$

Παρατηρούμε ότι η ασυμπτωτική διασπορά της α.ε. $\overline{X}_n$ του μ είναι διπλάσια από την ασυμπτωτική διασπορά της ΕΜΠ $\widehat{\mu}_n = \mathrm{median}(\underline{x})$ του μ.

Άσκηση 17.* Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με $p \in (0,1)$, $\lambda > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x; p, \lambda) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ (1-p)\lambda e^{\lambda x}, & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Έστω $V_i = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_i)$ και $Y_i = |X_i|$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

α. Να αποδειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{V}, \overline{Y}\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \left(p, \frac{1}{\lambda}\right)$.

β. Να βρεθεί η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta} = (p, \lambda)$ και να εξεταστεί αν είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$.

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,1) \times (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και το στήριγμα $S = \mathbb{R}^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta}$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f(\underline{X};p,\lambda) &= \prod_{i:\ X_i>0} p\lambda e^{-\lambda X_i} \cdot \prod_{i:\ X_i\leqslant 0}(1-p)\lambda e^{\lambda X_i} \\
&= p^{n\overline{V}}\lambda^{n\overline{V}} \exp\left\{-\lambda \sum_{i:\ X_i>0} X_i\right\}(1-p)^{n\left(1-\overline{V}\right)}\lambda^{n\left(1-\overline{V}\right)} \exp\left\{\lambda \sum_{i:\ X_i\leqslant 0} X_i\right\} \\
&= p^{n\overline{V}}(1-p)^{n\left(1-\overline{V}\right)}\lambda^n \exp\left\{-\lambda\left(\sum_{i:\ X_i>0} X_i - \sum_{i:\ X_i\leqslant 0} X_i\right)\right\} \\
&= p^{n\overline{V}}(1-p)^{n\left(1-\overline{V}\right)}\lambda^n \exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^n |X_i|\right\} = p^{n\overline{V}}(1-p)^{n\left(1-\overline{V}\right)}\lambda^n e^{-n\lambda\overline{Y}} \\
&= \exp\left\{n\overline{V}\log\frac{p}{1-p} - n\lambda\overline{Y} - n\log\frac{1}{(1-p)\lambda}\right\},
\end{aligned}$$

δηλαδή η κατανομή του δείγματος ανήκει στην πλήρους τάξης 2-παραμετρική ΕΟΚ. Θέτουμε:

$$\underline{T}(\underline{X}) = (\overline{V},\overline{Y}), \quad \underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \left(n\log\frac{p}{1-p}, -n\lambda\right), \quad A(\underline{\vartheta}) = n\log\frac{1}{(1-p)\lambda}.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$\nabla_{\underline{\vartheta}}A(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{1-p} \\ -\frac{n}{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{p(1-p)} & 0 \\ 0 & -n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}p(1-p) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix},$$

οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = (\overline{V},\overline{Y})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}}A(\underline{\vartheta}) = \left(p, \frac{1}{\lambda}\right)$. Εναλλακτικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(V_1) = \mathbb{P}(X_1 > 0) = \int_0^\infty p\lambda e^{-\lambda x}dx = p,$$

δηλαδή $V_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{X};\underline{\vartheta}) = n\overline{V}\log p + n\left(1-\overline{V}\right)\log(1-p) + n\log\lambda - n\lambda\overline{Y},$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = \nabla_{\underline{\vartheta}}\log f(\underline{X};\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{n\overline{V}}{p} - \frac{n\left(1-\overline{V}\right)}{1-p} \\ \frac{n}{\lambda} - n\overline{Y} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\mathcal{S}_{\underline{X}}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -\frac{n\overline{V}}{p^2} - \frac{n\left(1-\overline{V}\right)}{(1-p)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{\lambda^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{I}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) = -\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta})\right] = \begin{bmatrix} \frac{n}{p(1-p)} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(|X_1| \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(-y \leqslant X_1 \leqslant y\right) = F(y; p, \lambda) - F(-y; p, \lambda),$$

$$f_{Y_1}(y) = f(y; p, \lambda) + f(-y; p, \lambda) = p\lambda e^{-\lambda y} + (1-p)\lambda e^{-\lambda y} = \lambda e^{-\lambda x},$$

δηλαδή $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Τελικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(V_1 Y_1\right) = \int_0^\infty x p \lambda e^{-\lambda x} = p\lambda,$$

$$\mathrm{Cov}(V_1, Y_1) = \mathbb{E}(V_1 Y_1) - \mathbb{E}(V_1)\mathbb{E}(Y_1) = p\lambda - p\lambda = 0,$$

$$\mathbb{E}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] = \left(p, \frac{1}{\lambda}\right) = \underline{g}(\underline{\vartheta}),$$

$$\mathrm{Var}\left[\underline{T}(\underline{X})\right] = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} p(1-p) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix} = \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}_{\underline{g}}^{\mathrm{T}}(\underline{\vartheta}).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = (\overline{V}, \overline{Y})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta})$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}_{\underline{X}}^{-1}(\underline{\vartheta})\mathcal{S}_{\underline{X}}(\underline{\vartheta}) &= \begin{bmatrix} \frac{p(1-p)}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n\overline{V}}{p} - \frac{n\left(1-\overline{V}\right)}{1-p} \\ \frac{n}{\lambda} - n\overline{Y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{V} - p \\ \overline{Y} - \lambda \end{bmatrix} = \underline{T}(\underline{X}) - \underline{g}(\underline{\vartheta}). \end{aligned}$$

Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = (\overline{V}, \overline{Y})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(p, \lambda \mid \underline{X}) = n\overline{V}\log p + n\left(1 - \overline{V}\right)\log(1-p) + n\log\lambda - n\lambda\overline{Y},$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial p} = \frac{n\overline{V}}{p} - \frac{n\left(1-\overline{V}\right)}{1-p} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n\overline{Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vartheta}_1 = \overline{V}, \quad \widehat{\vartheta}_2 = \frac{1}{\overline{Y}},$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2} = -\frac{n\overline{V}}{p^2} - \frac{n\left(1-\overline{V}\right)}{(1-p)^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial p \partial \lambda} = 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(p, \lambda \mid \underline{X})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0,1) \times (0, \infty)$. Επομένως, η $\widehat{\underline{\vartheta}} = \left(\overline{V}, \frac{1}{\overline{Y}}\right)$ είναι η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$. Αν $v_1 = \cdots = v_n = 0$, τότε παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(p,\lambda \mid \underline{X}) = (1-p)^n \lambda^n e^{-n\lambda\overline{Y}}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα ως προς p και δεν υπάρχει ΕΜΠ του p. Αν $v_1 = \cdots = v_n = 1$, τότε παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(p,\lambda \mid \underline{X}) = p^n \lambda^n e^{-n\lambda\overline{Y}}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα ως προς p και δεν υπάρχει ΕΜΠ του p. Σύμφωνα με το πολυδιάστατο κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[\underline{T}_n(\underline{X}) - \underline{g}(\underline{\vartheta})\right] \xrightarrow{d} W \sim \mathcal{N}_2\left(\underline{0}, \Sigma\right), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} p(1-p) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\underline{h}(x,y) = \left(x, \frac{1}{y}\right)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο σύνολο $\Theta = (0,1) \times (0,\infty)$ με:

$$\mathcal{J}_{\underline{h}}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(p, 1/\lambda\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την πολυδιάστατη μέθοδο δέλτα, έπεται ότι:

$$\sqrt{n}\left(\underline{\widehat{\vartheta}}_n - \underline{\vartheta}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(p, 1/\lambda\right) W \sim \mathcal{N}_2\left(\underline{0}, \Sigma^*\right),$$

$$\Sigma^* = \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(p, 1/\lambda\right) \Sigma \mathcal{J}_{\underline{h}}^{\mathrm{T}}\left(p, 1/\lambda\right) = \begin{bmatrix} p(1-p) & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} = \mathcal{I}_{X_1}^{-1}(\underline{\vartheta}).$$

Εφόσον ο ασυμπτωτικός πίνακας συνδιακύμανσης της ΕΜΠ ισούται με $\mathcal{I}_{X_1}^{-1}(\underline{\vartheta})$, συμπεραίνουμε ότι η ΕΜΠ $\underline{\widehat{\vartheta}} = \left(\overline{V}, \frac{1}{\overline{Y}}\right)$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$.

Άσκηση 18.* Έστω τ.δ. $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ με $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ για $\lambda > 0$ και $(Y_1 \mid X_1 = x) \sim \mathrm{Poisson}(\mu x)$ για $\mu > 0$ και $x > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X},\underline{Y}) = \left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\lambda,\mu) = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda}\right)$.

β. Να βρεθεί η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta} = (\lambda,\mu)$ και να εξεταστεί αν είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x},\underline{y};\lambda,\mu) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;\lambda)\mathbb{P}_\mu(Y_i = y_i \mid x_i) = \lambda^n e^{-n\lambda\overline{x}} \cdot e^{-n\mu\overline{x}} \mu^{n\overline{y}} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{y_i}}{y_i!} \\ &= \exp\left\{-n(\lambda+\mu)\overline{x} + n\overline{y}\log\mu - n\log\frac{1}{\lambda}\right\} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{y_i}}{y_i!}. \end{aligned}$$

δηλαδή η κατανομή του δείγματος ανήκει στην πλήρους τάξης 2-παραμετρική ΕΟΚ. Θέτουμε:

$$\underline{T}(\underline{X},\underline{Y}) = (\overline{X},\overline{Y}), \quad \underline{Q}(\underline{\vartheta}) = (-n(\lambda+\mu), n\log\mu), \quad A(\underline{\vartheta}) = n\log\frac{1}{\lambda}.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$\nabla_{\underline{\vartheta}} A(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\lambda} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -n & -n \\ 0 & \frac{n}{\mu} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta}) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} -1 & -\mu \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X},\underline{Y}) = (\overline{X},\overline{Y})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}} A(\underline{\vartheta}) = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda}\right)$. Εναλλακτικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Y_1 \mid X_1)\right] = \mathbb{E}(\mu X_1) = \frac{\mu}{\lambda},$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_1^2\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Y_1^2 \mid X_1)\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(Y_1 \mid X_1) + (\mathbb{E}(Y_1 \mid X_1))^2\right] \\
&= \mathbb{E}(\mu X_1 + \mu^2 X_1^2) = \frac{\mu}{\lambda} + \mu^2\left[\mathrm{Var}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2\right] = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{2\mu^2}{\lambda^2},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(Y_1) = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{2\mu^2}{\lambda^2} - \frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2},$$

$$\mathbb{E}(X_1Y_1) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_1Y_1 \mid X_1)\right] = \mathbb{E}\left[X_1\mathbb{E}(Y_1 \mid X_1)\right] = \mathbb{E}\left(\mu X_1^2\right) = \frac{2\mu}{\lambda^2},$$

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y_1) = \mathbb{E}(X_1Y_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1) = \frac{2\mu}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda^2}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{X},\underline{Y};\underline{\vartheta}) = n\log\lambda - n(\lambda+\mu)\overline{X} + n\overline{Y}\log\mu,$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\vartheta}) = \nabla_{\underline{\vartheta}}\log f(\underline{X},\underline{Y};\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda} - n\overline{X} \\ -n\overline{X} + \frac{n\overline{Y}}{\mu} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\mathcal{S}_{\underline{X},\underline{Y}}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n\overline{Y}}{\mu^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{I}_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\vartheta}) = -\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\vartheta})\right] = \begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\lambda\mu} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ -\frac{\mu}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[\underline{T}(\underline{X},\underline{Y})\right] = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda}\right) = \underline{g}(\underline{\vartheta}),$$

$$\operatorname{Var}\left[\underline{T}(\underline{X},\underline{Y})\right] = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & \frac{\mu}{\lambda^2} \\ \frac{\mu}{\lambda^2} & \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \end{bmatrix} = \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}^{-1}_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta}).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X},\underline{Y}) = (\overline{X},\overline{Y})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta})$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}^{-1}_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\vartheta})\mathcal{S}_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\vartheta}) &= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\mu & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda} - n\overline{X} \\ -n\overline{X} + \frac{n\overline{Y}}{\mu} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{X} - \frac{1}{\lambda} \\ \overline{Y} - \frac{\mu}{\lambda} \end{bmatrix} = \underline{T}(\underline{X},\underline{Y}) - \underline{g}(\underline{\vartheta}).\end{aligned}$$

Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X},\underline{Y}) = (\overline{X},\overline{Y})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda,\mu \mid \underline{x},\underline{y}) = n\log\lambda - n(\lambda+\mu)\overline{x} + n\overline{y}\log\mu + \sum_{i=1}^{n} y_i \log x_i - \sum_{i=1}^{n}\log y_i!,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n\overline{x} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \mu} = -n\overline{x} + \frac{n\overline{y}}{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}, \quad \widehat{\mu} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}},$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} = -\frac{n\overline{y}}{\mu^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \mu} = 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\lambda,\mu \mid \underline{x},\underline{y})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0,\infty)^2$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{\widehat{\vartheta}}(\underline{X},\underline{Y}) = \left(\frac{1}{\overline{X}}, \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}\right)$ είναι η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta} = (\lambda,\mu)$. Σύμφωνα με το πολυδιάστατο κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[\underline{T}_n(\underline{X}) - \underline{g}(\underline{\vartheta})\right] \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}_2\left(\underline{0},\Sigma\right), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & \frac{\mu}{\lambda^2} \\ \frac{\mu}{\lambda^2} & \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\underline{h}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (0,\infty)^2$ με:

$$\mathcal{J}_{\underline{h}}(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(1/\lambda, \mu/\lambda\right) = \begin{bmatrix} -\lambda^2 & 0 \\ -\lambda\mu & \lambda \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την πολυδιάστατη μέθοδο δέλτα, έπεται ότι:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\underline{\vartheta}}_n - \underline{\vartheta}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(1/\lambda, \mu/\lambda\right) Y \sim \mathcal{N}_2\left(\underline{0}, \Sigma^*\right),$$

$$\Sigma^* = \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(1/\lambda, \mu/\lambda\right) \Sigma \mathcal{J}_{\underline{h}}^{\mathrm{T}}\left(1/\lambda, \mu/\lambda\right) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{bmatrix} = \mathcal{I}^{-1}_{X_1,Y_1}(\underline{\vartheta}).$$

Εφόσον ο ασυμπτωτικός πίνακας συνδιακύμανσης της ΕΜΠ ισούται με $\mathcal{I}^{-1}_{X_1,Y_1}(\underline{\vartheta})$, συμπεραίνουμε ότι η ΕΜΠ $\widehat{\underline{\vartheta}} = \left(\frac{1}{\overline{X}}, \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}\right)$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$.

Άσκηση 19.* Έστω 2 ανεξάρτητα τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $Y_1, \ldots, Y_n \sim \text{Exp}(\mu)$. Θεωρούμε ότι παρατηρούμε μόνο τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών:

$$Z_i = \min\left\{X_i, Y_i\right\}, \quad W_i = \begin{cases} 1, & Z_i = X_i \\ 0, & Z_i = Y_i \end{cases}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{Z}, \underline{W}) = \left(\overline{Z}, \overline{W}\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

β. Να βρεθεί η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta} = (\lambda, \mu)$ και να εξεταστεί αν είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$.

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \infty)^2$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και το στήριγμα $S = (0, \infty)^n \times (0, \infty)^n$ της κατανομής του δείγματος $(\underline{Z}, \underline{W})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta} = (\lambda, \mu)$. Για $t > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_i > t, W_i = 1) &= \mathbb{P}(X_i > t, X_i < Y_i) = \mathbb{P}(t < X_i < Y_i) \\
&= \int_t^\infty \mathbb{P}(t < X_i < Y_i \mid X_i = x) f_{X_i}(x) dx \\
&= \int_t^\infty \mathbb{P}(t < x < Y_i \mid X_i = x) f_{X_i}(x) dx = \int_t^\infty \mathbb{P}(Y_i > x) f_{X_i}(x) dx \\
&= \int_t^\infty e^{-\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.
\end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, έπεται ότι:

$$\mathbb{P}(Z_i > t, W_i = 0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές Z_i και W_i είναι ανεξάρτητες για $i = 1, 2, \ldots, n$ με $Z_i \sim \text{Exp}(\lambda+\mu)$ και $W_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. Στη συνέχεια,

υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{Z},\underline{W};\lambda,\mu) &= \prod_{i=1}^{n} f(Z_i;\lambda,\mu) f(W_i;\lambda,\mu) \\ &= (\lambda+\mu)^n \exp\left\{-(\lambda+\mu)\sum_{i=1}^{n} Z_i\right\} \cdot \prod_{i\colon W_i=1} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \prod_{i\colon W_i=0} \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ &= (\lambda+\mu)^n e^{-n(\lambda+\mu)\overline{Z}} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n\overline{W}} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n\left(1-\overline{W}\right)} \\ &= e^{-n(\lambda+\mu)\overline{Z}} \lambda^{n\overline{W}} \mu^{n\left(1-\overline{W}\right)} = \exp\left\{-n(\lambda+\mu)\overline{Z} + n\overline{W}\log\frac{\lambda}{\mu} + n\log\mu\right\}. \end{aligned}$$

δηλαδή η κατανομή του δείγματος ανήκει στην πλήρους τάξης 2-παραμετρική ΕΟΚ. Θέτουμε:

$$\underline{T}(\underline{Z},\underline{W}) = (\overline{Z},\overline{W}), \quad \underline{Q}(\underline{\vartheta}) = \left(-n(\lambda+\mu), n\log\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad A(\underline{\vartheta}) = -n\log\mu.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$\nabla_{\underline{\vartheta}} A(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{n}{\mu} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -n & -n \\ \frac{n}{\lambda} & -\frac{n}{\mu} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta}) = \frac{\lambda\mu}{n(\lambda+\mu)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} & 1 \\ -\frac{1}{\lambda} & -1 \end{bmatrix},$$

οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{Z},\underline{W}) = (\overline{Z},\overline{W})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\underline{Q}}^{-1}(\underline{\vartheta})\nabla_{\underline{\vartheta}} A(\underline{\vartheta}) = \left(\frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. Εναλλακτικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{Z},\underline{W};\underline{\vartheta}) = -n(\lambda+\mu)\overline{Z} + n\overline{W}\log\lambda + n\left(1-\overline{W}\right)\log\mu,$$

$$\mathcal{S}_{\underline{Z},\underline{W}}(\underline{\vartheta}) = \nabla_{\underline{\vartheta}} \log f(\underline{Z},\underline{W};\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -n\overline{Z} + \frac{n\overline{W}}{\lambda} \\ -n\overline{Z} + \frac{n\left(1-\overline{W}\right)}{\mu} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}_{\underline{Z},\underline{W}}(\underline{\vartheta}) = \mathcal{J}_{\mathcal{S}_{\underline{Z},\underline{W}}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -\frac{n\overline{W}}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n\left(1-\overline{W}\right)}{\mu^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{I}_{\underline{Z},\underline{W}}(\underline{\vartheta}) = -\mathbb{E}\left[\mathcal{H}_{\underline{Z},\underline{W}}(\underline{\vartheta})\right] = \begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda(\lambda+\mu)} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\mu(\lambda+\mu)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(\lambda+\mu)^2} & -\frac{1}{(\lambda+\mu)^2} \\ \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} & -\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2} \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[\underline{T}(\underline{Z},\underline{W})\right] = \left(\frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) = \underline{g}(\underline{\vartheta}),$$

$$\operatorname{Var}\left[\underline{T}(\underline{Z},\underline{W})\right] = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \end{bmatrix} = \mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}^{-1}_{\underline{Z},\underline{W}}(\underline{\vartheta})\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta}).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{Z},\underline{W}) = (\overline{Z},\overline{W})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\underline{g}(\underline{\vartheta})$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\underline{g}}(\underline{\vartheta})\mathcal{I}^{-1}_{\underline{Z},\underline{W}}(\underline{\vartheta})\mathcal{S}_{\underline{Z},\underline{W}}(\underline{\vartheta}) &= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\lambda+\mu} & -\frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} & -\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -n\overline{Z} + \frac{n\overline{W}}{\lambda} \\ -n\overline{Z} + \frac{n(1-\overline{W})}{\mu} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{Z} - \frac{1}{\lambda+\mu} \\ \overline{W} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix} = \underline{T}(\underline{Z},\underline{W}) - \underline{g}(\underline{\vartheta}).\end{aligned}$$

Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{Z},\underline{W}) = (\overline{Z},\overline{W})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $\underline{g}(\underline{\vartheta})$.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda,\mu \mid \underline{Z},\underline{W}) = -(\lambda+\mu)n\overline{Z} + n\overline{W}\log\lambda + n(1-\overline{W})\log\mu,$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\lambda} = -n\overline{Z} + \frac{n\overline{W}}{\lambda} = 0, \quad \frac{\partial\ell}{\partial\mu} = -n\overline{Z} + \frac{n(1-\overline{W})}{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda} = \frac{\overline{W}}{\overline{Z}}, \quad \widehat{\mu} = \frac{1-\overline{W}}{\overline{Z}},$$

$$\frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda^2} = -\frac{n\overline{W}}{\lambda^2} < 0, \quad \frac{\partial^2\ell}{\partial\mu^2} = -\frac{n\overline{W}}{\mu^2} < 0, \quad \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda\partial\mu} = 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\lambda,\mu \mid \underline{Z},\underline{W})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0,\infty)^2$. Επομένως, η $\widehat{\underline{\vartheta}}(\overline{Z},\overline{W}) = \left(\frac{\overline{W}}{\overline{Z}}, \frac{1-\overline{W}}{\overline{Z}}\right)$ είναι η ΕΜΠ του $\underline{\vartheta}$. Αν $w_1 = \cdots = w_n = 0$, τότε παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(\lambda,\mu \mid \underline{z},\underline{w}) = \mu^n e^{-(\lambda+\mu)n\overline{z}}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα ως προς λ και δεν υπάρχει ΕΜΠ του λ. Αν $w_1 = \cdots = w_n = 1$, τότε παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(\lambda,\mu \mid \underline{z},\underline{w}) = \lambda^n e^{-(\lambda+\mu)n\overline{z}}$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα ως προς μ και δεν υπάρχει ΕΜΠ του μ. Σύμφωνα με το πολυδιάστατο κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[\underline{T}_n(\underline{X}) - \underline{g}(\underline{\vartheta})\right] \xrightarrow{d} V \sim \mathcal{N}_2\left(\underline{0},\Sigma\right), \quad \Sigma = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\underline{h}(x,y) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1-y}{x}\right)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (0,\infty)^2$ με:

$$\mathcal{J}_{\underline{h}}(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1-y}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(\frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) = (\lambda+\mu)\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu & -1 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την πολυδιάστατη μέθοδο δέλτα, έπεται ότι:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\underline{\vartheta}}_n - \underline{\vartheta}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(\frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) V \sim \mathcal{N}_2\left(\underline{0}, \Sigma^*\right),$$

$$\Sigma^* = \mathcal{J}_{\underline{h}}\left(\frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \Sigma \mathcal{J}_{\underline{h}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) = (\lambda+\mu)\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix} = \mathcal{I}_{Z_1,W_1}^{-1}(\underline{\vartheta}).$$

Εφόσον ο ασυμπτωτικός πίνακας συνδιακύμανσης της ΕΜΠ ισούται με $\mathcal{I}_{Z_1,W_1}^{-1}(\underline{\vartheta})$, συμπεραίνουμε ότι η ΕΜΠ $\widehat{\underline{\vartheta}} = \left(\frac{\overline{W}}{\overline{Z}}, \frac{1-\overline{W}}{\overline{Z}}\right)$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\underline{\vartheta}$.

Άσκηση 20. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(\vartheta, 2\vartheta)$ με $\vartheta > 0$. Να βρεθούν η ροπο-εκτιμήτρια και η ΕΜΠ του ϑ. Να συγκριθούν με βάση το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Λύση. Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad \frac{3\vartheta}{2} = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{2\overline{X}}{3}.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(\widetilde{\vartheta}) = \frac{2\mathbb{E}(X_1)}{3} = \vartheta, \quad \mathrm{Var}(\widetilde{\vartheta}) = \frac{4\,\mathrm{Var}(X_1)}{9n} = \frac{\vartheta^2}{27n},$$

$$\mathrm{MT\Sigma}_{\vartheta}(\widetilde{\vartheta}) = \mathrm{Var}(\widetilde{\vartheta}) + \mathrm{bias}^2_{\vartheta}(\widetilde{\vartheta}) = \frac{\vartheta^2}{27n}.$$

Ακριβώς όπως στο παράδειγμα 3.40 (σελίδα 77), υπολογίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{1}{2}X_{(n)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Για $x \in [\vartheta, 2\vartheta]$, γνωρίζουμε ότι:

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n}{\vartheta^n}(x-\vartheta)^{n-1}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{(n)}\right] &= \int_{\vartheta}^{2\vartheta} x\frac{n}{\vartheta^n}(x-\vartheta)^{n-1}dx = \left[\frac{x}{\vartheta^n}(x-\vartheta)^n\right]_{\vartheta}^{2\vartheta} - \int_{\vartheta}^{2\vartheta}\frac{1}{\vartheta^n}(x-\vartheta)^n dx\\ &= 2\vartheta - \left[\frac{(x-\vartheta)^{n+1}}{(n+1)\vartheta^n}\right]_{\vartheta}^{2\vartheta} = \frac{(2n+1)\vartheta}{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{(n)}^2\right] &= \int_{\vartheta}^{2\vartheta} x^2\frac{n}{\vartheta^n}(x-\vartheta)^{n-1}dx = \left[\frac{x^2}{\vartheta^n}(x-\vartheta)^n\right]_{\vartheta}^{2\vartheta} - \int_{\vartheta}^{2\vartheta}\frac{2x}{\vartheta^n}(x-\vartheta)^n dx\\ &= 4\vartheta^2 - \frac{2\vartheta}{n+1}\int_{\vartheta}^{2\vartheta}(n+1)(x-\vartheta)^n\frac{x}{\vartheta^{n+1}}dx\\ &= 4\vartheta^2 - \frac{2\vartheta}{n+1}\frac{(2n+3)\,\vartheta}{n+2} = \frac{2(2n^2+4n+1)\vartheta^2}{(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\left[X_{(n)}\right] = \frac{2(2n^2+4n+1)\vartheta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{(4n^2+4n+1)\vartheta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\vartheta^2}{(n+2)(n+1)^2},$$

$$\mathbb{E}(\widehat{\vartheta}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X_{(n)}\right] = \frac{(2n+1)\vartheta}{2(n+1)}, \quad \mathrm{bias}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = \mathbb{E}(\widehat{\vartheta}) - \vartheta = -\frac{\vartheta}{2(n+1)}$$

$$\mathrm{Var}(\widehat{\vartheta}) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Var}\left[X_{(n)}\right] = \frac{n\vartheta^2}{4(n+2)(n+1)^2},$$

$$\mathrm{ΜΤΣ}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = \mathrm{Var}(\widehat{\vartheta}) + \mathrm{bias}^2_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = \frac{n\vartheta^2}{4(n+2)(n+1)^2} + \frac{\vartheta^2}{4(n+1)^2} = \frac{\vartheta^2}{2(n+1)(n+2)}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\mathrm{ΜΤΣ}_\vartheta(\widetilde{\vartheta}) \geqslant \mathrm{ΜΤΣ}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vartheta^2}{27n} \geqslant \frac{\vartheta^2}{2(n+1)(n+2)} \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 - 21n + 4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$n \leqslant \frac{21-\sqrt{409}}{4} \approx 0.19 \quad \text{ή} \quad n \geqslant \frac{21+\sqrt{409}}{4} \approx 10.31.$$

Άρα η ΕΜΠ του ϑ έχει μικρότερο ΜΤΣ από τη ροποεκτιμήτρια του ϑ για $n \geqslant 11$.

Άσκηση 21. Θεωρούμε 2 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ και $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Exp}(1/\lambda)$.

α. Να βρεθεί μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το λ και να εξεταστεί αν είναι πλήρης.

β. Να βρεθεί η ΕΜΠ του λ και να εξεταστεί αν είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του λ.

γ. Να κατασκευαστεί ΔΕ ίσων ουρών για το λ.

δ. Να κατασκευαστεί ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών για το λ.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}, \underline{y}; \lambda) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;\lambda) f(y_i;\lambda) = \lambda^n \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right\} \cdot \lambda^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n y_i\right\} \\ &= e^{-n\lambda\overline{x} - n\overline{y}/\lambda} = g\left(\underline{T}(\underline{x}), \lambda\right) h(\underline{x}), \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}, \underline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$, $g(t_1, t_2, \lambda) = e^{-n\lambda t_1 - nt_2/\lambda}$, $h(\underline{x}, \underline{y}) = 1$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η $\underline{T}(\underline{X}, \underline{Y}) = \left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ είναι επαρκής για το λ. Παρατηρούμε ότι $n\overline{X} \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n\overline{X}}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{(n-2)!}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{n-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{n\overline{X}}\right) = \lambda. \end{aligned}$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}\left(\overline{Y}\right) = \mathbb{E}(Y_1) = \lambda$, δηλαδή υπάρχουν 2 διαφορετικές α.ε. του λ οι οποίες είναι συναρτήσεις της $\underline{T}(\underline{X})$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.6 (σελίδα 33), η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ **δεν** είναι πλήρης.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda \mid \underline{x}, \underline{y}) = -n\lambda\overline{x} - \frac{n\overline{y}}{\lambda}, \quad \frac{\partial\ell(\lambda \mid \underline{x}, \underline{y})}{\partial\lambda} = -n\overline{x} + \frac{n\overline{y}}{\lambda^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda} = \sqrt{\frac{\overline{y}}{\overline{x}}},$$

$$\frac{\partial\ell(\lambda \mid \underline{x}, \underline{y}) =}{\partial\lambda} - \frac{2n\overline{y}}{\lambda^3} < 0, \quad \forall\lambda > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\lambda \mid \underline{x}, \underline{y})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0, \infty)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\lambda}(\overline{X}, \overline{Y}) = \sqrt{\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}}$ είναι η ΕΜΠ του λ. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[T_n(\underline{X}, \underline{Y}) - \left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)\right] \xrightarrow{d} V \sim \mathcal{N}_2\left(0, \Sigma\right), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $h(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (0, \infty)^2$ με:

$$h\left(1/\lambda, \lambda\right) = \lambda, \quad \nabla h(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x^3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} \end{bmatrix}, \quad \nabla h\left(1/\lambda, \lambda\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\lambda^2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την πολυδιάστατη μέθοδο δέλτα, καταλήγουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}_n - \lambda\right) \xrightarrow{d} \nabla^{\mathrm{T}} h\left(1/\lambda, \lambda\right) V = W \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

Τελικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{I}_{\underline{X}, \underline{Y}}(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log f(\underline{X}, \underline{Y}; \lambda)\right] = \frac{2n}{\lambda^3}\mathbb{E}\left(\overline{Y}\right) = \frac{2n}{\lambda^2}.$$

Εφόσον η ασυμπτωτική διασπορά της ΕΜΠ ισούται με $\mathcal{I}^{-1}_{X_1, Y_1}(\lambda)$, συμπεραίνουμε ότι η ΕΜΠ $\widehat{\lambda}$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του λ.

γ. Γνωρίζουμε ότι $n\overline{X} \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ και $n\overline{Y} \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{1}{\lambda}\right)$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $Q_1 = 2n\lambda\overline{X} \sim \chi^2_{2n}$ και $Q_2 = \frac{2n}{\lambda}\overline{Y} \sim \chi^2_{2n}$, σύμφωνα με τη σημείωση 3.11 (σελίδα 39). Εφόσον τα 2 δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έπεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές Q_1 και Q_2 είναι ανεξάρτητες. Επομένως, κατασκευάζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{Q_1/2n}{Q_2/2n} = \lambda^2\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \sim F_{2n,2n}.$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς λ:

$$c_1 \leqslant \lambda^2 \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{c_1 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}} \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{c_2 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = F_{2n,2n;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = F_{2n,2n;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\sqrt{F_{2n,2n;1-\alpha/2} \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}}, \sqrt{F_{2n,2n;\alpha/2} \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}}\right].$$

δ. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, έπεται ότι:

$$W_n = \sqrt{2n}\left(\frac{\widehat{\lambda}_n}{\lambda} - 1\right) \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{2}}{\lambda} W = Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant W_n \leqslant c_2$ ως προς λ:

$$c_1 \leqslant \sqrt{2n}\left(\frac{\widehat{\lambda}_n}{\lambda} - 1\right) \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\widehat{\lambda}_n}{1 + c_2/\sqrt{2n}} \leqslant \lambda \leqslant \frac{\widehat{\lambda}_n}{1 + c_1/\sqrt{2n}}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = Z_{\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{1 + Z_{\alpha/2}/\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n}}, \frac{1}{1 - Z_{\alpha/2}/\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n}}\right].$$

Άσκηση 22. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$.

α. Να εξεταστεί αν οι $T_n(\underline{X}) = X_{(n)}$ και $U_n(\underline{X}) = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ είναι συνεπείς εκτιμήτριες του ϑ. Να προσδιοριστούν οι ασυμπτωτικές κατανομές τους.

β. Να κατασκευαστούν 2 διαφορετικά ασυμπτωτικά ΔΕ ίσων ουρών για το ϑ.

Λύση. α. Για $x \in [0, \vartheta]$, γνωρίζουμε ότι:

$$F_{X_{(n)}}(x) = \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n, \quad f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n}{\vartheta^n} x^{n-1}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T_n(\underline{X})\right] = \frac{n}{\vartheta^n} \int_0^{\vartheta} x^n dx = \frac{n}{\vartheta^n} \frac{\vartheta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\vartheta}{n+1} \overset{n \to \infty}{\to} \vartheta, \quad \mathbb{E}\left[U_n(\underline{X})\right] = \vartheta,$$

δηλαδή η $T_n(\underline{X})$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ και η $U_n(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T_n^2(\underline{X})\right] = \frac{n}{\vartheta^n} \int_0^{\vartheta} x^{n+1} dx = \frac{n}{\vartheta^n} \frac{\vartheta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\vartheta^2}{n+2}, \quad \mathbb{E}\left[U_n^2(\underline{X})\right] = \frac{(n+1)^2}{n+2} \frac{\vartheta^2}{n},$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[T_n(\underline{X})\right] &= \frac{n\vartheta^2}{n+2} - \frac{n^2\vartheta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\vartheta^2}{(n+1)^2(n+2)} \overset{n \to \infty}{\to} 0, \\
\operatorname{Var}\left[U_n(\underline{X})\right] &= \frac{(n+1)^2}{n+2} \frac{\vartheta^2}{n} - \vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{n(n+2)} \overset{n \to \infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.17 (σελίδα 67), οι στατιστικές συναρτήσεις $T_n(\underline{X})$ και $U_n(\underline{X})$ είναι συνεπείς εκτιμήτριες του ϑ. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.11 (σελίδα 69), γνωρίζουμε ότι:

$$n\left[1 - F\left(X_{(n)}; \vartheta\right)\right] = n\left[1 - \frac{X_{(n)}}{\vartheta}\right] = -\frac{n}{\vartheta}\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] \overset{d}{\to} Y \sim \operatorname{Exp}(1).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, καταλήγουμε στην ασυμπτωτική κατανομή $n\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] \overset{d}{\to} -\vartheta Y = -V$, όπου $V = \vartheta Y \sim \operatorname{Exp}(1/\vartheta)$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
n\left[U_n(\underline{X}) - \vartheta\right] &= (n+1)T_n(\underline{X}) - n\vartheta = (n+1)\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] + \vartheta \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot n\left[T_n(\underline{X}) - \vartheta\right] + \vartheta \overset{d}{\to} \vartheta - V,
\end{aligned}$$

σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky. Εναλλακτικά, για $x \in [-n\vartheta, 0]$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[n\left(T_n(\underline{X}) - \vartheta\right) \leqslant x\right] &= F_{X_{(n)}}\left(\frac{x}{n} + \vartheta\right) = \left(\frac{x/n + \vartheta}{\vartheta}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{x/\vartheta}{n}\right)^n \overset{n \to \infty}{\to} e^{x/\vartheta},
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(-V \leqslant x) = \mathbb{P}(V \geqslant -x) = 1 - F_V(-x) = 1 - \left(1 - e^{x/\vartheta}\right) = e^{x/\vartheta}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης κατά κατανομή, καταλήγουμε στην ασυμπτωτική κατανομή $n\,[T_n(\underline{X}) - \vartheta] \xrightarrow{d} -V$. Για $x \in [-n\vartheta, \vartheta]$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[n\left(U_n(\underline{X}) - \vartheta\right) \leqslant x\right] &= \mathbb{P}\left[X_{(n)} \leqslant \frac{x + n\vartheta}{n+1}\right] = F_{X_{(n)}}\left(\frac{x-\vartheta}{n} + \vartheta\right) \\ &= \left(1 + \frac{x/\vartheta - 1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} e^{x/\vartheta - 1},\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\vartheta - V \leqslant x) = \mathbb{P}(V \geqslant \vartheta - x) = 1 - F_V(\vartheta - x) = 1 - \left(1 - e^{x/\vartheta - 1}\right) = e^{x/\vartheta - 1}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης κατά κατανομή, $n\,[U_n(\underline{X}) - \vartheta] \xrightarrow{d} \vartheta - V$.

β. Έχουμε δείξει ότι:

$$Q_n = n\left[1 - \frac{X_{(n)}}{\vartheta}\right] \xrightarrow{d} Y \sim \mathrm{Exp}(1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_n \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant n\left[1 - \frac{X_{(n)}}{\vartheta}\right] \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{(n)}}{1 - c_1/n} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{X_{(n)}}{1 - c_2/n}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\log\frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{X_{(n)}}{1 + \log\left(1 - \alpha/2\right)/n}, \frac{X_{(n)}}{1 + \log\left(\alpha/2\right)/n}\right].$$

Εναλλακτικά, γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}(X_1) = \frac{\vartheta}{2}$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\vartheta^2}{12}$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, έπεται ότι:

$$W_n = \frac{\overline{X}_n - \vartheta/2}{\vartheta/\sqrt{12n}} = \sqrt{3n}\left(\frac{2\overline{X}_n}{\vartheta} - 1\right) \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant W_n \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \sqrt{3n}\left(\frac{2\overline{X}_n}{\vartheta} - 1\right) \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\overline{X}_n}{1 + c_2/\sqrt{3n}} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{2\overline{X}_n}{1 + c_1/\sqrt{3n}}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = Z_{\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{2\overline{X}_n}{1 + Z_{\alpha/2}/\sqrt{3n}}, \frac{2\overline{X}_n}{1 - Z_{\alpha/2}/\sqrt{3n}}\right].$$

Άσκηση 23. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $f(x;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} e^{-(x-\vartheta)/\vartheta}$ για $\vartheta > 0$ και $x \geqslant \vartheta$.

α. Να βρεθεί μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ και να εξεταστεί αν είναι πλήρης.

β. Να βρεθεί η ΕΜΠ του ϑ, να ελεγχθεί αν είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ και να υπολογιστεί η ασυμπτωτική κατανομή της.

γ. Να κατασκευαστούν ΔΕ ίσων ουρών και ελαχίστου μήκους για το ϑ.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\vartheta) &= \vartheta^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n x_i + n\right\} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(x_i) \\ &= e^n \vartheta^{-n} e^{-n\overline{x}/\vartheta} \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) = g\left(\underline{T}(\underline{x}), \vartheta\right) h(\underline{x}), \end{aligned}$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\overline{x}, x_{(1)}\right)$, $g(t_1, t_2, \vartheta) = \vartheta^{-n} e^{-nt_1/\vartheta} \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(t_2)$, $h(\underline{x}) = e^n$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, X_{(1)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ. Υπολογίζουμε ότι:

$$F(x;\vartheta) = \int_\vartheta^x \frac{1}{\vartheta} e^{-(y-\vartheta)/\vartheta} dy = \int_0^{x-\vartheta} \frac{1}{\vartheta} e^{-u/\vartheta} du = 1 - e^{-(x-\vartheta)/\vartheta},$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{n}{\vartheta} e^{-n(x-\vartheta)/\vartheta},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] &= \int_\vartheta^\infty \frac{nx}{\vartheta} e^{-n(x-\vartheta)/\vartheta} dx = n \int_0^\infty \frac{y+\vartheta}{\vartheta} e^{-ny/\vartheta} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{ny}{\vartheta} e^{-ny/\vartheta} dy + \vartheta \int_0^\infty \frac{n}{\vartheta} e^{-ny/\vartheta} dy = \frac{\vartheta}{n} + \vartheta = \frac{n+1}{n}\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}(X_1) &= \int_\vartheta^\infty \frac{x}{\vartheta} e^{-(x-\vartheta)/\vartheta} dx = \int_0^\infty \frac{y+\vartheta}{\vartheta} e^{-y/\vartheta} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{y}{\vartheta} e^{-\frac{y}{\vartheta}} dy + \vartheta \int_0^\infty \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{y}{\vartheta}} dy = \vartheta + \vartheta = 2\vartheta, \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_\vartheta\left[\frac{\overline{X}}{2} - \frac{nX_{(1)}}{n+1}\right] = 0 \ \forall \vartheta > 0$, δηλαδή η $\frac{\overline{X}}{2} - \frac{nX_{(1)}}{n+1}$ είναι μία α.ε. του μηδενός η οποία είναι συνάρτηση της $\underline{T}(\underline{X})$. Επομένως, η επαρκής στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\overline{X}, X_{(1)}\right)$ **δεν** είναι πλήρης.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \begin{cases} e^n \vartheta^{-n} e^{-n\overline{x}/\vartheta}, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x}) = n - n\log\vartheta - \frac{n\overline{x}}{\vartheta}, \qquad \frac{\partial \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta} = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{n\overline{x}}{\vartheta^2} = n\frac{\overline{x} - \vartheta}{\vartheta^2} > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid \underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = \frac{n+1}{n}\vartheta \overset{n\to\infty}{\to} \vartheta,$$

δηλαδή η $X_{(1)}$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_{(1)}^2\right] &= \int_\vartheta^\infty \frac{nx^2}{\vartheta} e^{-n(x-\vartheta)/\vartheta} dx = n\int_0^\infty \frac{(y+\vartheta)^2}{\vartheta} e^{-ny/\vartheta} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{ny^2}{\vartheta} e^{-ny/\vartheta} dy + 2\vartheta \int_0^\infty \frac{ny}{\vartheta} e^{-ny/\vartheta} dy + \vartheta^2 \int_0^\infty \frac{n}{\vartheta} e^{-ny/\vartheta} dy \\ &= \frac{2\vartheta^2}{n^2} + \frac{2\vartheta^2}{n} + \vartheta^2 = \frac{n^2+2n+2}{n^2}\vartheta^2, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\left[X_{(1)}\right] = \frac{n^2+2n+2}{n^2}\vartheta^2 - \frac{(n+1)^2}{n^2}\vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.17 (σελίδα 67), η $X_{(1)}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.11 (σελίδα 69), γνωρίζουμε ότι:

$$nF\left[X_{(1)};\vartheta\right] = -n\left[e^{1-X_{(1)}/\vartheta} - 1\right] \overset{d}{\to} Y \sim \mathrm{Exp}(1).$$

Εφόσον η συνάρτηση $g(x) = \log x$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (0,\infty)$ με $g'(1) = 1 \neq 0$, έπεται ότι:

$$n\left[\frac{X_{(1)}}{\vartheta} - 1\right] \overset{d}{\to} g'(1)Y = Y \quad \Rightarrow \quad n\left[X_{(1)} - \vartheta\right] \overset{d}{\to} \vartheta Y = V \sim \mathrm{Exp}(1/\vartheta),$$

σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky σε συνδυασμό με τη μέθοδο δέλτα. Εναλλακτικά, για $x \in (0,\infty)$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}\left[n\left(X_{(1)} - \vartheta\right) \leqslant x\right] = F_{X_{(1)}}\left(\frac{x}{n} + \vartheta\right) = 1 - \exp\left\{-\frac{x/n + \vartheta - \vartheta}{\vartheta/n}\right\} = 1 - e^{-x/\vartheta},$$

η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $V \sim \mathrm{Exp}(1/\vartheta)$. Παρατηρούμε ότι η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $n\left(X_{(1)}-\vartheta\right)$ δεν εξαρτάται από το n, οπότε τετριμμένα συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή V.

γ. Έχουμε δείξει ότι $W = n\left[X_{(1)}-\vartheta\right] \sim \mathrm{Exp}(1/\vartheta)$, οπότε ορίζουμε την ακόλουθη αντιστρεπτή ποσότητα:

$$Q = \frac{W}{n\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}X_{(1)} - 1 \sim \mathrm{Exp}(n).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(1)}}{\vartheta} - 1 \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{(1)}}{1+c_2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{X_{(1)}}{1+c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-nc_1} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-nc_2} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{n}\log\frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{X_{(1)}}{1-\log(\alpha/2)/n}, \frac{X_{(1)}}{1-\log(1-\alpha/2)/n}\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $X_{(1)}\left(\frac{1}{1+c_1}-\frac{1}{1+c_2}\right)$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\ell(c_1,c_2) = \frac{1}{1+c_1}-\frac{1}{1+c_2}$ υπό τον εξής περιορισμό:

$$\mathbb{P}(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad F_Q(c_2) - F_Q(c_1) = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad e^{-nc_1} - e^{-nc_2} = 1-\alpha.$$

Αρχικά, παραγωγίζουμε τον περιορισμό ως προς c_1:

$$-ne^{-nc_1} + ne^{-nc_2}\frac{\partial c_2}{\partial c_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c_2}{\partial c_1} = e^{n(c_2-c_1)}.$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ℓ ως προς c_1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial c_1} &= -\frac{1}{(1+c_1)^2} + \frac{1}{(1+c_2)^2}\frac{\partial c_2}{\partial c_1} = -\frac{1}{(1+c_1)^2} + \frac{e^{n(c_2-c_1)}}{(1+c_2)^2} \\ &= \frac{(1+c_1)^2 e^{-nc_1} - (1+c_2)^2 e^{-nc_2}}{(1+c_1)^2(1+c_2)^2} > 0,\end{aligned}$$

αφού η συνάρτηση $g(x) = (1+x)^2 e^{-nx}$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x > 0$ και $n \geqslant 2$. Επιπλέον, ισχύει ότι $c_1 \geqslant 0$. Εφόσον το μήκος του ΔΕ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του c_1, το ΔΕ επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_1 = 0$.

Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_2 έτσι ώστε:

$$\mathbb{P}(Q \leqslant c_2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-nc_2} = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{n}\log\alpha.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ελαχίστου μήκους:

$$\left[\frac{X_{(1)}}{1 - \log\alpha/n}, X_{(1)}\right].$$

Άσκηση 24. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $F(x; \lambda, k) = 1 - e^{-\lambda(x-k)}$ για $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{R}$ και $x \geqslant k$.

α. Να κατασκευαστεί ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών για το k.

β. Να κατασκευαστεί ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών για το λ αν το k είναι γνωστό.

γ. Να κατασκευαστεί ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών για το λ.

Λύση. α. Στο παράδειγμα 4.1 (σελίδα 92), δείξαμε ότι $Y_1 = X_1 - k \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ και $Q = X_{(1)} - k \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$, οπότε $\mathbb{E}(X_1) = k + \frac{1}{\lambda}$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}$. Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, έπεται ότι $\overline{X}_n \xrightarrow{p} k + \frac{1}{\lambda}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = k + \mathbb{E}(Q) = k + \frac{1}{n\lambda} \overset{n\to\infty}{\to} k,$$

$$\mathrm{Var}\left[X_{(1)}\right] = \mathrm{Var}(Q) = \frac{1}{n^2\lambda^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Σύμφωνα με τη σημείωση 3.17 (σελίδα 67), έπεται ότι $X_{(1)} \xrightarrow{p} k$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.16 (σελίδα 67), συμπεραίνουμε ότι $\overline{X}_n - X_{(1)} \xrightarrow{p} \frac{1}{\lambda}$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, έπεται ότι:

$$V_n = n\frac{X_{(1)} - k}{\overline{X}_n - X_{(1)}} \xrightarrow{d} V \sim \mathrm{Exp}(1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant V_n \leqslant c_2$ ως προς k:

$$c_1 \leqslant n\frac{X_{(1)} - k}{\overline{X}_n - X_{(1)}} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad X_{(1)} - c_2\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{n} \leqslant k \leqslant X_{(1)} - c_1\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{n}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(V_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(V < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(V_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(V > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\log\frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[X_{(1)} + \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{n}\log\frac{\alpha}{2}, X_{(1)} + \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{n}\log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

β. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - k - 1/\lambda}{1/\lambda\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left[\lambda\left(\overline{X}_n - k\right) - 1\right] \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Z_n \leqslant c_2$ ως προς λ:

$$c_1 \leqslant \sqrt{n}\left[\lambda\left(\overline{X}_n - k\right) - 1\right] \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\overline{X}_n - k}\left(1+\frac{c_1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant k \leqslant \frac{1}{\overline{X}_n - k}\left(1+\frac{c_2}{\sqrt{n}}\right).$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = Z_{\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{\overline{X}_n - k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right), \frac{1}{\overline{X}_n - k}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)\right].$$

γ. Γνωρίζουμε ότι $n\lambda\left[X_{(1)} - k\right] \sim \mathrm{Exp}(1)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, έπεται ότι:

$$\sqrt{n}\lambda\left[X_{(1)} - k\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n\lambda\left[X_{(1)} - k\right] \xrightarrow{d} 0,$$

$$\begin{aligned} W_n &= \sqrt{n}\left[\lambda\left(\overline{X}_n - X_{(1)}\right) - 1\right] = \sqrt{n}\left[\lambda\left(\overline{X}_n - k + k - X_{(1)}\right) - 1\right] \\ &= Q_n - \sqrt{n}\lambda\left[X_{(1)} - k\right] \xrightarrow{d} Z - 0 = Z \sim \mathcal{N}(0,1). \end{aligned}$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant W_n \leqslant c_2$ ως προς λ:

$$c_1 \leqslant \sqrt{n}\left[\lambda\left(\overline{X}_n - X_{(1)}\right) - 1\right] \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\overline{X}_n - X_{(1)}}\left(1+\frac{c_1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant k \leqslant \frac{1}{\overline{X}_n - X_{(1)}}\left(1+\frac{c_2}{\sqrt{n}}\right).$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έπεται ότι $c_1 = -Z_{\alpha/2}$, $c_2 = Z_{\alpha/2}$.

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1}{\overline{X}_n - X_{(1)}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right), \frac{1}{\overline{X}_n - X_{(1)}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)\right].$$

Άσκηση 25. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ με $f(x;k) = e^{-(x-k)}$ για $k \in \mathbb{R}$ και $x \geqslant k$.

α. Να αποδειχθεί ότι οι $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ και $R(\underline{X}) = X_{(n)} - X_{(1)}$ είναι ανεξάρτητες στατιστικές συναρτήσεις.

β. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(k) = \mathbb{P}_k(X_1 < 0)$.

γ. Να βρεθεί η ΕΜΠ της $g(k)$, να υπολογιστεί η ασυμπτωτική κατανομή της και να κατασκευαστεί ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών για την $g(k)$ αν είναι γνωστό ότι $k < 0$.

δ. Έστω $W = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[k,0)}(X_i)$. Θεωρούμε ότι παρατηρούμε μόνο την τιμή της τυχαίας μεταβλητής W και τις τιμές όσων από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ είναι αρνητικές. Να βρεθεί η ΕΜΠ της $g(k)$.

ε. Έστω ότι παρατηρούμε μόνο την τιμή της τυχαίας μεταβλητής W και τις τιμές όσων από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$ είναι θετικές. Να βρεθεί η ΕΜΠ της $g(k)$, να υπολογιστεί η ασυμπτωτική κατανομή της, να συγκριθεί με αυτήν της ΕΜΠ με βάση τα πλήρη δεδομένα και να κατασκευαστεί ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών για την $g(k)$ αν είναι γνωστό ότι $k < 0$.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x};k) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;k) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^n (x_i - k)\right\}\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[k,\infty)}(x_i) \\ &= e^{-n\overline{x}} e^{nk} \mathbb{1}_{[k,\infty)}\left(x_{(1)}\right) = g\left(T(\underline{x}), k\right) h(\underline{x}), \end{aligned}$$

όπου $T(\underline{x}) = x_{(1)}$, $g(t,k) = e^{nk}\mathbb{1}_{[k,\infty)}(t)$ και $h(\underline{x}) = e^{-n\overline{x}}$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το k. Για $x \geqslant k$, υπολογίζουμε ότι:

$$F(x;k) = \int_k^x f(y;k)dy = \int_k^x e^{-(y-k)}dy = \int_0^{x-k} e^{-u}du = 1 - e^{-(x-k)},$$

$$f_T(t) = ne^{-(t-k)}e^{-(n-1)(t-k)} = ne^{-n(t-k)}.$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_k[\varphi(T)] = 0$ $\forall k \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_k[\varphi(T)] = \int_k^\infty f_T(t)\varphi(t)dt = ne^{nk}\int_k^\infty e^{-nt}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\int_k^{\infty} e^{-nt}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$-e^{-nk}\varphi(k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η επαρκής στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.1 (σελίδα 92), γνωρίζουμε ότι $Y_i = X_i - k \sim \text{Exp}(1)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον, έπεται ότι $X_{(i)} = Y_{(i)} + k$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Παρατηρούμε ότι $R(\underline{X}) = Y_{(n)} + k - \left[Y_{(1)} + k\right] = Y_{(n)} - Y_{(1)}$, δηλαδή η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $R(\underline{X})$ δεν εξαρτάται από την τιμή του k. Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, συμπεραίνουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $T(\underline{X})$ και $R(\underline{X})$ είναι ανεξάρτητες.

β. Για $k \geqslant 0$, προφανώς ισχύει ότι $\mathbb{P}_k(X_1 < 0) = 0$. Για $k < 0$, υπολογίζουμε ότι $\mathbb{P}_k(X_1 < 0) = F(0; k) = 1 - e^k$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$g(k) = 1 - e^{\min\{k,0\}} = \left(1 - e^k\right) \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(k).$$

Έστω ότι $\mathbb{E}\left[\psi(T)\right] = g(k)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}[\psi(T)] = \int_k^{\infty} f_T(t)\psi(t)dt = ne^{nk}\int_k^{\infty} e^{-nt}\psi(t)dt = g(k) \quad \Rightarrow$$

$$n\int_k^{\infty} e^{-nt}\psi(t)dt = e^{-nk}g(k) \quad \Rightarrow \quad -ne^{-nk}\psi(k) = -ne^{-nk}g(k) + e^{-nk}g'(k) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\psi(T) &= g(T) - \frac{1}{n}g'(T) = \left(1 - e^T\right)\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(T) + \frac{1}{n}e^T\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(T) \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{n}e^T\right)\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(T) = 1 - \frac{n-1}{n}e^{\min\{T,0\}}.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $\psi(T)$ είναι η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(k)$.

γ. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.43 (σελίδα 78), η στατιστική συνάρτηση $\widehat{k}(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι η ΕΜΠ του k. Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου, συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $g(\widehat{k}) = 1 - e^{\min\{\widehat{k},0\}}$ είναι η ΕΜΠ της $g(k)$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.11 (σελίδα 69), γνωρίζουμε ότι:

$$nF\left[X_{(1)}; k\right] = -n\left[e^{k-X_{(1)}} - 1\right] \xrightarrow{d} Y \sim \text{Exp}(1).$$

Εφόσον η συνάρτηση $h(x) = \log x$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (-\infty, 0)$ με $h'(1) = 1 \neq 0$, προκύπτει ότι $n\left(\widehat{k} - k\right) \xrightarrow{d} h'(1)Y = Y \sim \text{Exp}(1)$, σύμφωνα με τη μέθοδο δέλτα. Εφόσον η συνάρτηση $g(k) = 1 - e^k$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\Theta = (-\infty, 0)$ με $g'(k) = -e^k = -[1 - g(k)] \neq 0$, καταλήγουμε ότι:

$$n\left[g(\widehat{k}) - g(k)\right] \xrightarrow{d} g'(k)Y = -e^kY = -V, \quad V = e^kY \sim \text{Exp}\left(e^{-k}\right),$$

σύμφωνα με τη μέθοδο δέλτα. Σύμφωνα με την πρόταση 3.17 (σελίδα 67), συμπεραίνουμε ότι $g(\widehat{k}) \xrightarrow{p} g(k)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Slutsky, έπεται ότι:

$$Q_n = n\frac{g(k) - g(\widehat{k})}{1 - g(\widehat{k})} \xrightarrow{d} \frac{1}{1 - g(k)}V = Y \sim \text{Exp}(1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_n \leqslant c_2$ ως προς $g(k)$:

$$c_1 \leqslant n\frac{g(k) - g(\widehat{k})}{1 - g(\widehat{k})} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad g(\widehat{k}) + c_1\frac{1 - g(\widehat{k})}{n} \leqslant g(k) \leqslant g(\widehat{k}) + c_2\frac{1 - g(\widehat{k})}{n}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\log\frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[g(\widehat{k}) - \frac{1 - g(\widehat{k})}{n}\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), g(\widehat{k}) - \frac{1 - g(\widehat{k})}{n}\log\frac{\alpha}{2}\right].$$

δ. Παρατηρούμε ότι $W \sim \text{Bin}(n, g(k))$. Για $x < 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$f_{X_1|X_1<0}(x; k) = \frac{f(x; k)}{\mathbb{P}_k(X_1 < 0)} = \frac{e^{-(x-k)}}{g(k)}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(k \mid w, x) &= \mathbb{P}_k(W = w) \prod_{i\colon x_i<0} f_{X_i|X_i<0}(x_i; k) \\
&= \binom{n}{w} [g(k)]^w [1 - g(k)]^{n-w} \frac{1}{[g(k)]^w} \exp\left\{wk - \sum_{i\colon x_i<0} x_i\right\} \mathbb{1}_{[k,0)}\left(x_{(1)}\right) \\
&= \binom{n}{w} e^{(n-w)k} e^{wk} \exp\left\{-\sum_{i\colon x_i<0} x_i\right\} \mathbb{1}_{[k,0)}\left(x_{(1)}\right) \\
&= \begin{cases} \binom{n}{w} e^{nk} \exp\left\{-\sum_{i\colon x_i<0} x_i\right\}, & k \leqslant x_{(1)} \\ 0, & k > x_{(1)} \end{cases},
\end{aligned}$$

δηλαδή η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα για $k \leqslant x_{(1)}$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $g(\widehat{k})$ είναι η ΕΜΠ της $g(k)$ σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου. Παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με την ΕΜΠ που υπολογίσαμε βάσει των πλήρων δεδομένων.

ε. Για $x > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$f_{X_1 \mid X_1 > 0}(x; k) = \frac{f(x; k)}{\mathbb{P}_k(X_1 > 0)} = \frac{e^{-(x-k)}}{1 - g(k)}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(k \mid w, x) &= \mathbb{P}_k(W = w) \prod_{i\colon x_i > 0} f_{X_i \mid X_i > 0}(x_i; k) \\
&= \binom{n}{w} [g(k)]^w [1 - g(k)]^{n-w} \frac{1}{[1 - g(k)]^{n-w}} \exp\left\{(n - w)k - \sum_{i\colon x_i > 0} x_i\right\} \\
&= \binom{n}{w} [g(k)]^w [1 - g(k)]^{n-w} \exp\left\{-\sum_{i\colon x_i > 0} x_i\right\},
\end{aligned}$$

$$\ell(k \mid w, x) = \log\binom{n}{w} + w \log[g(k)] + (n - w)\log[1 - g(k)] - \sum_{i\colon x_i > 0} x_i,$$

$$\frac{\partial \ell(k \mid w, x)}{\partial g(k)} = \frac{w}{g(k)} - \frac{n - w}{1 - g(k)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{g(k)} = \frac{w}{n},$$

$$\frac{\partial \ell^2(k \mid w, x)}{\partial [g(k)]^2} = -\frac{w}{[g(k)]^2} - \frac{n - w}{[1 - g(k)]^2} < 0, \quad \forall k < 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\mathcal{L}(k \mid w, x)$ είναι γνησίως κοίλη ως προς $g(k)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{g(k)} = \frac{1}{n}W$ είναι η ΕΜΠ της $g(k)$. Παρατηρούμε ότι η ΕΜΠ της $g(k)$ είναι το ποσοστό των αρνητικών παρατηρήσεων του δείγματος $X_1, \ldots, X_n$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left[\widehat{g(k)} - g(k)\right] \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}\left(0, g(k)\left(1 - g(k)\right)\right) \equiv \mathcal{N}\left(0, e^k\left(1 - e^k\right)\right).$$

Παρατηρούμε ότι η ΕΜΠ με βάση τα πλήρη δεδομένα έχει ασυμπτωτική διασπορά $v_1(k) = e^{2k}$, ενώ η ΕΜΠ αυτού του ερωτήματος έχει ασυμπτωτική διασπορά $v_2(k) = e^k\left(1 - e^k\right)$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$v_1(k) < v_2(k) \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{2k} < e^k \quad \Leftrightarrow \quad k < -\log 2 \approx -0.69.$$

Από την άλλη, η διασπορά της ΕΜΠ με βάση τα πλήρη δεδομένα συγκλίνει στο 0 με ρυθμό n^{-2}, ενώ η διασπορά της ΕΜΠ αυτού του ερωτήματος συγκλίνει στο 0 με ρυθμό n^{-1}. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.22 (σελίδα 105), καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\widehat{g(k)} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\widehat{g(k)}\left(1-\widehat{g(k)}\right)}, \widehat{g(k)} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\widehat{g(k)}\left(1-\widehat{g(k)}\right)}\right].$$

Κεφάλαιο 7

Λύσεις Θεμάτων Εξετάσεων

7.1 Φεβρουάριος 2020

Θέμα 1. Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τ.δ. από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1, \vartheta]$, $\vartheta \in \Theta = (1, \infty)$. Βρείτε την ΕΜΠ, τη ροποεκτιμήτρια και την ΑΕΕΔ του ϑ.

Λύση. Ακριβώς όπως στο παράδειγμα 3.39 (σελίδα 77), η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Στη συνέχεια, εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\vartheta}{2} = \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}(\underline{X}) = 2\overline{X} - 1.$$

Ακριβώς όπως στο παράδειγμα 3.5 (σελίδα 31), η $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Για $t \in (1, \vartheta)$, υπολογίζουμε ότι:

$$f_T(t) = n \frac{(t-1)^{n-1}}{(\vartheta - 1)^n}.$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0 \ \forall \vartheta > 1$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = \int_1^\vartheta f_T(t)\varphi(t)dt = \frac{n}{(\vartheta-1)^n}\int_1^\vartheta (t-1)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta > 1 \quad \Rightarrow$$

$$\int_1^\vartheta (t-1)^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta > 1.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$(\vartheta - 1)^{n-1}\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta > 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (1, \infty) \supseteq (1, \vartheta).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι πλήρης. Στη συνέχεια, έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\psi(T)] = \vartheta$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta\left[\psi(T)\right] = \int_1^\vartheta f_T(t)\psi(t)dt = n\int_1^\vartheta \frac{(t-1)^{n-1}}{(\vartheta-1)^n}\psi(t)dt = \vartheta \quad \Rightarrow$$

$$n\int_1^\vartheta (t-1)^{n-1}\psi(t)dt = \vartheta(\vartheta-1)^n \quad \Rightarrow$$

$$n(\vartheta-1)^{n-1}\psi(\vartheta) = (\vartheta-1)^n + n\vartheta(\vartheta-1)^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\psi(\vartheta) = \frac{n+1}{n}\vartheta - \frac{1}{n}, \quad \forall\vartheta \in (1,\infty) \supseteq (1,\vartheta).$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\psi(T) = \frac{n+1}{n}T - \frac{1}{n}$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(n)}$, είναι η ΑΕΕΔ του ϑ.

Θέμα 2. Έστω $X_1,\ldots,X_n \sim \text{Exp}(\vartheta)$, όπου $n \geqslant 2$ και $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$ άγνωστη παράμετρος. Διατυπώστε το θεώρημα Basu και αποδείξτε μέσω αυτού ότι οι τυχαίες μεταβλητές $T = \sum_{i=1}^n X_i$ και $S = \frac{X_1}{T}$ είναι ανεξάρτητες.

Λύση. Το στήριγμα $S = (0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^n x_i + n\log\vartheta\right\},$$

όπου $Q(\vartheta) = -\vartheta$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Το $Q(\Theta) = \{-\vartheta : \vartheta > 0\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n,\vartheta)$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.11 (σελίδα 39), γνωρίζουμε ότι $Y_i = 2\vartheta X_i \sim \chi^2_2 \equiv \text{Exp}\left(1/2\right)$ για $i = 1,2,\ldots,n$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$S = \frac{X_1}{T} = \frac{\frac{Y_1}{2\vartheta}}{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{2\vartheta}} = \frac{Y_1}{\sum_{i=1}^n Y_i},$$

δηλαδή η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης S δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, έπεται ότι οι στατιστικές συναρτήσεις T και S είναι ανεξάρτητες.

Θέμα 3. Έστω $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ το διάνυσμα των δεδομένων και $\delta = \delta(\underline{X})$ μία αμερόληπτη στατιστική συνάρτηση για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$. Υποθέτουμε ότι η δ έχει πεπερασμένη διασπορά και θεωρούμε την κλάση των αμερόληπτων εκτιμητριών του μηδενός:

$$\mathcal{U}_0 = \{T : T = T(\underline{X}) \text{ στατιστική συνάρτηση με } \mathbb{E}_\vartheta(T) = 0 \text{ και } \text{Var}_\vartheta(T) < \infty\ \forall\vartheta\}.$$

α. Να δείξετε ότι η $\delta(\underline{X})$ είναι ΑΕΕΔ για την $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστη με κάθε $T \in \mathcal{U}_0$.

β. Να αποδείξετε ότι αν η $\delta_1(\underline{X})$ είναι ΑΕΕΔ για την $g_1(\vartheta)$ και η $\delta_2(\underline{X})$ είναι ΑΕΕΔ για την $g_2(\vartheta)$, τότε η $\delta_1(\underline{X}) + \delta_2(\underline{X})$ είναι ΑΕΕΔ για την $g_1(\vartheta) + g_2(\vartheta)$.

Λύση. α. Βλέπε θεώρημα 3.6 (σελίδα 46).

β. Βλέπε πόρισμα 3.4 (σελίδα 47).

Θέμα 4. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, \vartheta]$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$ η άγνωστη παράμετρος. Να κατασκευαστεί $1-\alpha$ ΔΕ για το ϑ ίσων ουρών και ελαχίστου μήκους.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ με συνάρτηση κατανομής $F_T(t) = (t/\vartheta)^n$ για $t \in [0, \vartheta]$. Ορίζουμε αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{1}{\vartheta} X_{(n)}$. Για $y \in [0,1]$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_Q(y) = \mathbb{P}\left[\frac{1}{\vartheta} X_{(n)} \leqslant y\right] = F_T(\vartheta y) = y^n.$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leqslant c_2 \Leftrightarrow \frac{X_{(n)}}{c_2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{X_{(n)}}{c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες, ώστε

$$\mathbb{P}(Q \leqslant c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n},$$

$$\mathbb{P}(Q \geqslant c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - c_2^n = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[X_{(n)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}, X_{(n)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}\right].$$

Το μήκος του ΔΕ είναι ίσο με $X_{(n)} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\ell(c_1, c_2) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}$ υπό τον εξής περιορισμό:

$$\mathbb{P}(c_1 \leqslant Q \leqslant c_2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad F_Q(c_2) - F_Q(c_1) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_2^n - c_1^n = 1 - \alpha.$$

Αρχικά, παραγωγίζουμε τον περιορισμό ως προς c_2:

$$n c_1^{n-1} \frac{\partial c_1}{\partial c_2} - n c_2^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c_1}{\partial c_2} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-1}.$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ℓ ως προς c_2:

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_2} = -\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial c_1}{\partial c_2} + \frac{1}{c_2^2} = -\frac{1}{c_1^2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-1} + \frac{1}{c_2^2} = \frac{c_1^{n+1} - c_2^{n+1}}{c_1^{n+1}c_2^2} < 0.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $c_2 \leqslant 1$. Εφόσον το μήκος του ΔΕ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του c_2, το ΔΕ επιτυγχάνει το ελάχιστο μήκος του για $c_2 = 1$. Προσδιορίζουμε τη σταθερά c_1 έτσι ώστε:

$$\mathbb{P}(Q \geqslant c_1) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - c_1^n = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad c_1 = \alpha^{1/n}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ελαχίστου μήκους $\left[X_{(n)}, X_{(n)}\alpha^{-1/n}\right]$.

Θέμα 5. Να κατασκευάσετε ΟΙΕ επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = 2\vartheta^2 x^3 e^{-\vartheta x^2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$.

Λύση. Το στήριγμα $S = (0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2n\log\vartheta\right\} 2^n \prod_{i=1}^n x_i^3,$$

όπου $Q(\vartheta) = -\vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Επομένως, η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^n X_i^2$. Σύμφωνα με το θεώρημα Karlin - Rubin, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση $T^*(\underline{x}) > c$. Θέτουμε $Y_i = X_i^2$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(X_1^2 \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \leqslant \sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y};\vartheta\right),$$

$$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}f\left(\sqrt{y};\vartheta\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}2\vartheta^2 y^{3/2}e^{-\vartheta y} = \vartheta^2 y e^{-\vartheta y},$$

δηλαδή $Y_i \sim \text{Gamma}(2,\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Δεδομένου ότι $\vartheta = \vartheta_0$, έπεται ότι:

$$T\left(\underline{X}\right) = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \text{Gamma}(2n,\vartheta_0), \quad Q\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 T\left(\underline{X}\right) \sim \chi^2_{4n}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$T^*(\underline{X}) > c \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 T(\underline{X}) = -2\vartheta_0 T^*(\underline{X}) < c_\alpha = -2\vartheta_0 c,$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left(Q < c_\alpha\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{4n;1-\alpha}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 < \chi^2_{4n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant \chi^2_{4n;1-\alpha} \end{cases}.$$

7.2 Σεπτέμβριος 2019

Θέμα 1. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F(x;\vartheta) = 1 - \left(1 + x^2\right)^{-\vartheta}, \quad x > 0, \quad \vartheta > 0.$$

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}$ του ϑ και μία αποτελεσματική εκτιμήτρια $U(\underline{X})$ του $\frac{1}{\vartheta}$. Είναι οι $\widehat{\vartheta}$ και $U(\underline{X})$ επαρκείς για το ϑ;

γ. Να δειχθεί ότι η $U(\underline{X})$ είναι συνεπής για το $\frac{1}{\vartheta}$.

Λύση. α. Αρχικά, υπολογίζουμε ότι:

$$f(x;\vartheta) = F'(x;\vartheta) = 2\vartheta x \left(1 + x^2\right)^{-\vartheta - 1}.$$

Το στήριγμα $S = (0, \infty)^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-(\vartheta + 1)\sum_{i=1}^n \log\left(1 + x_i^2\right) + n \log \vartheta\right\} 2^n \prod_{i=1}^n x_i,$$

όπου $A(\vartheta) = -n\log(\vartheta)$, $Q(\vartheta) = -(\vartheta + 1)$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \log\left(1 + x_i^2\right)$. Το σύνολο $Q(\Theta) = \{-(\vartheta + 1) : \vartheta > 0\} = (-\infty, -1)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n \log\left(1 + X_i^2\right)$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x}) = -(\vartheta + 1)\sum_{i=1}^n \log\left(1 + x_i^2\right) + n\log\vartheta + n\log 2 + \sum_{i=1}^n \log x_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta} = -\sum_{i=1}^n \log\left(1 + x_i^2\right) + \frac{n}{\vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vartheta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log\left(1 + x_i^2\right)},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta^2} = -\frac{n}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0, \infty)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+X_i^2\right)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = -\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+X_i^2\right)+\frac{n}{\vartheta}\\ &= -n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+X_i^2\right)-\frac{1}{\vartheta}\right] = k(\vartheta)\left[U(\underline{X})-g(\vartheta)\right],\end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = -n \neq 0\ \forall\vartheta > 0$, οπότε η $U(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+X_i^2\right)$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$ σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57). Παρατηρούμε ότι $T(\underline{X}) = nU(\underline{X}) = \frac{n}{\widehat{\vartheta}(\underline{X})}$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.1 (σελίδα 30), καταλήγουμε ότι οι $\widehat{\vartheta}(\underline{X})$ και $U(\underline{X})$ είναι κι αυτές επαρκείς για το ϑ.

γ. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x;\vartheta) = \frac{2x}{1+x^2}\exp\left\{-\vartheta\log\left(1+x^2\right)-\log\frac{1}{\vartheta}\right\},$$

όπου $A(\vartheta) = -\log(\vartheta)$, $Q(\vartheta) = \vartheta$ και $T^*(x) = -\log\left(1+x^2\right)$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.1 (σελίδα 17), έπεται ότι $\mathbb{E}\left[T^*(X)\right] = A'(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta}$. Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών, καταλήγουμε ότι η $U_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\mathbb{E}\left[\log\left(1+X_1^2\right)\right] = -\mathbb{E}\left[T^*(X)\right] = \frac{1}{\vartheta}$.

Θέμα 2. Έστω X τ.δ. μεγέθους 1 από πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{2x}{\vartheta}\mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(x)+\frac{2(1-x)}{1-\vartheta}\mathbb{1}_{(\vartheta,1]}(x),\quad \vartheta\in(0,1).$$

α. Να βρεθεί ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}$ του ϑ.

β. Να βρεθεί ΑΕΕΔ για το ϑ.

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta\mid x) = f(x;\vartheta) = \begin{cases}\frac{2(1-x)}{1-\vartheta}, & \vartheta < x\\ \frac{2x}{\vartheta}, & \vartheta \geqslant x\end{cases}.$$

Για $\vartheta < x$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα. Για $\vartheta \geqslant x$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(X) = X$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

β. Τετριμμένα, παρατηρούμε ότι:

$$f(x;\vartheta) = \frac{2x}{\vartheta}\mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(x)+\frac{2(1-x)}{1-\vartheta}\mathbb{1}_{(\vartheta,1]}(x) = g\left(T(x),\vartheta\right)h(x),$$

όπου $T(x) = x$, $g(t,\vartheta) = \frac{2t}{\vartheta}\mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(t) + \frac{2(1-t)}{1-\vartheta}\mathbb{1}_{(\vartheta,1]}(t)$ και $h(x) = 1$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$ είναι επαρκής για το ϑ. Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0$ $\forall \vartheta \in (0,1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] &= \int_0^\vartheta \varphi(t)\frac{2t}{\vartheta}dt + \int_\vartheta^1 \varphi(t)\frac{2(1-t)}{1-\vartheta}dt \\ &= \frac{2}{\vartheta}\int_0^\vartheta t\varphi(t)dt + \frac{2}{1-\vartheta}\int_\vartheta^1 (1-t)\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,1) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$(1-\vartheta)\int_0^\vartheta t\varphi(t)dt + \vartheta\int_\vartheta^1 (1-t)\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,1) \quad \Rightarrow$$

$$-\int_0^\vartheta t\varphi(t)dt + \cancel{(1-\vartheta)\vartheta\varphi(\vartheta)} + \int_\vartheta^1 (1-t)\varphi(t)dt - \cancel{\vartheta(1-\vartheta)\varphi(\vartheta)} = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,1) \quad \Rightarrow$$

$$-\vartheta\varphi(\vartheta) - (1-\vartheta)\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,1).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$ είναι πλήρης. Στη συνέχεια, έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\psi(T)] = 0$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\psi(T)] = \frac{2}{\vartheta}\int_0^\vartheta t\psi(t)dt + \frac{2}{1-\vartheta}\int_\vartheta^1 (1-t)\psi(t)dt = \vartheta \quad \Rightarrow$$

$$2(1-\vartheta)\int_0^\vartheta t\psi(t)dt + 2\vartheta\int_\vartheta^1 (1-t)\psi(t)dt = \vartheta^2(1-\vartheta) \quad \Rightarrow$$

$$-2\int_0^\vartheta t\psi(t)dt + \cancel{2(1-\vartheta)\vartheta\psi(\vartheta)} + 2\int_\vartheta^1 (1-t)\psi(t)dt - \cancel{2\vartheta(1-\vartheta)\psi(\vartheta)} = 2\vartheta - 3\vartheta^2 \quad \Rightarrow$$

$$-2\vartheta\psi(\vartheta) - 2(1-\vartheta)\psi(\vartheta) = 2 - 6\vartheta \quad \Rightarrow \quad \psi(\vartheta) = 3\vartheta - 1, \quad \forall\vartheta \in (0,1).$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\psi(T) = 3X - 1$ είναι η ΑΕΕΔ του ϑ.

Θέμα 3. Έστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\vartheta,1)$.

α. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

β. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση. α. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.11 (σελίδα 99), γνωρίζουμε ότι ένα ΔΕ για το ϑ είναι το $\left[\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

β. Έστω $\vartheta_1 > \vartheta_0$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 5.3 (σελίδα 112), ο ΟΙΕ για την εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\varphi_1(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} > \vartheta_0 + Z_\alpha/\sqrt{n} \\ 0, & \overline{x} \leqslant \vartheta_0 + Z_\alpha/\sqrt{n} \end{cases}.$$

Στη συνέχεια, έστω $\vartheta_1 < \vartheta_0$. Ομοίως, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου για την εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$T(\underline{x}) = \frac{\overline{x} - \vartheta_0}{1/\sqrt{n}} < c_\alpha.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta_0, 1)$, γνωρίζουμε ότι $T\left(\underline{X}\right) = \frac{\overline{X} - \vartheta_0}{1/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[T(\underline{X}) < c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi_2(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} < \vartheta_0 - Z_\alpha/\sqrt{n} \\ 0, & \overline{x} \geqslant \vartheta_0 - Z_\alpha/\sqrt{n} \end{cases}.$$

Έστω ότι υπάρχει ΟΙΕ φ^* για την εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 \neq \vartheta_0$. Σύμφωνα με το λήμμα Neyman - Pearson, ο έλεγχος φ^* πρέπει να ταυτίζεται με τον έλεγχο φ_1, αλλά και με τον έλεγχο φ_2. Όμως οι έλεγχοι φ_1 και φ_2 δεν ταυτίζονται μεταξύ τους, οπότε δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος ΟΙΕ φ^*.

Θέμα 4. Να κατασκευάσετε ΟΙΕ επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$.

Λύση. Βλέπε παράδειγμα 5.10 (σελίδα 120).

7.3 Ιούνιος 2019

Θέμα 1. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} x^{\frac{1-\vartheta}{\vartheta}}, \quad 0 < x < 1, \quad \vartheta > 0.$$

α. Να βρεθεί η ΕΜΠ και η εκτιμήτρια ροπών της παραμέτρου ϑ.

β. Να κατασκευαστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το $\frac{1}{\vartheta}$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$.
[Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = -\log X$.]

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/\vartheta - 1}, \quad \ell(\vartheta \mid \underline{x}) = -n \log \vartheta + \left(\frac{1}{\vartheta} - 1\right) \sum_{i=1}^{n} \log x_i,$$

$$\frac{\partial \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta} = -\frac{n}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vartheta} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{x_i},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\vartheta \mid \underline{x})}{\partial \vartheta^2} = \frac{n}{\vartheta^2} + \frac{2}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} \log x_i = -\frac{n}{\vartheta^2}\left(\frac{2\widehat{\vartheta}}{\vartheta} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ell^2(\widehat{\vartheta} \mid \underline{x})}{\partial \vartheta^2} = -\frac{n}{\widehat{\vartheta}^2} < 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid \underline{x})$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{\vartheta}$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{\vartheta \to \infty} \mathcal{L}\left(\vartheta \mid \underline{x}\right) = \lim_{\vartheta \to \infty} \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/\vartheta - 1} = 0,$$

$$\lim_{\vartheta \to 0^+} \mathcal{L}\left(\vartheta \mid \underline{x}\right) = \lim_{\vartheta \to 0^+} \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/\vartheta - 1} = 0.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

β. Παρατηρούμε ότι $X_1 \sim \mathrm{Beta}\,(1/\vartheta, 1)$. Θέτουμε $Y_i = \log \frac{1}{X_i}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(\log \frac{1}{X_1} \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \geqslant e^{-y}\right) = 1 - F\left(e^{-y}; \vartheta\right),$$

$$f_{Y_1}(y) = e^{-y} f\left(e^{-y}; \vartheta\right) = e^{-y}\frac{1}{\vartheta}e^{-y\frac{1-\vartheta}{\vartheta}} = \frac{1}{\vartheta}e^{-y/\vartheta},$$

δηλαδή $Y_i \sim \mathrm{Exp}(1/\vartheta)$ για $i = 1, \ldots, n$ και $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathrm{Gamma}\,(n, 1/\vartheta)$. Ορίζουμε την αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{2}{\vartheta}T \sim \chi^2_{2n}$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $\frac{1}{\vartheta}$:

$$c_1 \leqslant \frac{2}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_1}{2\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i}} \leqslant \frac{1}{\vartheta} \leqslant \frac{c_2}{2\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i}}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i}}, \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{X_i}}\right].$$

Θέμα 2. Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x; \vartheta) = e^{\vartheta - x}\mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(x), \quad \vartheta \in \mathbb{R}.$$

α. Να εξετασθεί αν η προηγούμενη κατανομή με σ.π.π. $f(x;\vartheta)$ ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Να βρεθεί ΑΕΕΔ για την παράμετρο ϑ.

Λύση. α. Παρατηρούμε άμεσα ότι η παραπάνω οικογένεια κατανομών δεν ανήκει στην ΕΟΚ, αφού το στήριγμα $S = [\vartheta, \infty)$ εξαρτάται από την τιμή του ϑ.

β. Σύμφωνα με την άσκηση 25 (σελίδα 162), η $\psi(T) = g(T) - \frac{1}{n}g'(T)$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(1)}$, είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$. Επομένως, η $V(\underline{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{n}$ είναι η ΑΕΕΔ του ϑ.

Θέμα 3. α. Αποδείξτε το ακόλουθο. Έστω ότι η $f(x;\vartheta)$ ανήκει στη μονοπαραμετρική ΕΟΚ με σ.π.π. ή σ.π. της μορφής $f(x;\vartheta) = h(x)\beta(\vartheta)e^{\eta(\vartheta)T^*(x)}$. Αν η συνάρτηση $\eta(\vartheta)$ είναι φθίνουσα, τότε η f έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών με $T(\underline{x}) = -\sum_{i=1}^n T^*(x_i)$.

β. Έστω ότι ο χρόνος ζωής X ενός λαμπτήρα ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\vartheta)$. Ο κατασκευαστής δηλώνει ότι ο μέσος χρόνος ζωής μ είναι τουλάχιστον 1800 ώρες. Καταναλωτές παραπονέθηκαν στον κατασκευαστή ότι ο μέσος χρόνος ζωής είναι μικρότερος. Να κατασκευάσετε ΟΙΕ για τον έλεγχο $H_0 : \mu \geqslant 1800$ vs. $H_1 : \mu < 1800$. Αν οι χρόνοι ζωής από ένα δείγμα 10 τέτοιων λαμπτήρων έδωσαν $\overline{X} = 1600$ ώρες, τι συμπέρασμα προκύπτει από τον έλεγχο σε ε.σ.σ. 5%;

Λύση. α. Έστω $\vartheta_1 < \vartheta_2$. Αφού η συνάρτηση $\eta(\vartheta)$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι $\eta(\vartheta_1) - \eta(\vartheta_2) \geqslant 0$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta) = [\beta(\vartheta)]^n \exp\left\{\eta(\vartheta)\sum_{i=1}^n T^*(x_i)\right\}\prod_{i=1}^n h(x_i),$$

$$\begin{aligned}\lambda(\underline{x}) = \frac{\mathcal{L}(\vartheta_2 \mid \underline{x})}{\mathcal{L}(\vartheta_1 \mid \underline{x})} &= \left[\frac{\beta(\vartheta_2)}{\beta(\vartheta_1)}\right]^n \exp\left\{-\left[\eta(\vartheta_1) - \eta(\vartheta_2)\right]\sum_{i=1}^n T^*(x_i)\right\}\\ &= \left[\frac{\beta(\vartheta_2)}{\beta(\vartheta_1)}\right]^n e^{[\eta(\vartheta_1)-\eta(\vartheta_2)]T(\underline{x})}.\end{aligned}$$

Αφού $\eta(\vartheta_1) - \eta(\vartheta_2) \geqslant 0$, έπεται ότι ο λόγος πιθανοφανειών $\lambda(\underline{x})$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $T(\underline{X})$, οπότε η f έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς $T(\underline{X})$.

β. Γνωρίζουμε ότι $\mu = \frac{1}{\vartheta}$. Επομένως, θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν έλεγχο για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0 = \frac{1}{1800}$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0 = \frac{1}{1800}$. Γνωρίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{-\vartheta\sum_{i=1}^n x_i + n\log\vartheta\right\},$$

όπου $Q(\vartheta) = -\vartheta$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$. Άρα η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς την $T^*(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^n X_i$. Σύμφωνα με το θεώρημα Karlin - Rubin, η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από τη σχέση $T^*(\underline{x}) > c$. Δεδομένου ότι $\vartheta = \vartheta_0$, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\vartheta_0)$, έπεται ότι:

$$T\left(\underline{X}\right) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0), \quad Q\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 T\left(\underline{X}\right) \sim \chi^2_{2n}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$T^*(\underline{X}) > c \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 T(\underline{X}) = -2\vartheta_0 T^*(\underline{X}) < c_\alpha = -2\vartheta_0 c,$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left(Q < c_\alpha\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^n x_i < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^n x_i \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Για $\vartheta_0 = \frac{1}{1800}$, $n = 10$, $\overline{x} = 1600$ και $\alpha = 0.05$, υπολογίζουμε ότι:

$$2\vartheta_0 \sum_{i=1}^n x_i = 2n\vartheta_0\overline{x} \approx 17.78 > 10.85 \approx \chi^2_{20;0.95},$$

οπότε δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu \geqslant 1800$ σε ε.σ.σ. 5%.

Θέμα 4. Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από την κατανομή Bernoulli(ϑ), $\vartheta \in (0, 1)$.

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια για το ϑ και το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér - Rao.

β. Δείξτε ότι για $n = 1$ δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια για την ποσότητα $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Δείξτε ότι για $n = 2$ η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_1$ δεν είναι επαρκής για το ϑ.

Λύση. α. Βλέπε παράδειγμα 3.29 (σελίδα 58).

β. Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X_1)$ είναι α.ε. της $g(\vartheta) = \vartheta^2$. Τότε, ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}\left[T(X_1)\right] = \vartheta^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{x=0}^1 T(x)\vartheta^x(1-\vartheta)^{1-x} = \vartheta^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$T(0)(1-\vartheta) + T(1)\vartheta = \vartheta^2, \quad \forall \vartheta \in (0, 1).$$

Εφόσον το αριστερό μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1 και το δεξί μέλος είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ακριβώς 2, είναι αδύνατο να είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, δεν υπάρχει α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος (X_1, X_2) δεδομένου ότι $X_1 = x_1$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1)} \\ &= \mathbb{P}(X_2 = x_2) = \vartheta^{x_2}(1-\vartheta)^{1-x_2}.\end{aligned}$$

Εφόσον η δεσμευμένη κατανομή του δείγματος δεδομένου ότι $X_1 = x_1$ εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου ϑ, συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση X_1 δεν είναι επαρκής για το ϑ.

7.4 Φεβρουάριος 2019

Θέμα 1. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. από την αρνητική διωνυμική με συνάρτηση πιθανότητας $f(x;\vartheta) = (x+1)\vartheta^2(1-\vartheta)^x \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(x)$, όπου $\vartheta \in \Theta = (0,1)$ άγνωστη παράμετρος. Εξετάστε αν η κατανομή αυτή ανήκει στην ΕΟΚ και υπολογίστε το κάτω φράγμα διασποράς της ανισότητας Cramér - Rao για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$. Τέλος, βρείτε την ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$, δείχνοντας ότι η διασπορά της επιτυγχάνει το κάτω φράγμα Cramér - Rao.

Λύση. Το στήριγμα $S = \{0, 1, \ldots\}$ δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$f(x;\vartheta) = (x+1)e^{x\log(1-\vartheta) - 2\log\vartheta},$$

όπου $h(x) = x+1$, $T(x) = x$, $Q(\vartheta) = \log(1-\vartheta)$ και $A(\vartheta) = 2\log\vartheta$. Επομένως, η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $Q'(\vartheta) = -\frac{1}{1-\vartheta} \neq 0$ συνεχής συνάρτηση στο $\Theta = (0,1)$, άρα όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}(X_1) = 2\frac{1-\vartheta}{\vartheta}$ και $\mathrm{Var}(X_1) = 2\frac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{X};\vartheta) = \vartheta^{2n}(1-\vartheta)^{n\overline{X}}\prod_{i=1}^{n}(X_i+1),$$

$$\log f(\underline{X};\vartheta) = 2n\log\vartheta + n\overline{X}\log(1-\vartheta) + \sum_{i=1}^{n}\log(X_i+1),$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = \frac{2n}{\vartheta} - \frac{n\overline{X}}{1-\vartheta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(\underline{X};\vartheta) = -\frac{2n}{\vartheta^2} - \frac{n\overline{X}}{(1-\vartheta)^2},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta) &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(\underline{X};\vartheta)\right] = \frac{2n}{\vartheta^2} + \frac{n\mathbb{E}(\overline{X})}{(1-\vartheta)^2} = \frac{2n}{\vartheta^2} + \frac{2n}{\vartheta(1-\vartheta)} \\ &= \frac{2n}{\vartheta^2(1-\vartheta)} \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{[g'(\vartheta)]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)} = \frac{1-\vartheta}{2n\vartheta^2}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = -\frac{n}{1-\vartheta}\left(\overline{X} - 2\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right) = -\frac{2n}{1-\vartheta}\left(\frac{\overline{X}}{2} + 1 - \frac{1}{\vartheta}\right) = k(\vartheta)\left[T(\underline{x}) - g(\vartheta)\right],$$

όπου $k(\vartheta) = -\frac{2n}{1-\vartheta} \neq 0 \ \forall \vartheta \in (0,1)$ και $T(\underline{X}) = \frac{\overline{X}}{2} + 1$. Τελικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathrm{Var}\left[T(\underline{X})\right] = \frac{1}{4n}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1-\vartheta}{2n\vartheta^2} = \frac{[g'(\vartheta)]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\vartheta)}.$$

Επομένως, η $T(\underline{X}) = \frac{\overline{X}}{2} + 1$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$.

Θέμα 2. Έστω $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta,1)$, όπου $n \geq 3$ και $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}$ άγνωστη παράμετρος. Διατυπώστε το θεώρημα Basu και αποδείξτε μέσω αυτού ότι οι τυχαίες μεταβλητές $T = \sum_{i=1}^n X_i$ και $S = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2 - 2X_3}$ είναι ανεξάρτητες.

Λύση. Το στήριγμα της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ και ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}f(\underline{x};\vartheta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \vartheta)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}\exp\left\{\vartheta\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2}\vartheta^2\right\},\end{aligned}$$

όπου $Q(\vartheta) = \vartheta$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Το σύνολο $Q(\Theta) = \{\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $Z_i = X_i - \vartheta \sim \mathcal{N}(0,1)$ για $i = 1,2,\ldots,n$. Επομένως, προκύπτει ότι:

$$S = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2 - 2X_3} = \frac{\vartheta + Z_1 - (\vartheta + Z_2)}{\vartheta + Z_1 + \vartheta + Z_2 - 2(\vartheta + Z_3)} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_3},$$

η κατανομή της οποίας δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, οι στατιστικές συναρτήσεις T και S είναι ανεξάρτητες.

Θέμα 3. Έστω $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\vartheta_1,\vartheta_2)$, όπου $(\vartheta_1,\vartheta_2) \in \Theta = \mathbb{R}\times(0,\infty)$ η δισδιάστατη άγνωστη παράμετρος και $n \geqslant 2$.

α. Να δείξετε ότι η ΑΕΕΔ της διασποράς ϑ_2 είναι η $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ και η ΕΜΠ της ϑ_2 είναι η $\widehat{\vartheta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

β. Με βάση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, ποια εκτιμήτρια από τις παραπάνω προτιμάτε;

Λύση. α. Βλέπε παράδειγμα 3.26 (σελίδα 51) και παράδειγμα 3.44 (σελίδα 79).

β. Βλέπε παράδειγμα 3.44 (σελίδα 79).

Θέμα 4. Υπολογίστε ροποεκτιμήτριες των παραμέτρων $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ ακολουθεί $\text{Gamma}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ με πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x; \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\vartheta_2^{\vartheta_1}}{\Gamma(\vartheta_1)} x^{\vartheta_1 - 1} e^{-\vartheta_2 x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Λύση. Βλέπε παράδειγμα 3.48 (σελίδα 83).

Θέμα 5. Έστω $X_1, \ldots, X_n \sim f(x; \vartheta) = \frac{2x}{\vartheta^2} \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(x)$, όπου $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Ανήκει η παραπάνω οικογένεια στην ΕΟΚ;

β. Βρείτε την ΕΜΠ, έστω $\widehat{\vartheta}$, της άγνωστης παραμέτρου ϑ.

γ. Αποδείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = \frac{\widehat{\vartheta}}{\vartheta}$ είναι ποσότητα οδηγός και, χρησιμοποιώντας την, κατασκευάστε διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για την παράμετρο ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$, όπου $\alpha \in (0, 1)$.

Λύση. α. Βλέπουμε άμεσα ότι η παραπάνω οικογένεια κατανομών δεν ανήκει στην ΕΟΚ, αφού το στήριγμα $S = [0, \vartheta]$ εξαρτάται από την τιμή του ϑ.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \frac{2^n}{\vartheta^{2n}} \mathbb{1}_{[0,\vartheta]} \left(x_{(n)} \right) \prod_{i=1}^n x_i = \begin{cases} 2^n \vartheta^{-2n} \prod_{i=1}^n x_i, & \vartheta \geqslant x_{(n)} \\ 0, & \vartheta < x_{(n)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \geqslant x_{(n)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

γ. Για $x \in [0, \vartheta]$, Υπολογίζουμε ότι:

$$F(x; \vartheta) = \int_0^x f(y; \vartheta) dy = \int_0^x \frac{2y}{\vartheta^2} dy = \left[\frac{y^2}{\vartheta^2} \right]_0^x = (x/\vartheta)^2, \quad F_{X_{(n)}}(x) = (x/\vartheta)^{2n}.$$

Επομένως, για $y \in [0, 1]$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left[\frac{1}{\vartheta} X_{(n)} \leqslant y \right] = F_{X_{(n)}}(\vartheta y) = y^{2n},$$

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή Y είναι ποσότητα οδηγός. Λύνουμε την ανισότητα

$c_1 \leqslant Y \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{(n)}}{c_2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{X_{(n)}}{c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Y < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1^{2n} = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2n},$$

$$\mathbb{P}(Y > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2^{2n} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/2n}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[X_{(n)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1/2n}, X_{(n)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/2n}\right].$$

Θέμα 6. Να κατασκευάσετε ΟΙΕ επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, όπου $\vartheta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \vartheta(1-x)^{\vartheta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$.
[Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της $Y = -2\vartheta_0 \sum_{i=1}^n \log(1-X_i)$, όταν η πραγματική τιμή του ϑ είναι ϑ_0.]

Λύση. Βλέπε παράδειγμα 5.10 (σελίδα 120).

7.5 Ιούνιος 2018

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{\lambda\vartheta^\lambda}{x^{\lambda+1}}, \quad x \geqslant \vartheta > 0, \quad \lambda > 2,$$

όπου λ γνωστή σταθερά.

α. Να βρεθεί η ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}$ της παραμέτρου ϑ και να δειχθεί ότι είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta) = \vartheta^k$.

γ. Έστω ότι n μεγάλο. Να δοθεί ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ της κατανομής σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \lambda^n \vartheta^{n\lambda} \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \prod_{i=1}^n x_i^{-\lambda-1} = \begin{cases} \lambda^n \vartheta^{n\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{-\lambda-1}, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x})$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \lambda^n \vartheta^{n\lambda} \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) \prod_{i=1}^n x_i^{-\lambda-1} = g\left(T(\underline{x}),\vartheta\right) h(\underline{x}),$$

όπου $T(\underline{x}) = x_{(1)}$, $g(t,\vartheta) = \vartheta^{n\lambda} \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(t)$ και $h(\underline{x}) = \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-\lambda-1}$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Για $x \geqslant \vartheta$, υπολογίζουμε ότι:

$$F(x;\vartheta) = \int_\vartheta^x f(y;\vartheta)dy = \int_\vartheta^x \frac{\lambda\vartheta^\lambda}{y^{\lambda+1}}dy = -\left[\frac{\vartheta^\lambda}{y^\lambda}\right]_\vartheta^x = 1 - (\vartheta/x)^\lambda .$$

Για $t \geqslant \vartheta$, προκύπτει ότι:

$$f_T(t) = n\frac{\lambda\vartheta^\lambda}{t^{\lambda+1}}\left(\frac{\vartheta}{t}\right)^{n\lambda-\lambda} = \frac{n\lambda\vartheta^{n\lambda}}{t^{n\lambda+1}}.$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0 \ \forall\vartheta \in (0,\infty)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = \int_\vartheta^\infty f_T(t)\varphi(t)dt = n\lambda\vartheta^{n\lambda}\int_\vartheta^\infty t^{-n\lambda-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,\infty) \quad \Rightarrow$$

$$\int_\vartheta^\infty t^{-n\lambda-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,\infty).$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$-\vartheta^{-n\lambda-1}\varphi\left(\vartheta\right) = 0, \quad \forall\vartheta \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(T^k\right) &= \int_\vartheta^\infty t^k f_T(t)dt = \int_\vartheta^\infty n\lambda\vartheta^{n\lambda}t^{k-n\lambda-1}dt \overset{k-n\lambda<0}{=} n\lambda\vartheta^{n\lambda}\left[\frac{t^{k-n\lambda}}{k-n\lambda}\right]_\vartheta^\infty \\ &= -n\lambda\vartheta^{n\lambda}\frac{\vartheta^{k-n\lambda}}{k-n\lambda} = \frac{n\lambda\vartheta^k}{n\lambda-k}.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\delta(\underline{X}) = \left(1 - \frac{k}{n\lambda}\right)T^k$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(1)}$, είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$ για $k < n\lambda$.

γ. Αρχικά, υπολογίζουμε ότι:

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{\vartheta}^{\infty} x f(x;\vartheta)dx = \lambda\vartheta^{\lambda}\int_{\vartheta}^{\infty} x^{-\lambda}dx = \lambda\vartheta^{\lambda}\left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_{\vartheta}^{\infty} \overset{\lambda\geq 2}{=} \frac{\lambda\vartheta}{\lambda-1},$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.20 (σελίδα 104), γνωρίζουμε ότι:

$$Q_n = n\left[\frac{1}{\vartheta}X_{(1)} - 1\right] \xrightarrow{d} Y \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_n \leqslant c_2$ ως προς μ:

$$c_1 \leqslant n\left[\frac{X_{(1)}}{k} - 1\right] \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{X_{(1)}}{1+c_2/n} \leqslant \mu \leqslant \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{X_{(1)}}{1+c_1/n}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Q_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{\lambda}\log\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Q_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{\lambda}\log\frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{X_{(1)}}{1-\log(\alpha/2)/n\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{X_{(1)}}{1-\log(1-\alpha/2)/n\lambda}\right].$$

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x;p) = \binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}, \quad x = 0,1,\ldots,N, \quad p \in \Theta = (0,1),$$

και N γνωστό.

α. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ του p.

β. Να υπολογιστεί το κάτω φράγμα διασποράς της ανισότητας Cramér - Rao για το p.

γ. Να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα και η συνέπεια της ΑΕΕΔ του p.

δ. Έστω ότι ρωτήσαμε 100 ανθρώπους για το κατά πόσο ακούν ράδιο στο αυτοκίνητό τους το πρωί και 65 από αυτούς απάντησαν θετικά. Δώστε την εκτίμηση της πιθανότητας οι οδηγοί να ακούν ράδιο στο αμάξι τους το πρωί και το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της.

Λύση. α. Το στήριγμα $S = \{0,1,\ldots,N\}^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του p και ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f(\underline{x};p) &= \exp\left\{\log p \sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right\} \prod_{i=1}^{n} \binom{N}{x_i} \\ &= \exp\left\{\log \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \log \frac{1}{1-p}\right\} \prod_{i=1}^{n} \binom{N}{x_i}, \end{aligned}$$

όπου $Q(p) = \log \frac{p}{1-p}$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Η ΕΟΚ είναι πλήρους τάξης και το σύνολο $Q(\Theta) = \left\{\log \frac{p}{1-p} : p \in (0,1)\right\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής για το p και πλήρης. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}(X_1) = Np \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\overline{X}\right) = p.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\delta_n(\underline{X}) = \frac{1}{N}\overline{X}$ είναι η ΑΕΕΔ του p.

β. Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0,1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $Q'(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \neq 0$ συνεχή συνάρτηση στο Θ, οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{X};p) = p^{n\overline{X}}(1-p)^{n\left(N-\overline{X}\right)} \prod_{i=1}^{n} \binom{N}{X_i},$$

$$\log f(\underline{X};p) = n\overline{X}\log p + n(N-\overline{X})\log(1-p) + \sum_{i=1}^{n} \log \binom{N}{X_i},$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(p) = \frac{\partial}{\partial p}\log f(\underline{X};p) = \frac{n\overline{X}}{p} - n\frac{N-\overline{X}}{1-p}, \quad \frac{\partial^2}{\partial p^2}\log f(\underline{X};p) = -\frac{n\overline{X}}{p^2} - n\frac{N-\overline{X}}{(1-p)^2},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\underline{X}}(p) &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log f(\underline{X};p)\right] = \frac{n\mathbb{E}(\overline{X})}{p^2} + n\frac{N-\mathbb{E}(\overline{X})}{(1-p)^2} = \frac{nN}{p} + \frac{nN}{1-p} \\ &= \frac{nN}{p(1-p)} \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(p)} = \frac{p(1-p)}{nN}. \end{aligned}$$

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{N}\overline{X}\right) = \frac{1}{nN^2}\operatorname{Var}(X_1) = \frac{p(1-p)}{nN} = \frac{1}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(p)},$$

δηλαδή η ΑΕΕΔ $\delta_n(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του p. Επιπλέον, η $\delta_n(\underline{X})$ είναι προφανώς α.ε. του p και παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\left[\delta_n(\underline{X})\right] = 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.17 (σελίδα 67), η $\delta_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του p.

δ. Δεδομένου ότι $N=1$, $n=100$ και $\sum_{i=1}^{n} x_i = 65$, υπολογίζουμε ότι $\overline{x} = 0.65$.

Σχετικά με το ΔΕ, βλέπε παράδειγμα 4.22 (σελίδα 105).

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = (\vartheta+5)x^{\vartheta+4}, \quad 0 < x < 1.$$

α. Χρησιμοποιώντας το λήμμα Neyman - Pearson, να βρεθεί ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ σε ε.σ.σ. α.

β. Ποια η συνάρτηση ισχύος $\pi(\vartheta)$, για $\vartheta \geqslant \vartheta_0$;

Λύση. α. Θεωρούμε τις απλές υποθέσεις $H_0^* : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1^* : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = (\vartheta+5)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\vartheta+4}, \quad \ell(\vartheta \mid \underline{x}) = n\log(\vartheta+5) + (\vartheta+4)\sum_{i=1}^n \log x_i.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\vartheta_0 \mid \underline{x}) - \ell(\vartheta_1 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow$$

$$n\left[\log(\vartheta_0+5) - \log(\vartheta_1+5)\right] + (\vartheta_0 - \vartheta_1)\sum_{i=1}^n \log x_i < c \quad \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^n \log\frac{1}{x_i} < c^* = c - n\left[\log(\vartheta_0+5) - \log(\vartheta_1+5)\right] \quad \stackrel{\vartheta_1-\vartheta_0>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^n \log\frac{1}{x_i} < c^{**} = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \quad \Leftrightarrow \quad T(\underline{x}) = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^n \log\frac{1}{x_i} < c_\alpha = 2\vartheta_0 c^{**}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Beta}(\vartheta_0+5, 1)$, γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=1}^n \log\frac{1}{X_i} \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0+5)$ και $T\left(\underline{X}\right) = 2(\vartheta_0+5)\sum_{i=1}^n \log\frac{1}{X_i} \sim \chi^2_{2n}$, σύμφωνα με το θέμα 1, Ιούνιος 2019 (σελίδα 174). Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[T(\underline{X}) < c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & -2(\vartheta_0+5)\sum_{i=1}^n \log x_i < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & -2(\vartheta_0+5)\sum_{i=1}^n \log x_i \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \exp\left\{(\vartheta + 4)\sum_{i=1}^{n} \log x_i + n\log(\vartheta + 5)\right\},$$

όπου $Q(\vartheta) = \vartheta + 4$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $T^*(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$, οπότε η κατανομή του δείγματος έχει την ιδιότητα ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X})$. Επομένως, ισχύει ότι $\sup_{\vartheta \leqslant \vartheta_0} \mathbb{E}_\vartheta[\varphi(\underline{X})] = \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\varphi(\underline{X})] = \alpha$ και ο φ είναι ΟΙΕ μεγέθους α για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta \leqslant \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

β. Για $\vartheta \geqslant \vartheta_0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\pi_\varphi(\vartheta) &= \mathbb{E}_\vartheta[\varphi(\underline{X})] = \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in R) = \mathbb{P}_\vartheta\left(2(\vartheta_0 + 5)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} < \chi^2_{2n;1-\alpha}\right) \\ &= \mathbb{P}_\vartheta\left(2(\vartheta + 5)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} < \frac{\vartheta + 5}{\vartheta_0 + 5}\chi^2_{2n;1-\alpha}\right) = F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{\vartheta + 5}{\vartheta_0 + 5}\chi^2_{2n;1-\alpha}\right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ισχύς είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του ϑ, δηλαδή μεγαλώνει καθώς το ϑ απομακρύνεται από την τιμή ϑ_0. Για $\vartheta = \vartheta_0$, παρατηρούμε ότι $\pi_\varphi(\vartheta_0) = F_{\chi^2_{2n}}\left(\chi^2_{2n;1-\alpha}\right) = \alpha$.

7.6 Φεβρουάριος 2016

Θέμα 1. Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα από διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(2, p)$ με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x; p) = \binom{2}{x} p^x (1 - p)^{2-x}, \quad x = 0, 1, 2, \quad 0 < p < 1.$$

α. Αν με $\overline{X}_\nu$ συμβολίσουμε τον δειγματικό μέσο, τότε βρείτε αμερόληπτη εκτιμήτρια του p της μορφής $c\overline{X}_\nu$, όπου c άγνωστη σταθερά. Δείξτε ότι είναι και συνεπής εκτιμήτρια του p.

β. Δείξτε ότι η παρακάτω εκτιμήτρια του p είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη και συνεπής:

$$T_\nu = \frac{1}{2\nu + 2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i + d\right), \quad d \in (0, 2).$$

γ. Για $p = \frac{1}{2}$, $d = 1$, βρείτε, με ασυμπτωτική προσέγγιση της κατανομής της T_ν, ακέραιο ν, ώστε:

$$\mathbb{P}\left(\left|T_\nu - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{8}\right) \approx 0.95.$$

Δεχθείτε ότι $\Phi(2) = 0.975$.

Λύση. α. Απαιτούμε το εξής:

$$\mathbb{E}\left(c\overline{X}_\nu\right) = c\mathbb{E}(X_1) = 2cp = p \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{2}\overline{X}_\nu\right) = \frac{1}{4\nu}\operatorname{Var}(X_1) = \frac{p(1-p)}{2\nu}, \quad \lim_{\nu\to\infty}\operatorname{Var}\left(\frac{1}{2}\overline{X}_\nu\right) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{p(1-p)}{2\nu} = 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.17 (σελίδα 67), έπεται ότι η $\frac{1}{2}\overline{X}_\nu$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του p.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(T_\nu) = \frac{1}{2\nu+2}\left[\sum_{i=1}^{\nu}\mathbb{E}(X_i) + d\right] = \frac{2\nu p + d}{2\nu+2}, \quad \lim_{\nu\to\infty}\mathbb{E}(T_\nu) = p,$$

$$\operatorname{Var}(T_\nu) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{1}{(2\nu+2)^2}\sum_{i=1}^{\nu}\operatorname{Var}(X_i) = \frac{2\nu p(1-p)}{4(\nu+1)^2}, \quad \lim_{\nu\to\infty}\operatorname{Var}(T_\nu) = 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.17 (σελίδα 67), έπεται ότι η T_ν είναι συνεπής εκτιμήτρια του p.

γ. Για $p = \frac{1}{2}$ και $d = 1$, έπεται ότι:

$$\mathbb{E}(X_1) = 2p = 1, \quad \operatorname{Var}(X_1) = 2p(1-p) = \frac{1}{2}.$$

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, προκύπτει ότι:

$$\frac{\overline{X}_\nu - 1}{1/\sqrt{2\nu}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$T_\nu - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\nu+2}\left(\sum_{i=1}^{\nu}X_i + 1\right) - \frac{1}{2} = \frac{\nu}{2\nu+2}\left(\overline{X}_\nu - 1\right),$$

$$2(\nu+1)\sqrt{\frac{2}{\nu}}\left(T_\nu - \frac{1}{2}\right) = \frac{\overline{X}_\nu - 1}{1/\sqrt{2\nu}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Απαιτούμε το εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|T_\nu - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{8}\right) &= \mathbb{P}\left[2(\nu+1)\sqrt{\frac{2}{\nu}}\left|T_\nu - \frac{1}{2}\right| < \frac{\nu+1}{2\sqrt{2\nu}}\right] \\
&\to \mathbb{P}\left(|Z| < \frac{\nu+1}{2\sqrt{2\nu}}\right) = \Phi\left(\frac{\nu+1}{2\sqrt{2\nu}}\right) - \Phi\left(-\frac{\nu+1}{2\sqrt{2\nu}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{\nu+1}{2\sqrt{2\nu}}\right) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{\nu+1}{2\sqrt{2\nu}}\right) = 0.975 = \Phi(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu+1}{2\sqrt{2\nu}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\nu+1)^2}{8\nu} = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\nu^2 - 30\nu + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{30 \pm \sqrt{896}}{2} = \frac{30 \pm 8\sqrt{14}}{2} = 15 \pm 4\sqrt{14} \quad \Rightarrow$$

$$\nu = \left\lceil 15 + 4\sqrt{14} \right\rceil \approx 30.$$

Θέμα 2. Έστω $X \sim \text{Exp}(\vartheta)$ και $Y \sim \text{Gamma}(3, \vartheta)$ δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $\vartheta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας της Y:

$$f_Y(y; \vartheta) = \frac{\vartheta^3}{2} y^2 e^{-\vartheta y}, \quad y > 0.$$

α. Βρείτε με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher επαρκή σ.σ. $T(X, Y)$ του ϑ.

β. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ (πλήρης αιτιολόγηση).

γ. Να κατασκευαστεί $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x, y; \vartheta) = f_X(x; \vartheta) f_Y(y; \vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x} \frac{\vartheta^3}{2} y^2 e^{-\vartheta y} = \frac{1}{2} y^2 \vartheta^4 e^{-\vartheta(x+y)},$$

όπου $T(x, y) = x + y$, $g(t, \vartheta) = \vartheta^4 e^{-\vartheta t}$ και $h(x, y) = \frac{1}{2} y^2$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $T(X, Y) = X + Y$ είναι επαρκής για το ϑ.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid x, y) = 4 \log \vartheta - \log 2 + 2 \log y - \vartheta(x + y),$$

$$\frac{\partial \ell(\vartheta \mid x, y)}{\partial \vartheta} = \frac{4}{\vartheta} - (x + y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vartheta} = \frac{4}{x + y},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\vartheta \mid x, y)}{\partial \vartheta^2} = -\frac{4}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall \vartheta > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid x, y)$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0, \infty)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(X, Y) = \frac{4}{X+Y}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

γ. Γνωρίζουμε ότι $X \sim \text{Exp}(\vartheta) \equiv \text{Gamma}(1, \vartheta)$ και $Y \sim \text{Gamma}(3, \vartheta)$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $X + Y \sim \text{Gamma}(4, \vartheta)$. Σύμφωνα με το σημείωση 3.11 (σελίδα 39), έπεται ότι η $Q = 2\vartheta(X + Y) \sim \chi^2_8$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant 2\vartheta(X + Y) \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_1}{2(X + Y)} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{c_2}{2(X + Y)}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{8;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{8;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\chi^2_{8;1-\alpha/2}}{2(X+Y)}, \frac{\chi^2_{8;\alpha/2}}{2(X+Y)}\right].$$

Θέμα 3. Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα από διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$ με:

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 < p < 1,$$

όπου n, p άγνωστες παράμετροι.

α. Εξετάστε κατά πόσο η προηγούμενη κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Να εκτιμηθούν τα n και p με τη μέθοδο των ροπών. Ποια συνθήκη θα πρέπει να πληρούν τα δεδομένα για να είναι πράγματι εκτιμήτριες;

γ. Έστω n γνωστό. Βρείτε επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση για το p.

δ. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του p (n γνωστό).

Λύση. α. Το στήριγμα $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου n, άρα η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Βλέπε παράδειγμα 3.53 (σελίδα 84).

γ. Βλέπε θέμα 2, Ιούνιος 2018 (σελίδα 183).

δ. Βλέπε θέμα 2, Ιούνιος 2018 (σελίδα 183).

Θέμα 4. Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $X \sim \text{Exp}(\vartheta)$ και $Y \sim \text{Exp}(5\vartheta)$ με $\vartheta > 0$.

α. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $g(\vartheta) = 5\sqrt{\vartheta} + 8$.

β. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α.
[Υπόδειξη: Μελετήστε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W = 5Y$.]

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid x, y) = f(x; \vartheta) f(y; \vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x} 5\vartheta e^{-5\vartheta y} = 5\vartheta^2 e^{-\vartheta(x+5y)},$$

$$\ell(\vartheta \mid x, y) = \log 5 + 2\log\vartheta - \vartheta(x+5y), \quad \frac{\partial \ell(\vartheta \mid x,y)}{\partial\vartheta} = \frac{2}{\vartheta} - (x+5y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\widehat{\vartheta} = \frac{2}{x+5y}, \quad \frac{\partial^2 \ell(\vartheta \mid x,y)}{\partial\vartheta^2} = -\frac{2}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall\vartheta > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid x, y)$ είναι γνησίως κοίλη στο $\Theta = (0, \infty)$. Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου, έπεται ότι η $g(\widehat{\vartheta}) = 5\sqrt{\frac{2}{X+5Y}} + 8$ είναι η ΕΜΠ της $g(\vartheta) = 5\sqrt{\vartheta} + 8$.

β. Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\vartheta_0 \mid x, y) - \ell(\vartheta_1 \mid x, y) < c \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) - (\vartheta_0 - \vartheta_1)(x+5y) < c \quad \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)(x+5y) < c^* = c - 2\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \quad \overset{\vartheta_1 - \vartheta_0 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x + 5y < c^{**} = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \quad \Leftrightarrow \quad T(x,y) = 2\vartheta_0(x+5y) < c_\alpha = 2\vartheta_0 c^{**}.$$

Υπό την H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X \sim \mathrm{Exp}(\vartheta_0)$ και $Y \sim \mathrm{Exp}(5\vartheta_0)$, γνωρίζουμε ότι $5Y \sim \mathrm{Exp}(\vartheta_0)$, $X + 5Y \sim \mathrm{Gamma}(2, \vartheta_0)$ και $T(X,Y) = 2\vartheta_0(X+5Y) \sim \chi^2_4$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(X,Y)\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[T(X,Y) < c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{4;1-\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0(x+5y) < \chi^2_{4;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0(x+5y) \geqslant \chi^2_{4;1-\alpha} \end{cases}.$$

7.7 Φεβρουάριος 2015

Θέμα 1. Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\vartheta)$.

α. Να δείξετε την ισότητα:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(X;\vartheta)\right)^2\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\log f(X;\vartheta)\right].$$

β. Έστω $x_1, x_2 \ldots, x_\nu$ τυχαίο δείγμα από $\mathcal{N}(\mu, \vartheta)$, όπου μ γνωστό. Κάνοντας χρήση της ανισότητας Cramér - Rao, να βρείτε αμερόληπτο εκτιμητή ελάχιστης διασποράς του ϑ.

Λύση. α. Βλέπε πρόταση 3.6 (σελίδα 54).

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{X};\vartheta) = (2\pi\vartheta)^{-\nu/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2\right\},$$

$$\log f(\underline{X};\vartheta) = -\frac{\nu}{2}\log(2\pi) - \frac{\nu}{2}\log\vartheta - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = -\frac{\nu}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2 \\ &= \frac{\nu}{2\vartheta^2}\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2 - \vartheta\right] = k(\vartheta)\left[T(\underline{X})-\vartheta\right],\end{aligned}$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{\nu}{2\vartheta^2} \neq 0 \ \forall\vartheta > 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57), η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ, οπότε είναι η μοναδική ΑΕΕΔ του ϑ.

Θέμα 2. Έστω $x_1, x_2 \ldots, x_\nu$ τυχαίο δείγμα από $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

α. Αν θεωρήσουμε ότι το σ^2 είναι γνωστό, να πραγματοποιήσετε τον έλεγχο $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ σε ε.σ.σ. α.

β. Πώς τροποποιείται ο παραπάνω έλεγχος αν το σ^2 δεν είναι γνωστό;

γ. Συλλέγουμε δεδομένα και έστω ότι είναι της μορφή $x_i = 12 + y_i$, όπου $\sum_{i=1}^{\nu} y_i = 200$ και $\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 = 598$. Να πραγματοποιήσετε τον έλεγχο για $\mu_0 = 13$, $\nu = 100$ και $\alpha = 0.05$. [Δίνεται ότι $Z_{0.025} \approx 2$.]

Λύση. α. Βλέπε παράδειγμα 5.14 (σελίδα 126).

β. Βλέπε παράδειγμα 5.15 (σελίδα 127).

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i = 12 + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}y_i = 14,$$

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}\left[12+y_i-(12+\overline{y})\right]^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\overline{y})^2 \\ &= \frac{1}{\nu-1}\left(\sum_{i=1}^{\nu}y_i^2 - \nu\overline{y}^2\right) = \frac{598-400}{99} = 2,\end{aligned}$$

$$|t| = \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{\nu}} = \frac{14-13}{\sqrt{2}/10} \approx 7.07 > t_{\nu-1;\alpha/2} = t_{99;0.025} \approx Z_{0.025} \approx 2.$$

Επομένως, απορρίπτουμε την $H_0 : \mu = 13$ σε ε.σ.σ. $\alpha = 0.05$.

Θέμα 3. Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $X \sim \mathrm{Exp}(\vartheta)$

και $Y \sim \text{Exp}(5\vartheta)$ με $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$.

γ. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη ποσότητα οδηγό, να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για το $\frac{1}{\vartheta}$ σε συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$. Να αποδεικνύετε ό,τι χρησιμοποιείτε για την επίλυση της άσκησης.
[Υπόδειξη: Μπορείτε να μελετήσετε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W = 5Y$.]

Λύση. α. Το στήριγμα $S = (0, \infty)^2$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ και υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x, y; \vartheta) &= f(x; \vartheta) f(y; \vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x} 5\vartheta e^{-5\vartheta y} = 5\vartheta^2 e^{-\vartheta(x+5y)} \\ &= 5e^{-\vartheta(x+5y)+2\vartheta}, \end{aligned}$$

όπου $Q(\vartheta) = -\vartheta$ και $T(x, y) = x + 5y$. Το $Q(\Theta) = \{-\vartheta : \vartheta \in (0, \infty)\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X, Y) = X + 5Y$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Σύμφωνα με το θέμα 4, Φεβρουάριος 2016 (σελίδα 189) και την ιδιότητα του αναλλοίωτου, η στατιστική συνάρτηση $g(\widehat{\vartheta}) = \frac{X+5Y}{2}$ είναι η ΕΜΠ της $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$.

γ. Σύμφωνα με το θέμα 4, Φεβρουάριος 2016 (σελίδα 189), ορίζουμε την ποσότητα οδηγό $Q = 2\vartheta(X + 5Y) \sim \chi^2_4$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς $\frac{1}{\vartheta}$:

$$c_1 \leqslant 2\vartheta(X + 5Y) \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\frac{X + 5Y}{c_2} \leqslant \frac{1}{\vartheta} \leqslant 2\frac{X + 5Y}{c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{4;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{4;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[2\frac{X + 5Y}{\chi^2_{4;\alpha/2}} \leqslant \frac{1}{\vartheta} \leqslant 2\frac{X + 5Y}{\chi^2_{4;1-\alpha/2}} \right].$$

7.8 Απρίλιος 2014

Θέμα 1. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ από κατανομή με αθροιστική συνάρτηση $F(x;\vartheta) = \frac{x}{\vartheta}$, όπου $\vartheta > 0$ και $0 < x_i < \vartheta$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

α. Εξετάστε αν η συγκεκριμένη κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta) = \vartheta^k$ (χωρίς να κάνετε χρήση ΕΜΠ).

γ. Έστω τώρα Y μία και μόνο παρατήρηση από τη συγκεκριμένη κατανομή. Να βρεθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.
[Υπόδειξη: Να βρείτε την κατανομή της $\frac{Y}{\vartheta}$.]

Λύση. α. Παρατηρούμε ότι $X_i \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Αυτή η κατανομή προφανώς δεν ανήκει στην ΕΟΚ, αφού το στήριγμα $S = (0, \vartheta)$ εξαρτάται από την τιμή του ϑ.

β. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.5 (σελίδα 31), η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Για $t \in (0, \vartheta)$, υπολογίζουμε ότι:

$$f_T(t) = n\frac{1}{\vartheta}\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{n-1} = \frac{n}{\vartheta^n}t^{n-1}.$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0 \ \forall\vartheta > 0$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = \int_0^\vartheta f_T(t)\varphi(t)dt = \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta > 1 \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^\vartheta t^{n-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta > 0.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$\vartheta^{n-1}\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall\vartheta > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in (0, \infty) \supseteq (0, \vartheta).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ είναι πλήρης. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(T^k\right) &= \int_0^\vartheta t^k f_T(t)dt = \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^{k+n-1}dt \overset{k+n>0}{=} n\vartheta^{-n}\left[\frac{t^{k+n}}{k+n}\right]_0^\vartheta \\ &= n\vartheta^{-n}\frac{\vartheta^{k+n}}{k+n} = \frac{n\vartheta^k}{k+n}.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\delta(\underline{X}) = \frac{k+n}{n}T^k$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(n)}$, είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$ για $k > -n$.

γ. Έστω $Q = \frac{Y}{\vartheta}$. Για $y \in (0,1)$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_Q(y) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{\vartheta} \leqslant y\right) = F_Y(\vartheta y) = \frac{\vartheta y}{\vartheta} = y,$$

δηλαδή η $Q \sim \mathcal{U}(0,1)$ είναι μία αντιστρεπτή ποσότητα. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \frac{Y}{\vartheta} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Y}{c_2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{Y}{c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\alpha}{2} = 0.025,$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975.$$

Επομένως, ένα ΔΕ ίσων ουρών για το ϑ είναι το $\left[\frac{Y}{0.975}, \frac{Y}{0.025}\right]$.

Θέμα 2. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ από την κατανομή:

$$f(x;\vartheta) = k\vartheta x^{k-1} e^{-\vartheta x^k}, \quad x \geqslant 0, \quad \vartheta > 0, \quad k \text{ γνωστό.}$$

α. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ σε ε.σ.σ. α. Ελέγξτε αν ο έλεγχος είναι ΟΙΕ.
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλο μετασχηματισμό για την εύρεση της κρίσιμης περιοχής.]

β. Έστω n μεγάλο. Βρείτε $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.

Λύση. α. Θεωρούμε την απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1^* : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = (k\vartheta)^n \exp\left\{-\vartheta \sum_{i=1}^n x_i^k\right\} \prod_{i=1}^n x_i^{k-1},$$

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x}) = n\log k + n\log\vartheta - \vartheta\sum_{i=1}^n x_i^k + (k-1)\sum_{i=1}^n \log x_i.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\vartheta_0 \mid \underline{x}) - \ell(\vartheta_1 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad n\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) - (\vartheta_0 - \vartheta_1)\sum_{i=1}^n x_i^k < c \quad \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^n x_i^k < c^* = c - n\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \quad \overset{\vartheta_1-\vartheta_0>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k < c^{**} = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \quad \Leftrightarrow \quad T(\underline{x}) = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^k < c_\alpha = 2\vartheta_0 c^{**}.$$

Θέτουμε $Y_i = X_i^k$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(X_1^k \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \leqslant y^{1/k}\right) = F\left(y^{1/k}; \vartheta\right),$$

$$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{k} y^{1/k-1} f\left(y^{1/k}; \vartheta\right) = \frac{1}{k} y^{1/k-1} k\vartheta y^{1-1/k} e^{-\vartheta y} = \vartheta e^{-\vartheta y},$$

δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $Y_1, \ldots, Y_n \sim \text{Exp}(\vartheta_0)$, γνωρίζουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^k \sim \text{Gamma}(n, \vartheta_0), \quad T\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i^k \sim \chi^2_{2n}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[T(\underline{X}) < c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^k < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^k \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

β. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}\left(Y_1\right) = \frac{1}{\vartheta}$ και $\text{Var}\left(Y_1\right) = \frac{1}{\vartheta^2}$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, προκύπτει ότι:

$$Q_n = \frac{\overline{Y}_n - 1/\vartheta}{1/\vartheta\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{\vartheta}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - 1\right) \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_n \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{\vartheta}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - 1\right) \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 + c_1/\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^k/n} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{1 + c_2/\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^k/n}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = Z_{1-\alpha/2} = -Z_{\alpha/2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = Z_{\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{1 - Z_{\alpha/2}/\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^k/n}, \frac{1 + Z_{\alpha/2}/\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^k/n}\right].$$

Θέμα 3. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ από κατανομή Gamma(k, ϑ) με k γνωστό και:

$$f(x;\vartheta) = \frac{\vartheta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\vartheta x}, \quad x > 0, \quad \vartheta > 0.$$

α. Δείξτε ότι η παραπάνω κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ. Βρείτε την κανονική μορφή της και δώστε τους τρόπους υπολογισμού της μέσης τιμής, της διασποράς και της ροπογεννήτριας της $T(X)$.

β. Να βρεθεί η ΕΜΠ $U(\underline{x}) = U(x_1, \ldots, x_n)$ του $\frac{1}{\vartheta}$.

γ. Δείξτε ότι η $U(\underline{x})$ είναι η ΑΕΕΔ του $\frac{1}{\vartheta}$. Είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$;

δ. Υπολογίστε $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το $\frac{1}{\vartheta}$.
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλο μετασχηματισμό του $\sum_{i=1}^n X_i$.]

Λύση. α. Το στήριγμα $S = (0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ και ισχύει ότι:

$$f(x;\vartheta) = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp\left\{-\vartheta x - k \log\frac{1}{\vartheta}\right\},$$

$$h(x) = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}, \quad Q(\vartheta) = \vartheta, \quad T(x) = -x, \quad A(\vartheta) = k\log\frac{1}{\vartheta}.$$

Παρατηρούμε ότι βρίσκεται σε κανονική μορφή, οπότε υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T(X)\right] = \mathbb{E}(-X) = A'(\vartheta) = -\frac{k}{\vartheta}, \quad \mathrm{Var}\left[T(X)\right] = \mathrm{Var}(-X) = A''(\vartheta) = \frac{k}{\vartheta^2},$$

$$\begin{aligned} M_T(t) = \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = e^{A(t+\vartheta)-A(\vartheta)} &= \exp\left\{k\log\frac{1}{t+\vartheta} - k\log\frac{1}{\vartheta}\right\} \\ &= \exp\left\{k\log\frac{t}{t+\vartheta}\right\} = \left(\frac{t}{t+\vartheta}\right)^k, \quad t > -\vartheta. \end{aligned}$$

β. Βλέπε επαναληπτική άσκηση 14 (σελίδα 136). Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου, η στατιστική συνάρτηση $U(\underline{X}) = g(\widehat{\vartheta}) = \frac{1}{k}\overline{X}$ είναι η ΕΜΠ της $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$.

γ. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.3 (σελίδα 22), η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $T^*(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^n X_i$. Το $Q(\Theta) = \{\vartheta : \vartheta > 0\} = (0,\infty)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T^*(\underline{X})$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}\left[U(\underline{X})\right] = \frac{1}{\vartheta}$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $U(\underline{X}) = \frac{1}{k}\overline{X}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$. Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $Q'(\vartheta) = 1 \neq 0$ συνεχή συνάρτηση στο $(0, \infty)$, οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\underline{X}; \vartheta) = \frac{nk}{\vartheta} - \sum_{i=1}^{n} X_i = -nk\left(\frac{1}{k}\overline{X} - \frac{1}{\vartheta}\right),$$

όπου $k(\vartheta) = -nk \neq 0 \ \forall \vartheta > 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57), η $U(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$.

δ. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.5 (σελίδα 96), καταλήγουμε στο ακόλουθο ΔΕ ίσων ουρών για το $\frac{1}{\vartheta}$:

$$\left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2nk;\alpha/2}}, \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2nk;1-\alpha/2}}\right].$$

7.9 Σεπτέμβριος 2013

Θέμα 1. Έστω X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από κατανομές με αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X_i}(x_i; \vartheta) = k_i \vartheta^{k_i} x_i^{-k_i - 1}, \quad x_i \geqslant \vartheta > 0,$$

όπου k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, γνωστές θετικές σταθερές.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο ϑ.

β. Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς για το ϑ^r.

γ. Να βρεθεί η ΕΜΠ του ϑ. Είναι αυτή αμερόληπτη;

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x}; \vartheta) = \vartheta^{n\overline{k}} \prod_{i=1}^{n} k_i x_i^{-k_i - 1} \mathbb{1}_{[\vartheta, \infty)}(x_i) = \vartheta^{n\overline{k}} \mathbb{1}_{[\vartheta, \infty)}\left(x_{(1)}\right) \prod_{i=1}^{n} k_i x_i^{-k_i - 1},$$

όπου $\overline{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$, $T(\underline{x}) = x_{(1)}$, $g(t, \vartheta) = \vartheta^{n\overline{k}} \mathbb{1}_{[\vartheta, \infty)}(t)$ και $h(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} k_i x_i^{-k_i - 1}$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση

$T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Για $x \geqslant \vartheta$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{X_i}(x;\vartheta) = \int_\vartheta^x f(y;\vartheta)dy = \int_\vartheta^x k_i\vartheta^{k_i}y^{-k_i-1}dy = -\left[\vartheta^{k_i}y^{-k_i}\right]_\vartheta^x = 1-(\vartheta/x)^{k_i}.$$

Για $t \geqslant \vartheta$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_T(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1-F_{X_i}(t;\vartheta)] = 1-(\vartheta/t)^{n\bar{k}}, \quad f_T(t) = n\bar{k}\vartheta^{n\bar{k}}t^{-n\bar{k}-1}.$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0 \ \forall\vartheta\in(0,\infty)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = \int_\vartheta^\infty f_T(t)\varphi(t)dt = n\bar{k}\vartheta^{n\bar{k}}\int_\vartheta^\infty t^{-n\bar{k}-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta\in(0,\infty) \quad \Rightarrow$$

$$\int_\vartheta^\infty t^{-n\bar{k}-1}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall\vartheta\in(0,\infty).$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$-\vartheta^{-n\bar{k}-1}\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall\vartheta\in(0,\infty) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t\in(0,\infty).$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^r) &= \int_\vartheta^\infty t^r f_T(t)dt = \int_\vartheta^\infty n\bar{k}\vartheta^{n\bar{k}}t^{r-n\bar{k}-1}dt \overset{r-n\bar{k}<0}{=} n\bar{k}\vartheta^{n\bar{k}}\left[\frac{t^{r-n\bar{k}}}{r-n\bar{k}}\right]_\vartheta^\infty \\ &= -n\bar{k}\vartheta^{n\bar{k}}\frac{\vartheta^{r-n\bar{k}}}{r-n\bar{k}} = \frac{n\bar{k}\vartheta^r}{n\bar{k}-r}.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\delta(\underline{X}) = \left(1-\frac{r}{n\bar{k}}\right)T^r$, όπου $T(\underline{X}) = X_{(1)}$, είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta)$ για $r < n\bar{k}$.

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \begin{cases}\vartheta^{n\bar{k}}\prod_{i=1}^n\left(k_i x_i^{-k_i-1}\right), & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)}\end{cases}.$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[\left(1-\frac{1}{n\bar{k}}\right)X_{(1)}\right] = \vartheta,$$

οπότε η ΕΜΠ δεν είναι α.ε. του ϑ.

Θέμα 2. Έστω X τυχαία μεταβλητή από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;a,b) = \frac{a}{b^a} x^{a-1} e^{-(x/b)^a}, \quad x > 0, \quad a, b > 0.$$

α. Να εξεταστεί αν η προηγούμενη κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Αν $a = 2$, να υπολογιστούν οι $\mathbb{E}(X^2)$ και $\mathrm{Var}(X^2)$.

γ. Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από την παραπάνω κατανομή με $a = 2$. Να βρεθεί η ΕΜΠ της συνάρτησης $g(b) = b^2$ και να δειχθεί ότι αυτή είναι ΑΕΕΔ και συνεπής εκτιμήτρια της $g(b)$.

Λύση. α. Βλέπε παράδειγμα 2.3 (σελίδα 20).

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x;b) = 2x \exp\left\{-\frac{1}{b^2}x^2 - 2\log b\right\},$$

$$h(x) = 2x, \quad Q(b) = -\frac{1}{b^2}, \quad T(x) = x^2, \quad A(b) = 2\log b.$$

Θεωρούμε την ακόλουθη αναπαραμέτρηση:

$$\eta = -\frac{1}{b^2} < 0, \quad b = \frac{1}{\sqrt{-\eta}},$$

$$f(x;\eta) = 2x \exp\left\{-\eta x^2 - \log\frac{1}{-\eta}\right\}, \quad A(\eta) = \log\frac{1}{-\eta}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T(X)\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) = A'(\eta) = -\frac{1}{\eta} = b^2,$$

$$\mathrm{Var}\left[T(X)\right] = \mathrm{Var}\left(X^2\right) = A''(\eta) = \frac{1}{\eta^2} = b^4.$$

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(b \mid \underline{x}) = n\log 2 + \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\log b,$$

$$\frac{\partial \ell(b \mid \underline{x})}{\partial b} = \frac{2}{b^3}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2n}{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{b} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(b \mid \underline{x})}{\partial b^2} = -\frac{6}{b^4}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{2n}{b^2} = -\frac{2n}{b^2}\left(\frac{3}{b^2}\widehat{b}^2 - 1\right), \quad \frac{\partial^2 \ell(\widehat{b} \mid \underline{x})}{\partial b^2} = -\frac{4n}{\widehat{b}^2} < 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(b \mid \underline{x})$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{b}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{b\to\infty} \mathcal{L}\left(b \mid \underline{x}\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{2^n}{b^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}\prod_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\lim_{b\to 0^+} \mathcal{L}\left(b \mid \underline{x}\right) = \lim_{b\to 0^+} \frac{2^n}{b^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}\prod_{i=1}^n x_i = 0.$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου, η $U_n(\underline{x}) = g(\widehat{b}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$ είναι η ΕΜΠ της $g(b) = b^2$. Το σύνολο $Q(\Theta) = \left\{-\frac{1}{b^2} : b \in (0,\infty)\right\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η $T^*(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ είναι επαρκής για το b και πλήρης. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, έπεται ότι $\mathbb{E}\left[U_n(\underline{x})\right] = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = b^2$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), συμπεραίνουμε ότι η $U_n(\underline{x})$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(b) = b^2$. Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $U_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(b) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = b^2$.

Θέμα 3. Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από κατανομή Bernoulli(p) και θέλουμε να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο $H_0 : p = 0.49$ vs. $H_1 : p = 0.51$. Θεωρώντας ότι το n είναι μεγάλο, υπολογίστε, κατά προσέγγιση, το μέγεθος του δείγματος n έτσι ώστε οι δύο πιθανότητες σφάλματος να είναι περίπου ίσες με 0.01.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι:

$$\ell(p \mid \underline{x}) = \log p \sum_{i=1}^n x_i + \log(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) = \log\frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^n x_i + n\log(1-p).$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(0.49 \mid \underline{x}) - \ell(0.51 \mid \underline{x}) < c \quad\Leftrightarrow\quad \log\frac{0.49/(1-0.49)}{0.51/(1-0.51)}\sum_{i=1}^n x_i + n\log\frac{1-0.49}{1-0.51} < c \quad\Leftrightarrow$$

$$2\log\frac{0.51}{0.49}\sum_{i=1}^n x_i > c^* = n\log\frac{0.51}{0.49} - c \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^n x_i > c^{**} = \frac{c^*}{2}\left(\log\frac{0.51}{0.49}\right)^{-1},$$

$$T_n(\underline{x}) = \frac{\overline{x}_n - 0.49}{\sqrt{0.49\cdot 0.51/n}} > c_\alpha = \frac{c^{**}/n - 0.49}{\sqrt{0.49\cdot 0.51/n}}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim$ Bernoulli(0.49), γνωρίζουμε ότι $T_n(\underline{X}) \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{0.49}\left[\varphi_n(\underline{X})\right] = \alpha \quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}_{0.49}\left[Z > c_\alpha\right] = \alpha = 0.01 \quad\Rightarrow\quad c_\alpha = Z_{0.01}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ασυμπτωτικό έλεγχο:

$$\varphi_n(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x}_n > 0.49 + Z_{0.01}\sqrt{0.49 \cdot 0.51/n} \\ 0, & \overline{x}_n \leqslant 0.49 + Z_{0.01}\sqrt{0.49 \cdot 0.51/n} \end{cases}.$$

Στη συνέχεια, απαιτούμε το εξής:

$$\mathbb{P}(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = \mathbb{P}_{0.51}\left(\underline{X} \notin R\right) = \mathbb{P}_{0.51}\left(\frac{\overline{X}_n - 0.49}{\sqrt{0.49 \cdot 0.51/n}} \leqslant Z_{0.01}\right)$$
$$\to \Phi\left(Z_{0.01} + \frac{0.49 - 0.51}{\sqrt{0.49 \cdot 0.51/n}}\right) = 0.01 \quad \Rightarrow$$

$$Z_{0.01} - \frac{0.02}{\sqrt{0.49 \cdot 0.51/n}} = \Phi^{-1}(0.01) = Z_{0.99} = -Z_{0.01} \quad \Rightarrow$$
$$Z_{0.01}^2 = \frac{0.0001}{0.49 \cdot 0.51/n} \quad \Rightarrow \quad n = 49 \cdot 51 \cdot Z_{0.01}^2 \approx 13524.32.$$

Επομένως, το μέγεθος δείγματος είναι $n = 13525$.

Θέμα 4. Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(u;\vartheta) = \frac{p}{\vartheta}u^{p-1}e^{-u^p/\vartheta}, \quad u > 0, \quad p > 0 \text{ γνωστό.}$$

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια $\delta = \delta(\underline{u})$ του ϑ.

β. Να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.
[Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή του $\frac{2n\delta}{\vartheta}$.]

γ. Αν $U_1 = \frac{1}{4}$, $U_2 = \frac{1}{2}$, $U_3 = \frac{1}{4}$ και $p = 2$, ποιο θα είναι το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha = 90\%$;

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{U};\vartheta) = (p/\vartheta)^n \exp\left\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n U_i^p\right\}\prod_{i=1}^n U_i^{p-1},$$

$$\log f(\underline{U};\vartheta) = n\log p - n\log\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n U_i^p + (p-1)\sum_{i=1}^n \log U_i,$$

$$\mathcal{S}_{\underline{U}}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{U};\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^n U_i^p = \frac{n}{\vartheta^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i^p - \vartheta\right),$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta^2} \neq 0\ \forall\vartheta > 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57), η στατιστική συνάρτηση $\delta(\underline{U}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i^p$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ.

β. Θέτουμε $X_i = U_i^p$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $x > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{X_1}(x) = \mathbb{P}\left(U_1^p \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(U_1 \leqslant x^{1/p}\right) = F_{U_1}\left(x^{1/p}\right),$$

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{p}x^{1/p-1}f_{U_1}\left(x^{1/p}\right) = \frac{1}{p}x^{1/p-1}\frac{p}{\vartheta}x^{1-1/p}e^{-x/\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}e^{-x/\vartheta},$$

δηλαδή $X_i \sim \text{Exp}(1/\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $T(\underline{U}) = \sum_{i=1}^n U_i^p \sim \text{Gamma}\left(n, 1/\vartheta\right)$. Σύμφωνα με τη σημείωση 3.11 (σελίδα 39), ορίζουμε την αντιστρεπτή ποσότητα $Q = \frac{2}{\vartheta}T = \frac{2n\delta}{\vartheta} \sim \chi^2_{2n}$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \frac{2}{\vartheta}\sum_{i=1}^n U_i^p \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\sum_{i=1}^n U_i^p}{c_2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{2\sum_{i=1}^n U_i^p}{c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{2\sum_{i=1}^n U_i^p}{\chi^2_{2n;\alpha/2}}, \frac{2\sum_{i=1}^n U_i^p}{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}\right].$$

γ. Υπολογίζουμε ότι ότι $\chi^2_{2n;\alpha/2} = \chi^2_{6;0.05} \approx 12.59$ και $\chi^2_{2n;1-\alpha/2} = \chi^2_{6;0.95} \approx 1.64$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^n U_i^p = \sum_{i=1}^3 U_i^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

Επομένως, το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης είναι το $[0.06, 0.46]$.

7.10 Ιούνιος 2013

Θέμα 1. Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου $X \sim \mathcal{N}(0, \vartheta^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(0, 4\vartheta^2)$ και $\vartheta \in (0, \infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς της $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

δ. Με κατάλληλη αντιστρεπτή ποσότητα, να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για το ϑ^2 με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

Λύση. α. Το στήριγμα $S = \mathbb{R}^2$ δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f(x;\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\vartheta^2}\right\}, \quad f(y;\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\vartheta^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{8\vartheta^2}\right\},$$

$$\begin{aligned} f(x,y;\vartheta) = f(x;\vartheta)f(y;\vartheta) &= \frac{1}{4\pi\vartheta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\vartheta^2} - \frac{y^2}{8\vartheta^2}\right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \exp\left\{-\frac{4x^2+y^2}{8\vartheta^2} - 2\log\vartheta\right\}, \end{aligned}$$

όπου $Q(\vartheta) = -\frac{1}{8\vartheta^2}$ και $T(x,y) = 4x^2 + y^2$. Το $Q(\Theta) = \left\{-\frac{1}{8\vartheta^2} : \vartheta > 0\right\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(X,Y) = 4X^2 + Y^2$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Παρατηρούμε ότι:

$$X \sim \mathcal{N}(0,\vartheta^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{X}{\vartheta} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{X^2}{\vartheta^2} \sim \chi_1^2,$$

$$Y \sim \mathcal{N}(0,4\vartheta^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{2\vartheta} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{Y^2}{4\vartheta^2} \sim \chi_1^2.$$

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές X και Y ανεξάρτητες, έπεται ότι:

$$Q(X,Y) = Q_1 + Q_2 = \frac{X^2}{\vartheta^2} + \frac{Y^2}{4\vartheta^2} = \frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2} \sim \chi_2^2 \equiv \text{Exp}\,(1/2)\,,$$

$$\mathbb{E}\left[Q(X,Y)\right] = \mathbb{E}\left(\frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{4X^2+Y^2}{8}\right) = \vartheta^2.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\delta(X,Y) = \frac{4X^2+Y^2}{8}$ είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta) = \vartheta^2$.

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid x,y) = -\log(4\pi) - \frac{4x^2+y^2}{8\vartheta^2} - 2\log\vartheta, \quad \frac{\partial\ell(\vartheta \mid x,y)}{\partial\vartheta} = \frac{4x^2+y^2}{4\vartheta^3} - \frac{2}{\vartheta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\widehat{\vartheta} = \sqrt{\frac{4x^2+y^2}{8}}, \quad \frac{\partial^2\ell(\vartheta \mid x,y)}{\partial\vartheta^2} = -3\frac{4x^2+y^2}{4\vartheta^4} + \frac{2}{\vartheta^2} = -\frac{2}{\vartheta^2}\left(\frac{3\widehat{\vartheta}^2}{\vartheta^2} - 1\right),$$

$$\frac{\partial^2\ell(\widehat{\vartheta} \mid x,y)}{\partial\vartheta^2} = -\frac{4}{\widehat{\vartheta}^2} < 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid x,y)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{\vartheta}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \mathcal{L}\left(\vartheta \mid x, y\right) = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{4\pi\vartheta^2} \exp\left\{-\frac{4x^2+y^2}{8\vartheta^2}\right\} = 0,$$

$$\lim_{\vartheta\to 0^+} \mathcal{L}\left(\vartheta \mid x, y\right) = \lim_{\vartheta\to 0+} \frac{1}{4\pi\vartheta^2} \exp\left\{-\frac{4x^2+y^2}{8\vartheta^2}\right\} = 0.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(X,Y) = \sqrt{\frac{4X^2+Y^2}{8}}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

δ. Έχουμε δείξει ότι $Q = \frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2} \sim \chi^2_2$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ^2:

$$c_1 \leqslant \frac{4X^2+Y^2}{4\vartheta^2} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4X^2+Y^2}{4c_2} \leqslant \vartheta^2 \leqslant \frac{4X^2+Y^2}{4c_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{2;1-\alpha/2},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{2;\alpha/2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{4X^2+Y^2}{4\chi^2_{2;\alpha/2}}, \frac{4X^2+Y^2}{4\chi^2_{2;1-\alpha/2}}\right].$$

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{2\vartheta x}{(1+x^2)^{\vartheta+1}}, \quad x > 0,$$

όπου $\vartheta \in (0,\infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$ και να ελεγχθεί αν αυτή είναι συνεπής για το $\frac{1}{\vartheta}$.
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την κατανομή της $Y = \log\left(1+X^2\right)$.]

β. Να βρεθεί ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$, όπου $\vartheta_1 < \vartheta_0$, σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$.

γ. Για τις παραπάνω υποθέσεις, να βρεθεί προσεγγιστική κρίσιμη περιοχή σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α για μεγάλο ν.

Λύση. α. Βλέπε θέμα 1, Σεπτέμβριος 2019 (σελίδα 171).

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = (2\vartheta)^{\nu} \prod_{i=1}^{\nu} x_i \left(1 + x_i^2\right)^{-\vartheta-1},$$

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x}) = \nu \log 2 + \nu \log \vartheta + \sum_{i=1}^{\nu} \log x_i - (\vartheta + 1) \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right).$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\vartheta_0 \mid \underline{x}) - \ell(\vartheta_1 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad \nu\left(\log \vartheta_0 - \log \vartheta_1\right) - (\vartheta_0 - \vartheta_1) \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) < c \quad \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_0 - \vartheta_1) \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) > c^* = \nu\left(\log \vartheta_0 - \log \vartheta_1\right) - c \quad \overset{\vartheta_0 - \vartheta_1 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) > c^{**} = \frac{c^*}{\vartheta_0 - \vartheta_1} \quad \Leftrightarrow$$

$$T(\underline{x}) = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) > c_\alpha = 2\vartheta_0 c^{**}.$$

Θέτουμε $Y_i = \log\left(1 + X_i^2\right)$ για $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left[\log\left(1 + X_1^2\right) \leqslant y\right] = \mathbb{P}\left(X_1^2 \leqslant e^y - 1\right) = F\left(\sqrt{e^y - 1}; \vartheta\right),$$

$$f_{Y_1}(y) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 1}} f\left(\sqrt{e^y - 1}; \vartheta\right) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 1}} \frac{2\vartheta\sqrt{e^y - 1}}{e^{y(\vartheta+1)}} = \vartheta e^{-\vartheta y},$$

δηλαδή $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\vartheta)$. Υπό την H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $Y_1, \ldots, Y_\nu \sim \mathrm{Exp}(\vartheta_0)$, έπεται ότι:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) \sim \mathrm{Gamma}(\nu, \vartheta_0), \quad T\left(\underline{X}\right) = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + X_i^2\right) \sim \chi^2_{2\nu}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[T(\underline{X}) > c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2\nu;\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) > \chi^2_{2\nu;\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{\nu} \log\left(1 + x_i^2\right) \leqslant \chi^2_{2\nu;\alpha} \end{cases}.$$

γ. Υπό την H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $Y_1, \ldots, Y_\nu \sim \text{Exp}(\vartheta_0)$, έπεται ότι:

$$Q_\nu(\underline{X}) = \frac{\overline{Y}_\nu - 1/\vartheta_0}{1/\vartheta_0\sqrt{\nu}} = \sqrt{\nu}\left[\frac{\vartheta_0}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\log\left(1+X_i^2\right) - 1\right] \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα. Λύνουμε την ανισότητα $T(\underline{x}) > c_\alpha$ ως προς $Q_\nu(\underline{x})$:

$$Q_\nu(\underline{x}) = \sqrt{\nu}\left[\frac{1}{2\nu}T(\underline{x}) - 1\right] > c_\alpha^* = \sqrt{\nu}\left(\frac{c_\alpha}{2\nu} - 1\right).$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{\nu\to\infty}\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi_\nu^*(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left(Z > c_\alpha^*\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha^* = Z_\alpha.$$

Τελικά, καταλήγουμε στον ακόλουθο ασυμπτωτικό έλεγχο:

$$\varphi_\nu^*(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sqrt{\nu}\left[\frac{\vartheta_0}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\log\left(1+x_i^2\right) - 1\right] > Z_\alpha \\ 0, & \sqrt{\nu}\left[\frac{\vartheta_0}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\log\left(1+x_i^2\right) - 1\right] \leqslant Z_\alpha \end{cases}.$$

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[2\vartheta, 3\vartheta]$, όπου $\vartheta \in (0,\infty)$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

γ. Να κατασκευασθεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης (ίσων ουρών) για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων του προηγούμενη δείγματος με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ $(0 < \alpha < 1)$ για μεγάλο ν.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^\nu}\prod_{i=1}^{\nu}\mathbb{1}_{[2\vartheta,3\vartheta]}(x_i) = \vartheta^{-\nu}\mathbb{1}_{[2\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right)\mathbb{1}_{(0,3\vartheta]}\left(x_{(\nu)}\right),$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(x_{(1)}, x_{(\nu)}\right)$, $g(t_1,t_2,\vartheta) = \vartheta^{-\nu}\mathbb{1}_{[2\vartheta,\infty)}(t_1)\,\mathbb{1}_{(0,3\vartheta]}(t_2)$ και $h(\underline{x}) = 1$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(X_{(1)}, X_{(\nu)}\right)$ είναι επαρκής για το ϑ.

β. Βλέπε παράδειγμα 3.40 (σελίδα 77).

γ. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.11 (σελίδα 69), γνωρίζουμε ότι:

$$\nu\left[1 - F\left(X_{(\nu)};\vartheta\right)\right] = \nu\left[1 - \frac{X_{(\nu)} - 2\vartheta}{\vartheta}\right] = \nu\left[3 - \frac{1}{\vartheta}X_{(\nu)}\right] \xrightarrow{d} Y \sim \text{Exp}(1).$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q_\nu \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \nu \left[3 - \frac{X_{(\nu)}}{\vartheta}\right] \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X_{(\nu)}}{3 - c_1/\nu} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{X_{(\nu)}}{3 - c_2/\nu}.$$

Για το ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathbb{P}(Q_\nu < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathbb{P}(Q_\nu > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Y > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\log\frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ασυμπτωτικό ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{X_{(\nu)}}{3 + \log(1-\alpha/2)/\nu}, \frac{X_{(\nu)}}{3 + \log(\alpha/2)/\nu}\right].$$

7.11 Ιανουάριος 2013

Θέμα 1. Έστω $X_i \sim \mathcal{U}\left(0, \frac{\vartheta}{k_i}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, γνωστές θετικές σταθερές.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο ϑ.

β. Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς για την $g(\vartheta) = \vartheta^{-r}$.

γ. Έστω $X_i \sim \mathcal{U}(0, 2\vartheta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τυχαίο δείγμα. Να βρεθούν ΑΕΕΔ για την $\mathbb{E}(X_1)$ και την $\mathrm{Var}(X_1)$.

δ. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ. Είναι αυτή αμερόληπτη για το ϑ;

Λύση. α. Θέτουμε $U_i = k_i X_i \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Σύμφωνα με το θέμα 1, Απρίλιος 2014 (σελίδα 193), έπεται ότι η $T(\underline{X}) = \max_i k_i X_i$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Σύμφωνα με το θέμα 1, Απρίλιος 2014 (σελίδα 193), έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $\psi(T) = \left(1 - \frac{r}{n}\right) T^{-r}$, όπου $T(\underline{X}) = \max_i k_i X_i$, είναι η ΑΕΕΔ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta^{-r}$ για $r < n$.

γ. Θέτουμε $k_i = \frac{1}{2}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε $T(\underline{X}) = \frac{1}{2} X_{(n)}$. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, έπεται ότι η $\psi_1(T) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) X_{(n)}$ είναι η ΑΕΕΔ της $\mathbb{E}(X_1) = \vartheta$ και η $\psi_2(T) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) T^2 = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left[X_{(n)}\right]^2$ είναι η ΑΕΕΔ της $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{3}\vartheta^2$.

δ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = \frac{1}{\vartheta^n} \prod_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{[0,\vartheta/k_i]}(x_i) = \begin{cases} \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^{n} k_i, & \vartheta \geqslant \max_i k_i x_i \\ 0, & \vartheta < \max_i k_i x_i \end{cases}.$$

Για $\vartheta \geqslant \max_i k_i x_i$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \max_i k_i X_i$.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_r$ τυχαίο δείγμα από Gamma(ν, ϑ) με ν γνωστό και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{\vartheta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\vartheta x}, \quad x > 0, \quad \nu, \vartheta > 0.$$

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση και ΕΜΠ για το ϑ και να δοθεί η κατανομή της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης (χωρίς απόδειξη).

β. Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ και να ελεγχθεί αν είναι ΟΙΕ.

γ. Να υπολογιστεί $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = \exp\left\{ -\vartheta \sum_{i=1}^{r} x_i + r\nu \log\vartheta \right\} \frac{1}{[\Gamma(\nu)]^r} \prod_{i=1}^{r} x_i^{\nu-1}.$$

Το στήριγμα $S = (0,\infty)^r$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ, όποτε η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim$ Gamma$(r\nu, \vartheta)$ είναι επαρκής για το ϑ, σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας στην ΕΟΚ. Για την ΕΜΠ του ϑ, βλέπε θέμα 3, Απρίλιος 2014 (σελίδα 196).

β. Θεωρούμε την απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1^* : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Γνωρίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x}) = -\vartheta \sum_{i=1}^{r} x_i + r\nu \log\vartheta - r\log\Gamma(\nu) + (\nu-1)\sum_{i=1}^{r} \log x_i.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\vartheta_0 \mid \underline{x}) - \ell(\vartheta_1 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad r\nu\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) - (\vartheta_0 - \vartheta_1)\sum_{i=1}^{r} x_i < c \quad \Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\sum_{i=1}^{r} x_i < c^* = c - r\nu\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \quad \overset{\vartheta_1 - \vartheta_0 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_i < c^{**} = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \quad \Leftrightarrow \quad T(\underline{x}) = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^{r} x_i < c_\alpha = 2\vartheta_0 c^{**}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_r \sim \text{Gamma}(\nu, \vartheta_0)$, έπεται ότι $\sum_{i=1}^r X_i \sim \text{Gamma}(r\nu, \vartheta_0)$ και $T(\underline{X}) = 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^r X_i \sim \chi^2_{2r\nu}$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[T(\underline{X}) < c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2r\nu;1-\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^r x_i < \chi^2_{2r\nu;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \sum_{i=1}^r x_i \geqslant \chi^2_{2r\nu;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

γ. Βλέπε παράδειγμα 4.5 (σελίδα 96).

Θέμα 3. Έστω X τυχαία μεταβλητή από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right\}, \quad x > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0.$$

α. Να εξεταστεί αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Να υπολογιστούν οι $\mathbb{E}(\log X)$, $\text{Var}(\log X)$, $\mathbb{E}\left[(\log X)^2\right]$, $\text{Var}\left[(\log X)^2\right]$ και $\text{Cov}\left[\log X, (\log X)^2\right]$.

γ. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την προηγούμενη κατανομή με σ^2 γνωστό. Να δείξετε ότι η ΕΜΠ της παραμέτρου μ είναι ΑΕΕΔ, συνεπής και αποτελεσματική για το μ.

Λύση. α. Το στήριγμα $S = (0, \infty)$ της κατανομής δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου $\underline{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)$ των αγνώστων παραμέτρων και υπολογίζουμε ότι:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}\log x - \frac{1}{2\sigma^2}(\log x)^2 - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \log\sigma\right\},$$

$$h(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}, \quad \underline{Q}(\mu,\sigma^2) = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

$$\underline{T}(x) = \left(\log x, (\log x)^2\right), \quad A(\mu,\sigma^2) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma.$$

Επομένως, η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Θεωρούμε την ακόλουθη αναπαραμέτρηση:

$$\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta_2}, \quad \mu = -\frac{\eta_1}{2\eta_2},$$

$$f(x; \underline{\eta}) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\eta_1 \log x + \eta_2 (\log x)^2 + \frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{1}{2}\log(-2\eta_2)\right\},$$

$$A(\underline{\eta}) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} - \frac{1}{2}\log(-2\eta_2).$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}[T_1(X)] = \mathbb{E}(\log X) = \frac{\partial A(\underline{\eta})}{\partial \eta_1} = -\frac{\eta_1}{2\eta_2} = \mu,$$

$$\mathbb{E}[T_2(X)] = \mathbb{E}\left[(\log X)^2\right] = \frac{\partial A(\underline{\eta})}{\partial \eta_2} = \frac{\eta_1^2}{4\eta_2^2} - \frac{1}{2\eta_2} = \mu^2 + \sigma^2,$$

$$\mathrm{Var}[T_1(X)] = \mathrm{Var}(\log X) = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_1^2} = -\frac{1}{2\eta_2} = \sigma^2,$$

$$\mathrm{Var}[T_2(X)] = \mathrm{Var}\left[(\log X)^2\right] = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_2^2} = -\frac{\eta_1^2}{2\eta_2^3} + \frac{1}{2\eta_2^2} = 4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4,$$

$$\mathrm{Cov}[T_1(X), T_2(X)] = \mathrm{Cov}\left[\log X, (\log X)^2\right] = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = \frac{\eta_1}{2\eta_2^2} = 2\mu\sigma^2.$$

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\mu \mid \underline{x}) = -\sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{n}{2}\log(2\pi) + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (\log x_i)^2 - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - n\log\sigma,$$

$$\frac{\partial \ell(\mu \mid \underline{x})}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{n}{\sigma^2}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i,$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\mu \mid \underline{x})}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\mu \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\mu}_n(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i$ είναι η ΕΜΠ του μ. Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\widehat{\mu}_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\mathbb{E}(\log X_1) = \mu$. Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = \mathbb{R}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $Q'(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \neq 0$ συνεχή συνάρτηση, οπότε όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} \log f(\underline{X};\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \log X_i - \frac{n}{\sigma^2}\mu, \quad \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f(\underline{X};\mu) = -\frac{n}{\sigma^2},$$

$$\mathcal{I}_{\underline{X}}(\mu) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f(\underline{X};\mu)\right] = \frac{n}{\sigma^2} \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\mu)} = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i\right) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}(X_1) = \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{1}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\mu)},$$

δηλαδή η ΕΜΠ $\widehat{\mu}_n(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του mu. Επομένως, είναι κι η μοναδική ΑΕΕΔ του μ.

Θέμα 4. Έστω X_1, X_2, X_3, X_4 ανεξάρτητες τ.μ. με $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu/2, 2\right)$, $X_3 \sim \mathcal{N}(2\mu, 1)$, $X_4 \sim \mathcal{N}(3\mu, 2\sigma^2)$ και μ, σ^2 άγνωστα.

α. Να βρεθεί η σχέση που οδηγεί στην εύρεση της ΕΜΠ του ζεύγους (μ,σ^2).

β. Έστω $\mu = 0$. Να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$ με $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

γ. Να υπολογιστεί $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το σ^2.

Λύση. α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f_{X_1}(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad f_{X_2}(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu/2)^2}{4}\right\},$$

$$f_{X_3}(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-2\mu)^2}{2}\right\}, \quad f_{X_4}(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-3\mu)^2}{4\sigma^2}\right\},$$

$$\ell(\mu,\sigma^2 \mid \underline{x}) = -\log\left(8\pi^2\right) - \log\sigma^2 - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(2x-\mu)^2}{16} - \frac{(x-2\mu)^2}{2} - \frac{(x-3\mu)^2}{4\sigma^2},$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu}(\mu,\sigma^2 \mid \underline{x}) = \frac{x-\mu}{\sigma^2} + \frac{2x-\mu}{8} + 2(x-2\mu) - 3\frac{x-3\mu}{2\sigma^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2}(\mu,\sigma^2 \mid \underline{x}) = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4} + \frac{(x-3\mu)^2}{4\sigma^4} = 0.$$

β. Έχουμε $X_1 \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}\left(0, 2\right)$, $X_3 \sim \mathcal{N}(0,1)$ και $X_4 \sim \mathcal{N}(0,2\sigma^2)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell\left(\sigma^2 \mid x_1, x_4\right) = -\frac{1}{2}\log\left(8\pi\right) - \log\sigma^2 - \frac{x_1^2}{2\sigma^2} - \frac{x_4^2}{4\sigma^2} = -\frac{1}{2}\log\left(8\pi\right) - \log\sigma^2 - \frac{2x_1^2 + x_4^2}{4\sigma^2}.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell\left(\sigma_0^2 \mid x_1, x_4\right) - \ell\left(\sigma_1^2 \mid x_1, x_4\right) < c \quad \Leftrightarrow$$

$$\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2 - \frac{2x_1^2 + x_4^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) < c \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x_1^2 + x_4^2}{4}\frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2} > c^* = \log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2 - c \quad \overset{\sigma_1^2 - \sigma_0^2 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$2x_1^2 + x_4^2 > c^{**} = \frac{4\sigma_0^2\sigma_1^2 c^*}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad T(x_1, x_4) = \frac{2x_1^2 + x_4^2}{2\sigma_0^2} > c_\alpha = \frac{c^{**}}{2\sigma_0^2}.$$

Υπό την H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_0^2\right)$ και $X_4 \sim \mathcal{N}\left(0, 2\sigma_0^2\right)$, παρατηρούμε ότι:

$$\frac{X_1}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{X_1^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_1^2,$$

$$\frac{X_4}{\sqrt{2}\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{X_4^2}{2\sigma_0^2} \sim \chi_1^2.$$

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_4 ανεξάρτητες, έπεται ότι:

$$T(X_1, X_4) = Q_1 + Q_2 = \frac{X_1^2}{\sigma_0^2} + \frac{X_4^2}{2\sigma_0^2} = \frac{2X_1^2 + X_4^2}{2\sigma_0^2} \sim \chi_2^2.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\sigma_0^2}\left[\varphi(X_1, X_4)\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\sigma_0^2}\left[T(X_1, X_4) > c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi_{2;\alpha}^2.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(x_1, x_4) = \begin{cases} 1, & 2x_1^2 + x_4^2 > 2\sigma_0^2\chi_{2;\alpha}^2 \\ 0, & 2x_1^2 + x_4^2 \leqslant 2\sigma_0^2\chi_{2;\alpha}^2 \end{cases}.$$

γ. Σύμφωνα με το θέμα 1, Ιούνιος 2013 (σελίδα 202), καταλήγουμε στο ακόλουθο ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{2X_1^2 + X_4^2}{2\chi_{2;\alpha/2}^2}, \frac{2X_1^2 + X_4^2}{2\chi_{2;1-\alpha/2}^2}\right].$$

7.12 Σεπτέμβριος 2012

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/\vartheta}, \quad x > 0,$$

όπου $\vartheta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση T για το ϑ.

β. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια για το ϑ. Επίσης, δώστε την αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του ϑ και εξετάστε αν είναι συνεπής για το ϑ.

γ. Να βρεθεί η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του $\frac{1}{\vartheta}$.

Λύση: α. Το στήριγμα $S = (0,\infty)^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του ϑ και υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = 2^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} - n\log\vartheta\right\}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}},$$

όπου $Q(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta}$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$. Το σύνολο $Q(\Theta) = \left\{-\frac{1}{\vartheta} : \vartheta > 0\right\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i}$ είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{X};\vartheta) = -n\log 2 - \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i} - n\log\vartheta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\log X_i,$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f(\underline{X};\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i} - \frac{n}{\vartheta} = \frac{n}{\vartheta^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i} - \vartheta\right),$$

όπου $k(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta^2} \neq 0\ \forall\vartheta > 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57), η στατιστική συνάρτηση $\delta_n(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του ϑ, οπότε είναι κι η μοναδική ΑΕΕΔ του ϑ. Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\delta_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\mathbb{E}\left(\sqrt{X_1}\right) = \mathbb{E}\left[\delta_n(\underline{X})\right] = \vartheta$.

γ. Θέτουμε $Y_i = \sqrt{X_i}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $y > 0$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}\left(\sqrt{X_1} \leqslant y\right) = F\left(y^2;\vartheta\right),$$

$$f_{Y_1}(y) = 2yf\left(y^2;\vartheta\right) = 2y\frac{1}{2\vartheta y}e^{-y/\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}e^{-y/\vartheta},$$

δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(1/\vartheta)$ για $i = 1, \ldots, n$ και $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i} \sim \text{Gamma}\,(n, 1/\vartheta)$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_T(t)dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}\frac{1}{\vartheta^n\Gamma(n)} t^{n-1}e^{-t/\vartheta}dt = \frac{1}{\vartheta^n(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t/\vartheta}dt$$
$$= \frac{1}{\vartheta^n(n-1)!}\vartheta^{n-1}(n-2)! = \frac{1}{(n-1)\vartheta}.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η $\psi(T) = \frac{n-1}{T}$ είναι η ΑΕΕΔ του $\frac{1}{\vartheta}$.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{2\vartheta}{3}(2-\vartheta x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\vartheta},$$

όπου $\vartheta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί η εκτιμήτρια ροπών δ του ϑ. Στη συνέχεια, να εξεταστεί αν η $\frac{1}{\delta}$ είναι συνεπής για το $\frac{1}{\vartheta}$.

β. Για δείγμα μεγέθους $n = 1$ από την παραπάνω κατανομή, να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

γ. Για δείγμα μεγέθους $n = 1$, να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης 90%.
[Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της $\frac{1}{\vartheta X_1}$.]

Λύση: α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mu_1 = \mathbb{E}(X_1) = \int_0^{1/\vartheta} xf(x;\vartheta)dx = \int_0^{1/\vartheta}\left(\frac{4\vartheta x}{3} - \frac{2\vartheta^2x^2}{3}\right)dx = \left[\frac{2\vartheta x^2}{3} - \frac{2\vartheta^2x^3}{9}\right]_0^{1/\vartheta}$$
$$= \frac{2}{3\vartheta} - \frac{2}{9\vartheta} = \frac{4}{9\vartheta}.$$

Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{9\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \Rightarrow \quad \delta_n(\underline{X}) = \frac{4}{9\overline{X}_n}.$$

Σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, γνωρίζουμε ότι η $\overline{X}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\mathbb{E}(X_1) = \frac{4}{9\vartheta}$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.16 (σελίδα 67), έπεται ότι η $\delta_n(\underline{X}) = \frac{4}{9\overline{X}_n}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του ϑ.

β. Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}(\vartheta \mid x_1) = \frac{2}{3}\left(2\vartheta - \vartheta^2 x_1\right)$ για $0 < \vartheta \leqslant \frac{1}{x_1}$. Το πολυώνυμο $p(\vartheta) = -X_1\vartheta^2 + 2\vartheta$ έχει ολικό μέγιστο $\widehat{\vartheta}(X_1) = \frac{1}{X_1}$.

γ. Για $x \in [0, 1/\vartheta]$, υπολογίζουμε ότι:

$$F(x;\vartheta) = \int_0^x f(y;\vartheta)dy = \int_0^x \left(\frac{4\vartheta}{3} - \frac{2\vartheta^2 y}{3}\right) dy = \left[\frac{4\vartheta y}{3} - \frac{\vartheta^2 y^2}{3}\right]_0^x = \frac{4\vartheta x - \vartheta^2 x^2}{3}.$$

Έστω $Q = \frac{1}{\vartheta X_1}$. Για $y \geqslant 1$, υπολογίζουμε ότι:

$$F_Q(y) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\vartheta X_1} \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \geqslant \frac{1}{\vartheta y}\right) = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{y} - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{3y^2 - 4y + 1}{3y^2}.$$

Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant Q \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant \frac{1}{\vartheta X_1} \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c_2 X_1} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{1}{c_1 X_1}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3c_1^2 - 4c_1 + 1}{3c_1^2} = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3 \cdot 0.95}}{3 \cdot 0.95},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4c_2 - 1}{3c_2^2} = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3 \cdot 0.05}}{3 \cdot 0.05}.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $c_1, c_2 \geqslant 1$, οπότε συμπεραίνουμε ότι:

$$c_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 3 \cdot 0.95}}{3 \cdot 0.95} \approx 1.08, \quad c_2 = \frac{2 + \sqrt{4 - 3 \cdot 0.05}}{3 \cdot 0.05} \approx 26.41.$$

Επομένως, ένα ΔΕ ίσων ουρών για το ϑ είναι το $\left[\frac{1}{26.41 X_1}, \frac{1}{1.08 X_1}\right]$.

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x}$, $x > 0$, $\vartheta > 0$, και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y;\vartheta) = k\vartheta e^{-k\vartheta y}$, $y > 0$, $\vartheta > 0$, όπου k γνωστή θετική σταθερά.

α. Να βρεθεί εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας και επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ϑ.

β. Να βρεθεί ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α.

γ. Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%.

Λύση: α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x}, \underline{y}; \vartheta) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\vartheta) \prod_{i=1}^m f(y_i;\vartheta) = k^m \vartheta^{n+m} \exp\left\{-\vartheta\left(\sum_{i=1}^n x_i + k\sum_{i=1}^m y_i\right)\right\},$$

όπου $T(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i$, $g\left(t,\vartheta\right) = \vartheta^{n+m}e^{-\vartheta t}$ και $h\left(\underline{x},\underline{y}\right) = k^m$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, έπεται ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X},\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_i + k\sum_{i=1}^{m} Y_i$ είναι επαρκής για το ϑ. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\vartheta \mid \underline{x},\underline{y}) = m\log k + (n+m)\log\vartheta - \vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i\right),$$

$$\frac{\partial \ell(\vartheta \mid \underline{x},\underline{y})}{\partial\vartheta} = \frac{n+m}{\vartheta} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \widehat{\vartheta} = \frac{n+m}{n\overline{x} + km\overline{y}},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\vartheta \mid \underline{x},\underline{y})}{\partial\vartheta^2} = -\frac{n+m}{\vartheta^2} < 0, \quad \forall\vartheta > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\vartheta \mid \underline{x},\underline{y})$ είναι γνησίως κοίλη. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X},\underline{Y}) = \frac{n+m}{n\overline{X}+km\overline{Y}}$ είναι η ΕΜΠ του ϑ.

β. Θεωρούμε την απλή εναλλακτική υπόθεση $H_1^* : \vartheta = \vartheta_1$ με $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ώστε να εφαρμόσουμε το λήμμα Neyman - Pearson. Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\vartheta_0 \mid \underline{x},\underline{y}) - \ell(\vartheta_1 \mid \underline{x},\underline{y}) < c \quad\Leftrightarrow$$

$$(n+m)\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) - (\vartheta_0 - \vartheta_1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i\right) < c \quad\Leftrightarrow$$

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i\right) < c^* = c - (n+m)\left(\log\vartheta_0 - \log\vartheta_1\right) \quad \overset{\vartheta_1-\vartheta_0>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i < c^{**} = \frac{c^*}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \quad\Leftrightarrow$$

$$T(\underline{x},\underline{y}) = 2\vartheta_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{m} y_i\right) < c_\alpha = 2\vartheta_0 c^{**}.$$

Γνωρίζουμε ότι $kY_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\vartheta_0)$ και $Y_1, \ldots, Y_m \sim \text{Exp}(k\vartheta_0)$, γνωρίζουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i + k\sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \text{Gamma}(n+m, \vartheta_0),$$

$$T\left(\underline{X},\underline{Y}\right) = 2\vartheta_0\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + k\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) \sim \chi^2_{2n+2m}.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X},\underline{Y})\right] = \alpha \quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}_{\vartheta_0}\left[T(\underline{X},\underline{Y}) < c_\alpha\right] = \alpha \quad\Rightarrow\quad c_\alpha = \chi^2_{2n+2m;1-\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} 1, & 2\vartheta_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i + k \sum_{i=1}^m y_i\right) < \chi^2_{2n+2m;1-\alpha} \\ 0, & 2\vartheta_0 \left(\sum_{i=1}^n x_i + k \sum_{i=1}^m y_i\right) \geqslant \chi^2_{2n+2m;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή ϑ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\vartheta_1 > \vartheta_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

γ. Έχουμε δείξει ότι $T(\underline{X}, \underline{Y}) = 2\vartheta \left(\sum_{i=1}^n X_i + k \sum_{i=1}^m Y_i\right) \sim \chi^2_{2n+2m}$. Λύνουμε την ανισότητα $c_1 \leqslant T \leqslant c_2$ ως προς ϑ:

$$c_1 \leqslant 2\vartheta \left(\sum_{i=1}^n X_i + k \sum_{i=1}^m Y_i \right) \leqslant c_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{c_1}{2\left(\sum_{i=1}^n X_i + k \sum_{i=1}^m Y_i\right)} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{c_2}{2\left(\sum_{i=1}^n X_i + k \sum_{i=1}^m Y_i\right)}.$$

Για το ΔΕ ίσων ουρών προσδιορίζουμε σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$\mathbb{P}(Q < c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(Q > c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \chi^2_{2n+2m;0.975},$$

$$\mathbb{P}(Q > c_2) = \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \chi^2_{2n+2m;0.025}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[\frac{\chi^2_{2n+2m;0.975}}{2\left(\sum_{i=1}^n X_i + k \sum_{i=1}^m Y_i\right)}, \frac{\chi^2_{2n+2m;0.025}}{2\left(\sum_{i=1}^n X_i + k \sum_{i=1}^m Y_i\right)} \right].$$

7.13 Μάρτιος 2012

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x; \vartheta) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\vartheta}{2}}, \quad x \geqslant \vartheta,$$

όπου $\vartheta \in \mathbb{R}$ άγνωστη παράμετρος. Να βρεθούν:

α. η εκτιμήτρια ροπών του ϑ,

β. η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του e^ϑ,

γ. η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του ϑ.

Λύση: α. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mu_1 = \mathbb{E}(X_1) = \int_\vartheta^\infty x f(x;\vartheta)dx = \int_\vartheta^\infty \frac{x}{2} e^{-\frac{x-\vartheta}{2}} dx = \int_0^\infty \frac{y+\vartheta}{2} e^{-y/2} dy$$
$$= \vartheta \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-y/2} dy + \int_0^\infty y \frac{1}{2} e^{-y/2} dy = \vartheta + 2.$$

Εξισώνουμε τις ροπές πρώτης τάξης:

$$\mu_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta + 2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\vartheta}(\underline{X}) = \overline{X} - 2.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(\vartheta \mid \underline{x}) = 2^{-\nu} e^{-\nu\overline{x}/2} e^{\nu\vartheta/2} \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right) = \begin{cases} 2^{-\nu} e^{-\nu\overline{x}/2} e^{\nu\vartheta/2}, & \vartheta \leqslant x_{(1)} \\ 0, & \vartheta > x_{(1)} \end{cases}.$$

Για $\vartheta \leqslant x_{(1)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = X_{(1)}$.

γ. Παρατηρούμε ότι:

$$f(\underline{x};\vartheta) = 2^{-\nu} e^{-\nu\overline{x}/2} e^{\nu\vartheta/2} \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}\left(x_{(1)}\right),$$

όπου $T(\underline{x}) = x_{(1)}$, $g(t,\vartheta) = e^{\nu\vartheta/2}\mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(t)$ και $h(\underline{x}) = 2^{-\nu}e^{-\nu\overline{x}/2}$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής για το ϑ. Για $x \geqslant \vartheta$, υπολογίζουμε ότι:

$$F(x;\vartheta) = \int_\vartheta^x f(y;\vartheta)dy = \int_\vartheta^x \frac{1}{2} e^{-\frac{y-\vartheta}{2}} dy = \int_0^{x-\vartheta} \frac{1}{2} e^{-u/2} du = 1 - e^{-\frac{x-\vartheta}{2}}.$$

Για $t \geqslant \vartheta$, υπολογίζουμε ότι:

$$f_T(t) = \nu \frac{1}{2} e^{-\frac{t-\vartheta}{2}} e^{-(\nu-1)\frac{t-\vartheta}{2}} = \frac{\nu}{2} e^{-\nu\frac{t-\vartheta}{2}}.$$

Έστω ότι $\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = 0 \ \forall \vartheta \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\varphi(T)] = \int_\vartheta^\infty f_T(t)\varphi(t)dt = \frac{\nu}{2} e^{\nu\vartheta/2} \int_\vartheta^\infty e^{-\nu t/2}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\int_\vartheta^\infty e^{-\nu t/2}\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έπεται ότι:

$$-e^{-\nu\vartheta/2}\varphi(\vartheta) = 0, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ είναι πλήρης. Ακριβώς όπως στο πρώτο ερώτημα, υπολογίζουμε ότι $\mathbb{E}(T) = \vartheta + \frac{2}{\nu}$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49), η στατιστική συνάρτηση $\psi(T) = T - \frac{2}{\nu}$ είναι η ΑΕΕΔ του ϑ.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\lambda) = (\lambda+1)(1-x)^\lambda, \quad 0 < x < 1,$$

όπου $\lambda > -1$ άγνωστη παράμετρος.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το λ.

β. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια δ για την παραμετρική συνάρτηση $\frac{1}{1+\lambda}$, το αντίστοιχο κάτω φράγμα Cramér - Rao και η πληροφορία κατά Fisher του δείγματος για το λ.

γ. Να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια δ είναι συνεπής για το $\frac{1}{1+\lambda}$.

δ. Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το λ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση: α. Το στήριγμα $S = (0,1)^\nu$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του λ και υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x};\lambda) = \exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^{\nu} \log(1-x_i) + \nu \log(\lambda+1)\right\},$$

όπου $Q(\lambda) = \lambda$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} \log(1-x_i)$. Το $Q(\Theta) = \{\lambda : \lambda > -1\} = (-1,\infty)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{\nu} \log(1-x_i)$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης.

β. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $Q'(\lambda) = 1 \neq 0$ συνεχή συνάρτηση στο σύνολο $\Theta = (-1,\infty)$, άρα όλες οι συνθήκες ομαλότητας ικανοποιούνται. Υπολογίζουμε ότι:

$$\log f(\underline{X};\lambda) = \lambda \sum_{i=1}^{\nu} \log(1-X_i) + \nu \log(\lambda+1),$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \log f(\underline{X};\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \log(1-X_i) + \frac{\nu}{\lambda+1}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \log f(\underline{X};\lambda) = -\frac{\nu}{(\lambda+1)^2},$$

$$\mathcal{I}_{\underline{X}}(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \log f(\underline{X};\lambda)\right] = \frac{\nu}{(\lambda+1)^2} \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{[g'(\lambda)]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\lambda)} = \frac{1}{\nu(\lambda+1)^2}.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\lambda) = -\nu\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\log\frac{1}{1-X_i} - \frac{1}{\lambda+1}\right] = k(\lambda)\left[\delta(\underline{x}) - g(\lambda)\right],$$

όπου $k(\lambda) = -\nu \neq 0 \ \forall \lambda \in (-1,\infty)$. Επομένως, η $\delta(\underline{X}) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\log\frac{1}{1-X_i}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda+1}$.

γ. Η στατιστική συνάρτηση $\delta_\nu(\underline{X})$ είναι προφανώς α.ε. της $g(\lambda)$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι:

$$\text{Var}\left[\delta_\nu(\underline{X})\right] = \frac{\left[g'(\lambda)\right]^2}{\mathcal{I}_{\underline{X}}(\lambda)} = \frac{1}{\nu(\lambda+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\nu\to\infty}\text{Var}\left[\delta_\nu(\underline{X})\right] = 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.17 (σελίδα 67), έπεται ότι η $\delta_\nu(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $g(\lambda)$.

δ. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.7 (σελίδα 97), καταλήγουμε στο εξής ΔΕ ίσων ουρών:

$$\left[-\frac{\chi^2_{2\nu;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{\nu}\log(1-X_i)} - 1, -\frac{\chi^2_{2\nu;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{\nu}\log(1-X_i)} - 1\right].$$

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες παρατηρήσεις, όπου η X_i ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, k_i\vartheta]$ με $\vartheta > 0$ άγνωστη παράμετρο και k_i γνωστές θετικές σταθερές, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

α. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση και η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του ϑ.

β. Για τον έλεγχο των υποθέσεων $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ vs. $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$, η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$R = \left\{\underline{x} : \max_{i=1,\ldots,\nu}\frac{X_i}{k_i} > c\right\}.$$

Να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιεί η σταθερά c, ώστε ο έλεγχος να έχει μέγεθος α, και να υπολογισθεί η ισχύς του ελέγχου για $\vartheta > \vartheta_0$.

γ. Έστω $\nu \geqslant 30$ μεγάλο. Να βρεθεί προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Λύση: α. Θέτουμε $U_i = \frac{X_i}{k_i} \sim \mathcal{U}(0,\vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Βλέπε παράδειγμα 3.5 (σελίδα 31) και θέμα 1, Ιανουάριος 2013 (σελίδα 207).

β. Έστω $T(\underline{X}) = \max_i \frac{X_i}{k_i}$. Γνωρίζουμε ότι $F_T(t) = (t/\vartheta)^\nu$ για $t \in [0,\vartheta]$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \mathbb{P}_{\vartheta_0}(\underline{X} \in R) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}(T > c) = 1 - \left(\frac{c}{\vartheta_0}\right)^{\nu} = \alpha \quad \Rightarrow \quad c = \vartheta_0(1-\alpha)^{1/\nu}.$$

Για $\vartheta > \vartheta_0$, υπολογίζουμε ότι:

$$\beta_{\varphi}(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in R) = \mathbb{P}_{\vartheta}\left(T > \vartheta_0(1-\alpha)^{1/\nu}\right) = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^{\nu}.$$

γ. Βλέπε επαναληπτική άσκηση 22 (σελίδα 154).

7.14 Σεπτέμβριος 2011

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη στο $[-\vartheta, \vartheta]$.

α. Να βρεθεί ο αμερόληπτος εκτιμητής ελάχιστης διασποράς της $g(\vartheta) = \vartheta^k$.

β. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της $\mathrm{Var}(X_1)$.

Λύση: α. Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.12 (σελίδα 36), $Y_i = |X_i| \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Σύμφωνα με το θέμα 1, Απρίλιος 2014 (σελίδα 193), έπεται ότι η $\psi(T) = \left(1 + \frac{k}{n}\right) T^k$, όπου $T(\underline{X}) = \max_i |X_i|$, είναι η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta) = \vartheta^k$ για $k > -n$.

β. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, έπεται ότι η $\psi^*(T) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) T^2$ είναι η ΑΕΕΔ της $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{3}\vartheta^2$.

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x; a, b) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad x \geqslant b,$$

όπου $a, b > 0$ άγνωστα.

α. Εξετάστε αν η $f(x; a, b)$ ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ζεύγος (a, b).

γ. Να βρεθεί ΕΜΠ για το ζεύγος (a, b).

δ. Για $b = 1$, να εξετάσετε την πληρότητα.

Λύση: α. Βλέπουμε άμεσα ότι η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ, αφού το στήριγμα $S = [b, \infty)$ εξαρτάται από την τιμή της άγνωστης παραμέτρου b.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}(a, b \mid \underline{x}) = f(\underline{x}; a, b) = a^n b^{na} \exp\left\{-(a+1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right\} \mathbb{1}_{[b,\infty)}\left(x_{(1)}\right),$$

όπου $\underline{T}(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \log x_i, x_{(1)}\right)$, $g(t_1, t_2, a, b) = a^n b^{na} \mathbb{1}_{[b,\infty)}(t_2) e^{-(a+1)t_1}$, $h(\underline{x}) = 1$. Σύμφωνα με το παραγοντικό κριτήριο Neyman - Fisher, η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n \log X_i, X_{(1)}\right)$ είναι επαρκής για το $\underline{\vartheta} = (a, b)$.

γ. Αρχικά, σταθεροποιούμε το a και μεγιστοποιούμε ως προς b. Για $b \leqslant x_{(1)}$, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι γνησίως αύξουσα ως προς b, οπότε έχει μοναδικό ολικό μέγιστο $\widehat{b}(\underline{X}) = X_{(1)}$. Στη συνέχεια, μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση $\ell\left(a, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)$ ως προς a. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell\left(a, x_{(1)} \mid \underline{x}\right) = n \log a + na \log x_{(1)} - (a+1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i,$$

$$\frac{\partial \ell\left(a, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)}{\partial a} = \frac{n}{a} + n \log x_{(1)} - \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\widehat{a}(\underline{x}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \log x_i / n - \log x_{(1)}}, \quad \frac{\partial^2 \ell\left(a, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)}{\partial a^2} = -\frac{n}{a^2} < 0, \quad \forall a > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell\left(a, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)$ είναι γνησίως κοίλη ως προς a στο $(0, \infty)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\vartheta}(\underline{X}) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \log X_i/n - \log X_{(1)}}, X_{(1)}\right)$ είναι η ΕΜΠ του $\widehat{\vartheta} = (a, b)$. Αν $x_1 = \cdots = x_n$, παρατηρούμε ότι $\ell\left(a, x_{(1)} \mid \underline{x}\right) = n \log \frac{a}{x_{(1)}}$, δηλαδή η συνάρτηση $\ell\left(a, x_{(1)} \mid \underline{x}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς a στο διάστημα $(0, \infty)$ και δεν έχει κανένα μέγιστο. Όμως ισχύει ότι $\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n) = 0$, δηλαδή η ΕΜΠ του a υπάρχει και είναι μοναδική με πιθανότητα 1.

δ. Το στήριγμα $S = [1, \infty)^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του a και υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x}; a) = \exp\left\{-a \sum_{i=1}^{n} \log x_i + n \log a\right\} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i},$$

όπου $Q(a) = -a$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \log x_i$. Το $Q(\Theta) = \{-a : a > 0\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n \log X_i$ είναι επαρκής για το a και πλήρης.

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την $\mathcal{N}(\mu, 1)$.

α. Να βρεθεί η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$.

β. Να βρεθεί το μέγεθος δείγματος n, ώστε η πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ να είναι ίση με β.

γ. Ποια η ισχύς του ελέγχου για $n = 16$, $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$ και $\alpha = 1\%$;

δ. Να κατασκευαστεί ΟΙΕ για τις υποθέσεις $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$ σε ε.σ.σ. α.

Λύση: α. Βλέπε παράδειγμα 5.3 (σελίδα 112) για την περίπτωση $\mu_1 > \mu_0$. Αν $\mu_1 < \mu_0$, τότε η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$T(\underline{x}) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} < c_\alpha.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, 1)$, γνωρίζουμε ότι $T(\underline{X}) = \frac{\overline{X}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\mu_0}[\varphi_2(\underline{X})] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\mu_0}[T(\underline{X}) < c_\alpha] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi_2(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{x}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} < -Z_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{x}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} \geqslant -Z_\alpha \end{cases}.$$

β. Αν $\mu_1 > \mu_0$, απαιτούμε το εξής:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= \mathbb{P}_{\mu_1}(\underline{X} \notin R) = \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} \leqslant Z_\alpha\right) \\ &= \Phi\left(Z_\alpha - (\mu_1 - \mu_0)\sqrt{n}\right) = \beta \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Z_\alpha - (\mu_1 - \mu_0)\sqrt{n} = \Phi^{-1}(\beta) = Z_{1-\beta} = -Z_\beta \quad \Rightarrow \quad n = \left\lceil \left(\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 \right\rceil.$$

Αν $\mu_1 < \mu_0$, απαιτούμε το εξής:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Σφάλμα Τύπου II}) &= \mathbb{P}_{\mu_1}(\underline{X} \notin R) = \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} \geqslant -Z_\alpha\right) \\ &= 1 - \Phi\left((\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha\right) = \beta \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\beta) = Z_\beta \quad \Rightarrow \quad n = \left\lceil \left(\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{\mu_0 - \mu_1}\right)^2 \right\rceil.$$

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi_2}(\mu_1) &= \mathbb{P}_{\mu_1}(\underline{X} \in R) = \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} < -Z_\alpha\right) \\ &= \Phi\left((\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} - Z_\alpha\right) = \Phi(4 - Z_{0.01}) \approx 0.95. \end{aligned}$$

δ. Βλέπε σημείωση 5.7 (σελίδα 113).

Θέμα 4. Έστω ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$ πελατών σε ένα αυτοματοποιημένο σύστημα στο διαδίκτυο ακολουθούν την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(r;\vartheta) = \frac{p}{\vartheta} r^{p-1} e^{-r^p/\vartheta}, \quad r > 0, \quad p > 0 \text{ γνωστό.}$$

α. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια $\delta = \delta(\underline{R})$ του ϑ.

β. Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για το ϑ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.
[Υπόδειξη: Να βρείτε την κατανομή του $\frac{2\nu\delta}{\vartheta}$.]

γ. Αν $R_1 = \frac{1}{4}$, $R_2 = \frac{1}{2}$, $R_3 = \frac{1}{4}$ και $p = 2$, ποιο θα είναι το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha = 90\%$;

Λύση: Βλέπε θέμα 4, Σεπτέμβριος 2013 (σελίδα 201).

7.15 Φεβρουάριος 2010

Θέμα 1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;\vartheta) = \frac{a\vartheta^a}{x^{a+1}}, \quad x \geqslant \vartheta > 0,$$

όπου a γνωστή σταθερά.

α. Να βρεθεί η ΕΜΠ $\widehat{\vartheta}$ της παραμέτρου ϑ και να δειχθεί ότι είναι επαρκής για το ϑ και πλήρης.

β. Να βρεθεί η ΑΕΕΔ της $g(\vartheta) = \vartheta^k$.

Λύση. Βλέπε θέμα 1, Ιούνιος 2018 (σελίδα 181).

Θέμα 2. Έστω $X \sim \text{Gamma}\,(a, 1/b)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b^a\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/b}, \quad x > 0, \quad a, b > 0.$$

α. Να εξεταστεί αν η κατανομή $\text{Gamma}(a, b)$ ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Να υπολογιστούν οι $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$ και $\text{Cov}(X, \log X)$.

γ. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή $\text{Gamma}(a, b)$ με a γνωστό. Να βρεθεί η ΕΜΠ της παραμέτρου b. Είναι αυτή ΑΕΕΔ του b; Είναι συνεπής για το b;

Λύση. α. Το στήριγμα $S = (0, \infty)$ της κατανομής δεν εξαρτάται από την τιμή του $\underline{\vartheta} = (a, b)$ και υπολογίζουμε ότι:

$$f(x; a, b) = \frac{1}{x} \exp\left\{a \log x - \frac{1}{b}x - \log \Gamma(a) - a \log b\right\},$$

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad \underline{Q}(a, b) = \left(a, -\frac{1}{b}\right), \quad \underline{T}(x) = (\log x, x), \quad A(a, b) = \log \Gamma(a) + a \log b.$$

Επομένως, η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

β. Θεωρούμε την ακόλουθη αναπαραμέτρηση:

$$\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \left(a, -\frac{1}{b}\right) \in (0, \infty) \times (-\infty, 0) \quad \Rightarrow \quad a = \eta_1, \quad b = -\frac{1}{\eta_2},$$

$$f(x; \underline{\eta}) = \frac{1}{x} \exp\left\{\eta_1 \log x + \eta_2 x - \log \Gamma(\eta_1) - \eta_1 \log \frac{1}{-\eta_2}\right\},$$

$$A(\underline{\eta}) = \log \Gamma(\eta_1) - \eta_1 \log(-\eta_2).$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}\left[T_2(X)\right] = \mathbb{E}\left(X\right) = \frac{\partial A(\underline{\eta})}{\partial \eta_2} = -\frac{\eta_1}{\eta_2} = ab,$$

$$\mathrm{Var}\left[T_2(X)\right] = \mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_2^2} = \frac{\eta_1}{\eta_2^2} = ab^2,$$

$$\mathrm{Cov}\left[T_1(X), T_2(X)\right] = \mathrm{Cov}\left(\log X, X\right) = \frac{\partial^2 A(\underline{\eta})}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = -\frac{1}{\eta_2} = b.$$

γ. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(b \mid \underline{x}) = (a-1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} x_i - na \log b - n \log \Gamma(a),$$

$$\frac{\partial \ell(b \mid \underline{x})}{\partial b} = \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{na}{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{b}_n(\underline{x}) = \frac{1}{a}\overline{x}_n,$$

$$\frac{\partial^2 \ell(b \mid \underline{x})}{\partial b^2} = -\frac{2}{b^3} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{b^2} = -\frac{na}{b^2}\left(\frac{2}{b}\widehat{b}_n - 1\right), \quad \frac{\partial^2 \ell(\widehat{b}_n \mid \underline{x})}{\partial b^2} - \frac{na}{\widehat{b}_n^2} < 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(b \mid \underline{x})$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\widehat{b}_n$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{b \to \infty} \mathcal{L}\left(b \mid \underline{x}\right) = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{b^{na}\left[\Gamma(a)\right]^n} \exp\left\{-\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} = 0,$$

$$\lim_{b\to 0^+} \mathcal{L}(b \mid \underline{x}) = \lim_{b\to 0^+} \frac{1}{b^{na}[\Gamma(a)]^n} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^n x_i\right\} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} = 0.$$

Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{b}_n(\underline{X}) = \frac{1}{a}\overline{X}_n$ είναι η ΕΜΠ του b. Το σύνολο $Q(\Theta) = \left\{-\frac{1}{b} : b > 0\right\} = (-\infty, 0)$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επαρκής για το b και πλήρης. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, έπεται ότι $\mathbb{E}(\widehat{b}_n) = \frac{1}{a}\mathbb{E}(X_1) = b$, οπότε η $\widehat{b}_n(\underline{X})$ είναι η ΑΕΕΔ του b, σύμφωνα με το πόρισμα 3.5 (σελίδα 49). Τελικά, καταλήγουμε ότι η $\widehat{b}_n(\underline{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $\frac{1}{a}\mathbb{E}(X_1) = b$, σύμφωνα με τον ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών σε συνδυασμό με την πρόταση 3.16 (σελίδα 67).

Θέμα 3. Έστω $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda k_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ γνωστές θετικές σταθερές.

α. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο λ.

β. Να βρεθεί η ΕΜΠ του λ και να δειχθεί ότι είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ και ότι επιτυγχάνει το κάτω φράγμα Cramér - Rao.

Λύση. α. Το στήριγμα $S = \{0, 1, 2\ldots\}^n$ της κατανομής του δείγματος δεν εξαρτάται από την τιμή του λ και υπολογίζουμε ότι:

$$f(\underline{x}; \lambda) = \exp\left\{\log\lambda \sum_{i=1}^n x_i - \lambda\sum_{i=1}^n k_i\right\} \prod_{i=1}^n \frac{k_i^{x_i}}{x_i!},$$

όπου $Q(\lambda) = \log\lambda$ και $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Το $Q(\Theta) = \{\log\lambda : \lambda > 0\} = \mathbb{R}$ περιέχει ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα επάρκειας - πληρότητας στην ΕΟΚ, η στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n x_i$ είναι επαρκής για το λ και πλήρης.

β. Θέτουμε $\overline{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k_i$ και υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda \mid \underline{x}) = \log\lambda \sum_{i=1}^n x_i - \lambda\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n x_i \log k_i - \sum_{i=1}^n \log(x_i!),$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n k_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda}(\underline{x}) = \frac{\overline{x}}{\overline{k}},$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\lambda \mid \underline{x})}{\partial\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n x_i < 0, \quad \forall\lambda > 0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\ell(\lambda \mid \underline{x})$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, \infty)$. Επομένως, η στατιστική συνάρτηση $\widehat{\lambda}(\underline{X}) = \frac{1}{\overline{k}}\overline{X}$ είναι η ΕΜΠ του λ. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{n\bar{k}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n\bar{k}} \sum_{i=1}^{n} \lambda k_i = \lambda,$$

δηλαδή η $\widehat{\lambda}(\underline{X})$ είναι α.ε. του λ. Τελικά, παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{S}_{\underline{X}}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(\underline{X}; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n\bar{k}}{\lambda} \left(\frac{1}{\bar{k}} \overline{X} - \lambda \right) = k(\lambda) \left[\widehat{\lambda}(\underline{X}) - \lambda \right],$$

όπου $k(\lambda) = \frac{n\bar{k}}{\lambda} \neq 0 \ \forall \lambda > 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.8 (σελίδα 57), συμπεραίνουμε ότι η $\widehat{\lambda}(\underline{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του λ.

Θέμα 4. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή:

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}, \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda = \lambda_1$ με $\lambda_1 > \lambda_0$ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α. Είναι ο έλεγχος αυτός ομοιόμορφα ισχυρότατος για τις υποθέσεις $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda > \lambda_0$;

β. Να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο λ.

Λύση. α. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.6 (σελίδα 96), $Y_i = |X_i| \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\ell(\lambda \mid \underline{x}) = n \log \lambda - n \log 2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\ell(\lambda_0 \mid \underline{x}) - \ell(\lambda_1 \mid \underline{x}) < c \quad \Leftrightarrow \quad n\left(\log \lambda_0 - \log \lambda_1\right) - (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{n} |x_i| < c \quad \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^{n} |x_i| < c^* = c - n\left(\log \lambda_0 - \log \lambda_1\right) \quad \overset{\lambda_1 - \lambda_0 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < c^{**} = \frac{c^*}{\lambda_1 - \lambda_0} \quad \Leftrightarrow \quad T(\underline{x}) = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i| < c_\alpha = 2\lambda_0 c^{**}.$$

Υπό την ισχύ της H_0, δηλαδή δεδομένου ότι $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_0)$, γνωρίζουμε ότι $T\left(\underline{X}\right) = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |X_i| \sim \chi^2_{2n}$. Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[\varphi(\underline{X})\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\lambda_0}\left[T(\underline{X}) < c_\alpha\right] = \alpha \quad \Rightarrow \quad c_\alpha = \chi^2_{2n;1-\alpha}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες λήμμα Neyman - Pearson, καταλήγουμε στον ακόλουθο ΟΙΕ:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \chi^2_{2n;1-\alpha} \\ 0, & 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant \chi^2_{2n;1-\alpha} \end{cases}.$$

Αφού η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή λ_1, αλλά μόνο από τη φορά της ανισότητας $\lambda_1 < \lambda_0$, την οποία χρησιμοποιήσαμε για να την προσδιορίσουμε, συμπεραίνουμε ότι είναι ΟΙΕ και για τη μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση $H_1 : \lambda < \lambda_0$.

β. Βλέπε παράδειγμα 4.6 (σελίδα 96).

Βιβλιογραφία

Casella, George και Roger L. Berger. *Statistical Inference. Second Edition*. Cengage, 2001.

Ferguson, Thomas S. *A Course in Large Sample Theory. Texts in Statistical Science*. CRC Press, 1996.

Hogg, Robert, Joseph McKean και Allen Craig. *Introduction to Mathematical Statistics. Eighth Edition*. Pearson Education, 2018.

Keener, Robert W. *Theoretical Statistics. Topics for a Core Course*. Springer Science & Business Media, 2010.

Lehmann, Erich L. *Elements of Large-Sample Theory. Corrected Edition*. Springer Science & Business Media, 1998.

Lehmann, Erich L. και George Casella. *Theory of Point Estimation. Second Edition*. Springer Science & Business Media, 1998.

Lehmann, Erich L. και Joseph P. Romano. *Testing Statistical Hypotheses. Fourth Edition*. Springer Science & Business Media, 2022.

Van der Vaart, Aad. *Asymptotic Statistics. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, 2000.