Αριθμητική Ανάλυση
Λύσεις Θεμάτων Εξετάσεων

Βασίλης Κατσιάνος

1 Σφάλματα Στρογγύλευσης

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Σειρές Taylor

- $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
- $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$
- $\arctan x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

Αριθμητική Κινητής Υποδιαστολής

- Πραγματικός αριθμός: $\pm .d_1 d_2 \ldots \cdot \beta^k$, $d_1 \neq 0$.
- Αριθμός μηχανής: $\pm .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^k$, $d_1 \neq 0$, $L \leqslant k \leqslant U$, $L \cong -U$.
- Μέγιστο στοιχείο: $.d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^U$, $d_i = \beta - 1$ για $i = 1, 2, \ldots, t$.
- Ελάχιστο θετικό στοιχείο: $.1 \cdot \beta^L$.

Σφάλματα Στρογγύλευσης

- Σχετικό σφάλμα: $u = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta^{1-t}, & \text{στρογγύλευση} \\ \beta^{1-t}, & \text{αποκοπή} \end{cases}.$
- Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση: Μέγιστο σχετικό σφάλμα $= 3u$.
- Πρόσθεση: Μέγιστο σχετικό σφάλμα $= 2u\frac{|x|+|y|}{|x+y|} = \begin{cases} 2u, & x, y \text{ ομόσημοι} \\ \text{πολύ μεγάλο}, & x \cong -y \end{cases}.$
- Άθροισμα: Μέγιστο σχετικό σφάλμα $= \frac{\gamma_N}{|s_N|}u = \rho_N u$, όπου $\gamma_N = |s_1| + |s_2| + \cdots + |s_N|$ και ρ_N ο συντελεστής μετάδοσης του σχετικού σφάλματος στρογγύλευσης.

1.1 Σεπτέμβριος 2019

α. Ορίζουμε:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(x+0.5)^{n-k} - x^{n-k}}{n-k} x^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(x+0.5)^k - x^k}{k} x^{n-k}.$$

$$\left| \frac{\mathrm{fl}\,(s_n) - s_n}{s_n} \right| \lessapprox \frac{|s_2| + |s_3| + \cdots + |s_n|}{|s_n|} \cdot u = \frac{\gamma_n}{|s_n|} \cdot u = \rho_n \cdot u.$$

Τα ενδιάμεσα μερικά αθροίσματα είναι πολύ μεγαλύτερα του τελικού s_n, αφού $y \in [0,1]$, δηλαδή $\gamma_n \gg |s_n|$, οπότε $\rho_n \gg 1$. Επίσης, ισχύει ότι $x + 0.5 \cong x$, δηλαδή $(x+0.5)^k \cong x^k$ για $x \gg 1$ και αρκετά μεγάλο k, οπότε αυτός ο τρόπος υπολογισμού της y_n είναι ασταθής.

β. Γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2 \cong 7.39.$$

Καθώς το n μεγαλώνει, το $\frac{2}{n}$ θα γίνει τελικά μικρότερο από τον μικρότερο θετικό αριθμό που μπορεί να παρασταθεί από τον υπολογιστή, οπότε θα παριστάνεται ως 0. Επομένως, ο υπολογιστής θα μας δίνει πάντα την τιμή $x_n = 1$ για αρκετά μεγάλο n.

γ. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|, |\varepsilon_5|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(2\cdot\alpha)\cdot\alpha) - \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(2\cdot\beta)\cdot\beta)\right) &= \mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}\left(2\alpha(1+\varepsilon_1)\cdot\alpha\right) - \mathrm{fl}\left(2\beta(1+\varepsilon_2)\cdot\beta\right)\right)\\
&= \mathrm{fl}\left(2\alpha^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) - 2\beta^2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)\right)\\
&= \left[2\alpha^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) - 2\beta^2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)\right](1+\varepsilon_5)\\
&= 2\alpha^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_5) - y^3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_5)\\
&= 2\alpha^2(1+\varepsilon)^3 - 2\beta^2(1+\delta)^3 \cong 2\alpha^2(1+3\varepsilon) - 2\beta^2(1+3\delta) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(2\cdot\alpha)\cdot\alpha) - \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta\cdot\beta)\cdot\beta)\right) - (2\alpha^2 - 2\beta^2)}{2\alpha^2 - 2\beta^2}\right| &\cong \left|\frac{2\alpha^2(1+3\varepsilon) - 2\beta^2(1+3\delta) - 2\alpha^2 + 2\beta^2}{2\alpha^2 - 2\beta^2}\right|\\
&= \left|\frac{6\varepsilon\alpha^2 - 6\delta\beta^2}{2\alpha^2 - 2\beta^2}\right| \leqslant 3\cdot\frac{\left|\varepsilon\alpha^2\right| + \left|\delta\beta^2\right|}{|\alpha^2 - \beta^2|}\\
&\leqslant 3u\cdot\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha^2 - \beta^2|}.
\end{aligned}$$

Αν οι α, β είναι ομόσημοι και $\alpha \cong \beta$, τότε $\alpha^2 \cong \beta^2$, οπότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο. Ενώ οι α και β είναι αριθμοί μηχανής, οι α^2 και β^2 δεν είναι υποχρεωτικά αριθμοί μηχανής, οπότε ο υπολογισμός της παράστασης είναι ασταθής. Αν υπολογίζαμε την παράσταση ως $2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, τότε κανένα πρόβλημα δε θα παρουσιαζόταν.

1.2 Ιούνιος 2019

α. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x\cdot x) + \mathrm{fl}(y\cdot y)\right) &= \mathrm{fl}\left(x^2(1+\varepsilon_1) + y^2(1+\varepsilon_2)\right)\\
&= \left[x^2(1+\varepsilon_1) + y^2(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)\\
&= x^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) + y^2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\\
&= x^2(1+\varepsilon)^2 + y^2(1+\delta)^2 \cong x^2(1+2\varepsilon) + y^2(1+2\delta) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x\cdot x) + \mathrm{fl}(y\cdot y)\right) - (x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| &\cong \left|\frac{x^2(1+2\varepsilon) + y^2(1+2\delta) - x^2 - y^2}{x^2+y^2}\right|\\
&= \left|\frac{2\varepsilon x^2 + 2\delta y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{\left|\varepsilon x^2\right| + \left|\delta y^2\right|}{|x^2+y^2|}\\
&\leqslant 2u\cdot\frac{|x|^2 + |y|^2}{x^2+y^2} = 2u.
\end{aligned}$$

Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}\left(2\cdot\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x\cdot x) - \mathrm{fl}(y\cdot y)\right)\right) &= \mathrm{fl}\left(2\cdot\mathrm{fl}\left(x^2(1+\varepsilon_1) - y^2(1+\varepsilon_2)\right)\right)\\
&= \mathrm{fl}\left(2\cdot\left[x^2(1+\varepsilon_1) - y^2(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)\right)\\
&= 2\left[x^2(1+\varepsilon_1) - y^2(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)
\end{aligned}$$

$$= 2x^2(1+\varepsilon)^3 - 2y^2(1+\delta)^3 \cong 2x^2(1+3\varepsilon) - 2y^2(1+3\delta) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{fl}\left(2\cdot \mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x\cdot x)-\mathrm{fl}(y\cdot y)\right)\right)-2(x^2-y^2)}{2(x^2-y^2)}\right| &\cong \left|\frac{2x^2(1+3\varepsilon)-2y^2(1+3\delta)-2x^2+2y^2}{2(x^2-y^2)}\right| \\
&= \left|\frac{6\varepsilon x^2-6\delta y^2}{2(x^2-y^2)}\right| \leqslant 3\cdot\frac{\left|\varepsilon x^2\right|+\left|\delta y^2\right|}{|x^2-y^2|} \\
&\leqslant 3u\cdot\frac{|x|^2+|y|^2}{|x^2-y^2|}.
\end{aligned}$$

Αν οι x, y είναι ομόσημοι και $x \cong y$, τότε $x^2 \cong y^2$, οπότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}} = \frac{2^{x+2y}}{2^x} = 4^y,$$

$$1 - \ln x = \ln e + \ln\frac{1}{x} = \ln\frac{e}{x}.$$

1.3 Ιούνιος 2018

α. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}\left(\alpha\cdot\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta)+\mathrm{fl}(\gamma))\right) &= \mathrm{fl}\left(\alpha\cdot\mathrm{fl}\left(\beta(1+\varepsilon_1)+\gamma(1+\varepsilon_2)\right)\right) \\
&= \mathrm{fl}\left(\alpha\cdot\left[\beta(1+\varepsilon_1)+\gamma(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)\right) \\
&= \left[\alpha\left[\beta(1+\varepsilon_1)+\gamma(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)\right](1+\varepsilon_4) \\
&= \alpha\beta(1+\varepsilon)^3+\alpha\gamma(1+\delta)^3 \cong \alpha\beta(1+3\varepsilon)+\alpha\gamma(1+3\delta) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\alpha\cdot\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta)+\mathrm{fl}(\gamma))\right)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| &\cong \left|\frac{\alpha\beta(1+3\varepsilon)+\alpha\gamma(1+3\delta)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| \\
&= \left|\frac{3\varepsilon\alpha\beta+3\delta\alpha\gamma}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| \leqslant 3\cdot\frac{|\varepsilon\alpha\beta|+|\delta\alpha\gamma|}{|\alpha|\cdot|\beta+\gamma|} \\
&\leqslant 3u\cdot\frac{|\alpha|\cdot|\beta|+|\alpha|\cdot|\gamma|}{|\alpha|\cdot|\beta+\gamma|} = 3u\cdot\frac{|\beta|+|\gamma|}{|\beta+\gamma|}.
\end{aligned}$$

Αν $\beta \cong -\gamma$, τότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

β. Για $x \cong 0$, παρατηρούμε ότι $\sin x \cong 0$, δηλαδή $\sqrt{1+\sin x} \cong 1$, οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση:

$$1-\sqrt{1+\sin x} = \frac{\left(1-\sqrt{1+\sin x}\right)\left(1+\sqrt{1+\sin x}\right)}{1+\sqrt{1+\sin x}} = \frac{1-1-\sin x}{1+\sqrt{1+\sin x}} = -\frac{\sin x}{1+\sqrt{1+\sin x}}.$$

Για $x \cong 0$, παρατηρούμε ότι $\cos x \cong 1$, οπότε:

$$\frac{1-\cos x}{1-\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{1-\sin x}.$$

1.4 Σεπτέμβριος 2017

α. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)-\mathrm{fl}(y)\right) &= \mathrm{fl}\left(x-y(1+\varepsilon_1)\right) = \left[x-y(1+\varepsilon_1)\right](1+\varepsilon) = x(1+\varepsilon)-y(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon)\\ &= x(1+\varepsilon)-y(1+\delta)^2 \cong x(1+\varepsilon)-y(1+2\delta) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)-\mathrm{fl}(y)\right)-(x-y)}{x-y}\right| &\cong \left|\frac{x(1+\varepsilon)-y(1+2\delta)-x+y}{x-y}\right| = \left|\frac{x\varepsilon-2y\delta}{x-y}\right|\\ &\leqslant \frac{|x\varepsilon|+2|y\delta|}{|x-y|} \leqslant u\cdot\frac{|x|+2|y|}{|x-y|}.\end{aligned}$$

Αν οι x, y είναι ομόσημοι και $x \cong y$, τότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

β. Για $x = 10$ και $x = -10$, κανένα πρόβλημα δεν παρουσιάζεται. Για $x = 10^{-4}$, παρατηρούμε ότι $x \cong -x$, δηλαδή $e^x \cong e^{-x}$, οπότε χρησιμοποιούμε αναπτύγματα Taylor:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k-(-1)^k x^k}{k!}\\ &= \sum_{k\ \text{περιττός}}\frac{x^k+x^k}{2k!} \overset{k=2j+1}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x+\frac{x^3}{6}+\varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \leqslant M\cdot\frac{x^5}{5!}.\end{aligned}$$

γ. Για $x = \frac{\pi}{4}$, κανένα πρόβλημα δεν παρουσιάζεται. Για $x = \frac{\pi}{2} - 10^{-4}$, παρατηρούμε ότι $\cos x \cong 0$, δηλαδή $\sqrt{1-\cos x} \cong 1$, οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση:

$$\sqrt{1-\cos x}-1 = \frac{\left(\sqrt{1-\cos x}-1\right)\left(\sqrt{1-\cos x}+1\right)}{\sqrt{1-\cos x}+1} = \frac{1-\cos x-1}{\sqrt{1-\cos x}+1} = -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos x}+1}.$$

Εφόσον $\cos x \cong 0$, κανένα πρόβλημα δεν παρουσιάζεται. Για $x = 10^{-4}$, παρατηρούμε ότι $\cos x \cong 1$, οπότε:

$$\sqrt{1-\cos x}-1 = \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}-1 = \sqrt{2}\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|-1.$$

1.5 Ιούνιος 2017

α. Σχετικά με τον αλγόριθμο i, παρατηρούμε ότι $2^{-k}x_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως, για αρκετά μεγάλο k, παίρνουμε ότι $\sqrt{1-(2^{-k}x_k)^2} \cong 1$, δηλαδή ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

Στον αλγόριθμο ii κανένα πρόβλημα ευστάθειας δεν παρουσιάζεται. Ωστόσο, απαιτεί μεγάλο πλήθος πράξεων για τον υπολογισμό κάθε όρου της ακολουθίας (x_k).

Τέλος, παρατηρούμε ότι η ακολουθία (x_k) είναι γνησίως θετική, οπότε ο αλγόριθμος iii περιλαμβάνει πρόσθεση μόνο ομόσημων αριθμών και κανένα πρόβλημα ευστάθειας δεν παρουσιάζεται. Σε αντίθεση με τον αλγόριθμο ii, απαιτεί μόνο 1 πρόσθεση, 2 πολλαπλασιασμούς, 1 διαίρεση και έναν υπολογισμό ρίζας, οπότε αυτός είναι ο αλγόριθμος που θα προτιμούσαμε για τον υπολογισμό της ακολουθίας (x_k).

β. Για $|\varepsilon| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\beta)+\mathrm{fl}(\gamma)\right) = \mathrm{fl}\left(\beta+\gamma\right) = (\beta+\gamma)(1+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\beta)+\mathrm{fl}(\gamma)\right)-(\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}\right| = \left|\frac{(\beta+\gamma)(1+\varepsilon)-(\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}\right| = \left|\frac{(\beta+\gamma)\varepsilon}{\beta+\gamma}\right| = |\varepsilon| \leqslant u.$$

Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)\cdot\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta)+\mathrm{fl}(\gamma))\right) &= \mathrm{fl}\left(\alpha(1+\varepsilon_1)\cdot(\beta+\gamma)(1+\varepsilon)\right) = \alpha(1+\varepsilon_1)\cdot(\beta+\gamma)(1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon_2)\\ &= \alpha\cdot(\beta+\gamma)\cdot(1+\delta)^3 \cong \alpha\cdot(\beta+\gamma)\cdot(1+3\delta) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)\cdot\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta)+\mathrm{fl}(\gamma))\right)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| &\cong \left|\frac{\alpha\cdot(\beta+\gamma)\cdot(1+3\delta)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right|\\ &= \left|\frac{3\delta\cdot\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| = 3|\delta| \leqslant 3u.\end{aligned}$$

1.6 Σεπτέμβριος 2016

α. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right) &= \mathrm{fl}\left(\alpha(1+\varepsilon_1)+\beta(1+\varepsilon_2)\right) = \left[\alpha(1+\varepsilon_1)+\beta(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)\\ &= \alpha(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)+\beta(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\\ &= \alpha(1+\varepsilon)^2+\beta(1+\delta)^2 \cong \alpha(1+2\varepsilon)+\beta(1+2\delta) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right)-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\right| &\cong \left|\frac{\alpha(1+2\varepsilon)+\beta(1+2\delta)-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right| = \left|\frac{2\alpha\varepsilon+2\beta\delta}{\alpha+\beta}\right|\\ &\leqslant 2\cdot\frac{|\alpha\varepsilon|+|\beta\delta|}{|\alpha+\beta|} \leqslant 2u\cdot\frac{|\alpha|+|\beta|}{|\alpha+\beta|}.\end{aligned}$$

Αν οι α, β είναι ετερόσημοι και $\alpha \cong -\beta$, τότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

β. Για $|\varepsilon| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right) = \mathrm{fl}\left(\alpha+\beta\right) = (\alpha+\beta)(1+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right)-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\right| = \left|\frac{(\alpha+\beta)(1+\varepsilon)-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\right| = \left|\frac{(\alpha+\beta)\varepsilon}{\alpha+\beta}\right| = |\varepsilon| \leqslant u.$$

γ. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right)\cdot\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right)\right) &= \mathrm{fl}\left((\alpha+\beta)(1+\varepsilon_1)\cdot(\alpha+\beta)(1+\varepsilon_2)\right)\\ &= (\alpha+\beta)(1+\varepsilon_1)\cdot(\alpha+\beta)(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3)\\ &= (\alpha+\beta)^2(1+\varepsilon)^3 \cong (\alpha+\beta)^2(1+3\varepsilon) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right)\cdot\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)+\mathrm{fl}(\beta)\right)\right)-(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}\right| \cong \left|\frac{(\alpha+\beta)^2(1+3\varepsilon)-(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}\right|$$
$$= \left|\frac{3\varepsilon(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}\right| = 3|\varepsilon| \leqslant 3u.$$

δ. Ο υπολογισμός της παράστασης $(\alpha+\beta)^2$ για $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, εμπλέκει πρόσθεση ετερόσημων αριθμών με $\alpha\cong-\beta$, οπότε δεν αναμένεται να γίνει με ακρίβεια.

ε. Για $|x|\ll 1$, παρατηρούμε ότι $e^x\cong 1$, οπότε χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)|\leqslant M\cdot\frac{x^3}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\frac{\varepsilon(x)}{x}=1+\frac{x}{2}+\delta(x), \quad |\delta(x)|\leqslant M\cdot\frac{x^2}{6}.$$

1.7 Ιούνιος 2015

α. Για $|\varepsilon|\leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)-\mathrm{fl}(y)\right)=\mathrm{fl}\left(x-y\right)=(x-y)(1+\varepsilon)\Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)-\mathrm{fl}(y)\right)-(x-y)}{x-y}\right|=\left|\frac{(x-y)(1+\varepsilon)-(x-y)}{x-y}\right|=\left|\frac{(x-y)\varepsilon}{x-y}\right|=|\varepsilon|\leqslant u.$$

β. Εφόσον οι αριθμοί μηχανής x, y είναι ομόσημοι, τα γινόμενα $x\cdot x$, $x\cdot y$ και $y\cdot y$ είναι όλα θετικοί αριθμοί. Αφού στην παράσταση $x\cdot x+x\cdot y+y\cdot y$ εμφανίζονται μόνο πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις θετικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι κανένα πρόβλημα δεν παρουσιάζεται.

γ. Εφόσον κανένα πρόβλημα δεν παρουσιάζεται στον υπολογισμό των παραστάσεων $x-y$ και $x\cdot x+x\cdot y+y\cdot y$, συμπεραίνουμε ότι κανένα πρόβλημα δε θα παρουσιάζεται και στον υπολογισμό του γινομένου τους.

δ. Για $|\varepsilon|,|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|,|\varepsilon_3|,|\varepsilon_4|,|\varepsilon_5|,|\delta|\leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x\cdot x)\cdot x)-\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(y\cdot y)\cdot y)\right)&=\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}\left(x^2(1+\varepsilon_1)\cdot x\right)-\mathrm{fl}\left(y^2(1+\varepsilon_2)\cdot y\right)\right)\\&=\mathrm{fl}\left(x^3(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)-y^3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)\right)\\&=\left[x^3(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)-y^3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)\right](1+\varepsilon_5)\\&=x^3(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_5)-y^3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_5)\\&=x^3(1+\varepsilon)^3-y^3(1+\delta)^3\cong x^3(1+3\varepsilon)-y^3(1+3\delta)\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x\cdot x)\cdot x)-\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(y\cdot y)\cdot y)\right)-(x^3-y^3)}{x^3-y^3}\right|&\cong\left|\frac{x^3(1+3\varepsilon)-y^3(1+3\delta)-x^3+y^3}{x^3-y^3}\right|\\&=\left|\frac{3\varepsilon x^3-3\delta y^3}{x^3-y^3}\right|\leqslant 3\cdot\frac{\left|\varepsilon x^3\right|+\left|\delta y^3\right|}{|x^3-y^3|}\\&\leqslant 3u\cdot\frac{|x|^3+|y|^3}{|x^3-y^3|}.\end{aligned}$$

Αν οι x, y είναι ομόσημοι και $x \cong y$, τότε $x^3 \cong y^3$, οπότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

1.8 Φεβρουάριος 2015

α. Χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor:

$$\sin t^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(t^2\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot t^{4k+2} \Rightarrow$$

$$\int_0^x \sin t^2 dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot t^{4k+2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^x t^{4k+2} dt\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{x^{4k+3}}{4k+3} \Rightarrow$$

$$S(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(4k+3)} \cdot x^{4k+3} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{4k+3} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2k+1)!(4k+3)}{(2k+3)!(4k+7)} = \frac{4k+3}{(2k+2)(2k+3)(4k+7)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Ορίζουμε:

$$s_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \cdot 20^{4k+3}}{(2k+1)!(4k+3)} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\,(s_N) - s_N}{s_N}\right| \lessapprox \frac{|s_1| + |s_2| + \cdots + |s_N|}{|s_N|} \cdot u = \frac{\gamma_N}{|s_N|} \cdot u = \rho_N \cdot u.$$

Παρατηρούμε ότι τα ενδιάμεσα μερικά αθροίσματα είναι πολύ μεγαλύτερα του τελικού s_N, αφού $\lim\limits_{x\to\infty} S(x) = \frac{1}{2}$, δηλαδή $\gamma_N \gg |s_N|$, οπότε $\rho_N \gg 1$.

1.9 Ιούνιος 2012

α. Για $k \gg 1$, παρατηρούμε ότι $2^{-k}a \cong 0$, δηλαδή $\sqrt{1+2^{-k}a} \cong \sqrt{1-2^{-k}a}$, οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2^{-k}a} - \sqrt{1-2^{-k}a} &= \frac{(\sqrt{1+2^{-k}a} - \sqrt{1-2^{-k}a})(\sqrt{1+2^{-k}a} + \sqrt{1-2^{-k}a})}{\sqrt{1+2^{-k}a} + \sqrt{1-2^{-k}a}} \\ &= \frac{(1+2^{-k}a) - (1-2^{-k}a)}{\sqrt{1+2^{-k}a} + \sqrt{1-2^{-k}a}} = \frac{2^{1-k}a}{\sqrt{1+2^{-k}a} + \sqrt{1-2^{-k}a}}.\end{aligned}$$

Δεν παρουσιάζεται κανένα πρόβλημα κατά τον υπολογισμό της τελευταίας παράστασης.

Για $|x| \cong 0$, παρατηρούμε ότι $e^x \cong 1$, οπότε χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x), \ |\varepsilon(x)| \leqslant M \cdot \frac{x^3}{6} \Rightarrow e^x - 1 \cong x + \frac{x^2}{2}.$$

β. Παρατηρούμε ότι $\varepsilon_0 = \widetilde{x}_0 - x_0 = \varepsilon$. Έστω ότι ισχύει $\varepsilon_n = \widetilde{x}_n - x_n = \left[\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\right]^n \varepsilon$ για κάποιο

$n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} = \widetilde{x}_{n+1} - x_{n+1} &= \frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\widetilde{x}_n - \frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}x_n = \frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\varepsilon_n \\ &= \frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma} \cdot \left[\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\right]^n \varepsilon = \left[\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\right]^{n+1} \varepsilon.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, ισχύει ότι $\varepsilon_n = \widetilde{x}_n - x_n = \left[\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\right]^n \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με χρήση υπολογιστή χειρός, υπολογίζουμε ότι $\varepsilon_{20} \cong 0.1613$ και βλέπουμε ότι αυτό το σφάλμα είναι πολύ μεγάλο. Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma} = 2.025 > 1 \Rightarrow \left[\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma}\right]^{20} = 1344313 \gg 1 \Rightarrow \varepsilon_{20} \gg \varepsilon.$$

Για να είναι ευσταθής ο αλγόριθμος υπολογισμού της ακολουθίας (x_n) απαιτούμε:

$$\frac{(1-\gamma)^2}{4\gamma} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 - 2\gamma + \gamma^2 \leqslant 4\gamma \Leftrightarrow \gamma^2 - 6\gamma + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leqslant \gamma \leqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

Συναληθεύοντας με τον περιορισμό $0 < \gamma < 1$, συμπεραίνουμε ότι ο αλγόριθμος είναι ευσταθής για $\gamma \in \big[3 - 2\sqrt{2}, 1\big)$.

1.10 Ιούνιος 2011

α. Έστω $x = .d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^e > 0$ με $d_1 \neq 0$ και $L \leqslant e \leqslant U$ ο δοσμένος αριθμός μηχανής. Τότε, ο πλησιέστερος αριθμός μηχανής y με $y > x$ είναι ο $y = \big(.d_1 d_2 \dots d_t + \beta^{-t}\big) \cdot \beta^e = x + \beta^{e-t}$, οπότε $y - x = \beta^{e-t}$. Επομένως,

$$\beta^{-1} \leqslant .d_1 d_2 \dots d_t \leqslant 1 \Rightarrow \beta^{e-1} \leqslant \underbrace{.d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^e}_{x} \leqslant \beta^e \Rightarrow \frac{y-x}{\beta^e} \leqslant \frac{y-x}{x} \leqslant \frac{y-x}{\beta^{e-1}} \Rightarrow$$

$$\frac{\beta^{e-t}}{\beta^e} \leqslant \frac{y-x}{x} \leqslant \frac{\beta^{e-t}}{\beta^{e-1}} \Rightarrow \beta^{-t} \leqslant \frac{y-x}{x} \leqslant \beta^{1-t}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\cos x \cong \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = s_N \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\,(s_N) - s_N}{s_N}\right| \lessapprox \frac{|s_1| + |s_2| + \cdots + |s_N|}{|s_N|} \cdot u = \frac{\gamma_N}{|s_N|} \cdot u = \rho_N \cdot u.$$

Για $x = 10^{-3}$, ο παραπάνω υπολογισμός είναι ακριβής. Για $x = 20$, παρατηρούμε ότι τα ενδιάμεσα μερικά αθροίσματα είναι πολύ μεγαλύτερα του τελικού s_N, αφού $\cos(x) \in [-1, 1]$, δηλαδή $\gamma_N \gg |s_N|$, οπότε $\rho_N \gg 1$.

Εναλλακτικά, υπολογίζουμε ότι $\cos(20) = \cos^2(10) - \sin^2(10)$.

1.11 Σεπτέμβριος 2010

α. Παρατηρούμε ότι $y_k = \pi \cdot \frac{\sin(2^{-k}\pi)}{2^{-k}\pi}$, όπου $2^{-k}\pi \to 0$ καθώς $k \to \infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, παίρνουμε ότι $y_k \to \pi$ καθώς $k \to \infty$.

β. Σχετικά με τον αλγόριθμο i παρατηρούμε ότι $2^{-k}y_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως, για αρκετά μεγάλο k, παίρνουμε ότι $\sqrt{1-(2^{-k}y_k)^2} \cong 1$, δηλαδή ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

Στον αλγόριθμο ii κανένα πρόβλημα ευστάθειας δεν παρουσιάζεται. Ωστόσο, απαιτεί μεγάλο πλήθος πράξεων για τον υπολογισμό κάθε όρου της ακολουθίας (y_k).

Τέλος, παρατηρούμε ότι η ακολουθία (y_k) είναι γνησίως θετική, οπότε ο αλγόριθμος iii περιλαμβάνει πρόσθεση μόνο ομόσημων αριθμών και κανένα πρόβλημα ευστάθειας δεν παρουσιάζεται. Σε αντίθεση με τον αλγόριθμο ii, απαιτεί μόνο 1 πρόσθεση, 2 πολλαπλασιασμούς, 1 διαίρεση και έναν υπολογισμό ρίζας, οπότε αυτός είναι ο αλγόριθμος που θα προτιμούσαμε για τον υπολογισμό της ακολουθίας (y_k).

1.12 Ιούνιος 2010

α. Για $|\varepsilon| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)+\mathrm{fl}(y)\right) = \mathrm{fl}\left(x+y\right) = (x+y)(1+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)+\mathrm{fl}(y)\right)-(x+y)}{x+y}\right| = \left|\frac{(x+y)(1+\varepsilon)-(x+y)}{x+y}\right| = \left|\frac{(x+y)\varepsilon}{x+y}\right| = |\varepsilon| \leqslant u.$$

Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)\cdot\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x)+\mathrm{fl}(y))\right) &= \mathrm{fl}\left(x\cdot(x+y)(1+\varepsilon)\right) = x\cdot(x+y)(1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon_1)\\ &= x\cdot(x+y)\cdot(1+\delta)^2 \cong x\cdot(x+y)\cdot(1+2\delta) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(x)\cdot\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x)+\mathrm{fl}(y))\right)-x\cdot(x+y)}{x\cdot(x+y)}\right| &\cong \left|\frac{x\cdot(x+y)\cdot(1+2\delta)-x\cdot(x+y)}{x\cdot(x+y)}\right|\\ &= \left|\frac{2\delta\cdot x\cdot(x+y)}{x\cdot(x+y)}\right| = 2|\delta| \leqslant 2u.\end{aligned}$$

β. Για $x \cong 0$, παρατηρούμε ότι $x \cong \sin x = -\sin(-x)$, οπότε χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x),\ |\varepsilon(x)| \leqslant \frac{x^5}{5!} \Rightarrow$$

$$x+\sin(-x) = x - \sin x \cong \frac{x^3}{6}.$$

Υπολογίζουμε ότι $\Delta = 10^{14} - 4a > 0$, οπότε:

$$x_1 = \frac{10^7+\sqrt{10^{14}-4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{10^7-\sqrt{10^{14}-4a}}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι $10^{14} - 4a \cong 10^{14}$, δηλαδή $\sqrt{10^{14} - 4a} \cong 10^7$. Θυμόμαστε ότι $x_1 \cdot x_2 = \alpha$, οπότε:

$$x_1 = \frac{10^7 + \sqrt{10^{14} - 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{2\alpha}{10^7 + \sqrt{10^{14} - 4a}}.$$

1.13 Ιούνιος 2009

α. Χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor:

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot t^{2k} \Rightarrow$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \Rightarrow$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \cdot x^{2k+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k!(2k+1)}{(k+1)!(2k+3)} = \frac{2k+1}{(k+1)(2k+3)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Ορίζουμε:

$$s_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \cdot 20^{2k+1}}{k!(2k+1)} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\mathrm{fl}\,(s_N) - s_N}{s_N} \right| \lessapprox \frac{|s_1| + |s_2| + \cdots + |s_N|}{|s_N|} \cdot u = \frac{\gamma_N}{|s_N|} \cdot u = \rho_N \cdot u.$$

Παρατηρούμε ότι τα ενδιάμεσα μερικά αθροίσματα είναι πολύ μεγαλύτερα του τελικού s_N, αφού $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$, δηλαδή $\gamma_N \gg |s_N|$, οπότε $\rho_N \gg 1$.

1.14 Σεπτέμβριος 2008

α. Έστω $f(x) = x^3 + 3ax + 2$. Παρατηρούμε ότι:

$$uv = \left[(\sqrt{a^3+1} - 1)(\sqrt{a^3+1} + 1) \right]^{\frac{1}{3}} = \left(a^3 + 1 - 1 \right)^{\frac{1}{3}} = a.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(\rho) = f(u - v) &= (u-v)^3 + 3a(u-v) + 2 = u^3 - 3u^2 v + 3uv^2 - v^3 + 3au - 3av + 2 \\ &= u^3 + 3u(a - uv) - 3v(a - uv) - v^3 + 2 = u^3 + 3(u-v)\cancelto{0}{(a - uv)} - v^3 + 2 \\ &= \sqrt{a^3+1} - 1 - \sqrt{a^3+1} - 1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

β. Για $a \gg 1$, παρατηρούμε ότι $\sqrt{a^3+1} - 1 \cong \sqrt{a^3+1} + 1$, δηλαδή $u \cong v$. Επομένως, το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

γ. Υπολογίσαμε ότι $uv = a$ και $u^3 - v^3 = -2$, οπότε:

$$\rho = u - v = \frac{u^3 - v^3}{u^2 + uv + v^2} = -\frac{2}{u^2 + v^2 + a}.$$

1.15 Ιούνιος 2008

α. Για $|x| \cong 0$, παρατηρούμε ότι $a - x \cong a$, δηλαδή $\cos(a - x) \cong \cos a$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο για τη διαφορά συνημιτόνων γωνιών:

$$\cos(a - x) - \cos a = -2 \sin \frac{a - x + a}{2} \sin \frac{a - x - a}{2} = -2 \sin \frac{2a - x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

Για $|x| \gg 1$, παρατηρούμε ότι $x^2 + 1 \cong x^2$, δηλαδή $\sqrt{x^2 + 1} \cong x$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση:

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right).$$

β. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x) + \mathrm{fl}(y)) \cdot \mathrm{fl}(z)\right) &= \mathrm{fl}\left((x+y)(1+\varepsilon_1) \cdot z\right) = (x+y)(1+\varepsilon_1) \cdot z \cdot (1+\varepsilon_2) \\ &= (x+y) \cdot z \cdot (1+\varepsilon)^2 \cong (x+y) \cdot z \cdot (1+2\varepsilon) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x) + \mathrm{fl}(y)) \cdot \mathrm{fl}(z)\right) - (x+y) \cdot z}{(x+y) \cdot z}\right| &\cong \left|\frac{(x+y) \cdot z \cdot (1+2\varepsilon) - (x+y) \cdot z}{(x+y) \cdot z}\right| \\ &= \left|\frac{2\varepsilon \cdot (x+y) \cdot z}{(x+y) \cdot z}\right| = 2|\varepsilon| \leqslant 2u = 2 \cdot \frac{1}{2}\beta^{1-t} = 10^{-7}. \end{aligned}$$

1.16 Σεπτέμβριος 2007

α. Έστω α, β, γ αριθμοί μηχανής. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha) \cdot \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta) + \mathrm{fl}(\gamma))\right) &= \mathrm{fl}\left(\alpha \cdot (\beta+\gamma)(1+\varepsilon_1)\right) = \alpha \cdot (\beta+\gamma)(1+\varepsilon_1) \cdot (1+\varepsilon_2) \\ &= \alpha \cdot (\beta+\gamma) \cdot (1+\varepsilon)^2 \cong \alpha \cdot (\beta+\gamma) \cdot (1+2\varepsilon) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha) \cdot \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta) + \mathrm{fl}(\gamma))\right) - \alpha \cdot (\beta+\gamma)}{\alpha \cdot (\beta+\gamma)}\right| &\cong \left|\frac{\alpha \cdot (\beta+\gamma) \cdot (1+2\varepsilon) - \alpha \cdot (\beta+\gamma)}{\alpha \cdot (\beta+\gamma)}\right| \\ &= \left|\frac{2\varepsilon \cdot \alpha \cdot (\beta+\gamma)}{\alpha \cdot (\beta+\gamma)}\right| = 2|\varepsilon| \leqslant 2u. \end{aligned}$$

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί. Για $|\varepsilon|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|, |\varepsilon_5|, |\delta| \leqslant u$, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha) \cdot \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta) + \mathrm{fl}(\gamma))\right) &= \mathrm{fl}\left(\alpha(1+\varepsilon_1) \cdot \mathrm{fl}\left(\beta(1+\varepsilon_2) + \gamma(1+\varepsilon_3)\right)\right) \\ &= \mathrm{fl}\left(\alpha(1+\varepsilon_1) \cdot [\beta(1+\varepsilon_2) + \gamma(1+\varepsilon_3)]\,(1+\varepsilon_4)\right) \\ &= [\alpha(1+\varepsilon_1) \cdot [\beta(1+\varepsilon_2) + \gamma(1+\varepsilon_3)]\,(1+\varepsilon_4)]\,(1+\varepsilon_5) \end{aligned}$$

$$= \alpha\beta(1+\varepsilon)^4 + \alpha\gamma(1+\delta)^4 \cong \alpha\beta(1+4\varepsilon) + \alpha\gamma(1+4\delta) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{fl}\left(\mathrm{fl}(\alpha)\cdot\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(\beta)+\mathrm{fl}(\gamma))\right)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| &\cong \left|\frac{\alpha\beta(1+4\varepsilon)+\alpha\gamma(1+4\delta)-\alpha\cdot(\beta+\gamma)}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| \\
&= \left|\frac{4\varepsilon\alpha\beta+4\delta\alpha\gamma}{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}\right| \leqslant 4\cdot\frac{|\varepsilon\alpha\beta|+|\delta\alpha\gamma|}{|\alpha|\cdot|\beta+\gamma|} \\
&\leqslant 4u\cdot\frac{|\alpha|\cdot|\beta|+|\alpha|\cdot|\gamma|}{|\alpha|\cdot|\beta+\gamma|} = 4u\cdot\frac{|\beta|+|\gamma|}{|\beta+\gamma|}.
\end{aligned}$$

Αν $\beta \cong -\gamma$, τότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

β. Παρατηρούμε ότι $2^{-k}\psi_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως, για αρκετά μεγάλο k, παίρνουμε ότι $\sqrt{1-(2^{-k}\psi_k)^2} \cong 1$, δηλαδή ο αλγόριθμος είναι ασταθής. Παρατηρούμε ότι $\psi_k > 0$ για $k \in \mathbb{N}$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση:

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1} &= 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-(2^{-k}\psi_k)^2}\right]} = 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{(2^{-k}\psi_k)^2}{1+\sqrt{1-(2^{-k}\psi_k)^2}}} \\
&= \frac{2^{k+1}\cdot 2^{-k}\psi_k}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-(2^{-k}\psi_k)^2}}} = \psi_k\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-k}\psi_k)^2}}}.
\end{aligned}$$

1.17 Σεπτέμβριος 2006

α. Χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα Taylor:

$$\cos t^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(t^2\right)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot t^{4k} \Rightarrow$$

$$\int_0^x \cos t^2 dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot t^{4k}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^x t^{4k}dt\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{x^{4k+1}}{4k+1} \Rightarrow$$

$$C(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \cos t^2 dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)}\cdot x^{4k+1} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{4k+1} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2k)!(4k+1)}{(2k+2)!(4k+5)} = \frac{4k+1}{(2k+1)(2k+2)(4k+5)} \to 0, \quad k\to\infty.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Ορίζουμε:

$$s_N = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\cdot 20^{4k+1}}{(2k)!(4k+1)} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\mathrm{fl}\left(s_N\right)-s_N}{s_N}\right| \lessapprox \frac{|s_1|+|s_2|+\cdots+|s_N|}{|s_N|}\cdot u = \frac{\gamma_N}{|s_N|}\cdot u = \rho_N\cdot u.$$

Παρατηρούμε ότι τα ενδιάμεσα μερικά αθροίσματα είναι πολύ μεγαλύτερα του τελικού s_N, αφού $\lim\limits_{x\to\infty} C(x) = \frac{1}{2}$, δηλαδή $\gamma_N \gg |s_N|$, οπότε $\rho_N \gg 1$.

1.18 Σεπτέμβριος 2005

α. Χρησιμοποιούμε τον τύπο της εφαπτομένης διπλάσιας γωνίας:

$$\begin{aligned} y_k &= 2^k \tan\frac{\pi}{2^k} = 2^k \tan\frac{2\pi}{2^{k+1}} = 2^k \frac{2\tan(2^{-k-1}\pi)}{1-\tan^2(2^{-k-1}\pi)} \\ &= 2^{k+1}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-\tan^2(2^{-k-1}\pi)} = \frac{y_{k+1}}{1-\tan^2(2^{-k-1}\pi)}. \end{aligned}$$

Για $k \geqslant 2$, υπολογίζουμε ότι:

$$2^{k+1} > 4 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2^{k+1}} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan^2 0 < \tan^2\frac{\pi}{2^{k+1}} < \tan^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$0 < \tan^2\frac{\pi}{2^{k+1}} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \tan^2\frac{\pi}{2^{k+1}} < 1 \Rightarrow y_k > y_{k+1}.$$

Δηλαδή, η ακολουθία (y_k) είναι φθίνουσα. Γνωρίζουμε ότι $2^{-k}\pi \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Παρατηρούμε ότι:

$$y_k = 2^k \frac{\sin(2^{-k}\pi)}{\cos(2^{-k}\pi)} = \pi \cdot \frac{\sin(2^{-k}\pi)}{2^{-k}\pi} \cdot \frac{1}{\cos(2^{-k}\pi)}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, συμπεραίνουμε ότι $y_k \to \pi$ καθώς $k \to \infty$.

β. Ισχύει ότι $y_2 = 4\tan\frac{\pi}{4} = 4$. Βλέπουμε ότι $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ και $\cos(2^{-k}\pi) > 0$ για $k \geqslant 2$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους τριγωνομετρικών διπλάσιας γωνίας, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2^{2k+1}\frac{\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2}-1}{y_k} &= 2^{2k+1}\frac{\sqrt{1+\tan^2(2^{-k}\pi)}-1}{2^k\tan(2^{-k}\pi)} = \frac{2^{k+1}}{\tan(2^{-k}\pi)}\left[\frac{1}{\cos(2^{-k}\pi)}-1\right] \\ &= 2^{k+1}\frac{\cos(2^{-k}\pi)}{\sin(2^{-k}\pi)}\cdot\frac{1-\cos(2^{-k}\pi)}{\cos(2^{-k}\pi)} = 2^{k+1}\frac{1-\cos(2\cdot 2^{-k-1}\pi)}{\sin(2\cdot 2^{-k-1}\pi)} \\ &= 2^{k+1}\frac{2\sin^2(2^{-k-1}\pi)}{2\sin(2^{-k-1}\pi)\cos(2^{-k-1}\pi)} = 2^{k+1}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} = y_{k+1}. \end{aligned}$$

γ. Παρατηρούμε ότι $2^{-k}y_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως, για αρκετά μεγάλο k, παίρνουμε ότι $\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2} \cong 1$, δηλαδή ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

δ. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση:

$$\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2-1} = \frac{(\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2}-1)(\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2}+1)}{\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2}+1} = \frac{(2^{-k}y_k)^2}{\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2}+1} \Rightarrow$$

$$y_{k+1} = \frac{2y_k}{\sqrt{1+(2^{-k}y_k)^2}+1}, \quad k \geqslant 2.$$

1.19 Ιούνιος 2005

α. Παρατηρούμε ότι $y_k = \pi \cdot \frac{\sin(2^{-k}\pi)}{2^{-k}\pi}$, όπου $2^{-k}\pi \to 0$ καθώς $k \to \infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, παίρνουμε ότι $y_k \to \pi$ καθώς $k \to \infty$.

β. Προφανώς, ισχύει ότι $y_1 = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$. Παρατηρούμε ότι $\cos(2^{-k}\pi) \geqslant 0$ και $\sin(2^{-k}\pi) \geqslant 0$ για $k \geqslant 1$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του ημιτόνου και του συνημιτόνου διπλάσιας γωνίας, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-(2^{-k}y_k)^2}\right]} &= 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^k}}\right)} = 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^k}\right)} \\
&= 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{2^{k+1}}\right)} = 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2^{k+1}}} \\
&= 2^{k+1}\sin\frac{\pi}{2^{k+1}} = y_{k+1}.
\end{aligned}$$

Προφανώς, ισχύει ότι $y_2 = 4\sin\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του ημιτόνου και του συνημιτόνου διπλάσιας γωνίας, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
y_k\sqrt{\frac{2y_k}{y_k+y_{k-1}}} &= 2^k\sin\frac{\pi}{2^k}\sqrt{\frac{2^{k+1}\sin(2^{-k}\pi)}{2^k\sin(2^{-k}\pi)+2^{k-1}\sin(2\cdot 2^{-k}\pi)}} \\
&= 2^k\sin\frac{\pi}{2^k}\sqrt{\frac{4\sin(2^{-k}\pi)}{2\sin(2^{-k}\pi)+2\sin(2^{-k}\pi)\cos(2^{-k}\pi)}} \\
&= 2^k\sin\frac{\pi}{2^k}\sqrt{\frac{2}{1+\cos(2\cdot 2^{-k-1}\pi)}} = 2^k\sin\frac{\pi}{2^k}\sqrt{\frac{2}{2\cos^2(2^{-k-1}\pi)}} \\
&= 2^k\frac{\sin(2\cdot 2^{-k-1}\pi)}{\cos(2^{-k-1}\pi)} = 2^k\frac{2\sin(2^{-k-1}\pi)\cos(2^{-k-1}\pi)}{\cos(2^{-k-1}\pi)} = 2^{k+1}\sin\frac{\pi}{2^{k+1}} = y_{k+1}.
\end{aligned}$$

γ. Σχετικά με τον πρώτο αλγόριθμο, παρατηρούμε ότι $2^{-k}y_k \to 0$ καθώς $k\to\infty$. Επομένως, για αρκετά μεγάλο k, παίρνουμε ότι $\sqrt{1-(2^{-k}y_k)^2} \cong 1$, δηλαδή ο αλγόριθμος είναι ασταθής. Αντιθέτως, η ακολουθία (y_k) είναι θετική, οπότε ο δεύτερος αλγόριθμος περιλαμβάνει πρόσθεση μόνο ομόσημων αριθμών και κανένα πρόβλημα ευστάθειας δεν παρουσιάζεται.

1.20 Ιούλιος 2004

α. Έστω $f(x) = x^3 + 3x + 2a$. Παρατηρούμε ότι:

$$uv = \left[(\sqrt{a^2+1}-a)(\sqrt{a^2+1}+a)\right]^{\frac{1}{3}} = \left(a^2+1-a^2\right)^{\frac{1}{3}} = 1.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f(\rho) = f(u-v) &= (u-v)^3 + 3(u-v) + 2a = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3u - 3v + 2a \\
&= u^3 + 3u(1-uv) - 3v(1-uv) - v^3 + 2a = u^3 + 3(u-v)\cancelto{0}{(1-uv)} - v^3 + 2a \\
&= \sqrt{a^2+1} - a - \sqrt{a^2+1} - a + 2a = 0.
\end{aligned}$$

β. Για $a \cong 0$, παρατηρούμε ότι $\sqrt{a^2+1}-a \cong \sqrt{a^2+1}+a$, δηλαδή $u \cong v$. Επομένως, το φράγμα του σχετικού σφάλματος γίνεται πολύ μεγάλο.

γ. Υπολογίσαμε ότι $uv = 1$ και $u^3 - v^3 = -2a$, οπότε:

$$\rho = u - v = \frac{u^3 - v^3}{u^2 + uv + v^2} = -\frac{2a}{u^2 + v^2 + 1}.$$

2 Επίλυση Μη-Γραμμικών Εξισώσεων

Μέθοδος Διχοτόμησης

- Θέτουμε $a_1 = a$ και $b_1 = b$. Τότε, η πρώτη εκτίμηση δίνεται ως $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Αν $f(a_1)f(x_1) < 0$, τότε θέτουμε $a_2 = a_1$ και $b_2 = x_1$. Διαφορετικά, θέτουμε $a_2 = x_1$ και $b_2 = b_1$. Στη συνέχεια, η δεύτερη εκτίμηση δίνεται ως $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
- Γνωρίζουμε ότι $|x_n - x^*| \leqslant \frac{b-a}{2^n}$ για $n = 1, 2, \dots$.
- Αν $n \geqslant \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}$, τότε εξασφαλίζουμε ότι $|x_n - x^*| \leqslant \varepsilon$.

Γενική Επαναληπτική Μέθοδος

- Έστω $\phi : [a,b] \to [a,b]$ συστολή, δηλαδή $|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x-y|$ για $x, y \in [a,b]$, όπου $0 \leqslant L < 1$. Τότε, η ακολουθία (x_n) που ορίζεται ως $x_{n+1} = \phi(x_n)$ συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της ϕ για κάθε $x_0 \in [a,b]$.
- Έστω ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε, η ϕ είναι συστολή αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $0 \leqslant L < 1$ τέτοια, ώστε $|\phi'(x)| \leqslant L$ για κάθε $x \in (a,b)$.
- Γνωρίζουμε ότι:

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|, \quad |x_n - x^*| \leqslant L^n|x_0 - x^*|, \quad |x_n - x^*| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|.$$

Μέθοδος του Νεύτωνα

- Θεώρημα ολικής σύγκλισης: Έστω $f(a) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x > a$. Τότε, η f έχει μοναδική ρίζα στο (a, ∞) και η ακολουθία (x_n) που ορίζεται αναδρομικά ως $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ συγκλίνει σε αυτή για κάθε $x_0 > a$.

Μέθοδος της Τέμνουσας

- Ορίζουμε την ακολουθία (x_n) ως $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ για $n = 1, 2, \dots$ με δεδομένα x_0, x_1.

2.1 Σεπτέμβριος 2019

α. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-3, -2]$, $f(-3) = -2 < 0$ και $f(-2) = 10 > 0$, δηλαδή $f(-3)f(-2) < 0$.Επομένως, η ακολουθία που παράγεται από τη μέθοδο της διχοτόμησης συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\rho_1 \in (-3,-2)$ σύμφωνα με γνωστή πρόταση. Βρίσκουμε ότι $x_1 = \frac{-3-2}{2} = -\frac{5}{2}$ και $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{47}{8} > 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[-3,-\frac{5}{2}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{-3-\frac{5}{2}}{2} = -\frac{11}{4}$.

β. Ορίζουμε $\phi(x) = \frac{x^3+4}{7} \Rightarrow \phi'(x) = \frac{3x^2}{7} > 0$, οπότε $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|\phi'(x)| = |\phi'(1)| = \frac{3}{7} < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi\left([0,1]\right) = [\phi(0),\phi(1)] = \left[\frac{4}{7},\frac{5}{7}\right] \subseteq [0,1].$$

Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho_2 \in (0,1)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [0,1]$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(\widetilde{x}_0) = f\left(3\right) = 10$ και $f'(\widetilde{x}_0) = f'\left(3\right) = 20$, οπότε:

$$\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_0 - \frac{f(\widetilde{x}_0)}{f'(\widetilde{x}_0)} = 3 - \frac{10}{20} = \frac{5}{2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \cong -3.13 < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\sqrt{\frac{7}{3}},\infty\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(\widetilde{x}_n)$ που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho_3 \in (2,3) \subseteq \left(\sqrt{\frac{7}{3}},\infty\right)$ για κάθε $\widetilde{x}_0 > \sqrt{\frac{7}{3}}$. Για $\widetilde{x}_0 = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'\left(\widetilde{x}_0\right) = 0$.

Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(\widetilde{x}_n) = \widetilde{x}_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho_1) = \rho_1$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty,-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$. Επιπλέον, $f(x) > 0$ για $x \in \left(\rho_1,-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ και $f(x) < 0$ για $x \in (-\infty,\rho_1)$, οπότε $g'(x) < 0$ για $x \in \left(\rho_1,-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ και $g'(x) > 0$ για $x \in (-\infty,\rho_1)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\rho_1,-\sqrt{\frac{7}{3}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\rho_1]$. Αν $\widetilde{x}_0 \in \left(\rho_1,-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, τότε $g(\widetilde{x}_0) < g(\rho_1) \Rightarrow \widetilde{x}_1 < \rho_1$. Διαφορετικά, αν $\widetilde{x}_0 \in (-\infty,\rho_1)$, τότε $g(\widetilde{x}_0) < g(\rho_1) \Rightarrow \widetilde{x}_1 < \rho_1$. Εφόσον $f(\widetilde{x}_0) < 0$ και $f'(\widetilde{x}_0) > 0$, έπεται ότι $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_0 - \frac{f(\widetilde{x}_0)}{f'(\widetilde{x}_0)} > \widetilde{x}_0$. Έστω ότι $\widetilde{x}_{n-1} < \widetilde{x}_n < \rho_1$ για $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$g(\widetilde{x}_{n-1}) < g(\widetilde{x}_n) < g(\rho_1) \Rightarrow \widetilde{x}_n < \widetilde{x}_{n+1} < \rho_1.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, παίρνουμε ότι $\widetilde{x}_{n-1} < \widetilde{x}_n < \rho_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία $(\widetilde{x}_n)$ είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ_1, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{x}_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\widetilde{x}_n - \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\widetilde{x}_n\right)}{f'\left(\widetilde{x}_n\right)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho_1.$$

Για $\widetilde{x}_0 \in \left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, η ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα μπορεί να συγκλίνει σε οποιαδήποτε από τις 3 ρίζες της εξίσωσης ανάλογα με το πόσο κοντά βρίσκεται το $\widetilde{x}_0$ στα άκρα του διαστήματος, τα οποία είναι οι 2 ρίζες της $f'(x)$.

2.2 Ιούνιος 2019

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = e^{x-1} - 1$. Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, \infty)$.

Έχουμε ότι $f(-1) = e^{-2} \cong 0.14 > 0$, $f(0) = e^{-1} - 1 \cong -0.63 < 0$, $f(2) = e - 3 \cong -0.28 < 0$ και $f(3) = e^2 - 4 \cong 3.39 > 0$, δηλαδή $f(-1) f(0) < 0$ και $f(2) f(3) < 0$. Επιπλέον, η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[2, 3]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_1 \in (-1, 0) \subseteq (-\infty, 1)$ και τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_2 \in (2, 3) \subseteq (1, \infty)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty, 1)$ και το πολύ μία ρίζα στο $(1, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι μοναδικές.

β. Ορίζουμε $\phi(x) = e^{x-1} - 1 \Rightarrow \phi'(x) = e^{x-1} > 0$, οπότε $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant a} |\phi'(x)| = |\phi'(a)| = e^{a-1} < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi([-1, a]) = [\phi(-1), \phi(a)] = \left[e^{-2} - 1, e^{a-1} - 1\right] \subseteq [-1, a],$$

αφού $e^{a-1} - 1 - a = f(a) < 0$ για $a \in (\rho_1, 1)$. Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho_1 \in (-1, 0)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [-1, a]$.

Υπολογίζουμε ότι $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$. Επομένως, δεν υπάρχει διάστημα που να περιέχει τη ρίζα ρ_2 και να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της συστολής για την επαναληπτική μέθοδο με $\phi(x) = e^{x-1} - 1$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(3) = e^2 - 4$ και $f'(x_0) = f'(3) = e^2 - 1$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{e^2 - 4}{e^2 - 1} \cong 2.47.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(1) = -1 < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho_2 \in (2, 3) \subseteq (1, \infty)$ για κάθε $x_0 > 1$. Για $x_0 = 1$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'(1) = 0$.

Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho_1) = \rho_1$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x) f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} = \frac{f(x) f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$. Επιπλέον, $f(x) < 0$ για $x \in (\rho_1, 1)$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, \rho_1)$, οπότε $g'(x) < 0$ για $x \in (\rho_1, 1)$ και $g'(x) > 0$

για $x \in (-\infty, \rho_1)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\rho_1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \rho_1]$. Αν $x_0 \in (\rho_1, 1)$, τότε $g(x_0) < g(\rho_1) \Rightarrow x_1 < \rho_1$. Διαφορετικά, αν $x_0 \in (-\infty, \rho_1)$, τότε $g(x_0) < g(\rho_1) \Rightarrow x_1 < \rho_1$. Επιπλέον, εφόσον $f(x_0) > 0$ και $f'(x_0) < 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$. Έστω ότι $x_{n-1} < x_n < \rho_1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$g(x_{n-1}) < g(x_n) < g(\rho_1) \Rightarrow x_n < x_{n+1} < \rho_1.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, παίρνουμε ότι $x_{n-1} < x_n < \rho_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ_1, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho_1.$$

2.3 Ιούνιος 2018

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = 4x^3 - 4$. Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, \infty)$.

Έχουμε ότι $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$ και $f(2) = 9 > 0$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ και $f(1)f(2) < 0$. Επιπλέον, η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_1 \in (0, 1) \subseteq (-\infty, 1)$ και τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_2 \in (1, 2) \subseteq (1, \infty)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty, 1)$ και το πολύ μία ρίζα στο $(1, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι μοναδικές.

β. Ορίζουμε $\phi(x) = \frac{x^4+1}{4} \Rightarrow \phi'(x) = x^3$, οπότε $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a} |\phi'(x)| = |\phi'(a)| = a^3 < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi\left([0, a]\right) = [\phi(0), \phi(a)] = \left[\frac{1}{4}, \frac{a^4+1}{4}\right] \subseteq [0, a]\,,$$

αφού $\frac{a^4+1}{4} - a = \frac{1}{4}f(a) < 0$ για $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho_1 \in (0, 1)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [0, a]$.

Υπολογίζουμε ότι $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$. Επομένως, δεν υπάρχει διάστημα που να περιέχει τη ρίζα ρ_2 και να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της συστολής για την επαναληπτική μέθοδο με $\phi(x) = \frac{x^4+1}{4}$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f\left(2\right) = 9$ και $f'(x_0) = f'\left(2\right) = 28$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{9}{28} = \frac{7}{4}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(1) = -2 < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho_2 \in (1, 2) \subseteq (1, \infty)$ για κάθε $x_0 > 1$. Για $x_0 = 1$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'(1) = 0$.

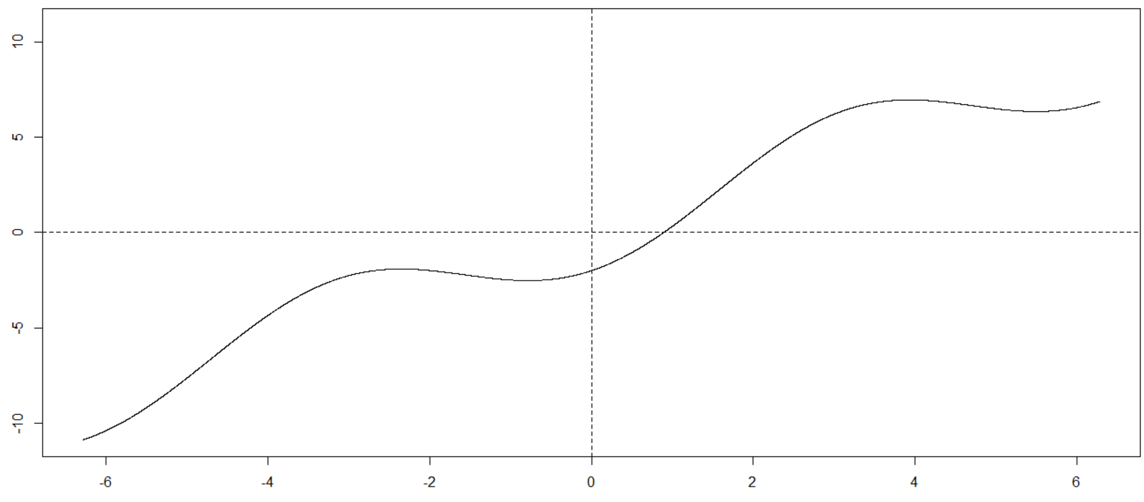
Παρατηρούμε ότι $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$, οπότε η $f(x)$ είναι γνησίως κυρτή στον $\mathbb{R}$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι αρνητική, γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο διάστημα $(\rho_1, 1)$, συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x_0 \in (\rho_1, 1)$ θα τέμνει τον άξονα των x σε κάποιο σημείο x_1 με $x_1 < \rho_1$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική, γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο διάστημα $(-\infty, \rho_1)$, συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x_0 < \rho_1$ θα τέμνει τον άξονα των x σε κάποιο σημείο x_1 με $x_0 < x_1 < \rho_1$. Επομένως, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα θα είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ_1, οπότε θα συγκλίνει στο ρ_1 λόγω μοναδικότητας.

2.4 Σεπτέμβριος 2017

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = \sqrt{2} + 2\sin x$ και $f''(x) = 2\cos x$. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π. Για $k \in \mathbb{Z}$, παρατηρούμε ότι $f''(x) > 0$ για $x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ και $f''(x) < 0$ για $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$, δηλαδή η $f(x)$ είναι γνησίως κυρτή στα διαστήματα $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως κοίλη στα διαστήματα $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$, ενώ παρουσιάζει σημεία καμπής στα $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ ή } x = 2k\pi - \frac{\pi}{4},$$

οπότε η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right]$.



Παρατηρούμε ότι $x\sqrt{2} - 2 \leqslant f(x) \leqslant x\sqrt{2} + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εφόσον η συνάρτηση $x\sqrt{2} - 2$

τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $x = \sqrt{2}$ και η συνάρτηση $x\sqrt{2}+2$ τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $x = -\sqrt{2}$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν μπορεί να τέμνει τον άξονα των x εκτός του διαστήματος $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Βλέπουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \subseteq \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right] \subseteq \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $f(-\sqrt{2}) = -2 - 2\cos(-\sqrt{2}) \cong -2.3119 < 0$, οπότε η $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα $\left[-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$. Εφόσον είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$, συμπεραίνουμε ότι έχει το πολύ μία ρίζα. Υπολογίζουμε ότι $f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = \sqrt{2} - 2\cos 1 \cong 0.3336 > 0$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1] \subseteq \left[-\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (0,1)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα $\rho \in (0,1)$ είναι μοναδική.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\sin x$, οπότε $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$. Όμως, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} \cong -0.3035 < 0$, οπότε η ρίζα ρ βρίσκεται στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$. Επομένως, δεν υπάρχει διάστημα που να περιέχει τη ρίζα ρ και να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της συστολής για την επαναληπτική μέθοδο με $\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2}}\cos x$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ και $f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}+2$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+4} \cong 0.9202 < 1.5708 \cong x_0.$$

Υπολογίζουμε ότι $f(x_1) \cong 0.0899 > 0$, οπότε $\rho < x_1 < x_0$. Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho) = \rho$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\rho, x_0)$, οπότε $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\rho, x_0)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\rho, x_0]$. Έστω ότι $\rho < x_n < x_{n-1} \leqslant x_0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$g(\rho) < g(x_n) < g(x_{n-1}) \leqslant g(x_0) \Rightarrow \rho < x_{n+1} < x_n \leqslant x_1 < x_0.$$

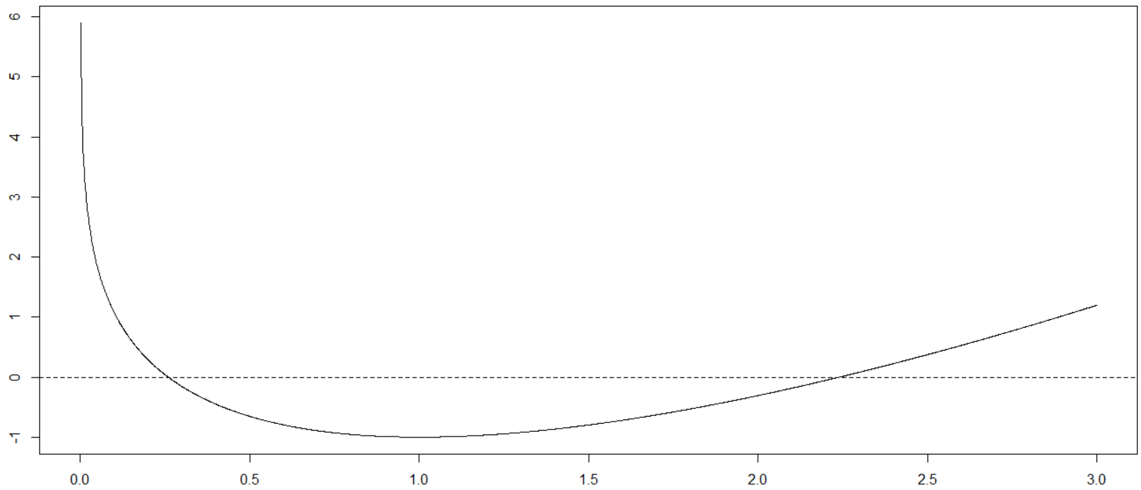
Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, παίρνουμε ότι $\rho < x_n < x_{n-1} \leqslant x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το ρ, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho.$$

Η συνάρτηση $f'(x)$ μηδενίζεται άπειρες φορές πάνω στην πραγματική ευθεία, οπότε δεν υπάρχουν διαστήματα της μορφής (a,∞) ή $(-\infty,a]$ τέτοια, ώστε η μέθοδος του Νεύτωνα να συγκλίνει για $x_0 \in (a,\infty)$ ή $x_0 \in (-\infty,a]$.

2.5 Ιούνιος 2017

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως κυρτή και η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, \infty)$.



Υπολογίζουμε ότι $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3\ln 2}{2} - 1 \cong 0.0397 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = \ln 2 - 1 \cong -0.3069 < 0$ και $f(3) = 2\ln 3 - 1 \cong 1.1972 > 0$, δηλαδή $f\left(\frac{1}{4}\right) f(1) < 0$ και $f(2) f(3) < 0$. Επιπλέον, η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ και $[2, 3]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_1 \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \subseteq (0, 1)$ και τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_2 \in (2, 3)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, 1)$ και το πολύ μία ρίζα στο $(1, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε την $x_1 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ και $f\left(\frac{5}{2}\right) \cong 0.3744 > 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[2, \frac{5}{2}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}$ και $|x_2 - \rho_2| \leqslant \frac{3-2}{2^2} = \frac{1}{4}$. Ζητάμε:

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-4} \Rightarrow 2^n \geqslant 10^4 \Rightarrow n \ln 2 \geqslant 4 \ln 10 \Rightarrow n \geqslant \frac{4 \ln 10}{\ln 2} \cong 13.2877 \Rightarrow n = 14.$$

Αν το αρχικό διάστημα είναι το $[1, 3]$ αντί του $[2, 3]$, απαιτείται μόνο ένα επιπλέον βήμα.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(2) = \ln 2 - 1$ και $f'(x_0) = f'(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{\ln 2 - 1}{\ln 2 + \frac{1}{2}} \cong 2.2572 > x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(2) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho_2 \in (2, 3) \subseteq (2, \infty)$ για κάθε $x_0 \geqslant 2$.

Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική, γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο διάστημα $(0, \rho_1)$, συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα τέμνει τον άξονα των x σε κάποιο σημείο x_1 με $x_0 < x_1 < \rho_1$. Επομένως, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα θα είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ_1, οπότε θα συγκλίνει στο ρ_1 λόγω μοναδικότητας.

2.6 Σεπτέμβριος 2016

α. Υπολογίζουμε ότι $f(-1) = -2 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -0.125 < 0$ και $f(2) = 1 > 0$, δηλαδή $f(-1)f(0) < 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right)f(2) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_1 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \subseteq (1, 2)$ και τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_3 \in (-1, 0)$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες $\rho_1 \in (1, 2)$, $\rho_2 = 1$ και $\rho_3 \in (-1, 0)$ είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε την $x_1 = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4}$ και $f\left(\frac{7}{4}\right) \cong 0.2344 > 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{4}}{2} = \frac{13}{8}$. Ζητάμε:

$$\frac{2-\frac{3}{2}}{2^n} \leqslant 10^{-6} \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 10^6 \Rightarrow (n+1)\ln 2 \geqslant 6\ln 10 \Rightarrow n \geqslant \frac{6\ln 10}{\ln 2} - 1 \cong 18.9316 \Rightarrow n = 19.$$

Παρατηρούμε ότι το $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ είναι το διάστημα που δίνει τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης με αρχικό διάστημα το $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, οπότε απαιτείται ένα βήμα λιγότερο, δηλαδή $n = 18$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$, $f''(x) = 6x - 4 = 2(3x-2)$, $f(x_0) = f(2) = 1$ και $f'(x_0) = f'(2) = 4$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} < x_0.$$

Υπολογίζουμε ότι $f\left(\frac{4}{3}\right) \cong -0.1852 < 0$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στη ρίζα $\rho_1 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \subseteq \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ για κάθε $x_0 > \frac{4}{3}$. Για $x_0 = 0$ ή $x_0 = \frac{4}{3}$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'(x_0) = 0$.

Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho_3) = \rho_3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. Επιπλέον, $f(x) > 0$ για $x \in (\rho_3, 0)$ και $f(x) < 0$ για $x \in (-\infty, \rho_3)$, οπότε $g'(x) < 0$ για $x \in (\rho_3, 0)$ και $g'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, \rho_3)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\rho_3, 0]$

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \rho_3]$. Αν $x_0 \in (\rho_3, 0)$, τότε $g(x_0) < g(\rho_3) \Rightarrow x_1 < \rho_3$. Διαφορετικά, αν $x_0 \in (-\infty, \rho_3)$, τότε $g(x_0) < g(\rho_3) \Rightarrow x_1 < \rho_3$. Επιπλέον, εφόσον $f(x_0) < 0$ και $f'(x_0) > 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$. Έστω ότι $x_{n-1} < x_n < \rho_3$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$g(x_{n-1}) < g(x_n) < g(\rho_3) \Rightarrow x_n < x_{n+1} < \rho_3.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, παίρνουμε ότι $x_{n-1} < x_n < \rho_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ_3, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho_3.$$

Για $x_0 \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$, η ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα μπορεί να συγκλίνει σε οποιαδήποτε από τις 3 ρίζες της εξίσωσης ανάλογα με το πόσο κοντά βρίσκεται το x_0 στα άκρα του διαστήματος, τα οποία είναι οι 2 ρίζες της $f'(x)$.

2.7 Ιούνιος 2015

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = 2x + \sin x$ και $f''(x) = 2 + \cos x > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$. Υπολογίζουμε ότι $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 1 - \cos 1 \cong 0.4597 > 0$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (0, 1) \subseteq (0, \infty)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια, οπότε $f(-\rho) = f(\rho) = 0$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty, 0)$ και το πολύ μία ρίζα στο $(0, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ και $-\rho$ είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε την $x_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0.6276 < 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$. Ζητάμε:

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 0.5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow 2^{n-1} \geqslant 10^6 \Rightarrow (n-1)\ln 2 \geqslant 6 \ln 10 \Rightarrow n \geqslant \frac{6 \ln 10}{\ln 2} + 1 \cong 20.9316 \Rightarrow n = 21.$$

Αν το αρχικό διάστημα είναι το $[0, 2]$ αντί του $[0, 1]$, απαιτείται μόνο ένα επιπλέον βήμα.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(1) = 1 - \cos 1$ και $f'(x_0) = f'(1) = 2 + \sin 1$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1 - \cos 1}{2 + \sin 1} \cong 0.8382 < x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(0) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n)

που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho \in (0,1) \subseteq (0,\infty)$ για κάθε $x_0 > 0$.

Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(-\rho) = -\rho$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. Επιπλέον, $f(x) < 0$ για $x \in (-\rho, 0)$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -\rho)$, οπότε $g'(x) < 0$ για $x \in (-\rho, 0)$ και $g'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -\rho)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-\rho, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -\rho]$. Αν $x_0 \in (-\rho, 0)$, τότε $g(x_0) < g(-\rho) \Rightarrow x_1 < -\rho$. Διαφορετικά, αν $x_0 \in (-\infty, -\rho)$, τότε $g(x_0) < g(-\rho) \Rightarrow x_1 < -\rho$. Επιπλέον, εφόσον $f(x_0) > 0$ και $f'(x_0) < 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$. Έστω ότι $x_{n-1} < x_n < -\rho$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$g(x_{n-1}) < g(x_n) < g(-\rho) \Rightarrow x_n < x_{n+1} < -\rho.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, παίρνουμε ότι $x_{n-1} < x_n < -\rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το $-\rho$, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = -\rho.$$

Για $x_0 = 0$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'(0) = 0$.

2.8 Φεβρουάριος 2015

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = e^x + 2 > 0$ και $f''(x) = e^x > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως κυρτή και γνησίως αύξουσα στον $\mathbb{R}$.

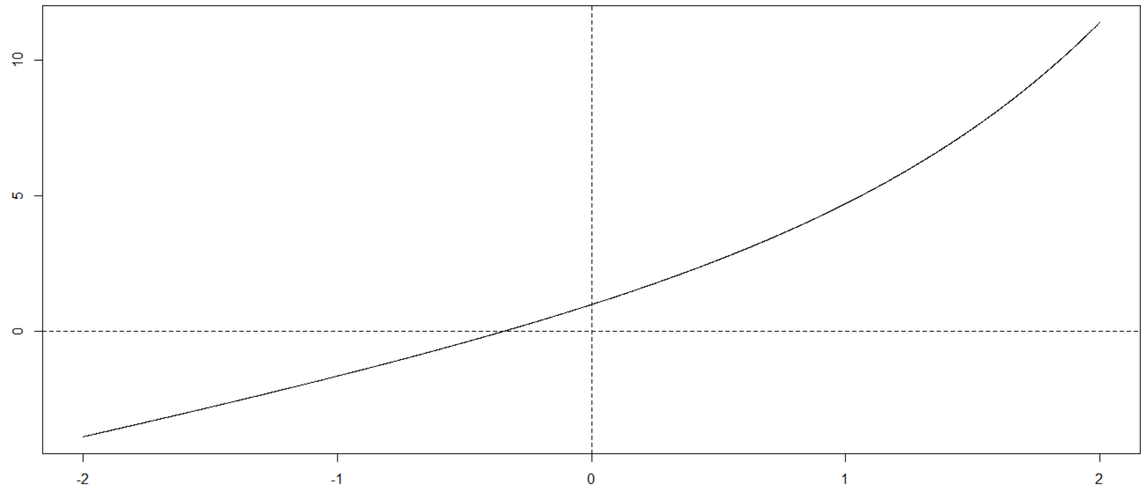
Βλέπουμε ότι $f(-1) = e^{-1} - 2 \cong -1.6321 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$, δηλαδή $f(-1)f(0) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (-1, 0)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στον $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα ρ είναι μοναδική.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{e^x}{2}.$$

Επομένως, ορίζουμε $\phi(x) = -\frac{e^x}{2} \Rightarrow x_{n+1} = -\frac{e^{x_n}}{2}$. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = -\frac{e^x}{2} < 0$, οπότε $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 0} |\phi'(x)| = |\phi'(0)| = \frac{1}{2} < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi([-1, 0]) = [\phi(0), \phi(-1)] = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{e^{-1}}{2}\right] \cong [-0.5, -0.1839] \subseteq [-1, 0].$$



Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho \in (-1,0)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [-1,0]$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(0) = 1$ και $f'(x_0) = f'(0) = 3$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1}{3} < x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(-1) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1,\infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho \in (-1,0) \subseteq (-1,\infty)$ για κάθε $x_0 \geqslant -1$.

2.9 Ιούνιος 2012

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$ και $f''(x) = \frac{e}{x^2} > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(e) = 0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e,\infty)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$. Υπολογίζουμε ότι $f(5) \cong -0.3749 < 0$ και $f(6) \cong 0.1295 > 0$, δηλαδή $f(5)\,f(6) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[5,6]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (5,6) \subseteq (e,\infty)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,e)$ και το πολύ μία ρίζα στο (e,∞), συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ και 1 είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = \frac{e}{x} > 0$, οπότε $\max\limits_{5\leqslant x\leqslant 6}|\phi'(x)| = |\phi'(5)| \cong 0.5437 < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi([5,6]) = [\phi(5),\phi(6)] = [e\ln 5 + 1, e\ln 6 + 1] \cong [5.3749, 5.8705] \subseteq [5,6]\,.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n)

συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho \in (5,6)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [5,6]$.

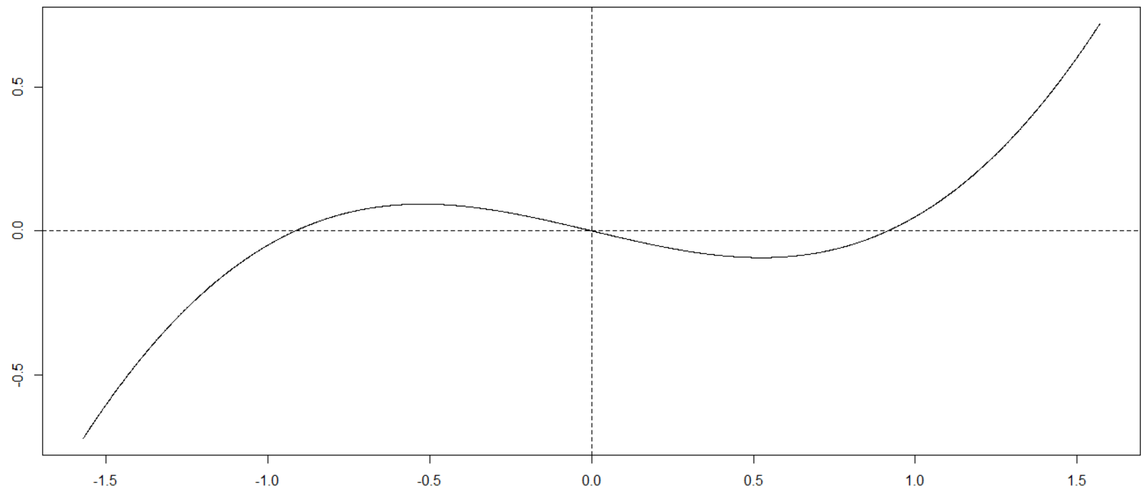
γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(3) = 2 - e\ln 3 \cong -0.9863 < 0$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [3,\infty) \subseteq (e,\infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στη ρίζα $\rho \in (5,6) \subseteq [3,\infty)$ για κάθε $x_0 \geqslant 3$.

2.10 Ιούνιος 2011

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = \sqrt{3} - 2\cos x$ και $f''(x) = 2\sin x$. Παρατηρούμε ότι $f''(x) < 0$ για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $f''(x) > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, δηλαδή η $f(x)$ είναι γνησίως κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και γνησίως κυρτή στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \frac{\pi}{6},$$

οπότε η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.



Υπολογίζουμε ότι $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} - \sqrt{2} \cong -0.0539 < 0$ και $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \cong 0.0817 > 0$, δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{4}\right) f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \subseteq \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή, οπότε $f(-\rho) = -f(\rho) = 0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$, το πολύ μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ και το πολύ μία ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες 0, ρ και $-\rho$ είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos x$, οπότε $\max\limits_{\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}} |\phi'(x)| = \phi'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong 0.8165 < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)=\left[\phi\left(\frac{\pi}{4}\right),\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cong[0.8165,1]\subseteq[0.7854,1.0472]\cong\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right].$$

Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{4}-\sqrt{2}$ και $f'(x_0)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, οπότε:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=\frac{\pi}{4}-\frac{\frac{\pi\sqrt{3}}{4}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cong 0.9549>0.7854\cong x_0.$$

Υπολογίζουμε ότι $f(x_1)\cong 0.0214>0$, οπότε $x_1>\rho$. Ορίζουμε $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n)=x_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $g(\rho)=\rho$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(x)>0$, $f'(x)>0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\rho,\frac{\pi}{2}\right)$. Υπολογίζουμε ότι $g(x_1)>g(\rho)\Rightarrow x_2>\rho$. Εφόσον $f(x_1)>0$ και $f'(x_1)>0$, συμπεραίνουμε ότι $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}<x_1$. Έστω ότι $\rho<x_n<x_{n-1}$ για κάποιο $n\geqslant 2$. Τότε,

$$g\left(\rho\right)<g(x_n)<g(x_{n-1})\Rightarrow\rho<x_{n+1}<x_n.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\rho<x_n<x_{n-1}$ για κάθε $n\geqslant 2$. Δηλαδή, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το ρ, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y\in\mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}\Rightarrow y=y-\frac{f(y)}{f'(y)}\Rightarrow f(y)=0\Rightarrow y=\rho.$$

2.11 Σεπτέμβριος 2010

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x)=2x+\sin x$ και $f''(x)=2+\cos x>0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,\infty)$. Υπολογίζουμε ότι $f\left(0\right)=-1<0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}\cong 2.4674>0$, δηλαδή $f\left(0\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\subseteq(0,\infty)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια, οπότε $f(-\rho)=f(\rho)=0$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty,0)$ και το πολύ μία ρίζα στο $(0,\infty)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ και $-\rho$ είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε την $x_1 = \frac{0+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong -0.0903 < 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{8}$ και $|x_2 - \rho| \leqslant \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2^2} = \frac{\pi}{8}$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi^2}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \cong 0.825 > x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(0) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq (0, \infty)$ για κάθε $x_0 > 0$.

2.12 Ιούνιος 2010

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = (x+1)e^{x+1}$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, \infty)$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{x+1} - 1) = -1 < 0$, οπότε η $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(-\infty, -1]$. Βλέπουμε ότι $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = e^2 - 1 \cong 6.3891 > 0$, δηλαδή $f(0)\,f(1) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (0, 1)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-1, \infty)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα ρ είναι μοναδική.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = -e^{-x-1} < 0$, οπότε $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow x > -1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, 1]$ με $a \in (0, 1)$. Στη συνέχεια,

$$\phi\left([a, 1]\right) = [\phi(1), \phi(a)] = \left[e^{-2}, e^{-a-1}\right] \subseteq [a, 1] \Leftrightarrow a \leqslant e^{-2}.$$

Υπολογίζουμε ότι $f(e^{-2}) \cong -0.5788 < 0 \Rightarrow \rho > e^{-2} \geqslant a$. Επομένως, για $a \in [0, e^{-2}]$, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho \in (e^{-2}, 1) \subseteq (a, 1)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [a, 1]$.

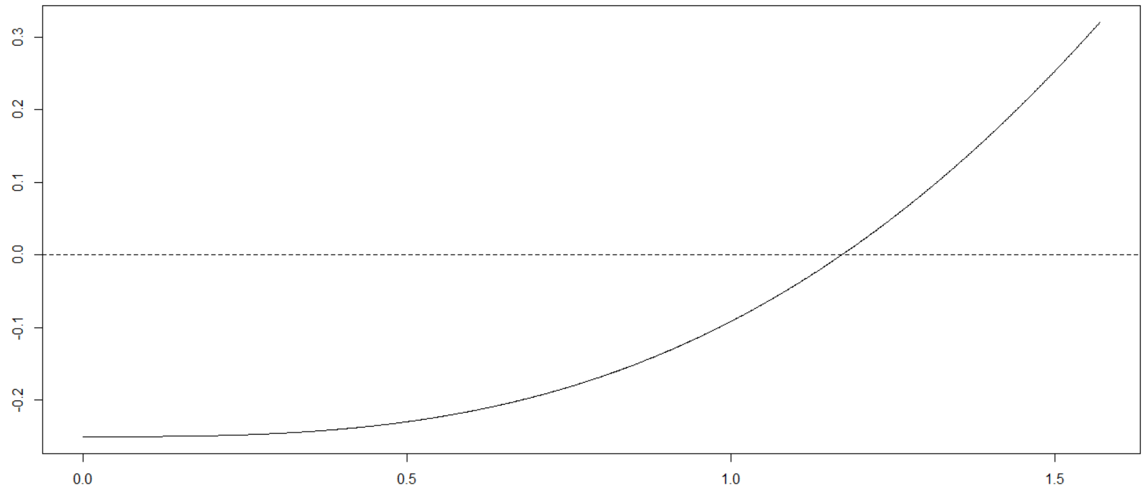
γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - 1$ και $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}} \cong 0.3154 < x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(0) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho \in (0, 1) \subseteq (0, \infty)$ για κάθε $x_0 \geqslant 0$.

2.13 Ιούνιος 2009

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$ και $f''(x) = \sin x$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Έχουμε ότι $f(0) = -\frac{1}{4} < 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{4} \cong 0.3208 > 0$, δηλαδή $f(0)\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα ρ είναι μοναδική στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Εφόσον $f'(x) \geqslant 0$, συμπεραίνουμε ότι δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = \cos x$, οπότε $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow x > 0$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ με $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi\left(\left[a, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\phi(a), \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{4} + \sin a, \frac{5}{4}\right] \subseteq \left[a, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow a \leqslant \rho.$$

Επομένως, για $a \in (0, \rho]$, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi-1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \cong 1.3716 > x_0.$$

Υπολογίζουμε ότι $f(x_1) \cong 0.1414 > 0$, οπότε $x_1 > \rho$. Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho) = \rho$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\rho, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\rho, \frac{\pi}{2}\right)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\rho, \frac{\pi}{2}\right)$. Υπολογίζουμε ότι $g(x_1) > g(\rho) \Rightarrow x_2 > \rho$. Εφόσον $f(x_1) > 0$ και $f'(x_1) > 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x_1$. Έστω ότι $\rho < x_n < x_{n-1}$ για κάποιο $n \geqslant 2$. Τότε,

$$g(\rho) < g(x_n) < g(x_{n-1}) \Rightarrow \rho < x_{n+1} < x_n.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\rho < x_n < x_{n-1}$ για κάθε $n \geqslant 2$. Δηλαδή, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το ρ, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho.$$

2.14 Σεπτέμβριος 2008

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}$, οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$, δηλαδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} > 0$, οπότε η $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι $f(-2) = -\frac{9}{2} < 0$ και $f(-1) = \frac{7}{4} > 0$, δηλαδή $f(-2)f(-1) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, -1]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (-2, -1) \subseteq \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα ρ είναι μοναδική.

β. Υπολογίζουμε ότι $x_1 = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$ και $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{-\frac{3}{2}-1}{2} = -\frac{5}{4}$ και $|x_2 - \rho| \leqslant \frac{-1-(-2)}{2^2} = \frac{1}{4}$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ και $f'(x_0) = f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 6$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{35}{24}.$$

Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho) = \rho$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. Επιπλέον, $f(x) > 0$ για $x \in \left(\rho, -\frac{1}{2}\right)$ και $f(x) < 0$ για $x \in (-\infty, \rho)$, οπότε $g'(x) < 0$ για $x \in \left(\rho, -\frac{1}{2}\right)$ και $g'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, \rho)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\rho, -\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \rho]$. Αν $x_0 \in \left(\rho, -\frac{1}{2}\right)$, τότε $g(x_0) < g(\rho) \Rightarrow x_1 < \rho$. Διαφορετικά, αν $x_0 \in (-\infty, \rho)$, τότε $g(x_0) < g(\rho) \Rightarrow x_1 < \rho$. Επιπλέον, εφόσον $f(x_0) < 0$ και $f'(x_0) > 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$. Έστω ότι $x_{n-1} < x_n < \rho$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$g(x_{n-1}) < g(x_n) < g(\rho) \Rightarrow x_n < x_{n+1} < \rho.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι $x_{n-1} < x_n < \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho.$$

Για $x_0 = -\frac{1}{2}$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

2.15 Ιούνιος 2008

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = e^x - 7$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\ln 7, \infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \ln 7]$. Βλέπουμε ότι $f\left(0\right) = 1 > 0$, $f(1) = e - 7 \cong -4.2817 < 0$, $f(3) = e^3 - 21 \cong -0.9145 < 0$ και $f(4) = e^4 - 28 \cong 26.5982 > 0$, δηλαδή $f\left(0\right) f(1) < 0$, $f(3)f(4) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1]$, $[3, 4]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_1 \in (0, 1)$ και τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_2 \in (3, 4)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(\ln 7, \infty)$ και το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty, \ln 7)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = \frac{e^x}{7} > 0$, οπότε $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |\phi'(x)| = |\phi'(1)| = \frac{e}{7} \cong 0.3883 < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi\left([0, 1]\right) = [\phi(0), \phi(1)] = \left[\frac{1}{7}, \frac{e}{7}\right] \cong [0.1429, 0.3883] \subseteq [0, 1]\,.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho_1 \in (0, 1)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [0, 1]$.

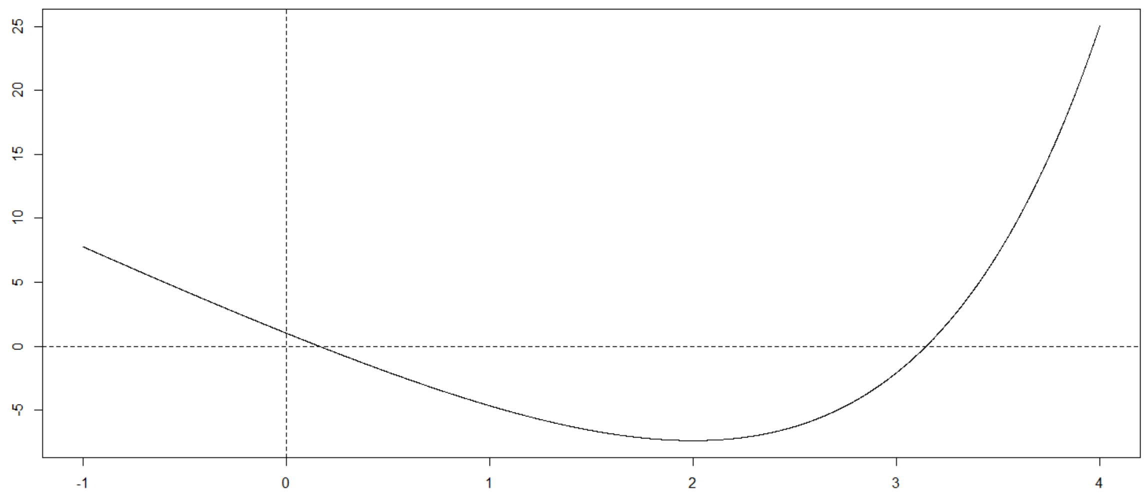
Υπολογίζουμε ότι $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow x < \ln 7 \cong 1.9459 < 3$. Επομένως, δεν υπάρχει διάστημα που να περιέχει τη ρίζα $\rho_2 \in (3, 4)$ και να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της συστολής για την επαναληπτική μέθοδο με $\phi(x) = \frac{e^x}{7}$.

γ. Παρατηρούμε ότι $f''(x) = e^x > 0$, οπότε η $f(x)$ είναι γνησίως κυρτή στον $\mathbb{R}$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι αρνητική, γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο διάστημα $(\rho_1, \ln 7)$, συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x_0 \in (\rho_1, \ln 7)$ θα τέμνει τον άξονα των x σε κάποιο σημείο x_1 με $x_1 < \rho_1$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική, γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο διάστημα $(-\infty, \rho_1)$, συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x_0 < \rho_1$ θα τέμνει τον άξονα των x σε κάποιο σημείο x_1 με $x_0 < x_1 < \rho_1$. Επομένως, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα θα είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ_1, οπότε θα συγκλίνει στο ρ_1 λόγω μοναδικότητας.

Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι αρνητική, γνησίως αύξουσα και γνησίως κυρτή στο διάστημα $(\ln 7, \rho_2)$, συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x_0 \in (\ln 7, \rho_2)$ θα τέμνει τον άξονα των x σε κάποιο σημείο x_1 με $x_1 > \rho_2$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική, γνησίως αύξουσα και γνησίως κυρτή στο διάστημα (ρ_2, ∞), συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x_0 > \rho_2$ θα τέμνει τον άξονα των x σε κάποιο σημείο x_1 με $\rho_2 < x_1 < x_0$. Επομένως, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα θα είναι τελικά γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το ρ_2, οπότε θα συγκλίνει στο ρ_2 λόγω μοναδικότητας.

2.16 Σεπτέμβριος 2007

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = e^x - e^2$ και $f''(x) = e^x > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως κυρτή στον $\mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, \infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.



Βλέπουμε ότι $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - e^2 \cong -4.6708 < 0$ $f(3) = e^3 - 3e^2 \cong -2.0816 < 0$ και $f(4) = e^4 - 4e^2 \cong 25.0419 > 0$, δηλαδή $f(0) f(1) < 0$, $f(3)f(4) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1]$, $[3, 4]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_1 \in (0, 1)$ και τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_2 \in (3, 4)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στο $(2, \infty)$ και το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty, 2)$, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε την $x_1 = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$ και $f\left(\frac{7}{2}\right) \cong 7.2538 > 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[3, \frac{7}{2}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{13}{4}$ και $|x_2 - \rho_2| \leqslant \frac{4-3}{2^2} = \frac{1}{4}$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(3) = e^3 - 3e^2$ και $f'(x_0) = f'(3) = e^3 - e^2$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{e^3 - 3e^2}{e^3 - e^2} \cong 3.164 > x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(2) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n)

που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho_2 \in (3,4) \subseteq (2,\infty)$ για κάθε $x_0 > 2$.

Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho) = \rho$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$. Επιπλέον, $f(x) < 0$ για $x \in (\rho_1, 2)$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, \rho_1)$, οπότε $g'(x) < 0$ για $x \in (\rho_1, 2)$ και $g'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, \rho_1)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\rho_1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \rho_1]$. Αν $x_0 \in (\rho_1, 2)$, τότε $g(x_0) < g(\rho_1) \Rightarrow x_1 < \rho_1$. Διαφορετικά, αν $x_0 \in (-\infty, \rho_1)$, τότε $g(x_0) < g(\rho_1) \Rightarrow x_1 < \rho_1$. Επιπλέον, εφόσον $f(x_0) > 0$ και $f'(x_0) < 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$. Έστω ότι $x_{n-1} < x_n < \rho_1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$g(x_{n-1}) < g(x_n) < g(\rho_1) \Rightarrow x_n < x_{n+1} < \rho_1.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι $x_{n-1} < x_n < \rho_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε περίπτωση, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ_1, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho_1.$$

Για $x_0 = 2$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'(2) = 0$.

2.17 Σεπτέμβριος 2006

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = -e^{-x} - 2 < 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στον $\mathbb{R}$. Βλέπουμε ότι $f(0) = 1 > 0$ και $f(1) = e^{-1} - 2 \cong -1.6321 < 0$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (0,1)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στον $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα ρ είναι μοναδική.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = -\frac{e^{-x}}{2} < 0$, οπότε $\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |\phi'(x)| = |\phi'(0)| = \frac{1}{2} < 1$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi([0,1]) = [\phi(1), \phi(0)] = \left[\frac{e^{-1}}{2}, \frac{1}{2}\right] \cong [0.1839, 0.5] \subseteq [0,1].$$

Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $\rho \in (0,1)$ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in [0,1]$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(1) = e^{-1} - 2$ και $f'(x_0) = f'(1) = -e^{-1} - 2$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{e^{-1} - 2}{-e^{-1} - 2} \cong 0.3107 < x_0.$$

Υπολογίζουμε ότι $f(x_1) \cong 0.1115 > 0$, οπότε $x_1 < \rho$. Ορίζουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Γνωρίζουμε ότι $g(x_n) = x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\rho) = \rho$. Υπολογίζουμε ότι:

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Υπολογίζουμε ότι $f''(x) = e^{-x} > 0$. Γνωρίζουμε ότι $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \rho)$, οπότε $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \rho)$. Δηλαδή, η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \rho]$. Υπολογίζουμε ότι $g(x_1) < g(\rho) \Rightarrow x_2 < \rho$. Εφόσον $f(x_1) > 0$ και $f'(x_1) < 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} > x_1$. Έστω ότι $x_{n-1} < x_n < \rho$ για κάποιο $n \geqslant 2$. Τότε,

$$g(x_{n-1}) < g(x_n) < g(\rho) \Rightarrow x_n < x_{n+1} < \rho.$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $x_{n-1} < x_n < \rho$ για κάθε $n \geqslant 2$. Δηλαδή, η ακολουθία (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από το ρ, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x)$ και $f'(x)$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, υπολογίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y = \rho.$$

2.18 Σεπτέμβριος 2005

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = 3x^2 - 3$, οπότε η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$. Βλέπουμε ότι $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = 3 > 0$, δηλαδή $f(-2)f(-1) < 0$, $f(-1)f(1) < 0$, $f(1)f(2) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[-2, -1]$, $[-1, 1]$ και $[1, 2]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_1 \in (-1, -2)$, τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_2 \in (-1, 1)$ και τουλάχιστον μία ρίζα $\rho_3 \in (1, 2)$. Εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι μοναδικές.

β. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = x^2$, οπότε $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, δηλαδή δεν υπάρχει διάστημα που να περιέχει τη ρίζα $\rho_1 \in (-2, -1)$ και να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της συστολής για τη $\phi(x) = \frac{x^3+1}{3}$.

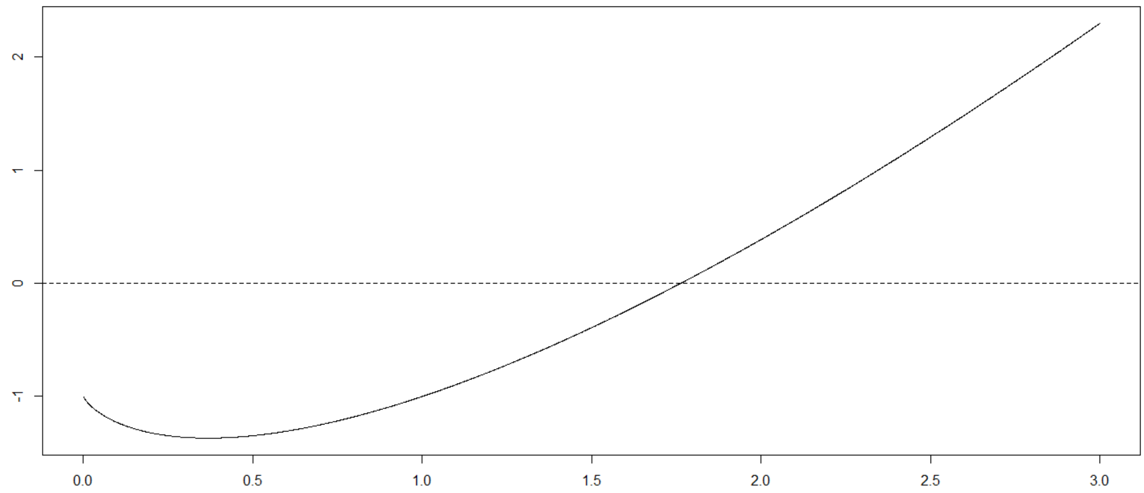
γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ και $f'(x_0) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{30} = \frac{23}{15} > x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho_3 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \subseteq (1, 2)$ για κάθε $x_0 \geqslant \frac{3}{2}$.

2.19 Ιούνιος 2005

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = \ln x + 1$ και $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως κυρτή στον $\mathbb{R}$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1}, \infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-1}]$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x \ln x - 1) = -1$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x \ln x - 1) = \infty$, οπότε η $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο $(0, e^{-1}]$, ενώ έχει μοναδική ρίζα στο (e^{-1}, ∞).



Υπολογίζουμε ότι $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = 2\ln 2 - 1 \cong 0.3863 > 0$, δηλαδή $f(1)\, f(2) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (1, 2) \subseteq (e^{-1}, \infty)$.

β. Υπολογίζουμε την $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right) \cong -0.3918 < 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4}$ και $|x_2 - \rho| \leqslant \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(1) = -1$ και $f'(x_0) = f'(1) = 1$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 > x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(e^{-1}) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(e^{-1}, \infty\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho \in (1, 2) \subseteq \left(e^{-1}, \infty\right)$ για κάθε $x_0 > e^{-1}$. Για $x_0 = e^{-1}$, η μέθοδος του Νεύτωνα δε δουλεύει, αφού $f'(e^{-1}) = 0$.

2.20 Ιούλιος 2004

α. Υπολογίζουμε ότι $f'(x) = e^x + 1 > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στον $\mathbb{R}$. Βλέπουμε ότι $f(-1) = e^{-1} - 1 \cong -0.6321 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$, δηλαδή

$f(0)\,f(1) < 0$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (0,1)$. Εφόσον έχει το πολύ μία ρίζα στον $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα ρ είναι μοναδική.

β. Υπολογίζουμε την $x_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cong 0.1065 > 0$. Επομένως, για τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου της διχοτόμησης δουλεύουμε στο διάστημα $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Υπολογίζουμε ότι $x_2 = \frac{-1-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$ και $|x_2 - \rho| \leqslant \frac{0-(-1)}{2^2} = \frac{1}{4}$.

γ. Υπολογίζουμε ότι $\phi'(x) = -e^x < 0$, οπότε $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$, δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x)$ είναι συστολή σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[a, -\frac{1}{2}\right]$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\phi\left(\left[a, -\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\phi\left(-\frac{1}{2}\right), \phi(a)\right] = \left[-e^{-\frac{1}{2}}, -e^{a}\right] \subseteq \left[a, -\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$a \leqslant -e^{-\frac{1}{2}} \text{ και } -e^{a} \leqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -0.6931 \cong -\ln 2 \leqslant a \leqslant -e^{-\frac{1}{2}} \cong -0.6065.$$

Υπολογίζουμε ότι $f(-\ln 2) \cong -0.1931 < 0$, $f\left(-e^{-\frac{1}{2}}\right) \cong -0.0613 < 0$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cong 0.1065 > 0$, οπότε $\rho \in \left(-e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\right) \subseteq \left(a, -\frac{1}{2}\right)$. Επομένως, για $a \in \left[-\ln 2, -e^{-\frac{1}{2}}\right]$, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο ρ της $\phi(x)$ για κάθε $x_0 \in \left[a, -\frac{1}{2}\right]$.

δ. Υπολογίζουμε ότι $f(x_0) = f(0) = 1$ και $f'(x_0) = f'(0) = 2$, οπότε:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1}{2} < x_0.$$

Γνωρίζουμε ότι $f(-1) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, \infty)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολικής σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα $\rho \in (0,1) \subseteq (-1, \infty)$ για κάθε $x_0 \geqslant 0$.

3 Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Απαλοιφή του Gauss

- Απαιτούμενες πράξεις για την τριγωνοποίηση του πίνακα: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$.
- Απαιτούμενες πράξεις για τις αλλαγές στο δεύτερο μέλος: $\frac{n^2}{2} + O(n)$.
- Απαιτούμενες πράξεις για την οπισθοδρόμηση: $\frac{n^2}{2} + O(n)$.
- Απαιτούμενες θέσεις μνήμης: $n^2 + O(n)$.
- Υπολογισμός αντιστρόφου: Επίλυση της εξίσωσης πινάκων $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$, δηλαδή επίλυση των γραμμικών συστημάτων $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Περιλαμβάνει 1 τριγωνοποίηση, n αλλαγές στα δεύτερη μέλη $\mathbf{e}_i$, n οπισθοδρομήσεις για τον υπολογισμό των $\mathbf{x}_i$ και αποθήκευση των πινάκων $\mathbf{A}, \mathbf{X}$. Δηλαδή, συνολικά $\frac{n^3}{3} + n\cdot\frac{n^2}{2} + n\cdot\frac{n^2}{2} + O(n^2) = \frac{4n^3}{3} + O(n^2)$ πράξεις και $2n^2 + O(n)$ θέσεις μνήμης.

Νόρμες Διανυσμάτων

- $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_n$
- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$
- $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leqslant \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Παραδείγματα Νορμών Διανυσμάτων

- Ευκλείδεια νόρμα: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
- $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

Φυσικές Νόρμες Πινάκων

- $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$
- $\|\mathbf{A}\| \geqslant 0$ και $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}_{n\times n}$
- $\|\lambda\mathbf{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\|$
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$
- $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$
- $\|\mathbf{I}_n\| = 1$

Παραδείγματα Νορμών Πινάκων

- Νόρμα αθροίσματος στηλών: $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
- Νόρμα αθροίσματος γραμμών: $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
- Φασματική νόρμα: $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})}$, όπου $\rho(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})$ η φασματική ακτίνα του $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, δηλαδή η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.
- Frobenius νόρμα: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{nn}^2}$.

Δείκτης Κατάστασης

- $k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| \geqslant \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{I}_n\| = 1$.
- Αν $k(\mathbf{A}) \leqslant 100$, τότε ο $\mathbf{A}$ έχει καλή κατάσταση.
- Αν $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$, τότε $\|\mathbf{A}^{-1}\| \geqslant \max\limits_{i=1,2,\ldots,k} \frac{\|\mathbf{x}_i\|}{\|\mathbf{y}_i\|}$.

3.1 Σεπτέμβριος 2019

α. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & n \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= n\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}\right] = n(\mathbf{I}_n+\mathbf{B}).$$

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{B}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|\mathbf{B}_{ij}| = \frac{1}{n} < 1$. Σύμφωνα με την υπόδειξη, ο πίνακας $\mathbf{I}_n+\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος. Συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}=n(\mathbf{I}_n+\mathbf{B})$ είναι αντιστρέψιμος με $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{n}(\mathbf{I}_n+\mathbf{B})^{-1}$. Υπολογίζουμε ότι $\|\mathbf{A}\|_\infty = n+1$. Πάλι σύμφωνα με την υπόδειξη, παίρνουμε ότι:

$$\|(\mathbf{I}_n+\mathbf{B})^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\|\mathbf{B}\|_\infty} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{n-1} \Rightarrow k_\infty(\mathbf{A}) \leqslant \frac{n+1}{n-1} = 1+\frac{2}{n-1} \leqslant 3.$$

Εφόσον $k_\infty(\mathbf{A}) \ll 100$, ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι σε καλή κατάσταση.

β. Παρατηρούμε ότι ο $\mathbf{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου ερωτήματος με $n=3$, οπότε είναι αντιστρέψιμος με $k_\infty(\mathbf{A}) \leqslant \frac{3+1}{3-1} = 2$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{b}=\mathbf{Ax} \Rightarrow \|\mathbf{b}\|_\infty = \|\mathbf{Ax}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{Ax}=\mathbf{b}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\|\delta\mathbf{b}\|_\infty \Rightarrow$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\|\delta\mathbf{b}\|_\infty \cdot \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = k_\infty(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \leqslant 2\cdot 5\cdot 10^{-7} = 10^{-6}.$$

3.2 Ιούνιος 2019

α. Έστω $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{I}_n+\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{Ex} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{Ex}\| \leqslant \|\mathbf{E}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{E}\| \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{E}\| < 1$. Επομένως, $(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{I}_n + \mathbf{E}$ είναι αντιστρέψιμος. Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1} + \mathbf{E}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{E}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\| = \|\mathbf{I}_n - \mathbf{E}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\| &\leqslant \|\mathbf{I}_n\| + \|\mathbf{E}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\| \\ &\leqslant 1 + \|\mathbf{E}\|\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\| \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{E}\|}.$$

Ο πίνακας $\mathbf{I}_n + \mathbf{E}$ είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με τα προηγούμενα και ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με την υπόθεση. Επομένως, ο πίνακας $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})$ είναι αντιστρέψιμος με $\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})\delta\mathbf{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{B}\delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{x} \overset{\mathbf{B}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{x} \Rightarrow \delta\mathbf{x} = -(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{x} \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{x}\| \leqslant \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{E})^{-1}\|\|\mathbf{E}\|\|\mathbf{x}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{E}\|}\|\mathbf{E}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{E}\|}{1 - \|\mathbf{E}\|}.$$

β. Γνωρίζουμε ότι $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$. Επομένως, ο υπολογισμός του αντιστρόφου του $\mathbf{A}$ είναι ισοδύναμος με την επίλυση της εξίσωσης πινάκων $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}_n$. Έστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ οι στήλες του πίνακα $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ οι στήλες του πίνακα $\mathbf{I}_n$. Αρκεί να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$, δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$ με οπισθοδρόμηση για $i = 1, 2, \ldots, n$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις n αλλαγές στα δεύτερη μέλη $\mathbf{e}_i$ και τις n οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $n \cdot n^2 + O(n^2) = n^3 + O(n^2)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{4n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$. Κατά τις οπισθοδρομήσεις υπολογίζουμε τον πίνακα $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $2n^2 + O(n)$.

3.3 Ιούνιος 2018

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1$. Επομένως, $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} \leqslant \|\mathbf{x}\|.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \delta\mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \overset{\mathbf{A}\ \text{αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| &= \|\mathbf{A}^{-1}(\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}})\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\|\delta\mathbf{b}\| + \|\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \\
&\leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\mu\|\mathbf{b}\| + \|\delta\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\mu\|\mathbf{b}\| + \mu\|\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \\
&= \mu\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \leqslant \mu k(\mathbf{A})\left(\|\mathbf{x}\| + \|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\widetilde{\mathbf{x}}\|} \leqslant \mu k(\mathbf{A})\left(1 + \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\widetilde{\mathbf{x}}\|}\right).$$

β. Παρατηρούμε ότι $\lambda = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$. Θέτουμε $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$ και $\lambda = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{x}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις δύο αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις δύο οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $2n^2 + O(n)$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$ είναι $O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$, ενώ κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.4 Σεπτέμβριος 2017

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε, $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = 0$, οπότε $\|\mathbf{x}\| \leqslant 0 \leqslant 7\|\mathbf{x}\|$, δηλαδή $\|x\| = 0$. Άτοπο, αφού $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. Επομένως, $\mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$, οπότε:

$$\max_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} \|\mathbf{x}\| \leqslant \max_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant 7 \max_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} \|\mathbf{x}\| \Rightarrow 1 \leqslant \|\mathbf{A}\| \leqslant 7.$$

Έστω $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Εφόσον ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, παίρνουμε ότι $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}^{-1}\| = \max_{\|\mathbf{y}\| \leqslant 1} \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\|$. Επομένως,

$$\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant 7\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \Rightarrow \frac{1}{7}\|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{y}\| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{7} \max_{\|\mathbf{y}\| \leqslant 1} \|\mathbf{y}\| \leqslant \max_{\|\mathbf{y}\| \leqslant 1} \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \leqslant \max_{\|\mathbf{y}\| \leqslant 1} \|\mathbf{y}\| \Rightarrow \frac{1}{7} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| \leqslant 1.$$

Γνωρίζουμε ότι $k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$, οπότε:

$$1 \cdot \frac{1}{7} \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| \leqslant 7 \cdot 1 \Rightarrow \frac{1}{7} \leqslant k(\mathbf{A}) \leqslant 7.$$

Συναληθεύοντας με τον γνωστό περιορισμό $k(\mathbf{A}) \geqslant 1$, συμπεραίνουμε ότι $1 \leqslant k(\mathbf{A}) \leqslant 7$. Εφόσον $k(\mathbf{A}) \ll 100$, ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι σε καλή κατάσταση.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A} \text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \cdot \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|} = k(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leqslant 7 \cdot 10^{-7}.$$

β. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Θέτουμε $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1000}$, οπότε $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ με οπισθοδρόμηση. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις δύο αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις δύο οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $2n^2 + O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2) = \frac{10^9}{3} + O(10^6)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και το διάνυσμα $\mathbf{b}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{b}$, ενώ κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{y}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n) = 10^6 + O(10^3)$.

3.5 Ιούνιος 2017

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\mathbf{A} \text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1$. Επομένως, $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = -\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \overset{\mathbf{A}\ \text{αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \Rightarrow$$

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \mu\|\mathbf{A}\| \cdot \|\widetilde{\mathbf{x}}\| = \mu k(\mathbf{A})\|\widetilde{\mathbf{x}}\| \Rightarrow$$
$$\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \mu k(\mathbf{A})\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

β. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{x} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$. Θέτουμε $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$ και $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{w}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{x}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα $\mathbf{B}$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$ για να υπολογίσουμε το ζητούμενο διάνυσμα $\mathbf{y}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις δύο αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις δύο οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $2n^2 + O(n)$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τον πολλαπλασιασμό του πίνακα $\mathbf{B}$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$ είναι $O(n^2)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{x}$, ενώ κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$. Τέλος, αποθηκεύουμε τον πίνακα $\mathbf{B}$ πάνω στον πίνακα $\mathbf{A}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.6 Σεπτέμβριος 2016

α. Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{r} = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \overset{\mathbf{A}\ \text{αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \Rightarrow$$

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\| \Rightarrow \frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\| \cdot \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|} = k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Από την άλλη γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \geqslant \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \Rightarrow \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \Rightarrow \|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \geqslant \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\|} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geqslant \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\|} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{k(\mathbf{A})} \cdot \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

β. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-2}\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Θέτουμε $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}$, δηλαδή $\mathbf{Ay} = \mathbf{z}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ay} = \mathbf{z}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ με οπισθοδρόμηση. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις δύο αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις δύο οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $2n^2 + O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και το διάνυσμα $\mathbf{b}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{b}$, ενώ κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-2}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Επομένως, η επίλυση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι ισοδύναμη με τον υπολογισμό του διανύσματος $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-2}\mathbf{b}$ όπως περιγράφηκε.

Έστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ οι στήλες του πίνακα $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^n$ οι στήλες του πίνακα $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Αρκεί να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{b}_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{b}_i$, δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$ με οπισθοδρόμηση για $i = 1, 2, \ldots, n$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις n αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις n οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $n \cdot n^2 + O(n^2) = n^3 + O(n^2)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{4n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένους τους πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Κατά τις οπισθοδρομήσεις αποθηκεύουμε τον πίνακα $\mathbf{X}$ πάνω στον πίνακα $\mathbf{B}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $2n^2 + O(n)$.

3.7 Ιούνιος 2015

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_n$. Τότε, $\|\mathbf{Ax}\| = 0$, οπότε $2\|\mathbf{x}\| \leqslant 0 \leqslant 10\|\mathbf{x}\|$, δηλαδή $\|x\| = 0$. Άτοπο, αφού $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. Επομένως, $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A}$

είναι αντιστρέψιμος.

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$, οπότε:

$$2 \max_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|\mathbf{x}\| \leqslant \max_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant 10 \max_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|\mathbf{x}\| \Rightarrow 2 \leqslant \|\mathbf{A}\| \leqslant 10.$$

Έστω $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Εφόσον ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, παίρνουμε ότι $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}^{-1}\| = \max\limits_{\|\mathbf{y}\|\leqslant 1} \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\|$. Επομένως,

$$2\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant 10\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \Rightarrow \frac{1}{10}\|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{10} \max_{\|\mathbf{y}\|\leqslant 1} \|\mathbf{y}\| \leqslant \max_{\|\mathbf{y}\|\leqslant 1} \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| \leqslant \frac{1}{2} \max_{\|\mathbf{y}\|\leqslant 1} \|\mathbf{y}\| \Rightarrow \frac{1}{10} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$, οπότε:

$$2 \cdot \frac{1}{10} \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| \leqslant 10 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{5} \leqslant k(\mathbf{A}) \leqslant 5.$$

Συναληθεύοντας με τον γνωστό περιορισμό $k(\mathbf{A}) \geqslant 1$, συμπεραίνουμε ότι $1 \leqslant k(\mathbf{A}) \leqslant 5$. Εφόσον $k(\mathbf{A}) \ll 100$, ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι σε καλή κατάσταση.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Επιπλέον,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow}$$

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b} \Rightarrow \|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \cdot \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|} = k(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leqslant 5u.$$

β. Παρατηρούμε ότι $a = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-3}\mathbf{b} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Θέτουμε $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$ και $a = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{v}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις 3 αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις 3 οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $3n^2 + O(n)$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{v}$ είναι $O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα

$\mathbf{A}$ και τα διανύσματα $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{b}$, κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$ και κατά την τρίτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{w}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.8 Φεβρουάριος 2015

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow \|\mathbf{A}\|_\infty \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}\|_\infty < 1$. Επομένως, $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{I}_n + \mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Γνωρίζουμε ότι:

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1 = \|\mathbf{I}_n\|_\infty = \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty &\leqslant \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty + \|\mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty \\ &\leqslant \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty + \|\mathbf{A}\|_\infty \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty \geqslant \frac{1}{1 + \|\mathbf{A}\|_\infty}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty &\leqslant \|\mathbf{I}_n\|_\infty + \|\mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty \\ &\leqslant 1 + \|\mathbf{A}\|_\infty \|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|_\infty}.$$

β. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 8 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \right] = 8(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}).$$

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\mathbf{A}_{ij}| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{5}{8} < 1$. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, ο πίνακας $\mathbf{I}_n+\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{B} = 8(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})$ είναι αντιστρέψιμος με $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{8}(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}$. Υπολογίζουμε ότι $\|\mathbf{B}\|_\infty = 2+8+2+1 = 13$. Πάλι σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, παίρνουμε ότι:

$$\frac{1}{1+\|\mathbf{A}\|_\infty} \leqslant \|(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\|\mathbf{A}\|_\infty} \Rightarrow \frac{8}{13} \leqslant \|(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{13} \leqslant \|\mathbf{B}^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow 1 \leqslant k_\infty(\mathbf{B}) \leqslant \frac{13}{3}.$$

3.9 Ιούνιος 2012

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1$. Επομένως, $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A}+\delta\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = -\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\cdot\mu\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| = \mu k(\mathbf{A})\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x}+\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})\| &\leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})\| \\ &\leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| \\ &\leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|\cdot\mu\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| + \mu k(\mathbf{A})\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{x}\|}{1-\mu k(\mathbf{A})} \Rightarrow \|\delta\mathbf{x}\| \leqslant \mu k(\mathbf{A})\cdot\frac{\|\mathbf{x}\|}{1-\mu k(\mathbf{A})} \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\mu k(\mathbf{A})}{1-\mu k(\mathbf{A})}.$$

β. Τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)}$, δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{x}^{(i)}$ με οπισθοδρόμηση για $i = 1,2,3,4$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3}+O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις 4 αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις 4 οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $4n^2+O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3}+O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$. Κατά τις οπισθοδρομήσεις αποθηκεύουμε το διάνυσμα $x^{(i)}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{x}^{(i-1)}$.

Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.10 Ιούνιος 2011

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1$. Επομένως, $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = -\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \Rightarrow \|\mathbf{r}\| = \|\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant ||\delta\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \mu\|\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\|.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = -\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \Rightarrow$$

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \mu\|\mathbf{A}\| \cdot \|\widetilde{\mathbf{x}}\| = \mu k(\mathbf{A})\|\widetilde{\mathbf{x}}\|.$$

β. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{y} \in \mathbb{R}$, οπότε $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{y}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{-2}\mathbf{y}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. Επομένως, $a = 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{y}$. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $a = 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{y} = 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$. Θέτουμε $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$, $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$ και $a = 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις δύο αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις δύο οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $2n^2 + O(n)$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$ είναι $O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και τα διανύσματα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{y}$, ενώ κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.11 Σεπτέμβριος 2010

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε, $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = 0$, οπότε $\|x\| = 0$. Άτοπο, αφού $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. Επομένως, $\mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|\mathbf{x}\| = 1$. Έστω $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Εφόσον ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, παίρνουμε ότι $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ και $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$. Επομένως, $\|\mathbf{A}^{-1}\| = \max\limits_{\|\mathbf{y}\|\leqslant 1} \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\| = \max\limits_{\|\mathbf{y}\|\leqslant 1} \|\mathbf{y}\| = 1$, δηλαδή $k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| = 1$.

Γνωρίζουμε ότι:
$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$
Επιπλέον,
$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b} \Rightarrow$$
$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \cdot \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|} = k(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 3.4 \cdot 10^{-4}.$$

β. Θεωρούμε τον ορθογώνιο πίνακα:
$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Έστω $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$. Τότε, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ και $\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2, x_1 - x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, οπότε:
$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\mathbf{x}\|_2.$$

Ισχύει ότι:
$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Επομένως, $\|\mathbf{A}\|_2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \sqrt{\lambda_i(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \sqrt{\lambda_i(\mathbf{I}_2)} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \sqrt{1} = 1$.

3.12 Ιούνιος 2010

α. Βλέπουμε ότι:
$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$
Επιπλέον,
$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{r} = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \Rightarrow$$
$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\| \Rightarrow \frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\| \cdot \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|} = k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$
Από την άλλη, γνωρίζουμε ότι:
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \geqslant \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}.$$

Επιπλέον,
$$\mathbf{r} = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \Rightarrow \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \Rightarrow \|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \geqslant \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\|} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geqslant \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\|} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{k(\mathbf{A})} \cdot \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

β. Για $i = 1, 2,$, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x}_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_i \Rightarrow \|\mathbf{x}_i\|_1 = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_i\|_1 \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_1\|\mathbf{y}_i\|_1 \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \geqslant \frac{\|\mathbf{x}_i\|_1}{\|\mathbf{y}_i\|_1} \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 2} \frac{\|\mathbf{x}_i\|_1}{\|\mathbf{y}_i\|_1}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, οπότε $\|\mathbf{x}_1\|_1 = 2$, $\|\mathbf{y}_1\| = 0.001$, $\|\mathbf{x}_2\|_2 = 5$ και $\|\mathbf{y}_2\| = 1.998$, δηλαδή $\frac{\|\mathbf{x}_1\|_1}{\|\mathbf{y}_1\|_1} = 2000$ και $\frac{\|\mathbf{x}_2\|_1}{\|\mathbf{y}_2\|_1} \cong 2.5025$. Επομένως, $\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \cong \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \frac{\|\mathbf{x}_i\|_1}{\|\mathbf{y}_i\|_1} = 2000$.

Βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{r} = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \Rightarrow$$

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}\|_1 \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_1\|\mathbf{r}\|_1 \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \geqslant \frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{r}\|_1}.$$

Παίρνουμε ότι $\|\mathbf{r}\|_1 = 0.099$ και $\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = (99, -99)^{\mathrm{T}}$, δηλαδή $\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1 = 198$. Επομένως, $\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \geqslant 2000$, δηλαδή $k_1(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_1\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \geqslant 2.001 \cdot 2000 = 4002 \gg 100$. Συνεπώς, η πολύ κακή προσεγγιστική λύση $\widetilde{\mathbf{x}}$ δίνει μικρό υπόλοιπο εξαιτίας της πολύ κακής κατάστασης του γραμμικού συστήματος. Συμπεραίνουμε ότι το υπόλοιπο δεν αποτελεί από μόνο του καλή προσέγγιση του σχετικού σφάλματος στη λύση του γραμμικού συστήματος.

3.13 Ιούνιος 2009

α. Βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\|_\infty = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\|\delta\mathbf{b}\|_\infty \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\|\delta\mathbf{b}\|_\infty \cdot \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = k_\infty(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}.$$

Βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.9999 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0.9999} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.9999 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 & -10000 \\ -9999 & 10000 \end{pmatrix}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \sum\limits_{j=1}^{2} |\mathbf{A}_{ij}| = 2$ και $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 20000$, οπότε $k_\infty(\mathbf{A}) = 40000 \gg 100$. Επιπλέον, βλέπουμε ότι $\mathbf{b} = (1, 0.9998)^{\mathrm{T}}$ και $\widetilde{\mathbf{b}} = (1, 0.8998)^{\mathrm{T}}$, οπότε $\delta\mathbf{b} = \widetilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b} = (0, -0.1)^{\mathrm{T}}$.

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, οπότε $\|\mathbf{b}\|_\infty = 1$ και $\|\delta\mathbf{b}\|_\infty = 0.1$. Επομένως, $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leqslant 4000$. Εφόσον το γραμμικό σύστημα έχει πολύ κακή κατάσταση, είναι λογικό ότι μικρές μεταβολές στο διάνυσμα του δεύτερου μέλους μπορεί να οδηγήσουν σε τεράστιες μεταβολές για τη λύση του γραμμικού συστήματος.

β. Παρατηρούμε ότι $a = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} + \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{v}$. Θέτουμε $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$, $\mathbf{Ay} = \mathbf{x}$, $\mathbf{Az} = \mathbf{u}$, $\mathbf{Aw} = \mathbf{z}$ και $a = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$. Τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{Ax} = \mathbf{v}$, $\mathbf{Ay} = \mathbf{x}$, $\mathbf{Az} = \mathbf{u}$ και $\mathbf{Aw} = \mathbf{z}$, δηλαδή υπολογίζουμε διαδοχικά τα διανύσματα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ και $\mathbf{w}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{u}$ με το διάνυσμα $\mathbf{y}$ και του διανύσματος $\mathbf{w}$ με το διάνυσμα $\mathbf{v}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις 4 αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις 4 οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $4n^2 + O(n)$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τα δύο εσωτερικά γινόμενα που υπολογίσαμε είναι $O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{x}$, ενώ κατά την τέταρτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.14 Σεπτέμβριος 2008

α. Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = -\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \Rightarrow \|\mathbf{r}\| = \|\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\delta\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \mu\|\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\|.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{Ax}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \Rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = -\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \Rightarrow$$

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \mu\|\mathbf{A}\| \cdot \|\widetilde{\mathbf{x}}\| = \mu k(\mathbf{A})\|\widetilde{\mathbf{x}}\|.$$

β. Θέτουμε $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ και $\lambda = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{c}$ με το διάνυσμα $\mathbf{z}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία αλλαγή στο δεύτερο μέλος και τη μία οπισθοδρόμηση που εφαρμόσαμε είναι $n^2 + O(n)$). Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{c}$ με το διάνυσμα $\mathbf{z}$ είναι $O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και τα διανύσματα $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$. Κατά την οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{b}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Θέτουμε $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, οπότε $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, δηλαδή τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ και υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{z}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ με οπισθοδρόμηση. Έχοντας ήδη τριγωνοποιήσει τον πίνακα $\mathbf{A}$, εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, δηλαδή υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ με οπισθοδρόμηση. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις 3 αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις 3 οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $3n^2 + O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και το διάνυσμα $\mathbf{b}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{z}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{b}$, κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$ και κατά την τρίτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{y}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.15 Ιούνιος 2008

α. Υπολογίζουμε ότι $\|\mathbf{U}\|_2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{\lambda_i(\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U})} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{\lambda_i(\mathbf{I}_n)} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{1} = 1$. Γνωρίζουμε ότι ο ορθογώνιος πίνακας $\mathbf{U}$ είναι αντιστρέψιμος με $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}_n$. Επομένως, $\|\mathbf{U}^{-1}\|_2 = \|\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\|_2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{\lambda_i\left(\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{\lambda_i(\mathbf{I}_n)} = 1$. Δηλαδή, $k_2(\mathbf{U}) = \|\mathbf{U}\|_2\|\mathbf{U}^{-1}\|_2 = 1$.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3.$$

Δηλαδή, ο πίνακας $\mathbf{U}$ είναι ορθογώνιος. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, $k_2(\mathbf{U}) = 1$.

Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{U}\|_2\|\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} \leqslant \frac{\|\mathbf{U}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2}.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ο ορθογώνιος πίνακας $\mathbf{U}$ είναι αντιστρέψιμος. Υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v} \overset{\mathbf{U}\mathbf{x}=\mathbf{v}}{\Rightarrow} \mathbf{U}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{v} \overset{\mathbf{U}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\delta\mathbf{v} \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{U}^{-1}\delta\mathbf{v}\|_2 \leqslant \|\mathbf{U}^{-1}\|_2\|\delta\mathbf{v}\|_2 \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leqslant \|\mathbf{U}^{-1}\|_2\|\delta\mathbf{v}\|_2 \cdot \frac{\|\mathbf{U}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = k_2(\mathbf{U})\frac{\|\delta\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = 0.5\cdot 10^{-6}.$$

3.16 Σεπτέμβριος 2007

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1$. Επομένως, $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

β. Βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} \leqslant \|\mathbf{x}\|.$$

Επιπλέον,

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \delta\mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| &= \|\mathbf{A}^{-1}(\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}})\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\|\delta\mathbf{b}\| + \|\delta\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \\
&\leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\mu\|\mathbf{b}\| + \|\delta\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\mu\|\mathbf{b}\| + \mu\|\mathbf{A}\|\|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \\
&= \mu\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\left(\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \leqslant \mu k(\mathbf{A})\left(\|\mathbf{x}\| + \|\widetilde{\mathbf{x}}\|\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \mu k(\mathbf{A})\left(1 + \frac{\|\widetilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}\right).$$

3.17 Σεπτέμβριος 2006

α. Θέτουμε $\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, οπότε παίρνουμε $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{y}$ και $\gamma = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$. Τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, και $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{y}$, δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{w}$ και $\mathbf{v}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{w}$ με το διάνυσμα $\mathbf{x}$ και του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{v}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις δύο αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις δύο οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $2n^2 + O(n)$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τα δύο εσωτερικά γινόμενα που υπολογίσαμε είναι $O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και τα διανύσματα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{z}$, ενώ κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{y}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \overset{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}{\Rightarrow} \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = -\delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow} \delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\|\delta\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow$$
$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|_\infty} \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\|\mathbf{A}\|_\infty\frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} = k(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{|\delta\mathbf{A}_{ij}|}{|\mathbf{A}_{ij}|} \leqslant u \Rightarrow |\delta\mathbf{A}_{ij}| \leqslant u|\mathbf{A}_{ij}| \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\delta|\mathbf{A}_{ij}| \leqslant u\sum_{j=1}^{n}|\mathbf{A}_{ij}| \Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|\delta\mathbf{A}_{ij}| \leqslant u\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|\mathbf{A}_{ij}| \Rightarrow$$

$$\|\delta\mathbf{A}\|_\infty \leqslant u\|\mathbf{A}\|_\infty \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} \leqslant u = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta^{1-t}, & \text{στρογγύλευση} \\ \beta^{1-t}, & \text{αποκοπή} \end{cases}.$$

3.18 Σεπτέμβριος 2005

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow \|\mathbf{A}\|_\infty \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}\|_\infty < 1$. Επομένως, $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{I}_n + \mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}+\mathbf{A}(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n-\mathbf{A}(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{I}_n-\mathbf{A}(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty &\leqslant \|\mathbf{I}_n\|_\infty + \|\mathbf{A}(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty \\ &\leqslant 1 + \|\mathbf{A}\|_\infty\|(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\|(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\|\mathbf{A}\|_\infty}.$$

β. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 1 & \frac{3}{8} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{3}{8} & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 8\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}\right] = 8(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}).$$

Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|\mathbf{A}_{ij}| = \frac{3}{8}+\frac{3}{8} = \frac{3}{4} < 1$. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, ο πίνακας $\mathbf{I}_n+\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{T}=8(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})$ είναι αντιστρέψιμος με $\mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{8}(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}$. Υπολογίζουμε ότι $\|\mathbf{T}\|_\infty=3+8+3=14$. Πάλι σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, παίρνουμε ότι:

$$\|(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{1-\|\mathbf{A}\|_\infty}\Rightarrow\|(\mathbf{I}_n+\mathbf{A})^{-1}\|_\infty\leqslant 4\Rightarrow\|\mathbf{T}^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow k_\infty(\mathbf{T})\leqslant 14\cdot\frac{1}{2}=7.$$

γ. Αρχικά τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{T}$. Για $i=2,3,\ldots,n$, υπολογίζουμε ότι:

$$t_{i,i}=t_{i,i}-\frac{t_{i,i-1}}{t_{i-1,i-1}}\cdot t_{i-1,i},\quad b_i=b_i-\frac{t_{i,i-1}}{t_{i-1,i-1}}\cdot b_{i-1}.$$

Στη συνέχεια, επιλύουμε το γραμμικό σύστημα με οπισθοδρόμηση. Δηλαδή, υπολογίζουμε ότι:

$$x_n=\frac{b_n}{t_{n,n}},\quad x_i=\frac{b_i-t_{i,i+1}x_{i+1}}{t_{i,i}},\quad i=n-1,n-2,\ldots,1.$$

3.19 Ιούνιος 2005

α. Γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}\Rightarrow\|\mathbf{b}\|=\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|\Rightarrow\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\leqslant\frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$\mathbf{r}=\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\overset{\mathbf{b}=\mathbf{A}\mathbf{x}}{\Rightarrow}\mathbf{r}=\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x})\overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow}\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}\Rightarrow$$

$$\|\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|=\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}\|\leqslant\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\|\Rightarrow\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\leqslant\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\|\cdot\frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}=k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι $\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}=(0.001,0.0005,0.00005)^{\mathrm{T}}$. Γνωρίζουμε ότι $\|\mathbf{x}\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, οπότε $\|\mathbf{b}\|_\infty=1$, $\|\mathbf{r}\|_\infty=10^{-6}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty=1$ και $\|\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|_\infty=0.001$. Επομένως,

$$k_\infty(\mathbf{A})\geqslant\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}\cdot\frac{\|\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{r}\|_\infty}=\frac{0.001}{1}\cdot\frac{1}{10^{-6}}=1000\gg 100.$$

γ. Θέτουμε $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{y}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, οπότε παίρνουμε $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{u}$, $\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{v}$ και $\gamma=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}+\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$. Τριγωνοποιούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$. Εφαρμόζουμε απαλοιφή του Gauss για να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{u}$, και $\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{v}$, δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ με οπισθοδρόμηση. Τέλος, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{x}$ με το διάνυσμα $\mathbf{w}$ και του διανύσματος $\mathbf{w}$ με το διάνυσμα $\mathbf{y}$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τη μία τριγωνοποίηση που εφαρμόσαμε είναι $\frac{n^3}{3}+O(n^2)$, ενώ το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τις δύο αλλαγές στα δεύτερη μέλη και τις δύο οπισθοδρομήσεις που εφαρμόσαμε είναι $2n^2+O(n)$. Το απαιτούμενο πλήθος πράξεων για τα δύο εσωτερικά γινόμενα που υπολογίσαμε είναι $O(n)$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος πράξεων είναι $\frac{n^3}{3}+O(n^2)$. Έχουμε αποθηκευμένο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και τα διανύσματα

$\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$. Κατά την πρώτη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{u}$, ενώ κατά τη δεύτερη οπισθοδρόμηση αποθηκεύουμε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{v}$. Επομένως, το συνολικό απαιτούμενο πλήθος θέσεων μνήμης είναι $n^2 + O(n)$.

3.20 Ιούλιος 2004

α. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ και $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$. Τότε,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{A}\| \geqslant 1.$$

Άτοπο, αφού $\|\mathbf{A}\| < 1$. Επομένως, $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$, δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{I}_n + \mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| = \|\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| &\leqslant \|\mathbf{I}_n\| + \|\mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| \\ &\leqslant 1 + \|\mathbf{A}\|\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|}.$$

Επίσης,

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow \mathbf{I}_n - (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{I}_n - (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})^{-1}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|}{1 - \|\mathbf{A}\|}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \overset{\mathbf{A}\text{ αντιστρέψιμος}}{\Rightarrow}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| &\leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| \\ &\leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|\|(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\|(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|}.$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|\|(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\| \cdot \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|}.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{E}\| = \|\mathbf{A}\|\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{\|\mathbf{A}\|}\|\mathbf{E}\| = k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{A}\|}.$$

Τέλος, υπολογίζουμε ότι:

$$1 - \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\| \geqslant 1 - k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{A}\|} \Rightarrow \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|} \leqslant \left(1 - k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\|} \leqslant k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{A}\|}\left(1 - k(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right)^{-1}.$$

4 Παρεμβολή

Πολυώνυμα Παρεμβολής

- Πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{j\neq i}\frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

- Παράσταση σε μορφή Νεύτωνα:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

- Έστω ότι $f \in C^{n+1}[a,b]$. Τότε, για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $\xi = \xi(x) \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

  Δηλαδή,

$$\|f - p\|_\infty \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|.$$

  Αν τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ είναι ισαπέχοντα, τότε:

$$\|f - p\|_\infty \leqslant \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}\|f^{(n+1)}\|_\infty, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Τμηματικά Γραμμικές Συναρτήσεις

- Ισχύει ότι $s_1 \in C^0[a,b]$ και $s_1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}x$ για $x \in [x_i, x_{i+1}]$.
- Έστω ότι $f \in C^2[a,b]$. Τότε,

$$\|f - s_1\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty, \quad h = \max_{i=0,1,\ldots,n-1}|x_{i+1} - x_i|.$$

Τμηματικά Κυβικές Συναρτήσεις

- Ισχύει ότι $s_3 \in \mathbb{P}_3$ σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$.
- Ισχύει ότι $s_3 \in C^2[a, b]$.
- Ισχύει ότι $s_3(x_i) = f(x_i)$ για $i = 0, 1, \ldots, n$.

4.1 Σεπτέμβριος 2019

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-4)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x) = a_1 + a_2 x + a_2(x-4).$$

$$\begin{aligned} p(0) &= f(0) \Rightarrow a_0 = 1, \\ p(4) &= f(4) \Rightarrow a_0 + 4a_1 = 5e^{-4} \Rightarrow a_1 = \frac{5e^{-4}-1}{4}, \\ p'(0) &= f'(0) \Rightarrow a_1 - 4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{5e^{-4}-1}{16} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{5e^{-4}-1}{16} x(x-4) + \frac{5e^{-4}-1}{4} x + 1 = \frac{5e^{-4}-1}{16} x^2 + 1.$$

Υπολογίζουμε ότι $\varepsilon\,(2) = f\,(2) - p\,(2) = -\frac{4}{3} f'''(\xi)$. Για $x \in [0, 4]$, βλέπουμε ότι:

$$f'(x) = -xe^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x-1)e^{-x} \Rightarrow f'''(x) = -(x-2)e^{-x} \Rightarrow f^{(4)}(x) = (x-3)e^{-x},$$

δηλαδή η $f'''(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 3]$. Παρατηρούμε ότι $f'''\,(0) = 2$, $f'''\,(3) = -e^{-3} \cong -0.05$ και $f'''(4) = -2e^{-4} \cong -0.04$. Επομένως, για $\xi \in (0, 4)$, παίρνουμε ότι:

$$-e^{-3} \leqslant f'''(\xi) < 2 \Rightarrow -\frac{8}{3} < \varepsilon\,(2) \leqslant \frac{4e^{-3}}{3} \Rightarrow 0 \leqslant |\varepsilon(2)| < \frac{8}{3},$$

αφού $\frac{4e^{-3}}{3} \cong 0.07 < 2.67 \cong \frac{8}{3}$. Από την άλλη, υπολογίζουμε ότι:

$$\varepsilon(2) = f(2) - p(2) = 3e^{-2} - \frac{5e^{-4}-1}{4} - 1 \cong -0.37 > -\frac{8}{3}.$$

β. Έστω $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$q'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2, \quad q''(x) = 2a_2 + 6a_3 x.$$

Απαιτούμε $s(x) \in C^2[-1, 1]$. Επομένως,

$$s''(1) = 2 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} s(x) = \lim_{x \to 0^+} s(x) \Rightarrow q(0) = c + 1 \Rightarrow a_0 = 2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} s'(x) = \lim_{x\to 0^+} s'(x) \Rightarrow q'(0) = 2c \Rightarrow a_1 = 2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} s''(x) = \lim_{x\to 0^+} s''(x) \Rightarrow q''(0) = 2c \Rightarrow 2a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 1,$$

$$q''(-1) = s''(-1) \Rightarrow 2a_2 - 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2.$$

4.2 Ιούνιος 2019

α. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού. Το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στην $f(x)$ στα 5 σημεία $x_i = i$ για $i = 0, 1, 2, 3, 4$ θα είναι κι αυτό τετάρτου βαθμού. Επομένως, θα ταυτίζεται αναγκαστικά με τη συνάρτηση $f(x)$.

β. Προφανώς ισχύει ότι $\varepsilon\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ υπάρχει $\xi = \xi(x) \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2),$$

δηλαδή $\varepsilon(1) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{24}$. Για $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, υπολογίζουμε ότι:

$$f^{(3)}(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x}, \quad f^{(4)}(x) = 2 - \frac{1}{x^2},$$

δηλαδή η $f^{(3)}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Παρατηρούμε ότι $f^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $f^{(3)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - 2 \cong 0.83$ και $f^{(3)}(2) = \frac{5}{2}$. Επομένως, για $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, παίρνουμε ότι:

$$2\sqrt{2} - 2 \leqslant f'''(\xi) < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{12} \leqslant \varepsilon(1) < \frac{5}{48}.$$

γ. Εφόσον το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $-2, -1, 0, 1, 2$ δε γίνεται να ταυτίζεται με την f, συμπεραίνουμε ότι $\max\limits_{-2\leqslant x\leqslant 2} |f(x) - p(x)| > 0$. Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι ένα τμηματικά γραμμικό πολυώνυμο και συνεχής στο $[-2, 2]$. Με άλλα λόγια, ταυτίζεται με τη γραμμική spline παρεμβολής $s_1(x)$ στα σημεία $-2, -1, 0, 1, 2$. Επομένως, $\max\limits_{-2\leqslant x\leqslant 2} |f(x) - s_1(x)| = 0$. Απαιτούμε $s_3(x) \in C^2[-2, 2]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$, οπότε $f(x) \notin C^2[-2, 2]$. Με άλλα λόγια, η $f(x)$ δεν ταυτίζεται με την κυβική spline παρεμβολής $s_3(x)$ στα σημεία $-2, -1, 0, 1, 2$. Επομένως,

$\max\limits_{-2\leqslant x\leqslant 2}|f(x)-s_3(x)|>0$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $\max\limits_{-2\leqslant x\leqslant 2}|f(x)-p_0(x)|=1$. Επομένως, η γραμμική spline παρεμβολής $s_1(x)$ δίνει το μικρότερο μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο διάστημα $[-2,2]$.

4.3 Ιούνιος 2018

α. Έστω $p(x)=a_0+a_1(x+1)+a_2x(x+1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p(-1)=f(-1)\Rightarrow a_0=0,$$

$$p(0)=f(0)\Rightarrow a_0+a_1=1\Rightarrow a_1=1,$$

$$p(1)=f(1)\Rightarrow a_0+2a_1+2a_2=0\Rightarrow a_2=-1\Rightarrow$$

$$p(x)=-x(x+1)+x+1=-x^2+1.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in[-1,1]$ υπάρχει $\xi=\xi(x)\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varepsilon(x)=f(x)-p(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\,(x+1)\,(x-0)(x-1),$$

δηλαδή $\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}f^{(3)}(\xi)$. Για $x\in[-1,1]$, υπολογίζουμε ότι:

$$f^{(3)}(x)=(x^2+6x+5)e^x,\quad f^{(4)}(x)=(x^2+8x+11)e^x>0,$$

δηλαδή η $f^{(3)}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Επομένως,

$$-1<\xi<1\Rightarrow f^{(3)}\,(-1)<f^{(3)}(\xi)<f^{(3)}(1)\Rightarrow$$

$$0<f^{(3)}(\xi)<12e\Rightarrow-\frac{3e}{4}<\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)<0.$$

β. Έστω $p(x)=a+b(x+1)+c(x+1)^2+d(x+1)^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x)=b+2c(x+1)+3d(x+1)^2,\quad p''(x)=2c+6d(x+1).$$

Απαιτούμε $s(x)\in C^2[-2,2]$. Επομένως,

$$\lim_{x\to-1^-}s(x)=\lim_{x\to-1^+}s(x)\Rightarrow p(-1)=-1\Rightarrow a=-1,$$

$$\lim_{x\to-1^-}s'(x)=\lim_{x\to-1^+}s'(x)\Rightarrow p'(-1)=0\Rightarrow b=0,$$

$$\lim_{x\to-1^-}s''(x)=\lim_{x\to-1^+}s''(x)\Rightarrow p''(-1)=0\Rightarrow 2c=0\Rightarrow c=0,$$

$$\lim_{x\to 1^-}s(x)=\lim_{x\to 1^+}s(x)\Rightarrow p(1)=1\Rightarrow -1+8d=1\Rightarrow d=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to 1^-} s'(x) = \lim_{x\to 1^+} s'(x) \Rightarrow p'(1) = 0 \Rightarrow 12d = 0 \Rightarrow d = 0.$$

Άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια κυβική spline.

4.4 Σεπτέμβριος 2017

α. Έστω $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p_2(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = -1,$$

$$p_2(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1,$$

$$p_2(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2a_2 = e^2 \Rightarrow a_2 = \frac{e^2-1}{2} \Rightarrow$$

$$p_2(x) = \frac{e^2-1}{2}\cdot x(x-1) + x - 1 = \frac{e^2-1}{2}\cdot x^2 + \frac{3-e^2}{2}\cdot x - 1.$$

Προφανώς, ισχύει ότι $\varepsilon(1) = f(1) - p_2(1) = 0$. Επιπλέον, υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + c_1 = xe^x + c_1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int \left(xe^x + c_1\right)dx = \int xe^x dx + c_1 x = xe^x - \int e^x dx + c_1 x \\ &= xe^x - e^x + c_1 x + c_2 = (x-1)e^x + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$f(0) = -1 \Rightarrow -1 + c_2 = -1 \Rightarrow c_2 = 0,$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = (x-1)e^x.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - p_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}} - \frac{e^2-1}{8} - \frac{3-e^2}{4} + 1 = \frac{e^2+3}{8} - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}}.$$

β. Έστω $p(x) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x) = b + 2c(x+1) + 3d(x+1)^2, \quad p''(x) = 2c + 6d(x+1).$$

Απαιτούμε $s(x) \in C^2[-2,0]$. Επομένως,

$$\lim_{x\to -1^-} s(x) = \lim_{x\to -1^+} s(x) \Rightarrow p(-1) = 1 \Rightarrow a = 1,$$

$$\lim_{x\to -1^-} s'(x) = \lim_{x\to -1^+} s'(x) \Rightarrow p'(-1) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$\lim_{x\to -1^-} s''(x) = \lim_{x\to -1^+} s''(x) \Rightarrow p''(-1) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0,$$

$$p''(-2) = s''(-2) \Rightarrow 2c - 6d = -2 \Rightarrow d = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + 1 \Rightarrow s(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1)^3 + 1, & -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 1, & -1 < x \leqslant 0 \end{cases}.$$

4.5 Ιούνιος 2017

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2 x(x+1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p(-1) = f(-1) \Rightarrow a_0 = 0,$$

$$p(0) = f(0) \Rightarrow a_0 + a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1,$$

$$p(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$p(x) = -\frac{1}{2} \cdot x(x+1) + x + 1 = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 1.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) - p(x) = \begin{cases} -\frac{x^2+x}{2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{x^2-x}{2}, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) - p'(x) = \begin{cases} -\frac{2x+1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{2x-1}{2}, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) - p'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \text{ ή } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{2}.$$

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) - p\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p(x)| = \frac{1}{8}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$s_1(x) = f(-1) + \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} [x - (-1)] = x + 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0,$$

$$s_1(x) = f(0) + \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}(x - 0) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$s_1(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Απαιτούμε $s_3(x) \in C^2[-1,1]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f''(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f''(x)$, οπότε $f(x) \notin C^2[-1,1]$. Επομένως, η κυβική spline παρεμβολής για την f στα σημεία -1, 0 και 1 δε συμπίπτει με την f.

4.6 Σεπτέμβριος 2016

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-4)$. Υπολογίζουμε ότι $p'(x) = a_1 + a_2(2x-5)$ και $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Επομένως,

$$p(1) = f(1) \Rightarrow a_0 = 2,$$

$$p(4) = f(4) \Rightarrow a_0 + 3a_1 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3},$$

$$p'(1) = f'(1) \Rightarrow a_1 - 3a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$p(x) = -\frac{1}{9}\cdot(x-1)(x-4) + \frac{2}{3}(x-1) + 2 = \frac{-x^2+11x+8}{9}.$$

Υπολογίζουμε ότι $\varepsilon(2) = f(2) - p(2) = -\frac{1}{3}f'''(\xi)$. Βλέπουμε ότι:

$$f''(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Επομένως, για $\xi \in (1,4)$, παίρνουμε ότι:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{\xi} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} < \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{5}{2}} < 1 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{32} < f'''(\xi) < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < \varepsilon(2) < -\frac{1}{128}.$$

β. Έστω $p(x) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x) = b + 2c(x+1) + 3d(x+1)^2, \quad p''(x) = 2c + 6d(x+1).$$

Απαιτούμε $s(x) \in C^2[-2,0]$. Επομένως,

$$\lim_{x\to -1^-} s(x) = \lim_{x\to -1^+} s(x) \Rightarrow p(-1) = 1 \Rightarrow a = 1,$$

$$\lim_{x\to -1^-} s'(x) = \lim_{x\to -1^+} s'(x) \Rightarrow p'(-1) = 3 \Rightarrow b = 3,$$

$$\lim_{x\to -1^-} s''(x) = \lim_{x\to -1^+} s''(x) \Rightarrow p''(-1) = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3,$$

$$p''(0) = s''(0) \Rightarrow 2c + 6d = 0 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow$$

$$p(x) = 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - (x+1)^3.$$

4.7 Ιούνιος 2015

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2x(x+1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p(-1) = f(-1) \Rightarrow a_0 = 1,$$

$$p(0) = f(0) \Rightarrow a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1,$$

$$p(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 \Rightarrow$$

$$p(x) = x(x+1) - (x+1) + 1 = x^2.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) - p(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} - x^2, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) - p'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} - 2x, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) - p'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{-x}} + 2x = 0 \text{ ή } \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x = 0 \Leftrightarrow -4x\sqrt{-x} = 1 \text{ ή } 4x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$(-x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \text{ ή } x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \text{ ή } x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι:

$$f\left(-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) - p\left(-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) = f\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) - p\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[6]{2}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \Rightarrow$$

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p(x)| = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$s(x) = f(-1) + \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)}[x - (-1)] = 1 + (0-1)(x+1) = -x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0,$$

$$s(x) = f(0) + \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}(x - 0) = 0 + (1-0)x = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$s(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases} = |x|.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) - s(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + x, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} - x, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) - s'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} + 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) - s'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{-x}} + 1 = 0 \text{ ή } \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{-x} = \frac{1}{2} \text{ ή } \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ ή } x = \frac{1}{4}.$$

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι:

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) - s\left(-\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) - s\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - s(x)| = \frac{1}{4} < \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

4.8 Φεβρουάριος 2015

α. Έστω $p(x) \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f(x) = x$ στα σημεία $x_i = i$ για $i = 0, 1, \ldots, n$. Γνωρίζουμε ότι:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} i L_i(x).$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in [0, n]$ υπάρχει $\xi = \xi(x) \in (0, n)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Όμως, $f^{(n+1)}(x) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$. Επομένως, $p(x) = f(x) \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} i L_i(x) = x$.

β. Προφανώς ισχύει ότι $\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) - p_3\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ υπάρχει $\xi = \xi(x) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varepsilon(x) = f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 0)(x - 1),$$

δηλαδή $\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{f^{(3)}(\xi)}{24}$. Για $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, υπολογίζουμε ότι:

$$f^{(3)}(x) = (x+1)e^x > 0, \quad f^{(4)}(x) = (x+2)e^x > 0,$$

δηλαδή η $f^{(3)}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Επομένως,

$$-\frac{1}{2} < \xi < 1 \Rightarrow f^{(3)}\left(-\frac{1}{2}\right) < f^{(3)}(\xi) < f^{(3)}(1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} < f^{(3)}(\xi) < 2e \Rightarrow -\frac{e}{12} < \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) < -\frac{1}{48}e^{-\frac{1}{2}}.$$

γ. Έστω $p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2, \quad p''(x) = 2c + 6d(x-1).$$

Απαιτούμε $s(x) \in C^2[0, 2]$. Επομένως,

$$\lim_{x \to 1^-} s(x) = \lim_{x \to 1^+} s(x) \Rightarrow p(1) = 1 \Rightarrow a = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^-} s'(x) = \lim_{x \to 1^+} s'(x) \Rightarrow p'(1) = 1 \Rightarrow b = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^-} s''(x) = \lim_{x \to 1^+} s''(x) \Rightarrow p''(1) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0,$$

$$p''(2) = s''(2) \Rightarrow 2c + 6d = 2 \Rightarrow d = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + (x-1) + 1 \Rightarrow s(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{3}(x-1)^3 + x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}.$$

4.9 Ιούνιος 2012

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2 x(x+1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p(-1) = f(-1) \Rightarrow a_0 = 0,$$

$$p(0) = f(0) \Rightarrow a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

$$p(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2+x}{2}.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) - p(x) = \begin{cases} -\frac{x^2+x}{2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{x^2-x}{2}, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) - p'(x) = \begin{cases} -\frac{2x+1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{2x-1}{2}, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) - p'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \text{ ή } 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{2}.$$

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) - p\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p(x)| = \frac{1}{8}.$$

β. Απαιτούμε $s(x) \in C^2[-1,1]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 0^-} f''(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f''(x)$, οπότε $f(x) \notin C^2[-1,1]$. Επομένως, η κυβική spline παρεμβολής για την f στα σημεία -1, 0 και 1 δε συμπίπτει με την f.

4.10 Ιούνιος 2011

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-2)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = 1,$$

$$p(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + a_1 = -4 \Rightarrow a_1 = -5,$$

$$p(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2a_2 = -3 \Rightarrow a_2 = 3,$$

$$p(3) = f(3) \Rightarrow a_0 + 3a_1 + 6a_2 + 6a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = 1 \Rightarrow$$

$$p(x) = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) - 5x + 1 = x^3 - 6x + 1.$$

Υπολογίζουμε ότι $p'(x) = 3x^2 - 6$ και $p''(x) = 6x > 0$ για κάθε $x \in (0,3)$. Βλέπουμε ότι $p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$, δηλαδή το πολυώνυμο παρεμβολής παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \sqrt{2}$ με τιμή $p(\sqrt{2}) = \sqrt{8} - 6\sqrt{2} + 1 = 1 - 4\sqrt{2}$.

β. Απαιτούμε $s(x) \in C^2[0,4]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$s'(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 3(x-1)^2, & 1 < x < 2 \\ 3(x-3)^2, & 2 < x < 3 \\ 0, & 3 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow s''(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 6(x-1), & 1 < x < 2 \\ 6(x-3), & 2 < x < 3 \\ 0, & 3 < x < 4 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 2^-} s''(x) \neq \lim_{x \to 2^+} s''(x)$, οπότε $s(x) \notin C^2[0,4]$. Επομένως, η συνάρτηση $s(x)$ δεν είναι η κυβική spline παρεμβολής για την f στα σημεία 0, 1, 2, 3 και 4.

4.11 Σεπτέμβριος 2010

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-\varepsilon) + a_3 x^2(x-\varepsilon)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x) = a_1 + a_2 x + a_2(x-\varepsilon) + a_3 x^2 + 2a_3 x(x-\varepsilon).$$

$$p(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0,$$

$$p(\varepsilon) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1\varepsilon = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\lim_{x \to 0^-} \phi'(x) = \lim_{x \to 0^+} \phi'(x) \Rightarrow p'(0) = 0 \Rightarrow a_1 - \varepsilon a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

$$\lim_{x \to \varepsilon^-} \phi'(x) = \lim_{x \to \varepsilon^+} \phi'(x) \Rightarrow p'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{2}{\varepsilon^3} \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{x}{\varepsilon} + \frac{x(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \frac{2x^2(x-\varepsilon)}{\varepsilon^3} = \frac{3x^2}{\varepsilon^2} - \frac{2x^3}{\varepsilon^3} \Rightarrow$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0 \\ \frac{3x^2}{\varepsilon^2} - \frac{2x^3}{\varepsilon^3}, & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon \\ 1, & \varepsilon < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) - p(x) = \frac{2x^3 - 3\varepsilon x^2 + \varepsilon^2 x}{\varepsilon^3} \Rightarrow f'(x) - p'(x) = \frac{6x^2 - 6\varepsilon x + \varepsilon^2}{\varepsilon^3}.$$

$$f'(x) - p'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6\varepsilon x + \varepsilon^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \varepsilon \text{ ή } x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \varepsilon.$$

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι:

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\cdot\varepsilon\right)-p\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\cdot\varepsilon\right)=\frac{2(3-\sqrt{3})^2-18(3-\sqrt{3})^2+36(3-\sqrt{3})}{216}=\frac{\sqrt{3}}{18},$$

$$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\cdot\varepsilon\right)-p\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\cdot\varepsilon\right)=-\frac{\sqrt{3}}{18}\Rightarrow$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p(x)|=\frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι ανεξάρτητο του ε.

γ. Απαιτούμε $\phi(x)\in C^2[-1,1]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$\phi'(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ \frac{6x}{\varepsilon^2}-\frac{6x^2}{\varepsilon^3}, & 0<x<\varepsilon\\ 0, & \varepsilon<x<1\end{cases}\Rightarrow\phi''(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ \frac{6}{\varepsilon^2}-\frac{12x}{\varepsilon^3}, & 0<x<\varepsilon\\ 0, & \varepsilon<x<1\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\phi''(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\phi''(x)$ και $\lim\limits_{x\to\varepsilon^-}\phi''(x)\neq\lim\limits_{x\to\varepsilon^+}\phi''(x)$, οπότε $\phi(x)\notin C^2[0,4]$. Επομένως, η συνάρτηση $\phi(x)$ δεν είναι η κυβική spline παρεμβολής για την f στα σημεία -1, 0, ε και 1.

4.12 Ιούνιος 2010

α. Έστω $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x(x-1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p_2(0)=f(0)\Rightarrow a_0=1,$$

$$p_2(1)=f(1)\Rightarrow a_0+a_1=1\Rightarrow a_1=0,$$

$$p_2(2)=f(2)\Rightarrow a_0+2a_1+2a_2=3\Rightarrow a_2=1\Rightarrow$$

$$p_2(x)=x(x-1)+1=x^2-x+1.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x)-p_2(x)=\begin{cases}x-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -x^2+3x-2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow f'(x)-p_2'(x)=\begin{cases}1-2x, & 0<x<1\\ -2x+3, & 1<x<2\end{cases}.$$

$$f'(x)-p_2'(x)=0\Leftrightarrow 1-2x=0 \text{ ή } 3-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ ή } x=\frac{3}{2}.$$

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-p_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad f\left(\frac{3}{2}\right)-p_2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow\max_{0\leqslant x\leqslant 2}|f(x)-p_2(x)|=\frac{1}{4}.$$

β. Είδαμε ότι $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2}|f(x)-p_2(x)|=\frac{1}{4}$. Απαιτούμε $s_3(x)\in C^2[0,2]$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ 2, & 1<x<2\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)$, οπότε $f(x)\notin C^2[0,2]$. Με άλλα λόγια, η $f(x)$ δεν ταυτίζεται με την κυβική spline παρεμβολής $s_3(x)$ στα σημεία 0, 1 και 2. Επομένως, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2}|f(x)-s_3(x)|>0$. Τέλος, παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι ένα τμηματικά γραμμικό πολυώνυμο και συνεχής στο $[0,2]$. Με άλλα λόγια, ταυτίζεται με τη γραμμική spline παρεμβολής $s_1(x)$ στα σημεία 0, 1, και 2. Επομένως, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2}|f(x)-s_1(x)|=0$.

γ. Έστω $p(x)\in\mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f(x)=1$ στα σημεία $x_i=i$ για $i=0,1,\ldots,n$. Γνωρίζουμε ότι:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)L_i(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x).$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in[0,n]$ υπάρχει $\xi=\xi(x)\in(0,n)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Όμως, $f^{(n+1)}(x)=0$ για κάθε $n\geqslant 0$. Επομένως, $p(x)=f(x)\Rightarrow\sum\limits_{i=0}^{n}L_i(x)=1$.

4.13 Ιούνιος 2009

α. Γνωρίζουμε ότι $p_{n-1}^{(0)}(x_i)=f(x_i)$ για $i=0,1,\ldots,n-1$. Επιπλέον, $p_{n-1}^{(n)}(x_i)=f(x_i)$ για $i=1,2,\ldots,n$. Για $i=1,2,\ldots,n-1$, υπολογίζουμε ότι:

$$p_n(x_i)=\frac{x_n-x_i}{x_n-x_0}p_{n-1}^{(0)}(x_i)+\frac{x_i-x_0}{x_n-x_0}p_{n-1}^{(n)}(x_i)=\frac{x_n-x_i}{x_n-x_0}f(x_i)+\frac{x_i-x_0}{x_n-x_0}f(x_i)=f(x_i),$$

$$p_n(x_0)=\frac{x_n-x_0}{x_n-x_0}p_{n-1}^{(0)}(x_0)+\frac{x_0-x_0}{x_n-x_0}p_{n-1}^{(n)}(x_0)=f(x_0),$$

$$p_n(x_n)=\frac{x_n-x_n}{x_n-x_0}p_{n-1}^{(0)}(x_n)+\frac{x_n-x_0}{x_n-x_0}p_{n-1}^{(n)}(x_n)=f(x_n).$$

Λόγω της μοναδικότητας, το $p_n(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της $f(x)$ στα σημεία $x_0,x_1,\ldots,x_n$.

β. Ορίζουμε:

$$s(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x\leqslant -1\\ a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3, & -1<x\leqslant 0\\ a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3, & 0<x<1\\ 0, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$s'(x)=\begin{cases}0, & -2<x<-1\\ b_1+2c_1x+3d_1x^2, & -1<x<0\\ b_2+2c_2x+3d_2x^2, & 0<x<1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}\Rightarrow s''(x)=\begin{cases}0, & -2<x<-1\\ 2c_1+6d_1x, & -1<x<0\\ 2c_2+6d_2x, & 0<x<1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}.$$

Απαιτούμε:

$$\lim_{x\to0^-}s(x)=\lim_{x\to0^+}s(x)=s(0)=1\Rightarrow a_1=a_2=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}s'(x)=\lim_{x\to0^+}s'(x)\Rightarrow b_1=b_2,$$

$$\lim_{x\to0^-}s''(x)=\lim_{x\to0^+}s''(x)\Rightarrow c_1=c_2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}s''(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}s''(x)\Rightarrow 2c_1-6d_1=0\Rightarrow c_1=3d_1\\ \lim\limits_{x\to1^-}s''(x)=\lim\limits_{x\to1^+}s''(x)\Rightarrow 2c_2+6d_2=0\Rightarrow c_2=-3d_2\end{array}\right\}\overset{c_1=c_2}{\Rightarrow}d_1=-d_2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}s'(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}s'(x)\Rightarrow b_1-2c_1+3d_1=0\\ \lim\limits_{x\to1^-}s'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}s'(x)\Rightarrow b_2+2c_2+3d_2=0\end{array}\right\}\underset{d_1=-d_2}{\overset{b_1=b_2,\,c_1=c_2}{\Rightarrow}}2c_1=3d_1\overset{c_1=3d_1}{\Rightarrow}$$

$$c_1=c_2=d_1=d_2=0\underset{b_2+2c_2+3_2=0}{\overset{b_1-2c_1+3d_1=0}{\Rightarrow}}b_1=b_2=0,$$

$$\lim_{x\to-1^-}s(x)=\lim_{x\to-1^+}s(x)\Rightarrow a_1-b_1+c_1-d_1=0\Rightarrow1=0.$$

Άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια κυβική spline παρεμβολής ως προς τη διαμέριση $\{-2,-1,0,1,2\}$ του διαστήματος $[-2,2]$.

4.14 Σεπτέμβριος 2008

α. Έστω $p_2(x)=a_0+a_1(x+1)+a_2x(x+1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p_2(-1)=f(-1)\Rightarrow a_0=1,$$

$$p_2(0)=f(0)\Rightarrow a_0+a_1=0\Rightarrow a_1=-1,$$

$$p_2(1)=f(1)\Rightarrow a_0+2a_1+2a_2=1\Rightarrow a_2=1\Rightarrow$$

$$p_2(x)=x(x+1)-(x+1)+1=x^2.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in[-1,1]$ υπάρχει $\xi=\xi(x)\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varepsilon(x)=f(x)-p_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x+1)(x-0)(x-1),$$

δηλαδή $\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}f^{(3)}(\xi)$. Υπολογίζουμε ότι $f^{(3)}(x)=-x^2e^{1-x}$ και $f^{(4)}(x)=x(x-2)e^{1-x}$, δηλαδή η $f^{(3)}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Βλέπουμε ότι $f^{(3)}(0)=0$, $f^{(3)}(-1)=-e^2 \cong -7.39$ και $f^{(3)}(1)=-1$. Επομένως,

$$-1<\xi<1 \Rightarrow -e^2<f^{(3)}(\xi)<0 \Rightarrow 0<\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{e^2}{16}.$$

β. Έστω $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x)=b+2cx+3dx^2, \quad p''(x)=2c+6dx.$$

Απαιτούμε $s(x)\in C^2[-1,1]$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^-} s(x)=\lim_{x\to 0^+} s(x) \Rightarrow p(0)=-1 \Rightarrow a=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} s'(x)=\lim_{x\to 0^+} s'(x) \Rightarrow p'(0)=3 \Rightarrow b=3,$$

$$\lim_{x\to 0^-} s''(x)=\lim_{x\to 0^+} s''(x) \Rightarrow p''(0)=-6 \Rightarrow 2c=-6 \Rightarrow c=-3,$$

$$p''(-1)=s''(-1) \Rightarrow 2c-6d=0 \Rightarrow d=-1 \Rightarrow$$

$$p(x)=-x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow$$

$$s(x)=\begin{cases} -x^3-3x^2+3x-1, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ (x-1)^3, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}.$$

4.15 Ιούνιος 2008

α. Έστω $p_3(x)=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)(x-2)+a_3(x-1)(x-2)(x-3)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p_3(1)=f(1) \Rightarrow a_0=-2,$$

$$p_3(2)=f(2) \Rightarrow a_0+a_1=4 \Rightarrow a_1=-2,$$

$$p_3(3)=f(3) \Rightarrow a_0+2a_1+2a_2=6 \Rightarrow a_2=6,$$

$$p_3(4)=f(4) \Rightarrow a_0+3a_1+6a_2+6a_3=34 \Rightarrow a_3=1 \Rightarrow$$

$$p_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+6(x-1)(x-2)-2(x-1)-2=x^3-9x+6.$$

Υπολογίζουμε ότι $p'(x)=3x^2-9$ και $p''(x)=6x>0$ για κάθε $x\in(0,3)$. Βλέπουμε ότι $p'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$, δηλαδή το πολυώνυμο παρεμβολής παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\sqrt{3}$.

β. Παρατηρούμε ότι η g είναι τμηματικά γραμμικό πολυώνυμο και συνεχής στο $[0,3]$. Με άλλα λόγια, ταυτίζεται με τη γραμμική spline παρεμβολής $s_1(x)$ στα σημεία $0,1,2,3$. Επομένως, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 3}|g(x)-s_1(x)|=0$.

4.16 Σεπτέμβριος 2007

α. Έστω $p_2(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p_2'(x) = a_1 + a_2(x-1) + a_2(x-2).$$

$$p_2(1) = f(1) \Rightarrow a_0 = 2,$$

$$p_2(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + a_1 = 17 \Rightarrow a_1 = 15,$$

$$p_2'(1) = f'(1) \Rightarrow a_1 - a_2 = 4 \Rightarrow a_2 = 11 \Rightarrow$$

$$p_2(x) = 11(x-1)(x-2) + 15(x-1) + 2 = 11x^2 - 18x + 9.$$

Υπολογίζουμε ότι $\varepsilon\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - p\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{48}f'''(\xi)$. Βλέπουμε ότι:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f'''(x) = 24x.$$

Επομένως, για $\xi \in (1,2)$, παίρνουμε ότι:

$$24 < f'''(\xi) < 48 \Rightarrow -1 < \varepsilon\left(\frac{3}{2}\right) < -\frac{1}{2}.$$

β. Έστω $p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p'(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2, \quad p''(x) = 2c + 6d(x-1).$$

Απαιτούμε $s(x) \in C^2[0,2]$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 1^-} s(x) = \lim_{x\to 1^+} s(x) \Rightarrow p(1) = 1 \Rightarrow a = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^-} s'(x) = \lim_{x\to 1^+} s'(x) \Rightarrow p'(1) = 3 \Rightarrow b = 3,$$

$$\lim_{x\to 1^-} s''(x) = \lim_{x\to 1^+} s''(x) \Rightarrow p''(1) = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3,$$

$$p''(2) = s''(2) \Rightarrow 2c + 6d = 0 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow$$

$$p(x) = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3 \Rightarrow$$

$$s(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}.$$

4.17 Σεπτέμβριος 2006

α. Έστω $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της $f(x) = 1$ στα σημεία $x_i = i$ για $i = 0, 1, \ldots, n$. Γνωρίζουμε ότι:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in [0, n]$ υπάρχει $\xi = \xi(x) \in (0, n)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Όμως, $f^{(n+1)}(x) = 0$ για κάθε $n \geqslant 0$. Επομένως, $p(x) = f(x) \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.

β. Ορίζουμε:

$$s(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3, & 0 < x \leqslant 1 \\ a_2 + b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$s'(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ b_1 + 2c_1(x-1) + 3d_1(x-1)^2, & 0 < x < 1 \\ b_2 + 2c_2(x-1) + 3d_2(x-1)^2, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$s''(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 2c_1 + 6d_1(x-1), & 0 < x < 1 \\ 2c_2 + 6d_2(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}.$$

Απαιτούμε:

$$\lim_{x \to 1^-} s(x) = \lim_{x \to 1^+} s(x) = s(1) = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^-} s'(x) = \lim_{x \to 1^+} s'(x) \Rightarrow b_1 = b_2,$$

$$\lim_{x \to 1^-} s''(x) = \lim_{x \to 1^+} s''(x) \Rightarrow c_1 = c_2,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} s''(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} s''(x) \Rightarrow 2c_1 - 6d_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 3d_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} s''(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} s''(x) \Rightarrow 2c_2 + 6d_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -3d_2 \end{array}\right\} \overset{c_1=c_2}{\Rightarrow} d_1 = -d_2,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} s'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} s'(x) \Rightarrow b_1 - 2c_1 + 3d_1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} s'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} s'(x) \Rightarrow b_2 + 2c_2 + 3d_2 = 0 \end{array}\right\} \underset{d_1=-d_2}{\overset{b_1=b_2,\, c_1=c_2}{\Rightarrow}} 2c_1 = 3d_1 \overset{c_1=3d_1}{\Rightarrow}$$

$$c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0 \underset{b_2+2c_2+3_2=0}{\overset{b_1-2c_1+3d_1=0}{\Rightarrow}} b_1 = b_2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} s(x) = \lim_{x\to 0^+} s(x) \Rightarrow a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = 0 \Rightarrow 1 = 0.$$

Άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια κυβική spline.

4.18 Σεπτέμβριος 2005

α. Γνωρίζουμε ότι $p_{n-1}^{(0)}(x_i) = y_i$ για $i = 0, 1, \ldots, n-1$ και $p_{n-1}^{(n)}(x_i) = y_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Για $i = 1, 2, \ldots, n-1$, υπολογίζουμε ότι:

$$p_n(x_i) = \frac{x_n - x_i}{x_n - x_0} p_{n-1}^{(0)}(x_i) + \frac{x_i - x_0}{x_n - x_0} p_{n-1}^{(n)}(x_i) = \frac{x_n - x_i}{x_n - x_0} y_i + \frac{x_i - x_0}{x_n - x_0} y_i = y_i,$$

$$p_n(x_0) = \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} p_{n-1}^{(0)}(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0} p_{n-1}^{(n)}(x_0) = y_0,$$

$$p_n(x_n) = \frac{x_n - x_n}{x_n - x_0} p_{n-1}^{(0)}(x_n) + \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} p_{n-1}^{(n)}(x_n) = y_n.$$

Λόγω μοναδικότητας, το $p_n(x)$ είναι το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στα $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

β. Ορίζουμε:

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & 2 < x \leqslant 4 \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$s'(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow s''(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 2c + 6d(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 4 \end{cases}.$$

Απαιτούμε:

$$\lim_{x\to 1^-} s''(x) = \lim_{x\to 1^+} s''(x) \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0,$$

$$\lim_{x\to 2^-} s''(x) = \lim_{x\to 2^+} s''(x) \Rightarrow 2c + 6d = 0 \Rightarrow d = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} s'(x) = \lim_{x\to 1^+} s'(x) \Rightarrow b = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} s(x) = \lim_{x\to 1^+} s(x) \Rightarrow a = 0,$$

$$\lim_{x\to 2^-} s(x) = \lim_{x\to 2^+} s(x) \Rightarrow a = 1.$$

Άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια κυβική spline.

4.19 Ιούνιος 2005

α. Έστω $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p_2(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = 0,$$

$$p_2(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + a_1 = -1 \Rightarrow a_1 = -1,$$

$$p_2(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1 \Rightarrow$$

$$p_2(x) = x(x-1) - x = x^2 - 2x.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in [0,2]$ υπάρχει $\xi = \xi(x) \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varepsilon(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-0)(x-1)(x-2),$$

δηλαδή $\varepsilon\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{16}f^{(3)}(\xi)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f^{(3)}(x) = (4-x^2)e^{1-x}, \quad f^{(4)}(x) = (x^2-2x-4)e^{1-x} < 0,$$

δηλαδή η $f^{(3)}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$. Βλέπουμε ότι $f^{(3)}(0) = 4e$ και $f^{(3)}(2) = 0$. Επομένως,

$$0 < \xi < 2 \Rightarrow 0 < f^{(3)}(\xi) < 4e \Rightarrow -\frac{e}{4} < \varepsilon\left(\frac{3}{2}\right) < 0.$$

β. Έστω $s_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Υπολογίζουμε ότι:

$$s_1'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2, \quad s_1''(x) = 2a_2 + 6a_3x.$$

Απαιτούμε $s(x) \in C^2[-1,1]$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^-} s(x) = \lim_{x\to 0^+} s(x) \Rightarrow s_1(0) = -c-1 \Rightarrow a_0 = -c-1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} s'(x) = \lim_{x\to 0^+} s'(x) \Rightarrow s_1'(0) = 3c \Rightarrow a_1 = 3c,$$

$$\lim_{x\to 0^-} s''(x) = \lim_{x\to 0^+} s''(x) \Rightarrow s_1''(0) = -6c \Rightarrow 2a_2 = -6c \Rightarrow a_2 = -3c,$$

$$s_1''(-1) = s''(-1) \Rightarrow 2a_2 - 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -c \Rightarrow$$

$$s_1(x) = -cx^3 - 3cx^2 + 3cx - c - 1 \Rightarrow s(x) = \begin{cases} -cx^3 - 3cx^2 + 3cx - c - 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ c(x-1)^3 - 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

4.20 Ιούλιος 2004

α. Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + a_3x(x-1)(x-2)$. Υπολογίζουμε ότι:

$$p(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = 7,$$

$$p(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + a_1 = -10 \Rightarrow a_1 = -17,$$

$$p(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2a_2 = -9 \Rightarrow a_2 = 9,$$

$$p(3) = f(3) \Rightarrow a_0 + 3a_1 + 6a_2 + 6a_3 = 34 \Rightarrow a_3 = 4 \Rightarrow$$

$$p(x) = 4x(x-1)(x-2) + 9x(x-1) - 17x + 7 = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 7.$$

Υπολογίζουμε ότι $p'(x) = 12x^2 - 6x - 18$. Βλέπουμε ότι $p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, δηλαδή το πολυώνυμο παρεμβολής παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{3}{2}$.

β. Παρατηρούμε ότι η g είναι τμηματικά γραμμικό πολυώνυμο και συνεχής στο $[-1,1]$. Με άλλα λόγια, ταυτίζεται με τη γραμμική spline παρεμβολής $s_1(x)$ στα σημεία $-1,0,1$. Επομένως, $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |g(x) - s_1(x)| = 0$.

5 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Απλός Τύπος του Τραπεζίου

- $Q_2^T(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$
- $\left|R_2^T(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$

Σύνθετος Τύπος του Τραπεζίου

- $Q_{n+1}^T(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$
- $\left|R_{n+1}^T(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$

Απλός Τύπος του Simpson

- $Q_3^S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$
- $\left|R_3^S(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2^4\cdot 180}\|f^{(4)}\|_\infty$

Σύνθετος Τύπος του Simpson

- $Q_{n+1}^S(f) = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2)\cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$ με n άρτιο
- $\left|R_{n+1}^S(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$

Τύποι των Newton-Cotes

- $Q_{n+1}(f) = \sum\limits_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$.
- Ο βαθμός ακριβείας είναι τουλάχιστον n, δηλαδή $R_{n+1}\left(x^k\right) = 0$ για $k = 0,1,\ldots,n$.

5.1 Σεπτέμβριος 2019

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = -e^{-x}\left(\cos x + \sin x\right) \Rightarrow f''(x) = 2e^{-x}\sin x > 0 \Rightarrow f'''(x) = 2e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right).$$

Παρατηρούμε ότι η $f''(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$. Επομένως, $\|f''\|_\infty = f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}$. Ζητάμε:

$$\frac{1}{12n^2}e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} \leqslant 10^{-6} \Rightarrow n \geqslant \frac{1000}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{8}}2^{\frac{1}{4}} \cong 231.8 \Rightarrow n = 232.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = 2 = 1 + 1,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow \tau_1 + \tau_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = -\tau_1,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2dx = \tau_1^2 + \tau_2^2 \Rightarrow 2\tau_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \tau_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \overset{\tau_2=-\tau_1}{\Rightarrow} \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \overset{\tau_2=-\tau_1}{=} \tau_1^3 + \tau_2^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = \tau_1^4 + \tau_2^4.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3.

5.2 Ιούνιος 2019

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{2^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = -(x-1)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x-2)e^{-x} > 0 \Rightarrow f'''(x) = -(x-3)e^{-x},$$

δηλαδή η $f''(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, 4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$. Επομένως,

$$\|f''\|_\infty = f''(3) = 2e^{-3} \Rightarrow |R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{4}{3e^3n^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{2^5}{180n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f^{(4)}(x) = (x-4)e^{-x} < 0 \Rightarrow f^{(5)}(x) = -(x-5)e^{-x} > 0,$$

δηλαδή η $f^{(4)}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$. Επομένως,

$$\|f^{(4)}\|_\infty = |f^{(4)}(2)| = 2e^{-2} \Rightarrow |R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{16}{45e^2n^2}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = w \cdot 1 + w \cdot 1 \Rightarrow 2w = 2 \Rightarrow w = 1,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow \tau_1 + \tau_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = -\tau_1,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \tau_1^2 + \tau_2^2 \Rightarrow 2\tau_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \tau_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \overset{\tau_2 = -\tau_1}{\Rightarrow} \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \overset{\tau_2 = -\tau_1}{=} \tau_1^3 + \tau_2^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = \tau_1^4 + \tau_2^4.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3.

5.3 Ιούνιος 2018

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{12n^2} \|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$$

Παρατηρούμε ότι η $f''(x)$ είναι γνησίως γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$. Επομένως,

$$\|f''\|_\infty = |f''(1)| = 2 \Rightarrow |R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{2}{12 \cdot 100^2} \cong 1.67 \cdot 10^{-5}.$$

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-2}^{0} 1 dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 2 \Rightarrow w_3 = 2 - w_1 - w_2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-2}^{0} x dx = w_1 \cdot (-2) + w_2 \cdot (-1) + w_3 \cdot 0 \Rightarrow -2w_1 - w_2 = -2 \Rightarrow w_2 = 2 - 2w_1,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-2}^{0} x^2 dx = w_1 \cdot (-2)^2 + w_2 \cdot (-1)^2 + w_3 \cdot 0^2 \Rightarrow$$

$$4w_1 + w_2 = \frac{8}{3} \overset{w_2 = 2 - 2w_1}{\Rightarrow} w_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow w_2 = \frac{4}{3} \overset{w_3 = 2 - w_1 - w_2}{\Rightarrow} w_3 = \frac{1}{3}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-2}^{0} x^3 dx = -4 = w_1 \cdot (-2)^3 + w_2 \cdot (-1)^3 + w_3 \cdot 0^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-2}^{0} x^4 dx = \frac{32}{5} \neq \frac{20}{3} = w_1 \cdot (-2)^4 + w_2 \cdot (-1)^4 + w_3 \cdot 0^3.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3. Παρατηρούμε ότι αυτός ο τύπος ταυτίζεται με τον απλό τύπο του Simpson για $a = -2$ και $b = 0$.

5.4 Σεπτέμβριος 2017

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \|f''\|_\infty = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ζητάμε:

$$\frac{\pi^2}{48n^2} \leqslant 10^{-6} \Rightarrow n \geqslant \frac{1000\pi}{4\sqrt{3}} \cong 453.4498 \Rightarrow n = 454.$$

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 1. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^1 1 \cdot e^x dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 = e - 1,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^1 xe^x dx = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 \Rightarrow w_2 = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \Rightarrow$$

$$w_2 = e - (e-1) \Rightarrow w_2 = 1, \quad w_1 = e - 1 - w_1 \Rightarrow w_1 = e - 2.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2 \neq 1 = w_1 \cdot 0^2 + w_2 \cdot 1^2.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 1.

5.5 Ιούνιος 2017

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{1}{180n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}^S(f) = 0,$$

$$f(x) = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}^S(f) = 0,$$

$$f(x) = x^4 + 7x^2 + 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow |R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{2}{15n^4},$$

$$f(x) = e^{-x} + \frac{x^5}{120} + 1 \Rightarrow f^{(4)} = e^{-x} + x > 0 \Rightarrow f^{(5)}(x) = 1 - e^{-x} > 0,$$

δηλαδή η $f^{(4)}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Επομένως,

$$\|f^{(4)}\|_\infty = f^{(4)}(1) = e^{-1} + 1 \Rightarrow |R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{e^{-1}+1}{180n^4}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = w_1 \cdot (-\tau) + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot \tau \Rightarrow (w_3 - w_1)\tau = 0 \overset{\tau > 0}{\Rightarrow} w_1 = w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = w_1 \cdot \tau^2 + w_2 \cdot 0^2 + w_3 \cdot \tau^2 \Rightarrow (w_1 + w_3)\tau^2 = \frac{2}{3} \overset{w_1 = w_3}{\Rightarrow} w_1\tau^2 = \frac{1}{3},$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = w_1 \cdot (-\tau)^3 + w_2 \cdot 0^3 + w_3 \cdot \tau^3 \Rightarrow (w_3 - w_1)\tau^3 = 0,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4 dx = w_1 \cdot \tau^4 + w_2 \cdot 0^4 + w_3 \cdot \tau^4 \Rightarrow (w_1 + w_3)\tau^4 = \frac{2}{5} \overset{w_1 = w_3}{\Rightarrow} w_1\tau^4 = \frac{1}{5} \overset{w_1\tau^2 = \frac{1}{3}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{3}\tau^2 = \frac{1}{5} \overset{\tau > 0}{\Rightarrow} \tau = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{3}{5}w_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{5}{9} \overset{w_1 + w_2 + w_3 = 2}{\Rightarrow} w_2 = \frac{8}{9}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0 \overset{w_1 = w_3}{=} (w_3 - w_1)\tau^5 = w_1 \cdot (-\tau)^5 + w_2 \cdot 0^5 + w_3 \cdot \tau^5,$$

$$f(x) = x^6 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{2}{7} \neq \frac{6}{25} = 2w_1\tau^6 = w_1 \cdot \tau^6 + w_2 \cdot 0^6 + w_3 \cdot \tau^6.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 5.

5.6 Σεπτέμβριος 2016

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}^T(f) = 0,$$

$$f(x) = x \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}^T(f) = 0,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow |R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{6n^2},$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \Rightarrow \|f''\|_\infty = f''(1) = 12 \Rightarrow |R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1 dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = w_1 \cdot \tau + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot (-\tau) \Rightarrow (w_1 - w_3)\tau = 0 \overset{\tau \neq 0}{\Rightarrow} w_1 = w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = w_1 \cdot \tau^2 + w_2 \cdot 0^2 + w_3 \cdot \tau^2 \Rightarrow (w_1 + w_3)\tau^2 = \frac{2}{3} \overset{w_1 = w_3}{\Rightarrow}$$

$$w_1 = w_3 = \frac{1}{3\tau^2} \overset{w_1 + w_2 + w_3 = 2}{\Rightarrow} w_2 = 2 - \frac{2}{3\tau^2}.$$

Για $\tau = 1$, υπολογίζουμε ότι $w_1 = w_3 = \frac{1}{3}$ και $w_2 = \frac{4}{3}$, οπότε:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{f(-1)}{3} + \frac{4f(0)}{3} + \frac{f(1)}{3}.$$

Παρατηρούμε ότι αυτός ο τύπος ταυτίζεται με τον απλό τύπο του Simpson για $a = -1$ και $b = 1$.

5.7 Ιούνιος 2015

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f''(x) = (x+2)e^x \Rightarrow \|f''\|_\infty = 3e \Rightarrow |R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{e}{4n^2}.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = w_1 \cdot \tau + w_2 \cdot (-\tau) \Rightarrow (w_1 - w_2)\tau = 0 \overset{\tau \neq 0}{\Rightarrow} w_1 = w_2 \overset{w_1+w_2=2}{\Rightarrow} w_1 = w_2 = 1,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2dx = w_1 \cdot \tau^2 + w_2 \cdot \tau^2 \Rightarrow (w_1 + w_2)\tau^2 = \frac{2}{3} \overset{w_1=w_2=1}{\Rightarrow} \tau^2 = \frac{1}{3} \overset{\tau>0}{\Rightarrow} \tau = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \overset{w_1=w_2}{=} (w_1 - w_2)\tau^3 = w_1 \cdot \tau^3 + w_2 \cdot (-\tau)^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = 2w_1\tau^4 = w_1 \cdot \tau^4 + w_2 \cdot \tau^4.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3.

5.8 Φεβρουάριος 2015

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{2^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}^T(f) = 0,$$

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}^T(f) = 0,$$

$$f(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow |R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{4}{3n^2} \overset{n=20}{\cong} 0.0033.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = \frac{1}{2} \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + w_2 = 2 \Rightarrow w_2 = \frac{3}{2},$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = \frac{1}{2} \cdot \tau_1 + w_2 \cdot \tau_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \tau_1 + \frac{3}{2} \cdot \tau_2 = 0 \Rightarrow \tau_1 = -3\tau_2,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \tau_1^2 + w_2 \cdot \tau_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \tau_1^2 + \frac{3}{2} \cdot \tau_2^2 = \frac{2}{3} \overset{\tau_1=-3\tau_2}{\Rightarrow}$$

$$\frac{12\tau_2^2}{2} = \frac{2}{3} \overset{\tau_2>0}{\Rightarrow} \tau_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \tau_1 = -1.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \neq -\frac{4}{9} = \frac{1}{2} \cdot \tau_1^3 + \frac{3}{2} \cdot \tau_2^3.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 2.

5.9 Ιούνιος 2012

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{1}{180n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow R_{n+1}^S(f) = 0.$$

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 1. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1 dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = w_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + w_2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow$$

$$(w_1 - w_2)\frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 \overset{w_1+w_2=2}{\Rightarrow} w_1 = w_2 = 1.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + w_2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \overset{w_1=w_2}{=} w_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + w_2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = w_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + w_2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3.

5.10 Ιούνιος 2011

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{2^5}{180n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 + 2x^2 + 7 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 3 \Rightarrow |R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{8}{15n^4} \overset{n=20}{\cong} 3.33 \cdot 10^{-6}.$$

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1+w_2+w_3=2,$$

$$f(x)=x \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = w_1 \cdot a + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot (-a) \Rightarrow (w_1-w_3)a=0 \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} w_1=w_3,$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2dx = w_1 \cdot a^2 + w_2 \cdot 0^2 + w_3 \cdot a^2 \Rightarrow (w_1+w_3)a^2=\frac{2}{3} \overset{w_1=w_3}{\Rightarrow}$$

$$w_1=w_3=\frac{1}{3a^2} \overset{w_1+w_2+w_3=2}{\Rightarrow} w_2 = 2-\frac{2}{3a^2}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1 \cdot (-a)^3 + w_2 \cdot 0^3 + w_3 \cdot a^3,$$

$$f(x)=x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5}, \quad w_1 \cdot a^4 + w_2 \cdot 0^4 + w_3 \cdot a^4 = \frac{2a^2}{3}.$$

Αν $a \neq \sqrt{\frac{3}{5}}$, τότε $\frac{2a^2}{3} \neq \frac{2}{5}$, οπότε ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3. Διαφορετικά, συνεχίζουμε να δοκιμάζουμε:

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^5dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1 \cdot (-a)^5 + w_2 \cdot 0^3 + w_3 \cdot a^5,$$

$$f(x)=x^6 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^6dx = \frac{2}{7} \neq \frac{6}{25} = \frac{2a^4}{3} = 2w_1a^6 = w_1 \cdot a^6 + w_2 \cdot 0^6 + w_3 \cdot a^6.$$

Επομένως, αν $a=\sqrt{\frac{3}{5}}$, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 5.

5.11 Σεπτέμβριος 2010

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{1}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x)=x^4-2x^3+3x-7 \Rightarrow f'(x)=4x^3-6x^2+3 \Rightarrow f''(x)=12x^2-12x<0 \Rightarrow f'''(x)=24x-12,$$

δηλαδή η $f''(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Επομένως, $\|f''\|_\infty = \left|f''\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 3$. Ζητάμε:

$$\frac{1}{4n^2} \leqslant 10^{-6} \Rightarrow n \geqslant \frac{1000}{2} = 500.$$

β. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1+w_2+w_3=2,$$

$$f(x)=x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = w_1\cdot(-1)+w_2\cdot 0+w_3\cdot a \Rightarrow w_1 = a w_3,$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = w_1\cdot(-1)^2+w_2\cdot 0^2+w_3\cdot a^2 \Rightarrow w_1+a^2 w_3=\frac{2}{3} \overset{w_1=aw_3}{\Rightarrow}$$

$$w_3=\frac{2}{3a(a+1)} \Rightarrow w_1=\frac{2}{3(a+1)} \overset{w_1+w_2+w_3=2}{\Rightarrow} w_2 = 2-\frac{2}{3(a+1)}-\frac{2}{3a(a+1)}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \overset{w_1=aw_3}{\neq} w_1\cdot(-1)^3+w_2\cdot 0^3+w_3\cdot a^3.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 2.

5.12 Ιούνιος 2010

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^S(f)| \leqslant \frac{2^5}{180n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x)=5x^2-4x+7 \Rightarrow f^{(4)}(x)=0 \Rightarrow R_{n+1}^S(f)=0.$$

Εφόσον το n στον τύπο του Simpson είναι άρτιο, απαιτούνται 2 υποδιαστήματα.

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_0^2 1 dx = w_1\cdot 1+w_2\cdot 1+w_3\cdot 1 \Rightarrow w_1+w_2+w_3=2 \Rightarrow w_2=2-w_1-w_3,$$

$$f(x)=x \Rightarrow \int_0^2 x dx = w_1\cdot\frac{1}{2}+w_2\cdot 1+w_3\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{w_1}{2}+w_2+\frac{3w_3}{2}=2 \overset{w_2=2-w_1-w_3}{\Rightarrow} w_1=w_3,$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_0^2 x^2 dx = w_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+w_2\cdot 1^2+w_3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{w_1}{4}+w_2+\frac{9w_3}{4}=\frac{8}{3} \underset{w_1=w_3}{\overset{w_2=2-w_1-w_3}{\Rightarrow}} w_1=w_3=\frac{4}{3} \Rightarrow w_2=-\frac{2}{3}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_0^2 x^3 dx = 4 = w_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+w_2\cdot 1^3+w_3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3,$$

$$f(x)=x^4 \Rightarrow \int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5} \neq \frac{37}{6} = w_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+w_2\cdot 1^4+w_3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3.

5.13 Ιούνιος 2009

Υπολογίζουμε ότι:

$$\pi_2(x)=x\pi_1(x)-\frac{1}{4}\pi_0(x)=x^2-\frac{1}{4} \Rightarrow \pi_3(x)=x\pi_2(x)-\frac{1}{4}\pi_1(x)=x^3-\frac{x}{2}.$$

$$\pi_3(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Επομένως, $\tau_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tau_2 = 0$ και $\tau_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε ότι:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \underset{dx=\cos y dy}{\overset{x=\sin y}{=}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2y)}{2} dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x\sqrt{1-x^2}$ είναι περιττή, οπότε:

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx \underset{dx=\cos y dy}{\overset{x=\sin y}{=}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y \cos^2 y dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 y)\cos^2 y dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 y dy \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1+\cos(2y)}{2}\right]^2 dy \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos(2y)+\cos^2(2y)}{4} dy \\
&= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{y}{4} + \frac{\sin(2y)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(4y)}{8} dy \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \left[\frac{y}{8} + \frac{\sin(4y)}{16}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 y \cos^2 y dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 y)^2\cos^2 y dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 y dy + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 y dy \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1+\cos(2y)}{2}\right]^3 dy \\
&= -\frac{\pi}{4} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+3\cos(2y)+3\cos^2(2y)+\cos^3(2y)}{8} dy \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{8} + \cancelto{0}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(2y)}{8} dy} = \frac{\pi}{16},
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1} x^6\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 y \cos^2 y dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 y)^3\cos^2 y dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy - 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 y dy + 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 y dy - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 y dy \\
&= \frac{\pi}{2} - 3\cdot\frac{3\pi}{8} + 3\cdot\frac{5\pi}{16} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1+\cos(2y)}{2}\right]^4 dy \\
&= \frac{5\pi}{16} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+4\cos(2y)+6\cos^2(2y)+4\cos^3(2y)+\cos^4(2y)}{16} dy \\
&= \frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{16} - \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{16}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{128}.
\end{aligned}
$$

Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = w_1\cdot 1 + w_2\cdot 1 + w_3\cdot 1 \Rightarrow w_1+w_2+w_3 = \frac{\pi}{2},$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx = w_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + w_2\cdot 0 + w_3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(w_3-w_1) = 0 \Rightarrow w_1 = w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx = w_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + w_2\cdot 0^2 + w_3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{w_1+w_3}{2} = \frac{\pi}{8} \overset{w_1=w_3}{\Rightarrow} w_1 = w_3 = \frac{\pi}{8} \overset{w_1+w_2+w_3=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} w_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + w_2\cdot 0^3 + w_3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{16} = w_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + w_2\cdot 0^4 + w_3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4,$$

$$f(x) = x^5 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^5\sqrt{1-x^2}dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 + w_2\cdot 0^5 + w_3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5,$$

$$f(x) = x^6 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^6\sqrt{1-x^2}dx = \frac{5\pi}{128} \neq \frac{\pi}{32} = w_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + w_2\cdot 0^6 + w_3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6,$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 5.

5.14 Σεπτέμβριος 2008

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{2^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12x + 10 \Rightarrow f'''(x) = 24x - 12.$$

Εφόσον $f''(x) \not\equiv 0$, ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου δεν αναμένεται να υπολογίζει την τιμή του ολοκληρώματος ακριβώς. Βλέπουμε ότι $f''(-1) = 34$, $f''(1) = 10$ και $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 7$, οπότε

$\|f''\|_\infty = f''(-1) = 34$. Επομένως,

$$|R^T_{n+1}(f)| \leqslant \frac{68}{3n^2} \overset{n=500}{\cong} 9.067 \cdot 10^{-5}.$$

Δηλαδή, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το σφάλμα θα είναι μικρότερο του $0.5 \cdot 10^{-6}$.

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = w_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 = 2w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2dx = w_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + w_2 \cdot 0^2 + w_3 \cdot 1^2 \Rightarrow \frac{w_1}{4} + w_3 = \frac{2}{3} \overset{w_1=2w_3}{\Rightarrow}$$

$$w_3 = \frac{4}{9} \Rightarrow w_1 = \frac{8}{9} \overset{w_1+w_2+w_3=2}{\Rightarrow} w_2 = \frac{2}{3}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \neq \frac{1}{3} = w_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + w_2 \cdot 0^3 + w_3 \cdot 1^3.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 2.

5.15 Ιούνιος 2008

Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 1. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = w_1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow w_1 = w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2dx = w_1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + w_2 \cdot 0^2 + w_3 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3w_1}{5} + \frac{3w_3}{5} = \frac{2}{3} \overset{w_1=w_3}{\Rightarrow} w_1 = w_3 = \frac{5}{9} \overset{w_1+w_2+w_3=2}{\Rightarrow} w_2 = \frac{8}{9}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + w_2 \cdot 0^3 + w_3 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} = w_1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + w_2 \cdot 0^4 + w_3 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4,$$

$$f(x)=x^5 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + w_2 \cdot 0^5 + w_3 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5,$$

$$f(x)=x^6 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{2}{7} \neq \frac{6}{25} = w_1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 + w_2 \cdot 0^6 + w_3 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 5.

5.16 Σεπτέμβριος 2007

Γνωρίζουμε ότι $|R^T_{n+1}(f)| \leqslant \frac{2^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24x < 0 \Rightarrow f'''(x) = 24x - 24.$$

Εφόσον $f'' \not\equiv 0$, ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου δε θα υπολογίζει το ολοκλήρωμα ακριβώς. Ισχύει ότι η $f''(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, οπότε $\|f''\|_\infty = |f''(1)| = 12$. Ζητάμε:

$$\frac{8}{n^2} \leqslant 10^{-6} \Rightarrow n \geqslant 2000\sqrt{2} \cong 2828.427 \Rightarrow n = 2829.$$

5.17 Σεπτέμβριος 2006

Υπολογίζουμε ότι:

$$\pi_1(t) = t\pi_0(t) - \frac{0^2}{4\cdot 0^2 - 1}\pi_{-1}(t) = t,$$

$$\pi_2(t) = t\pi_1(t) - \frac{1^2}{4\cdot 1^2 - 1}\pi_0(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$\pi_3(t) = t\pi_2(t) - \frac{2^2}{4\cdot 2^2 - 1}\pi_1(t) = t^3 - \frac{9t}{15},\ \pi_3(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ή } t = -\frac{3}{\sqrt{15}} \text{ ή } t = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

Επομένως, $\tau_1 = -\frac{3}{\sqrt{15}}$, $\tau_2 = 0$ και $\tau_3 = \frac{3}{\sqrt{15}}$. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 1. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1 dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = w_1 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right) + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot \frac{3}{\sqrt{15}} \Rightarrow w_1 = w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = w_1 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^2 + w_2 \cdot 0^2 + w_3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{9w_1}{15} + \frac{9w_3}{15} = \frac{2}{3} \overset{w_1=w_3}{\Rightarrow} w_1 = w_3 = \frac{5}{9} \overset{w_1+w_2+w_3=2}{\Rightarrow} w_2 = \frac{8}{9}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^3 + w_2 \cdot 0^3 + w_3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^3,$$

$$f(x)=x^4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} = w_1 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^4 + w_2 \cdot 0^4 + w_3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^4,$$

$$f(x)=x^5 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0 \overset{w_1=w_3}{=} w_1 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^5 + w_2 \cdot 0^5 + w_3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^5,$$

$$f(x)=x^6 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{2}{7} \neq \frac{6}{25} = w_1 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^6 + w_2 \cdot 0^6 + w_3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^6.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 5.

5.18 Σεπτέμβριος 2005

α. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x)+f(1-x)=1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 1dx \underset{dy=-dx}{\overset{y=1-x}{\Rightarrow}}$$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^0 -f(y)dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(y)dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

β. Έστω $a=0$ και $b=1$. Τότε, $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ και $x_i=a+hi=\frac{i}{n}$ για $i=0,1,\ldots,n$. Παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{i}{n}\right)+f\left(\frac{n-i}{n}\right)=1$ για $i=0,1,\ldots,n$.

Έστω n περιττός. Τότε,

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^T(f) &= \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)}{2}+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-2}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{f(1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}+\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right)+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{1}{2}=\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow R_{n+1}^T(f)=0. \end{aligned}$$

Έστω n άρτιος. Παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Τότε,

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^T(f) &= \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)}{2}+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{f(1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}+\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow R_{n+1}^T(f)=0. \end{aligned}$$

5.19 Ιούνιος 2005

α. Γνωρίζουμε ότι $|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{2^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$. Υπολογίζουμε ότι:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+6x \Rightarrow f''(x)=12x^2-24x+6 \Rightarrow f'''(x)=24x-24.$$

Εφόσον $f''(x) \not\equiv 0$, ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου δε θα υπολογίζει την τιμή του ολοκληρώματος ακριβώς. Ισχύει ότι $f''(0) = f''(2) = 6$ και $f''(1) = -6$, οπότε $\|f''\|_\infty = |f''(1)| = 6$. Επομένως,

$$|R_{n+1}^T(f)| \leqslant \frac{4}{n^2} \overset{n=400}{=} 2.5 \cdot 10^{-5}.$$

Δηλαδή, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το σφάλμα θα είναι μικρότερο του 10^{-6}.

β. Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^2 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 2,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^2 xdx = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 2 \Rightarrow w_2 + 2w_3 = 2 \Rightarrow w_2 = 2 - 2w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^2 x^2dx = w_1 \cdot 0^2 + w_2 \cdot 1^2 + w_3 \cdot 2^2 \Rightarrow$$

$$w_2 + 4w_3 = \frac{8}{3} \overset{w_2=2-2w_3}{\Rightarrow} w_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow w_2 = \frac{4}{3} \overset{w_1+w_2+w_3=2}{\Rightarrow} w_1 = \frac{1}{3}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^2 x^3dx = 4 = w_1 \cdot 0^3 + w_2 \cdot 1^3 + w_3 \cdot 2^3,$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_0^2 x^4dx = \frac{32}{5} \neq \frac{20}{3} = w_1 \cdot 0^4 + w_2 \cdot 1^4 + w_3 \cdot 2^4.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 3.

5.20 Ιούλιος 2004

Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι τουλάχιστον 2. Υπολογίζουμε ότι:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^2 1dx = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 \Rightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 3,$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^2 xdx = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 2 \Rightarrow w_2 + 2w_3 = \frac{3}{2} \Rightarrow w_2 = \frac{3}{2} - 2w_3,$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^2 x^2dx = w_1 \cdot 0^2 + w_2 \cdot 1^2 + w_3 \cdot 2^2 \Rightarrow$$

$$w_2 + 4w_3 = 3 \overset{w_2=\frac{3}{2}-2w_3}{\Rightarrow} w_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow w_2 = 0 \overset{w_1+w_2+w_3=3}{\Rightarrow} w_1 = \frac{9}{4}.$$

Δοκιμάζουμε:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^2 x^3dx = \frac{15}{4} \neq 6 = w_1 \cdot 0^3 + w_2 \cdot 1^3 + w_3 \cdot 2^3.$$

Επομένως, ο βαθμός ακριβείας του τύπου είναι ακριβώς 2.