Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

- Ασκήσεις -

22 Σεπτεμβρίου 2020

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1.1 Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών:

Ορισμός 1.1. *Μια διαφορική μορφή χωριζομένων μεταβλητών είναι της μορφής*

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t)h(y)$$

με $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *και* $h : (c,d) \to \mathbb{R}$.

Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

(i) Αν $h(y) = 0$ για $y = y_k,\ k = 1, 2, \cdots, n$ τότε, $y(t) = y_k,\ t \in (a,b)$.

(ii) Αν $h(y) \neq 0$, τότε $\dfrac{y'}{h(y)} = g(t)$ και ολοκληρώνωντας ως προς t προκύπτει $\displaystyle\int \frac{y'}{h(y)}dt = \int g(t)dt + c$.

Για την επίλυση του Π.Α.Τ. $\left[y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0,\ t_0 \in (a,b) \right]$

(i) Από την γενική λύση βρίσκουμε c με την βοήθεια της αρχικής συνθήκης.

(ii) Με ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(t)dt.$$

2. Για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων της μορφής
$$y' + p(t)y = q(t)$$
με $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, κάνουμε χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής
$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

3. Για την επίλυση διαφορικής εξίσωσης Bernoulli της μορφής
$$y' + p(t)y = q(t)y^r$$
όπου $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $r \in \mathbb{R}$ γίνεται χρήση του μετασχηματισμού $u = y^{1-r}$.

4. Για την επίλυση διαφορικής εξίσωσης Riccati της μορφής
$$y' + p(t)y = q(t)y^2 + f(t)$$
με $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς γίνεται χρήση του μετασχηματισμού $y(t) = y_1(t) + \dfrac{1}{u(t)}$, όπου $y_1(t)$ μια γνωστή λύσης της δ.ε.

5. Για την επίλυση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης της μορφής
$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$
με $M, N : D \to \mathbb{R}$, ομογενείς του ίδιου βαθμού γίνεται χρήση του μετασχηματισμού $u = \dfrac{y}{t},\ t \neq 0$.

6. Για την επίλυσης μιας ακριβούς διαφορικής εξίσωσης της μορφής
$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$
με
$$M, N \in C^1(D),\ D \subset \mathbb{R}^2$$
δείχνουμε ότι $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ και έπειτα θεωρούμε την $F \in C^1(D)$ με $F(t, y) = C$ ώστε
$$\frac{\partial F}{dy} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$
και λύνουμε το παραπάνω σύστημα για την εύρεση της $F(t, y) = C$.Σε περίπτωση που $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$ κάνουμε χρήση πολλαπλασιαστή Euler $\mu(t, y) = \mu \neq 0$ η εύρεση του οποίου προκύπτει από την σχέση
$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial t}.$$

1.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y = t^2,\ t > 0.$$

1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{t}y = y^2 t^2,\ t > 0.$$

1.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{y}{t} = y^2 - \frac{1}{t^2},\ t > 0$$

αν μια λύση της είναι της μορφής $y_1(t) = \dfrac{1}{t}$.

1.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^2 dt - t(t+y)dy = 0$$

1.5 (i) Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$xf(tx) + tg(tx)x' = 0$$

όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2 x)x' = 0.$$

1.6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-y} + 1.$$

1.7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \int_0^2 y(t)dt, \quad y(0) = 1.$$

1.8 Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$ty^2 + \lambda t^2 y + t^2(t+y)y' = 0$$

είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση για αυτή την τιμή του λ.

1.9 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$e^{at+y} + 3t^2y^2 + (2t^3y + e^{at+y})y' = 0 \ (1)$$

Να βρεθεί το a ώστε η (1) να είναι ακριβής και να λυθεί η (1).

1.10 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2) + (t + 4yt + 5y^2)\frac{dy}{dt} = 0 \ (1)$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.

1.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 1

1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y = t^2,\ t > 0.$$

Λύση. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή $y' - \frac{y}{t} = t$.Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t}\,dt} = \frac{1}{t}\ ,$$

όπου προκύπτει πως

$$\frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{t}\right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{t} = t + c \Leftrightarrow y = t^2 + ct,\ c \in \mathbb{R}\ .$$

■

1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{t}y = y^2t^2,\ t > 0.$$

Λύση. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση αποτελεί δ.ε. μορφής Bernoulli, άρα θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$u = \frac{1}{y},\ y \neq 0.$$

Έτσι προκύπτει πως

$$u' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'.$$

Έχουμε λοιπόν πως

$$-\frac{1}{y^2} \cdot y' - \frac{3}{ty} = -t^2 \Leftrightarrow u' - \frac{3}{t} \cdot u = -t^2$$

η οποία λύνεται με τη χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(t) = e^{\int -\frac{3}{t}\,dt} = \frac{1}{t^3}$.Άρα προκύπτει πως

$$\frac{u'}{t^3} - 3\frac{u}{t^2} = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{t^3}\right)' = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{u}{t^3} = -\log t + c \Leftrightarrow u = t^3(c - \log t)\ .$$

Τελικά λοιπόν έχουμε πως $y = \dfrac{1}{t^3(c - \log t)},\ c \neq \log t$.

Ακόμη παρατηρούμε πως η $y = 0$ ικανοποιεί την δ.ε., άρα και $y = 0$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. ■

1.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{y}{t} = y^2 - \frac{1}{t^2},\ t > 0$$

αν μια λύση της είναι της μορφής $y_1(t) = \frac{1}{t}$.

Λύση. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση αποτελεί δ.ε. μορφής Riccati άρα θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{u(t)}.$$

Άρα έχουμε πως $y'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{u^2(t)}u'(t)$ και $y^2(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{tu(t)} + \frac{1}{u^2(t)}$. Έτσι έχουμε ότι

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{u'}{u^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{tu} = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{tu} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{tu} = \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow u' + \frac{u}{t} = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{t}{2} + \frac{c}{t}$$

Τελικά λοιπόν προκύπτει πως

$$y(t) = \frac{2t}{2c - t^2} + \frac{1}{t},\ t^2 \neq 2c.$$

■

1.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^2 dt - t(t+y)dy = 0.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $M(t,y) = y^2$ και $N(t,y) = t(t+y)$ είναι ομογενείς 2ου βαθμού στο $\mathbb{R}^2$, άρα η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ομογενής.Θεωρούμε τον μετασχηματισμό,

$$u = \frac{y}{t},\ t \neq 0$$

που διαφορίζοντας προκύπτει ότι $u' = \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}$. Άρα η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται σε

$$u^2 - (1+u)(u+u't) = 0 \Leftrightarrow u^2 - u - u't - u^2 - u'ut = 0 \Leftrightarrow -u = tu'(1+u) \Leftrightarrow -\frac{dt}{t} = \frac{1+u}{u}du$$

$$\int \frac{1+u}{u}du = \int -\frac{1}{t}dt + c \Leftrightarrow \log u + u = c - \log t \Leftrightarrow \log\frac{y}{t} + \frac{y}{t} = c - \log t \Leftrightarrow t\log y + y = ct$$

η οποία είναι λύση σε πεπλεγμένη μορφή. ■

1.5 (i) Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$xf(tx) + tg(tx)x' = 0$$

όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2x)x' = 0.$$

Λύση. (i) Θεωρούμε τον εξής μετασχηματισμό

$$y = tx$$

όπου προκύπτει πως $x' = \dfrac{y't - y}{t^2}$ δηλαδή

$$\frac{y}{t}f(y) + tg(y)\left(\frac{y't - y}{t^2}\right) = 0 \Leftrightarrow yf(y) + g(y)(y't - y) = 0 \Leftrightarrow yf(y) + tg(y)y' - yg(y) = 0$$

$$tg(y)y' = y[g(y) - f(y)] \Leftrightarrow y' = \frac{y[g(y) - f(y)]}{tg(y)} \tag{1.1}$$

η οποία έχει μετασχηματιστεί σε δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών.

(ii) **Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό καθως και την σχέση (1.1) του (i).

■

1.6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t - y} + 1.$$

Λύση. **Α΄ Τρόπος.** Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $u = t - y$, όπου διαφορίζοντας προκύπτει πως $u' = 1 - y'$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$y' = \frac{1}{t-y} + 1 \Leftrightarrow -y' = \frac{1}{t-y} - 1 \Leftrightarrow u' = -\frac{1}{u} \Leftrightarrow udu = -dt \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = -t + c_1 \Leftrightarrow u^2 = 2c_1 - 2t$.
Τελικά λοιπόν έχουμε ότι $y = t - \sqrt{2c_1 - 2t}$ ή $y = t + \sqrt{2c_1 - 2t}$ για $t < c_1$.

Β΄ Τρόπος. Παρατηρήστε ότι η διαφορική εξίσωση $-t + y - 1 + (t - y)y' = 0$ είναι ακριβής και λύστε την με την γνωστή μέθοδο.

■

1.7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \int_0^2 y(t)dt, \quad y(0) = 1.$$

Λύση. Θέτουμε $r = \int_0^2 y(t)dt$ και θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$e^t y' + e^t y = re^t = \left(e^t y\right)' = re^t \Leftrightarrow e^t y = re^t + c \Leftrightarrow y = r + ce^{-t}.$$

Για $t = 0$ έχουμε πως $c = 1 - r$, δηλαδή προκύπτει πως $y = r + (1 - r)e^{-t}$. Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης αρκεί να βρούμε το r. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$r = \int_0^2 y(t)dt = \int_0^2 r + (1 - r)e^{-t}dt \Leftrightarrow r = 1 - e^2.$$

Τελικά λοιπόν έχουμε πως η γενική λύση είναι η $y(t) = 1 - e^2 + e^{2-t}$. ■

1.8 Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$ty^2 + \lambda t^2 y + t^2(t+y)y' = 0$$

είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση για αυτή την τιμή του λ.

Λύση. Για να είναι ακριβής η παραπάνω διαφορική εξίσωση για $M(t,y) = ty^2 + \lambda t^2 y$ και $N(t,y) = t^2(t+y)$ αρκεί να ισχύει ότι

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} \Leftrightarrow 2ty + \lambda t^2 = 3t^2 + 2ty$$

όπου από ισότητα πολυωνύμων ισχύει ότι $\lambda = 3$.Άρα η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής :

$$ty^2 + 3t^2 y + t^2(t+y)y' = 0$$

η οποία είναι ακριβής.Έτσι υπάρχει $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ με $F(t,y) = c_1$ ώστε

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\partial F(t,y)}{\partial y} = N(t,y).$$

1. $\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial F(t,y)}{\partial t} = ty^2 + 3t^2 y \Leftrightarrow F(t,y) = \dfrac{y^2t^2}{2} + t^3 y + h(y)$
2. $\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial y} = N(t,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial F(t,y)}{\partial y} = t^3 + t^2 y \Leftrightarrow h'(y) = 0 \Leftrightarrow h(y) = c_2$

Αν θέσουμε $C = c_1 - c_2$ προκύπτει ότι $\frac{y^2t^2}{2} + t^3 y = C$ η οποία είναι λύση σε *πεπλεγμένη μορφή*. ■

1.9 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$e^{at+y} + 3t^2y^2 + (2t^3 y + e^{at+y})y' = 0 \ (1)$$

Να βρεθεί το a ώστε η (1) να είναι ακριβής και να λυθεί η (1).

Λύση. Για να είναι ακριβής η παραπάνω διαφορική εξίσωση για $M(t,y) = e^{at+y} + 3t^2y^2$ και $N(t,y) = 2t^3y + e^{at+y}$ αρκεί να ισχύει ότι

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} \Leftrightarrow e^{at+y} + 6t^2 y = ae^{at+y} + 6t^2 y\ ,$$

όπου προκύπτει πως $a = 1$. Άρα η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής :

$$e^{t+y} + 3t^2y^2 + (e^{t+y} + 2t^3y)y' = 0$$

η οποία είναι ακριβής.Έτσι υπάρχει $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ με $F(t,y) = c_1$ ώστε

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\partial F(t,y)}{\partial y} = N(t,y).$$

1. $\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial F(t,y)}{\partial t} = e^{t+y} + 3t^2y^2 \Leftrightarrow F(t,y) = e^{t+y} + t^3y^2 + h(y)$
2. $\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial y} = N(t,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial F(t,y)}{\partial y} = e^{t+y} + 2t^3y \Leftrightarrow h'(y) = 0 \Leftrightarrow h(y) = c_2$

Αν θέσουμε $C = c_1 - c_2$ προκύπτει ότι $e^{t+y} + t^3y^2 = C$ η οποία είναι λύση σε *πεπλεγμένη μορφή*. ■

1.10 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2) + (t + 4yt + 5y^2)\frac{dy}{dt} = 0 \ (1)$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.

Λύση. Η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \ , \tag{1.2}$$

όπου $M(t,y) = 3t + 2y + y^2$ και $N(t,y) = t + 4yt + 5y^2$. Παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής :

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = 2y + 2 \neq 1 + 4y = \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)$$

άρα η (1.2) δεν είναι ακριβής. Γνωρίζουμε ότι η (1.2) δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.Έστω $u(t,y) = t + y^2$. Τότε από τον *Κανόνα της Αλυσίδας* έχουμε

1. $\frac{\partial \mu}{\partial y}(t,y) = \frac{d\mu}{du}(t,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(t,y) = 2y\frac{d\mu}{du}(t,y)$
2. $\frac{\partial \mu}{\partial t}(t,y) = \frac{d\mu}{du}(t,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) = \frac{d\mu}{du}(t,y)$

Αφού η (1.2) δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα, τότε $\frac{\partial(M\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(N\mu)}{\partial t}$. Υπολογίζουμε διαδοχικά ως εξής :

$$\begin{aligned}
&\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial t} = (\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y})\mu \\
&\frac{d\mu}{du}(2yM - N) = (\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y})\mu \Leftrightarrow \frac{d\mu}{du}(2yt - t + 2y^3 - y^2) = (2y - 1)\mu \\
&\frac{d\mu}{du}(2yM - N) = (\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y})\mu \Leftrightarrow \int \frac{1}{\mu}d\mu = \int \frac{1}{u}du + c_1 \Leftrightarrow \log|\mu| = \log(|u| \cdot e^{c_1}) \\
&\qquad \mu = \pm ue^{c_1} = \pm e^{c_1}(t + y^2) \Leftrightarrow \mu = c_3(t + y^2)
\end{aligned}$$

Έτσι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $\mu(t,y) = t + y^2$.Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα τη σχέση (1.2).

$$(t + y^2)(3t + 2y + y^2) + (t + y^2)(t + 4yt + 5y^2)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$(y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2ty + 3t^2) + (t^2 + 4yt^2 + 6y^2t + 4y^3t + 5y^4)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.3}$$

όπου $\bar{M}(t,y) = y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2ty + 3t^2$ και $\bar{N}(t,y) = t^2 + 4yt^2 + 6y^2t + 4y^3t + 5y^4$. Έχουμε λοιπόν πως

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}(t,y) = 4y^3 + 6y^2 + 8yt + 2t = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} \ ,$$

άρα η (1.3) είναι ακριβής.Έτσι γνωρίζουμε πως υπάρχει $F(t,y) = c$ ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = \bar{M}(t,y) \ \kappa\alpha\iota \ \frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = \bar{N}(t,y).$$

1. $\frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = \bar{N}(t,y) \Leftrightarrow F(t,y) = \int t^2 + 4yt^2 + 6y^2t + 4y^3t + 5y^4 dy + h(t)$
   $F(t,y) = t^2y + 2y^2t^2 + 2y^3t + y^4t + y^5 + h(t)$
2. $\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = \bar{M}(t,y) \Leftrightarrow 2ty + 4y^2t + 2y^3 + y^4 + h'(t) = y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2yt + 3t^2$

Παρατηρούμε λοιπόν πως $h'(t) = 3t^2 \Leftrightarrow h(t) = t^3 + c_4$, όπου για $c_4 = 0$ έχουμε $h(t) = t^3$. Έτσι τελικά προκύπτει πως

$$F(t,y) = y^5 + ty^4 + 2ty^3 + 2t^2y^2 + t^2y + t^3 = c$$

η οποία είναι λύση σε *πεπλεγμένη μορφή*. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

2.1 Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1.

Ορισμός 2.1. *(προσεγγίσεις Picard)* ***Η ακολουθία προσεγγίσεων Picard*** *ορίζεται επαγωγικά ως εξής :*

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

2.

Θεώρημα 2.1. *Picard-Lindelof : Έστω $f(t,y), \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο*

$$S = \{ \ (t,y) : \ t_0 \leq t \ t_0 + a, \ |y - y_0| \leq b \ \}$$

Έστω ακόμη $M = \max_S |f(t,y)|, \delta = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$.Τότε το Π.Α.Τ. : $\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση στο $[t_0, t_0 + \delta]$.

3.

Ορισμός 2.2. *Η συνάρτηση f ικανοποιεί* ***συνθήκη Lipschitz*** *στο S αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(t, y_1), (t, y_2) \in S$ έχουμε την ανισότητα*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

4. Απλή ανάγνωση της απόδειξης του Θεωρήματος (b) δείχνει ότι η υπόθεση για την παράγωγο $\dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με τη λιγότερο περιοριστική (c) χωρίς καμία αλλαγή στο συμπέρασμα.

2.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

2.1 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = y^3, \quad y(0) = 1.$$

Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα $[0, \delta]$ στο οποίο το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται υπάρξη λύσης και μοναδικότητα.

2.2 Για το ακόλουθο Π.Α.Τ. να προσεγγιστούν οι πρώτες τέσσερεις προσεγγίσεις Picard :

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(1) = 2.$$

2.3 Έστω το Π.Α.Τ. :

$$y' = \sqrt{y} + 1 \quad y(0) = 0, \ t \in [0, 1].$$

(i) Δείξτε ότι η $f(t, y)$ δεν είναι Lipschitz σε διάστημα που περιέχει το $y = 0$.

(ii) Δείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση.

1. **Υπόδειξη.** Υποθέστε ότι το Π.Α.Τ. έχει τουλάχιστον μια λύση.
2. **Υπόδειξη.** Θεωρήστε την συνάρτηση $z(t) = (\sqrt{y_1(t)} - \sqrt{y_2(t)})^2$.

2.4 Θεωρώντας το Π.Α.Τ.

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0$$

να δειχθεί ότι η συνθήκη Lipshitz δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο των λύσεων.

2.5 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2 - 4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \phi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\phi(t) < 2$, για κάθε t.

2.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 2

2.1 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = y^3, \quad y(0) = 1.$$

Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα $[0, \delta]$ στο οποίο το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται ύπαρξη λύσης και μοναδικότητα.

Λύση. Θεωρούμε το ορθογώνιο

$$S = \{\ (t, y) : 0 \leq t \leq a,\ |y - 1| \leq b\ \}.$$

Έχουμε $f(t, y) = y^3$ άρα ισχύει ότι

$$M = \max_{1-b \leq y \leq 1+b} |y^3| = (1 + b)^3.$$

Έχουμε λοιπόν ότι $\delta^* = \min\{a, \dfrac{b}{(b+1)^3}\}$, άρα για a αυθαίρετα μεγάλο $\delta^* = \dfrac{b}{(b+1)^3}$.Για να βρούμε το μέγιστο διάστημα που εγγυάται ύπαρξη λύσης και μοναδικότητα αναζητούμε $\delta = \max\limits_{b>0} \dfrac{b}{(1+b)^3}$ και παρατηρούμε ότι $b_{max} = \frac{1}{2}$.Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\delta = \dfrac{1/2}{(3/2)^3} = \dfrac{4}{27}$.Δηλαδή το μέγιστο διάστημα που εγγυάται μοναδικότητα και ύπαρξη λύσης είναι το $\left[0, \dfrac{4}{27}\right]$. ■

2.2 Για το ακόλουθο Π.Α.Τ. να προσεγγιστούν οι πρώτες τέσσερεις προσεγγίσεις Picard :

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(1) = 2.$$

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία Picard :

$$y_0(t) = 2, \quad y_n(t) = 2 + \int_1^t [s^2 + y_{n-1}^2(s)]ds.$$

1. Για $n = 0$ έχουμε πως, $y_0(t) = 2$
2. Για $n = 1$ έχουμε πως, $y_1(t) = 2 + \displaystyle\int_1^t [s^2 + y_0^2(s)]ds = 2 + \int_1^t [s^2 + 4]ds = \frac{t^3}{3} + 4t - \frac{7}{3}$

Ομοίως υπολογίζονται οι προσεγγίσεις για $n = 2, 3$. ■

2.3 Έστω το Π.Α.Τ. :

$$y' = \sqrt{y} + 1 \quad y(0) = 0,\ t \in [0, 1].$$

(i) Δείξτε ότι η $f(t, y)$ δεν είναι Lipschitz σε διάστημα που περιέχει το $y = 0$.

(ii) Δείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση.

1. **Υπόδειξη.** Υποθέστε ότι το Π.Α.Τ. έχει τουλάχιστον μια λύση.

2. **Υπόδειξη.** Θεωρήστε την συνάρτηση $z(t) = (\sqrt{y_1(t)} - \sqrt{y_2(t)})^2$.

Λύση. (i) Έστω ότι η f είναι Lipschitz δηλαδή υπάρχει $L > 0$ ώστε για κάθε y_1, y_2 να ισχύει

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1(t) - y_2(t)|.$$

Άρα για $y_1(t) = y(t)$ και $y_2(t) = 0$ έχουμε ότι ισχύει

$$|f(t, y) - f(t, 0)| \leq L|y(t) - 0| \Leftrightarrow \sqrt{y} \leq L|y(t)| \Leftrightarrow 1 \leq L\sqrt{y(t)}.$$

το οποίο είναι άτοπο για $t = 0$.

(ii) Έστω y_1, y_2 οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και

$$z(t) = (\sqrt{y_1(t)} - \sqrt{y_2(t)})^2 = y_1(t) + y_2(t) - 2\sqrt{y_1(t)y_2(t)} \geq 0.$$

Άρα προκύπτει πως

$$z'(t) = y_1' + y_2' - 2(\frac{1}{2}y_1'{y_1}^{-1/2}y_2^{1/2} + \frac{1}{2}y_2'{y_2}^{-1/2}y_1^{1/2}) = y_1' + y_2' - \frac{y_1'\sqrt{y_2}}{\sqrt{y_1}} - \frac{y_2'\sqrt{y_1}}{\sqrt{y_2}} < 0$$

Άρα για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει $z(t) \leq 0$, όπου προκύπτει πως

$$z(t) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

■

2.4 Θεωρώντας το Π.Α.Τ.

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0$$

να δειχθεί ότι η συνθήκη Lipshitz δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο των λύσεων.

Λύση. Αρχικά θα επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση

$$x' = x^{\frac{2}{3}} + 1 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1} = \int dt + c_1$$

Άρα αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1}$ όπου προκύπτει ότι

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1} = 3x^{1/3} - 3\arctan x^{1/3} + c_2.$$

Αν θεωρήσουμε $c = c_1 - c_2$ τότε ισχύει ότι

$$3x^{1/3} - 3\arctan x^{1/3} = t + c.$$

Δηλαδή για $t = 0$ έχουμε πως το Π.Α.Τ. έχει, μοναδική λύση σε πεπλεγμένη μορφή,

$$3x^{1/3} - 3\arctan x^{1/3} = t.$$

Ώστόσο η $f(t,y) = x^{2/3}+1$ η οποία ορίζεται σε περιοχή που περιέχει το $(0,0)$ δεν είναι Lipchitz, αφού

$$|f(t,x) - f(t,0)| = |x^{2/3}|$$

με $\lim_{t\to 0} \frac{|x^{2/3}|}{|x|} = \infty$ το οποίο έχει ως αποτέλεσμα

$$|f(t,x) - f(t,0)| > L|x|.$$

■

2.5 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2-4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \phi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\phi(t) < 2$, για κάθε t.

Λύση. Από υπόθεση ισχύει $\phi(0) = \frac{1}{2}$.Παρατηρούμε ότι η αρχική εξίσωση για $y' = 0$ και $y = 2$ μηδενίζεται, δηλαδή $y(t) = 2$ είναι λύση της.Άρα, για $\frac{1}{2} < 2 \Leftrightarrow \phi(0) < y(t)$.Από το μονοσήμαντο της λύσης προκύπτει ότι $\phi(t) < y(t) = 2$, για κάθε t. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

3.1 Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + P(t)y' + Q(t)y = f(t)$ $(*)$ με $P, Q, f : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς είναι της μορφής :
$$y(t) = y_{o\mu}(t) + y_{\epsilon\iota\delta}(t)$$
με $y_{o\mu}$ λύση της αντίστοιχης ομογενούς της $(*)$ και $y_{\epsilon\iota\delta}$ μια ειδική λύση της $(*)$.

2. Έστω η ομογενής διαφορική εξίσωση
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \ (*)$$
με $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς.

   Αν $\phi_1(t), \phi_2(t)$ λύσεις της $(*)$ τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι λύση της $(*)$.

3. **Ορισμός 3.1.** *Η **ορίζουσα Wronski** δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων $\phi_1, \phi_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως :*
$$W(t) = W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix}$$

4. **Θεώρημα 3.1.** *Έστω ϕ_1, ϕ_2 λύσεις της $L(y) = 0$ στο I.Τότε ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I αν και μόνο αν $W(\phi_1, \phi_2)(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.*

5.

Θεώρημα 3.2. *(Τύπος του Liouville) : Έστω ϕ_1, ϕ_2 λύσεις της διαφορικής εξίσωσης*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \; (*)$$

με $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $W(\phi_1, \phi_2)(t)$ η ορίζουσα $Wronski$. Τότε,

(i) $W(t) = ce^{-\int p(t)dt}$,

(ii) $W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$.

6. Έστω η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$y'' + ay' + by = 0 \; (*)$$

με $a, b \in \mathbb{R}$.Τότε θεωρούμε την **χαρακτηριστική εξίσωση** της $(*)$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

(i) Αν $\Delta > 0$ με λ_1, λ_2 οι δύο άνισες λύσεις της χ.ε. τότε προκύπτει πως, $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $(*)$ και μάλιστα

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

(ii) Αν $\Delta = 0$ με $\lambda = -\frac{a}{2}$ η διπλή ρίζα της χ.ε., τότε προκύπτει πως, $e^{-at/2}, te^{-at/2}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $(*)$ και μάλιστα

$$y(t) = c_1 e^{-at/2} + c_2 te^{-at/2}.$$

(iii) Αν $\Delta < 0$ και $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \delta i$ οι μιγαδικές λύσεις της χ.ε. τότε προκύπτει πως, η γενική λύση της $(*)$ είναι

$$y(t) = e^{\gamma t}(c_1 \cos \delta t + c_2 \sin \delta t)$$

7. **Εύρεση ειδικής λύσης της $L(y) = f(t)$.**

(i) **Μέδοθος Lagrange** (ή Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων) : Από την λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. $L(y) = 0$ έχουμε :

$$y_{o\mu}(t) = c_1\phi(t) + c_2\phi_2(t)$$

όπου ϕ_1, ϕ_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσης της $L(y) = 0$.Θεωρούμε $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t)$ με

$$y_\epsilon = c_1(t)\phi(t) + c_2(t)\phi_2(t)$$

μια ειδική λύση της $L(y) = f(t)$.Χρησιμοποιώντας τη σχέση $L(y_\epsilon) = f(t)$ προκύπτει το εξής αλγεβρικό σύστημα :

$$\begin{aligned} \phi_1(t)c_1'(t) + \phi_2(t)c_2'(t) &= 0 \\ \phi_1'(t)c_1'(t) + \phi_2'(t)c_2'(t) &= f(t) \end{aligned}$$

με το οποίο υπολογίζονται τα $c_1(t)$ και $c_2(t)$.

(ii) **Μέθοδος Απροσδιόριστων Συντελεστών**: Έστω $L(y) = f(t) \Leftrightarrow y'' + ay' + by = f(t)$ με $a.b \in \mathbb{R}, f(t) \in C(I)$.Αν $f(t)$ είναι εκθετική συνάρτηση,σταθερή,πολυώνυμου του t,τριγωνομετρική συνάερτηση ή συνδυασμός αυτών τότε, γίνεται χρήση της παρακάτω μεθόδου.

Περιγραφή της μεθόδου

Θεωρούμε $y'' + ay' + by = f(t),\ a, b \in \mathbb{R}$ και

$$f(t) = e^{\gamma t}[P_n(t)\cos(\delta t) + Q_n(t)\sin(\delta t)]$$

με $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $P_n(t), Q_n(t) \in \mathbb{R}_n(t)$.

Αν $\gamma + \delta i$ ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$,της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, πολλαπλότητας p τότε η μη-ομογενής διαφορική εξίσωση έχει ειδική λύση της μορφής

$$y_\epsilon = t^p e^{\gamma t}[p_n(t)\cos(\delta t) + q_n(t)\sin(\delta t)]$$

με $p_n(t), q_n(t)$ πολυώνυμα n βαθμού του t.

8. **Η αρχή της υπέρθεσης.** Έστω η διαφορική εξίσωση $L(y) = f_1(t) + f_2(t)(*)$, $f_1(t), f_2(t) \in C(I)$.

   Θεωρούμε τις διαφορικές εξισώσεις $L(y) = f_1(t)$ (1) και $L(y) = f_2(t)$ (2) με $y_{1\epsilon}(t), y_{2\epsilon}(t)$ ειδικές λύσεις των $(1),(2)$ αντίστοιχα .Τότε, $y_\epsilon(t) = y_{1\epsilon}(t) + y_{2\epsilon}(t)$ ειδική λύση της (*).

9. Σε διαφορικές εξισώσεις τάξης n με $n \geq 3$ ισχύουν οι ίδιες τεχνικές και θεωρήματα με αυτά που προαναφέρθηκαν παραπάνω.

10. **Εξίσωση Euler** είναι η διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$t^2 y'' + aty + by = 0,\ a, b \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Προκύπτει πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω δ.ε. είναι το $r(r-1) + ar + b = 0$.

(i) Αν $\Delta > 0$ τότε για r_1, r_2 λύσεις της εξισώσης με $r_1 \neq r_2$ έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}.$$

(ii) Αν $\Delta = 0$ για $r = \frac{1-a}{2}$ η διπλή λύση της εξίσωσης έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = c_1 t^r + c_2 \log t t^r.$$

(iii) Αν $\Delta < 0$ για $r_{1,2} = \sigma \pm \omega i$ λύσεις της εξίσωσεις έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = t^\sigma[c_1 \cos(\omega \log t) + c_2 \sin(\omega \log t)].$$

3.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

3.1 Αν $a, b, c > 0$, να δειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \phi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ισχύει

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t) = 0.$$

3.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2t}}{e^t + 1}.$$

3.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = e^{3t}.$$

3.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 2e^t.$$

3.5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}.$$

3.6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 3e^t.$$

3.7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = \sin t.$$

3.8 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = 3\cos 2t.$$

3.9 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' + y = t^2.$$

3.10 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = te^t.$$

3.11 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + ky = \sin bt$$

με $k, b > 0$.

3.12 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = e^t - te^{2t}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποίηστε την αρχή της υπέρθεσης.

3.13 Να κατασκευαστεί η ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης αν είναι γνωστές $\phi_1(t), \phi_2(t)$, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της.

3.14 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$t^2y'' - 5ty' + 25y = 0.$$

3.15 Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης :

$$(1 + y^2)y'' - 2ty + 2y = 0$$

με $\phi_1(1) = \phi_1'(1) = 1, \phi_2(1) = 0$ και $\phi_2'(1) = 2$ να υπολογιστεί η $W(\phi_1, \phi_2)(t)$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Liouville.

3.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 3

3.1 Αν $a, b, c > 0$, να δειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \phi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.1}$$

ισχύει

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.1) : $ar^2 + br + c = 0$.

(i) Αν $\Delta > 0$ έχουμε λ_1, λ_2 τις δύο άνισες λύσεις της χ.ε. με $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} < 0$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{c}{a} > 0$, που συμπεραίνουμε πως $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.Όμως η $\phi(t)$ είναι της μορφής :

$$\phi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

έτσι συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.

(ii) Αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε $\lambda = -\frac{b}{2a}$ της διπλή ρίζα της χ.ε. και μάλιστα $\lambda < 0$.Τότε προκύπτει άμεσα πως $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$ και $\lim_{t\to\infty} te^{\lambda t} = 0$ [1] και αφού η $\phi(t)$ είναι της μορφής :

$$\phi(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε πως $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.

(iii) Αν $\Delta < 0$ τότε $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \delta i$ οι μιγαδικές ρίζες της χ.ε. με $\gamma = -\frac{b}{2a} < 0$ [2] Τότε η $\phi(t)$ θα είναι της μορφής :

$$\phi(t) = e^{\gamma t}(c_1 \cos \delta t + c_2 \sin \delta t).$$

Όμως ισχύει ότι $|\phi(t)| \leq e^{\gamma t}(|c_1| + |c_2|) \to 0$ για $t \to \infty$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.

■

3.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση [3]

$$y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2t}}{e^t + 1}. \tag{3.2}$$

Λύση.

[1] Ο υπολογισμός του ορίου γίνεται άμεσα με χρήση του κανόνα De l' Hospital.
[2] Η παραπάνω σχέση προέκυψε με την χρήση τύπων Vietta.
[3] Για την λύση της **Άσκησης 3.4** θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Lagrange.

Από την σχέση (3.2) προκύπτει πως η χαρακτηριστική εξίσωση της δ.ε. είναι

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = 2$.

Δηλαδή η γενικη λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (3.2) είναι

$$y_{o\mu} = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Ακόμη έχουμε πως

$$y_\epsilon(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{2t} \ ,$$

όπου y_ϵ ειδική λύση της 3.2 και για την εύρεση της πρέπει να λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα: [4]

$$\begin{aligned} e^t c_1'(t) + e^{2t} c_2'(t) &= 0 \\ e^t c_1'(t) + 2e^{2t} c_2'(t) &= f(t) \end{aligned}$$

Από τον κανόνα του Cramer, αφού $W(e^t, e^{2t})(t) = e^{3t} \neq 0$ τότε ισχύει

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t} \\ -\frac{e^{2t}}{e^t+1} & 2e^{2t} \end{vmatrix}}{W(t)} \quad \text{και} \quad c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & -\frac{e^{2t}}{e^t+1} \end{vmatrix}}{W(t)}$$

Δηλαδή έχουμε ότι $c_1(t) = \int \frac{e^t}{e^t+1} dt + d_1 = \log(e^t + 1) + d_1$ και $c_2(t) = -\int \frac{1}{e^t+1} dt + d_2 = \log(e^{-t} + 1) + d_2$. Έτσι προκύπτει πως μια ειδική λύση της (3.2) είναι

$$y_\epsilon = \log(e^t + 1)e^t + \log(e^{-t} + 1)e^{2t}.$$

Τελικά αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ η γενική λύση της (3.2) έχει τη μορφή:

$$y(t) = [c_1 + \log(e^t + 1)]e^t + [c_2 + \log(e^{-t} + 1)]e^{2t}.$$

■

3.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = e^{3t} \tag{3.3}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.3) :

$$r^2 + r - 2 = 0 \tag{3.4}$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -2$.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.3) ισούται με

$$y_{o\mu}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

[4] Το παραπάνω **αλγεβρικό σύστημα** προέκυψε αφού η y_ϵ ικανοποιεί την $L[y] = -\frac{e^{2t}}{e^t+1}$.

Το 3 δεν είναι ρίζα της (3.4), άρα μια ειδική λύση της (3.3) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = Ae^{3t}$$

και αφού η $y_\epsilon(t)$ ικανοποιεί την (3.3) έχουμε πως

$$y''_\epsilon(t) + y'_\epsilon(t) - 2y_\epsilon(t) = e^{3t} \Leftrightarrow 9Ae^{3t} + 3Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = e^{3t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{10}.$$

Άρα μια ειδική λύση της (3.3) είναι

$$y_\epsilon = \frac{1}{10}e^{3t}.$$

Αφού γνωρίζουμε πως ισχύει $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ έχουμε ότι

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \frac{1}{10}e^t.$$

■

3.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 2e^t. \tag{3.5}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.5)

$$r^2 + y - 2 = 0 \tag{3.6}$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -2$.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.5) ισούται με

$$y_{o\mu}(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t}$$

Το 1 είναι ρίζα της (3.6) πολλαπλότητας 1, άρα μία ειδική λύση της (3.5) είναι της μορφής:

$$y_\epsilon(t) = Ate^t$$

και αφού ικανοποιέι την (1) έχουμε πως

$$y''_\epsilon(t) + y'_\epsilon(t) - 2\epsilon(t) = 2e^t \Leftrightarrow (2Ae^t + Ae^t) + (Ae^t + Ate^t) - 2Ate^t = 2e^t \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$$

Έτσι μια ειδική λύση της (3.5) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{2}{3}te^t.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει ότι

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \frac{2}{3}te^t$$

■

3.5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}. \tag{3.7}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.7) :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \tag{3.8}$$

η οποία έχει λύση $r = 2$ πολλαπλότητας 2.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.7) ισούται

$$y_{o\mu}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}.$$

Το -2 είναι ρίζα της (3.8) πολλαπλότητας 2, άρα μια λύση της (3.7) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = At^2 e^{-2t}$$

και αφού ικανοποιεί την (3.7) έχουμε πως

$$y_\epsilon''(t) + 4y\epsilon'(t) + 4y_\epsilon(t) = e^{-2t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Άρα μια ειδική λύση της (3.7) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}.$$

Αφού γνωρίζουμε πως ισχύει $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ έχουμε ότι

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}.$$

■

3.6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 3e^t. \tag{3.9}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.9)

$$r^2 + 1 = 0 \tag{3.10}$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = i$ και $r_2 = -i$.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.9) ισούται :

$$y_{o\mu}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Το 1 δεν είναι λύση της (3.10) άρα μια ειδική λύση της (3.9) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = Ae^t$$

και αφού ικανοποιεί την (3.9) έχουμε πως

$$y_\epsilon''(t) + y_\epsilon(t) = 3e^t \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}.$$

Άρα μια ειδική λύση της (3.9) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{3}{2} e^t.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{3}{2} e^t.$$

■

3.7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = \sin t. \tag{3.11}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.11) :

$$r^2 + 4 = 0 \tag{3.12}$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 2i$ και $r_2 = -2i$.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.11) ισούται με

$$y_{o\mu}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Το i δεν είναι λύση της (3.12) άρα μια ειδική λύση της (3.11) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = A \sin t + B \cos t$$

και αφού ικανοποιεί την (3.11) έχουμε πως

$$y_\epsilon''(t) + 4y_\epsilon(t) = 3e^t \Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \; \kappa\alpha\iota \; B = 0.$$

Άρα μια ειδική λύση της (3.11) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{3} \sin t.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t.$$

■

3.8 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t. \tag{3.13}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.13) :

$$r^2 + 4 = 0 \tag{3.14}$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 2i$ και $r_2 = -2i$.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.13) ισούται :

$$y_{o\mu}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Το $2i$ είναι λύση της (3.14), πολλαπλότητας 1 άρα μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = t(A \sin 2t + B \cos 2t)$$

και αφού ικανοποιεί την (3.13) έχουμε πως

$$y_\epsilon''(t) + 4y_\epsilon(t) = 3 \cos 2t \Leftrightarrow A = 0 \; \kappa\alpha\iota \; B = \frac{3}{4}.$$

Έτσι μια ειδική λύση της (3.13) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{3}{4} t \sin 2t.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos 2t + (c_2 + \frac{3}{4} t) \sin 2t.$$

■

3.9 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' + y = t^2 \tag{3.15}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.15) :

$$r^2 + r + 1 = 0 \tag{3.16}$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ και $r_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.15) ισούται :

$$y_{o\mu}(t) = e^{-\frac{t}{2}} [c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t)].$$

Μια ειδική λύση της (3.15) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = At^2 + Bt + C$$

και αφού ικανοποιεί την (3.15) έχουμε πως,

$$y_\epsilon'' + y_\epsilon' + y_\epsilon = t^2 \Leftrightarrow A = 1,\ B = -2\ \kappa\alpha\iota\ C = 0.$$

Άρα, μια ειδική λύση της (3.15) είναι

$$y_\epsilon(t) = t^2 - 2t.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} [c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t)] + t^2 - 2t.$$

■

3.10 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = te^t. \tag{3.17}$$

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.17) :

$$r^2 - 1 = 0 \tag{3.18}$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -1$.Άρα γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (3.17) ισούται με

$$y_{o\mu}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Αφού η $f(t) = te^t$ παίρνει την μορφή

$$f(t) = e^t[t\cos 0 + Q(t)\sin 0]$$

και το 1 είναι λύση της (3.18) πολλαπλότητας 1, μια ειδική λύση της (3.17) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = te^t(At + B)$$

και αφού ικανοποιεί την (3.17) έχουμε πως

$$y_\epsilon'' - y_\epsilon = ye^t \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \ \kappa\alpha\iota \ B = -\frac{1}{4}.$$

Άρα μια ειδική λύση της (3.17) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t.$$

■

3.11 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + ky = \sin bt \tag{3.19}$$

με $k, b > 0$.

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.19)

$$r^2 + k = 0 \tag{3.20}$$

η οποία έχει ρίζες $r_{1,2} = \pm\sqrt{k}i$. Τότε η αντίστοιχη ομογενής δ.ε. της (3.19) είναι η

$$y_{o\mu}(t) = c_1 \sin\sqrt{k}t + c_2\cos\sqrt{k}t$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) Αν $b \neq \sqrt{k}$ τότε

$$y_\epsilon = A\sin bt + B\cos bt$$

όπου y_ϵ μια ειδική λύσης (3.19).Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει πως

$$y_\epsilon'' = -Ab^2\sin bt - Bb^2\cos bt.$$

Αφού y_ϵ ειδική λύση της (3.19) ικανοποιεί την σχέση

$$y_\epsilon'' + ky_\epsilon = \sin bt \Leftrightarrow A = \frac{1}{k - b^2} \quad \text{και} \quad B = 0$$

Άρα μια ειδική λύση της (3.19) είναι

$$y_\epsilon = \frac{1}{k-b^2}\sin bt.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \sin\sqrt{k}t + c_2\cos\sqrt{k}t + \frac{1}{k-b^2}\sin bt.$$

(ii) Αν $b = \sqrt{k}$, τότε είναι μια ειδική λύση της (3.19) θα είναι της μορφής :

$$y_\epsilon = t(A\sin bt + B\cos bt).$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει πως

$$y_\epsilon'' = -2Ab\sin bt + 2Bb\cos bt - b^2(A\sin bt + B\cos bt).$$

Αφού y_ϵ ειδική λύση της (3.19) ικανοποιεί την σχέση

$$y_\epsilon'' + ky_\epsilon = \sin bt \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2b} \quad \text{και} \quad B = 0.$$

Άρα μια ειδική λύση της (3.19) είναι

$$y_\epsilon = -\frac{t}{2b}\sin bt.$$

Αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \sin\sqrt{k}t + c_2\cos\sqrt{k}t - \frac{t}{2b}\sin bt.$$

■

3.12 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = e^t - te^{2t}. \tag{3.21}$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποίηστε την αρχή της υπέρθεσης.

Λύση. Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (3.21) :

$$r^4 - 5r^2 + 4 = 0 \tag{3.22}$$

η οποία έχει ρίζες τα $1, 2, -1, -2$. Άρα η αντίστοιχη ομογενής δ.ε. της (3.21) είναι

$$y_{o\mu} = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}.$$

Αρχικά αναζητούμε μια ειδική λύση για την διαφορική εξίσωση :

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = e^t \tag{3.23}$$

Αφού το 1 είναι ρίζα του χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε μια ειδική λύση είναι της μορφής :

$$y_{1\epsilon} = Ate^t.$$

και αφού ικανοποιεί την (3.23) έχουμε πως ισχύει ότι

$$y_{1\epsilon}^{(4)} - 5y_{1\epsilon}^{(2)} + 4y_{1\epsilon} = e^t \Leftrightarrow A = -\frac{1}{6}.$$

Άρα, μια ειδική λύση της (3.23) είναι

$$y_{1\epsilon} = -\frac{1}{6}te^t.$$

Έπειτα αναζητούμε ειδική λύση για την διαφορική εξίσωση :

$$y^{(4)} - 5y^(2) + 4y = -te^{2t} \tag{3.24}$$

Αφού το 2 είναι ρίζα του χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε μια ειδική λύση είναι της μορφής :

$$y_{2\epsilon} = te^{2t}(At + B)$$

και αφού ικανοποιεί την (3.24) έχουμε ότι ισχύει

$$y_{2\epsilon}^{(4)} - 5y_{2\epsilon}^{(2)} + 4y_{2\epsilon} = te^{2t} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{24} \quad \kappa\alpha\iota \quad B = \frac{19}{144}.$$

Άρα, μια ειδική λύση της (3.24) είναι

$$y_{2\epsilon} = -\frac{1}{24}t^2e^t + \frac{19}{144}te^t.$$

Τότε, έπεται πως μια ειδική λύση της (3.21) είναι

$$y_\epsilon = y_{1\epsilon} + y_{2\epsilon} = -\frac{1}{6}te^t - \frac{1}{24}t^2e^t + \frac{19}{144}te^t = -\frac{1}{24}t^2e^t - \frac{5}{144}te^t$$

Αφού γνωρίζουμε ότι ισχύει $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\epsilon(t)$ συμπεραίνουμε ότι :

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t} - \frac{1}{24}t^2e^t - \frac{5}{144}te^t.$$

■

3.13 Να κατασκευαστεί η ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης αν είναι γνωστές $\phi_1(t), \phi_2(t)$, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της.

Λύση. Έστω $\phi_1(t), \phi_2(t) \in C(I)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{3.25}$$

$a(t).b(t) \in C(I)$. Γνωρίζουμε πως η γενική λύση της (3.25) είναι

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

καθώς και $W(\phi_1(t),\phi_2(t))(t)\neq 0$.Θεωρούμε τα διανύσματα

$$(\phi_1(t),\phi_1'(t),\phi_1''(t)),\quad (\phi_2(t),\phi_2'(t),\phi_2''(t)),\quad (y,y',y'')$$

τα οποία είναι γραμμικά εξαρτημένα.Ισοδύναμα λοιπόν ισχύει ότι

$$\begin{vmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t) & y\\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) & y'\\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) & y''\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t)\\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t)\end{vmatrix}y''-\begin{vmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t)\\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t)\end{vmatrix}y'+\begin{vmatrix}\phi_1'(t) & \phi_2'(t)\\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t)\end{vmatrix}y=0$$

$$W(\phi_1(t),\phi_2(t))(t)y''-\begin{vmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t)\\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t)\end{vmatrix}y'+\begin{vmatrix}\phi_1'(t) & \phi_2'(t)\\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t)\end{vmatrix}y=0,\ W(\phi_1(t),\phi_2(t))(t)\neq 0$$

Άρα, η (3.25) έχει την μορφή :

$$y''-\frac{\begin{vmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t)\\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t)\end{vmatrix}}{W(\phi_1(t),\phi_2(t))(t)}y'+\frac{\begin{vmatrix}\phi_1'(t) & \phi_2'(t)\\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t)\end{vmatrix}}{W(\phi_1(t),\phi_2(t))(t)}y=0$$

■

3.14 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$t^2y''-5ty'+25y=0 \tag{3.26}$$

Λύση.

Παρατηρήστε ότι η (3.26) είναι δ.ε. της μορφής Euler.Θεωρούμε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο

$$r^2-6r+25\ ,$$

η οποία έχει ρίζες $r_{1,2}=3\pm 4i$, όπου προκύπτει ότι η γενική λύση της (3.26) είναι

$$y(t)=t^3[c_1\cos{(4\log t)}+c_2\sin{(4\log t)}].$$

■

3.15 Αν ϕ_1,ϕ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης :

$$(1+y^2)y''-2ty+2y=0$$

με $\phi_1(1)=\phi_1'(1)=1,\phi_2(1)=0$ και $\phi_2'(1)=2$ να υπολογιστεί η $W(\phi_1,\phi_2)(t)$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Liouville.

Λύση. Έχουμε πως $W(\phi_1,\phi_2)(1)=\begin{vmatrix}\phi_1(1) & \phi_2(1)\\ \phi_1'(1) & \phi_2'(1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$, άρα ϕ_1,ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Liouville έχουμε ότι ισχύει

$$W(t)=ce^{-\int -\frac{2t}{1+t^2}dt}=c(t^2+1)\ ,$$

όπου για $t=1$ προκύπτει πως $c=\frac{W(\phi_1,\phi_2)(1)}{2}=1$.Έτσι τελικά έχουμε πως

$$W(\phi_1,\phi_2)(t)=1+t^2.$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

4.1 Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση α-σκήσεων

1. Μια σειρά της μορφής :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$

όπου $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ και $t_0 \in \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά με κέντρο t_0.

2. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$ όπου r η ακτίνα σύγκλισης :

$$r = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Η $f(t)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \quad \textit{και} \quad f''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t - t_0)^{n-2}.$$

4. Θεωρούμε την εξίσωση :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Ένα σημείο $t_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται **ομαλό** αν οι p, q είναι αναλυτικές στο t_0.Αν μια τουλάχιστον από τις p, q δεν είναι αναλυτικές στο t_0 τότε το t_0 είναι **ιδιάζων** σημείο της εξίσωσης.

5.

Θεώρημα 4.1. *Έστω, p, q συναρτήσεις αναλυτικές στο $t_0 \in \mathbb{R}$,με αντίστοιχές σειρές :*

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t - t_0)^n \quad \text{και} \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t - t_0)^n$$

συγκλίνουσες για $|t - t_0| < R$.Τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(t_0) = a_0$ και $y'(t_0) = a_1$ είναι αναλυτική στο t_0 με σειρά Taylor που συγκλίνει τουλάχιστον για $|t - t_0| < R$.

4.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

4.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' - y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y' - y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + ty' + y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$(t^2 - 4)y'' + 3ty' + y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y'' + t^2y' + 2ty = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών και να προσδιοριστούν οι 3 πρώτοι όροι της λύσης.

4.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 4

4.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' - y = 0 \tag{4.1}$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση. Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.Τότε, αφού ισχύει πως $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.$$

Από την (4.1) έχουμε πως

$$y'' - y = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n]t^n = \Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

όπου προκύπτει πως $a_{2n} = \dfrac{a_0}{2n!}$ και $a_{2n+1} = \dfrac{a_1}{(2n+1)!}$.Τελικά λοιπόν έχουμε πως η λύση της (4.1) είναι :

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

■

4.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + y = 0 \tag{4.2}$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση. Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.Τότε, αφού ισχύει πως $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.$$

Από την (4.2) έχουμε πως

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]t^n \Leftrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

όπου προκύπτει ότι $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n a_0}{2n!}$ και $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$.Τελικά λοιπόν έχουμε ότι η λύση της (4.2) είναι :

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = a_0 \cos t + a_1 \sin t.$$

■

4.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y' - y = 0 \tag{4.3}$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση. Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Τότε, αφού ισχύει πως

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

από την (4.3) προκύπτει πως

$$y' - y = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - a_n] t^n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

Άρα έχουμε πως $a_n = \frac{a_0}{n!}$, δηλαδή η λύση της (4.3) είναι

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = a_0 e^t.$$

■

4.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + ty' + y = 0 \tag{4.4}$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση. Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.Τότε, αφού ισχύει πως, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n.$$

Από την (4.4) έχουμε πως

$$y'' + ty' + y = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n] t^n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

Από την παραπάνω αναδρομική ακολουθία προκύπτει πως

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n \cdot n!}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{2^n \cdot n! (-1)^n a_1}{(2n+1)!}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η λύση της (4.4) είναι :

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n \cdot n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} t^{2n+1} = a_0 e^{-t^2/2} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

■

4.5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$(t^2-4)y''+3ty'+y=0 \tag{4.5}$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση. Θεωρούμε την λύση $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$.Τότε, αφού ισχύει πως $y'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}$ προκύπτει πως

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.$$

Από την (4.5) έχουμε πως,

$$(t^2-4)y''+3ty'+y=0\Leftrightarrow t^2y''-4y''+3ty'+y=0$$

$$t^2\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+3t\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^2a_n-4(n+2)(n+1)a_{n+2}]t^n=0\Leftrightarrow a_{n+2}=\frac{n+1}{4(n+2)}a_n$$

που προκύπτει πως $a_{2n}=\dfrac{[1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)]}{4^n\cdot[2\cdot4\cdot6\cdots(2n)]}a_0=\dfrac{(2n)!}{4^{2n}\cdot(n!)^2}a_0$ και $a_{2n+1}=\dfrac{(k!)^2}{(2k+1)!}a_1$ άρα η λύση της (4.5) είναι

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^{2n}\cdot(n!)^2}t^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}t^{2n+1}.$$

■

4.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y''+t^2y'+2ty=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \tag{4.6}$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών και να προσδιοριστούν οι 3 πρώτοι όροι της λύσης.

Λύση. Θεωρούμε την λύση $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$.Τότε, αφού ισχύει πως, $y'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}$ προκύπτει πως

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)a_{n+3}t^{n+1}+2a_2.$$

Από την (4.6) έχουμε πως,

$$y''+t^2y'+2ty=0\Leftrightarrow 2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+2)a_{n+3}+(n+2)a_n]t^{n+1}=0$$

που συμπεραίνουμε ότι $a_2=0$ και $a_{n+3}=-\dfrac{a_n}{n+3}$.Από Π.Α.Τ. έχουμε ότι $y(0)=a_0=1$ και $y'(0)=a_1=0$, άρα οι πρώτοι 3 όροι της (4.6) είναι

$$y_1(t)=a_0=1\quad y_2(t)=a_1t=0\quad y_3(t)=a_2t^2=0$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

5.1 Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση α-σκήσεων

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

1.

Ορισμός 5.1. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n\times n}$) ένας τετραγωνικός πίνακας.Το ζεύγος (λ, u), όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και $u \in \mathbb{C}^n$ με $u \neq 0$ λέγεται ζεύγος* ***ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος*** *του πίνακα A αν και μόνο άν $Au = \lambda u$.*

2.

Ορισμός 5.2. *Το πολυώνυμο βαθμού n $\phi(\lambda) := |A - \lambda I_n|$ λέγεται* ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *του A, η εξίσωση $\phi(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$ ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του A, ενώ το σύνολο $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} :\ \phi(\lambda_i) = 0\}$ δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του A, λέγεται φάσμα του A.*

3.

Ορισμός 5.3. *Αν $\lambda_i \in \sigma(A)$ τότε ο διανυσματικός χώρος N_{λ_i} που ορίζεται ως $N_{\lambda_i} = \{u_j \in \mathbb{C}^n :\ (A - \lambda_i)u_j = 0\}$ ορίζεται ως* ***ιδιόχωρος*** *του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.*

4.

Ορισμός 5.4. *Ο μεγιστό αριθμός d_i των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i, δηλαδή $d_i := \dim N_{\lambda_i}$ ονομάζεται* ***γεωμετρική πολλαπλότητα*** *της ιδιοτιμής λ_i.*

5.

Ορισμός 5.5. *Η πολλαπλότητα τ_i της ιδιοτιμής λ_i ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\phi(\lambda)$ ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ_i.*

6.

Ορισμός 5.6. *Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n\times n}$) λέγεται **απλή δομής** αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$ ισχύει ότι $d_i = \tau_i$.Αν υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$ ώστε $\sigma_i < \tau_i$ τότε ο πίνακας A λέγεται **μη-απλής δομής**.*

7. Το διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{C}^n$) ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης p $(p \geq 1)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$(A-\lambda I_n)^p \quad \kappa\alpha\iota \quad (A-\lambda I_n)^{p-1} \neq 0.$$

Μια αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k που παράγεται από το απλο ιδιοδιάνυσμα u_1 είναι ένα σύνολο $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ από k γενικευμένα ιδιοδιανύσμα ώστε :

$$\begin{gathered}(A-\lambda I_n)u_k = u_{k-1}\\ (A-\lambda I_n)u_{k-1} = u_{k-2}\\ \vdots\\ (A-\lambda I_n)u_2 = u_1\end{gathered}$$

Επειδή, το u_1 είναι απλό ιδιοδιάνυσμα και ισχύει $(A-\lambda I_n)u_1$ τότε $(A-\lambda I_n)^j u_j = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots, k$.

Γραμμικά Συστήματα

8. Σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της γενικής μορφής :

$$\begin{gathered}y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ \vdots\\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)\end{gathered}$$

όπου y_i είναι οι άγνωστες συναρτήσεις του t και οι f_i ορίζονται σε ένα τόπο $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.Θέτοντας,

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ \vdots\\ f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)\end{bmatrix}$$

το σύστημα παίρνει τη μορφή: $y'(t) = f(t, y)$, που αντιστοιχεί σε μια διανυσματική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

9.

Θεώρημα 5.1. *Έστω ο πίνακας $A(t) = [a_{ij}(t)],\ 1 \leq i, j \leq n$ και η διανυσμάτική συνάρτηση $b(t) = \left[b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t)\right]^T\right]$ είναι συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$ και $t_0 \in I$.Τότε, το Π.Α.Τ. :*

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),\ y(t_0) = y_0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα I.

10.

Ορισμός 5.7. ***Ομογενή γραμμική εξίσωση*** *λέμε την διαφορική εξίσωση της μορφής :*

$$y'(t) = A(t)y(t)\ (*)$$

όπου $t \in I$ με $I \subset \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με στοιχεία $a_{ij}(t),\ i,j = 1,2,\cdots,n$ συναρτήσεις του t συνεχείς για $t \in I$.

11. Η λύση $\phi(t)$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\phi(t_0) = y_0$.

12. Η διάσταση του διανυσματικού χώρου L_0 των λύσεων της $(*)$ στο $\mathbb{R}$ είναι n.

13.

Ορισμός 5.8. *Μια βάση $B = \{\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)\}$ του χώρου λύσεων L_0 της $(*)$ λέμε ότι αποτελεί ένα* ***θεμελιώδες σύστημα λύσεων***.

14.

Ορισμός 5.9. *Ο $n \times n$ πίνακας $\Phi(t) = (\phi_1(t)\ \phi_2(t)\ \cdots\ \phi_n(t))$ που δημιουργείται με στήλες τα στοιχεία $\phi_i(t)$ της βάσης B λέγεται* ***θεμελιώδης πίνακας λύσεων*** *της εξίσωσης.*

15 Ο $\Phi(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της εξίσωσης $(*)$ αν και μόνο αν $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

16.

Ορισμός 5.10. *Έστω $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ λύσεις της δ.ε. $(*)$ και $\Phi(t)$ ο αντίστοιχος θεμελιώδης πίνακας της εξίσωσης.Τότε, η ορίζουσα $W(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)(t) = |\Phi(t)|$ ονομάζεται* ***ορίζουσα Wronski*** *των $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$.*

17

Θεώρημα 5.2. *Οι λύσεις $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ της $(*)$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν $W(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \neq 0$.*

18. Έστω $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\} \subset L_0$.Τότε, ισχύει η ακόλουθη προόταση : $W(t) = 0$ για κάθε $t \in I$ αν και μόνο αν $W(t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 \in I$.

19. Αν $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ είναι ένα σύστημα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $(*)$ από το 6. προκύπτει ότι η τυχούσα λύση $y(t)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$. Ισοδύναμα υπάρχουν $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ ώστε :

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t) = \begin{bmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix} = \Phi(t)\cdot C.$$

19.

Θεώρημα 5.3. *Αν $\Phi(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της διαφορικής εξίσωσης και C ένας $n \times n$ σταθερός αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο $\Phi(t) \cdot C$ είναι επίσης θεμελιώδης πίνακας.Ακόμη αν $\Phi_1(t)$ είναι ένας άλλος θεμελιώδης πίνακας για την ίδια διαφορική εξίσωση, τότε υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $|C| \neq 0$ ώστε $\Phi_1(t) = \Phi(t) \cdot C$.*

20.

Ορισμός 5.11. *Ο πίνακας $G(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ λέγεται **κύριος πίνακας** (ή πίνακας μεταφοράς) για την διαφορική εξίσωση $(*)$.*

21. **Πρόταση.**

    (i) Ο $G(t, t_0)$ είναι ανεξάρτητος από τον θεμελιώδη πίνακα $\Phi(t)$ που παράγει.

    (ii) Για κάθε $t, t_0 \in I$ έχουμε : $\dfrac{\partial G(t, t_0)}{\partial t} = A(t)G(t, t_0)$.

    (iii) Για κάθε $t \in I$ έχουμε $G(t, t) = I_n$.

    (iv) Για κάθε $t, t_0 \in I$ έχουμε $G^{-1}(t, t_0) = G(t_0, t)$.

    (v) Για κάθε $t_1, t_2, t_3 \in I$ έχουμε $G(t_0, t_2) = G(t_2, t_1)G(t_1, t_0)$.

22. Αν $G(t, t_0)$ είναι ο κύριος πίνακας της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(*)$, τότε η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(t_0) = y_0$ είναι
$$y(t) = G(t, t_0)y_0.$$

23. Έστω $\Phi(t)$ ένας θεμελιώδης πίνακας την $y' = Ay$, όπου A σταθερός πίνακας.Ορίζουμε τον πίνακα
$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

24. Ο κύριος πίνακας e^{At} έχει τις εξής ιδιότητες :

    (i) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$

    (ii) $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$

    (iii) $\frac{d(e^{At})}{dt} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$

    (iv) $e^{At} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$

25.

Ορισμός 5.12. *Μια συλλογή $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t),\ t \in I$ λύσεων της*
$$x^n(t) + a_1 x^{n-1}(t) + \cdots + a_n x(t) = 0 \ (2)$$
*λέγεται ένα **θεμελιώδες σύστημα λύσεων** αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I.*

26.

Θεώρημα 5.4. *Για την διαφορική εξίσωση (2) πάντοτε υπάρχει ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων.*

27.

Θεώρημα 5.5. *Αν $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2), τότε οι αντίστοιχες λύσεις της ισοδύναμης εξίσωσης $y' = Ay$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες στο I.*

28.

Θεώρημα 5.6. *Έστω $x = x(t)$ μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) και $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων αυτής.Τότε, υπάρχουν $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t),\ \forall t \in I.$$

29.

Ορισμός 5.13. *Αν $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2) ορίζουμε την ορίζουσα Wronski αυτών ως εξής :*

$$W(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)(t) := \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \cdots & \phi_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

5.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

5.1 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5.2 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} y.$$

5.3 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} y.$$

5.4 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \log t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}, \ t > 0$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} y$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχή στην αρχική συνθήκη $y(1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

5.5 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y.$$

5.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.7 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.8 Θεωρούμε το σύστημα :

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x.$$

(i) Να βρεθεί η γενική του λύση.

(ii) Να προσδιοριστεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις να τείνουν στο 0 καθώς το $t \to \infty$.

5.9 Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$y' = Ay + b(t), \quad y(0) = y_0 \ ,$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ ,$$

και ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ο πίνακας e^{At} και η λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.

5.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 5

5.1 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$ μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

όπου συμπεραίνεται πως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -3$.

Ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές άρα είναι απλής δομής και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 5 προκύπτουν από τη λύση του συστήματος :

$$(A - 5I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ ,$$

άρα έχουμε πως

$$N_5 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} : (A - 5I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

δηλαδή $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 5.Με ανάλογο τρόπο το $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -3.Τότε, γνωρίζουμε πως, $A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου P ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ που προκύπτει από τα u_1 και u_2.Ακόμη για τον πίνακα e^{At} ισχύει ότι ισούται με

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Τελικά η γενική λύση του Π.Α.Τ. δίνεται από τον τύπο $y(t) = e^{At} y(0) = P \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1} y_0$ όπου θέτοντας $C = P^{-1} y(0)$ έχουμε πως,

$$y(t) = P \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} C.$$

με την αντικατάσταση $t = 0$ προκύπτει πως $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ δηλαδή η λύση του συστήματος να ισούται με

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} + 2e^{-3t} \\ 2e^{5t} + e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

■

5.2 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} y.$$

Λύση. Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0 \ ,$$

όπου συμπεραίνεται πως οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 1$.

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -2$ αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$(A + 2I_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

όπου μέσω της 5.1 συμπεραίνεται πως, $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -2.Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι το $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.Τότε, συμπεραίνουμε πως, ο A είναι απλής μορφής και μάλιστα $A = P \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ που προκύπτει από τα ιδιοδιανύσματα u_1, u_2 και u_3.Ακόμη για τον πίνακα e^{At} ισχύει ότι ισούται με

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Τελικά η γενική λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση $y(t) = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1} y_0$ όπου θέτοντας $C = P^{-1}y_0$ προκύπτει πως, η γενική λύση του συστήματος ισούται με

$$y(t) = \begin{bmatrix} -(c_1 + c_2)e^{-2t} + c_3 e^t \\ c_1 e^{-2t} + c_3 e^t \\ c_2 e^{-2t} + c_3 e^t \end{bmatrix} , \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

5.3 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} y.$$

Λύση. Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ και μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.Για την εύρεση ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχή στην ιδιοτιμή $2i$ αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$(A - 2iI_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\ ,$$

όπου προκύπτει πως ένα τέτοιο είναι το $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.Άρα δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσης του συστήματος είναι

$$\phi_1(t) = \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad \phi_2(t) = \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή η γενική λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση :

$$\phi(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

5.4 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \log t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix},\ t > 0$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} y$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχή στην αρχική συνθήκη $y(1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Λύση. Για να δείξουμε ότι ο Φ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} \Phi\ ,$$

όπου η επαλήθευση του αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Για την επίλυση του συστήματος ομοίως με την 5.1 δείξτε ότι ο πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{t}$ με $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t} \end{bmatrix}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους.Τότε, έχουμε πως, $e^{A(t-1)} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου P ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}$.Θέτοντας $C = P^{-1}y(1)$ έχουμε πως, η γενική λύση του συστήματος ισούται με

$$y(t) = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} C.$$

Λόγω της αρχικής παραμέτρου για $t = 1$ έχουμε τελικά,

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}.$$

■

5.5 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y.$$

Λύση. Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης :

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^3 = 0 \ ,$$

όπου προκύπτει ότι $\lambda = -1$ είναι η μόνη διακεκριμένη ιδιοτιμή του A.Λύνουμε το παρακάτω σύστημα :

$$(A + I_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

όπου προκύπτει ότι μια βάση του διανυσματικού χώρου N_{-1} είναι το σύνολο $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \}$ με $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής -1 δηλαδή $\dim N_{-1} = 1 \neq 3$ που σημαίνει πως ο A είναι πίνακας μη-απλής δομής.Τότε σκοπός μας είναι να ανάξουμε τον πίνακα A σε πίνακα μορφής Jordan με τη χρήση γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων.Γνωρίζουμε πως, για τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα u_2, u_3 ισχύει :

$$\begin{matrix} (A + I)u_3 = u_2 \\ (A + I)u_2 = u_1 \end{matrix} \Leftrightarrow u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε, έχουμε πως $A = P \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.Άρα προκύπτει πως

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Με όμοιο τρόπο με την 5.1 καταλήγουμε ότι η γενική λύση του συστηματος είναι :

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2 - c_2 - c_3t \\ c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2 + 2c_2 + 2c_3t - c_3 \\ -c_1 - c_2t - \frac{1}{2}c_3t^2 + 2c_3 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$$

■

5.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ήδη σε κανονική μορφή $Jordan$ άρα, άμεσα συμπεραίνουμε πως, $e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$.Τώρα για την επίλυση του Π.Α.Τ. γνωρίζουμε ότι η γενική λύση του συστήματος ικανοποιεί την σχέση :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds \\ &= \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds \\ &= e^t \int_0^t e^{A(-s)}b(s)ds \\ &= \begin{bmatrix} e^t \int_0^t e^{-s}ds \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

5.7 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Λύστε την άσκηση με τρόπο όμοιο με την 5.1 και δείξτε ότι

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + -\frac{2}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

5.8 Θεωρούμε το σύστημα :

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x.$$

(i) Να βρεθεί η γενική του λύση.

(ii) Να προσδιοριστεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις να τείνουν στο 0 καθώς το $t \to \infty$.

Λύση. (i) Η επίλυση του συστήματος είναι όμοια με την 5.1 και τελικά προκύπτει πως :

$$x(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Παρατηρήστε πως

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_1 = 0$$

άρα για το σύνολο των αρχικών συνθηκών ισχύει πως $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix},\ c_2 \in \mathbb{R}$.

■

5.9 Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$y' = Ay + b(t), \quad y(0) = y_0\ ,$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,$$

και ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ο πίνακας e^{At} και η λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.

Λύση. Αρχικά για την εύρεση του πίνακα e^{At} έχουμε πως

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^t \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Έπειτα γνωρίζουμε ότι η γενική λύση του Π.Α.Τ. δίνεται από την σχέση :

$$y(t) = e^{At} y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s) ds$$

όπου ο υπολογισμός της $y(t)$ αφήνεται για τον αναγνώστη. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

6.1 Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1.

   Ορισμός 6.1. *Η εξίσωση $y' = f(t, y)$ λέγεται **αυτόνομη** αν η f δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή t, δηλαδή είναι της μορφής $f(y)$.*

2.

   Ορισμός 6.2. *Ο χώρος φάσης της εξίσωσης $y' = f(y)$ είναι ο άξονας των y.Το $\bar{y}$ λέγεται **σημείο ισορροπίας** αν $f(\bar{y}) = 0$.Το διάγραμμα φάσης είναι ο άξονας των y μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που καταδεικνύουν το πρόσημο της κλίσης της λύσης.*

3. Συμβολίζουμε τη λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.: $y' = f(y),\ y(0) = y_0$ με $\phi(t, y_0)$.Εξ' ορισμού ισχύει ότι $\phi(0, y_0) = y_0$.

4. Έστω ότι ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων του Π.Α.Τ.Τότε, αν $\bar{y}$ σημείο ισορροπίας $\phi(t, \bar{y}) \equiv \bar{y}$ για όλα τα t. (η σταθερή λύση $y(t) = y_0$ ικανοποιεί τόσο την δ.ε. όσο και την αρχική συνθήκη και από το μονοσήμαντο των λύσεων είναι η μοναδική λύση).Αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας, τότε η $\phi(t, y_0)$ δεν είναι ποτέ ίση με σημείο ισορροπίας.Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας τότε, η $t \to f(\phi(t, y_0))$ δεν αλλάζει πρόσημο στο χρόνο.Επομένως σε αυτή τη περίπτωση $\phi(t, y_0)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα.Επίσης λόγω του μονοσήμαντου της λύσης, η $\phi(t, y_0)$ δεν μπορεί να φτάσει το σημείο ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο.

5.

   Ορισμός 6.3. *Το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ λέγεται **ευσταθές** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε αν $|y - \bar{y}| < \delta$ να ισχύει*

$$\phi(t, y) - \phi(t, \bar{y}) < \epsilon$$

για $t \geq 0$.Το $\bar{y}$ λέγεται ***ασυμπτωτικά ευσταθές*** *αν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει $\eta > 0$ ώστε αν $|y_0 - \bar{y}| < \eta$ να ισχύει*

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t, y_0) = \bar{y}.$$

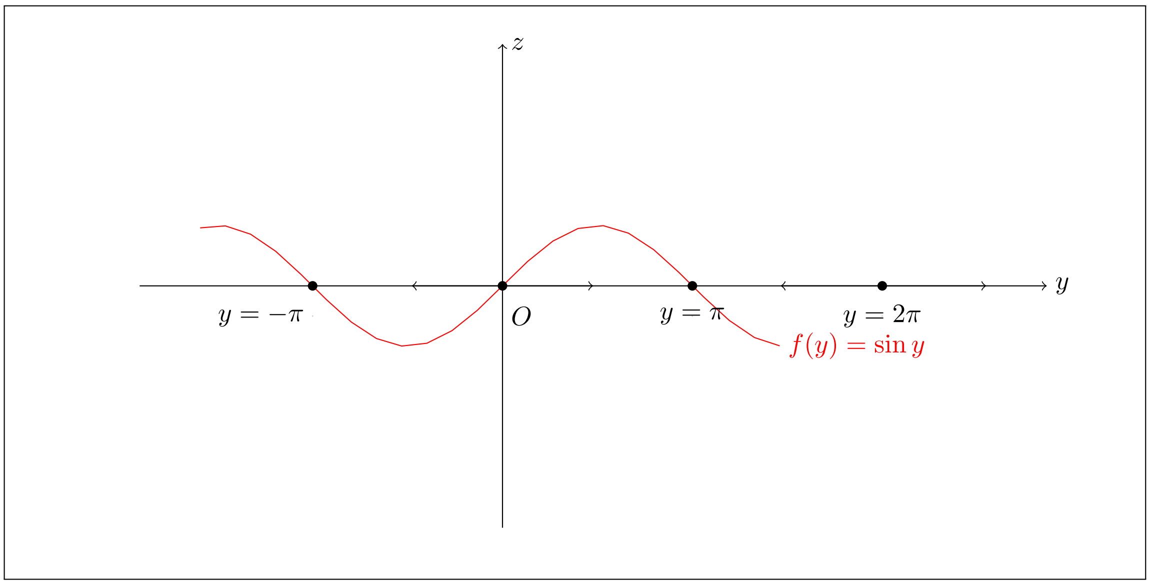
Τέλος το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ λέγεται ***ασταθές*** *αν δεν είναι ευσταθές.*

6. Στην περίπτωση που $f'(\bar{y}) \neq 0$,τότε $\bar{y}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν $f'(\bar{y}) < 0$ και ασταθές όταν $f'(\bar{y}) > 0$.

7. Παράδειγμα : Η αυτόνομη διαφορική εξίσωση: $y' = \sin y$ έχει σημεία ισορροπίας :

$$y = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

   Το διάγραμμα φάσης είναι :



   Τα σημεία ισορροπίας $y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ είναι ασταθή σημεία ισορροπίας και τα $y = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας.

8.

   Ορισμός 6.4. *Μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων της μορφής*

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y),$$

   όπου σε κάθε τιμή της παραμέτρου μ αντιστοιχεί μια διαφορική εξίσωση, καλέιται μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορικών εξισώσεων.

9.

Ορισμός 6.5. *Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση με παράμετρο μ*

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y).$$

Η τιμή $\bar{\mu}$ της παραμέτρου μ για την οποία έχουμε αλλαγή του αριθμού των σημείων ισορροπίας ή αλλαγή της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας λέγεται ***τιμή διακλάδωσης****.*

10.

Ορισμός 6.6. *Αν έχουμε ενα πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο εξαρτάται από μια μεταβλητή λ, οι τιμές του λ για τις οποίες το π.σ.τ. έχει λυση εκτός της μηδενικής ονομάζονται* ***ιδιοτιμές*** *και οι αντίστοιχες λύσεις,* ***ιδιοσυναρτήσεις ή ιδιολύσεις*** *του π.σ.τ. Το σύνολο των ιδιοτιμών ονομάζεται* ***φάσμα*** *του π.σ.τ.*

6.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

6.1 Να γίνουν τα διαγράμματα φάσης για τις κάτωθι διαφορικές εξισώσεις :

$$(i)\ y' = y^2 \qquad (ii)\ y' = (1+y)^2 \qquad (iii)\ y' = 1 + y^2.$$

6.2 Να γίνει το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 3y + 2.$$

6.3 Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 6y - 16$$

και να βρεθούν το $\lim_{t\to\infty} y(t)$ που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες :

$$(i)\ y(0) = 0 \qquad (ii)\ y(0) = -3 \qquad (iii)\ y(0) = 8.$$

6.4 Να γίνει το δίαγραμμα φάσης για την διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dt} = (y-2)\sin y,\ -\pi \le y \le \pi.$$

6.5 Να γίνουν τα διαγράμματα διακλάδωσης των διαφορικών εξίσώσεων :

$$(i)\ y' = y^2 - 2y + 2\mu \qquad (ii)\ y' = y^2 + 4y + \mu \qquad (iii)\ y' = \mu - y.$$

6.6 Να λυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών :

$$(i)\ \begin{cases} x'' + x = t,\ t \in [0,\pi] \\ x(0) - x(\pi) = 0 \\ x'(0) - x'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x'' + x = 0,\ t \in [0,\pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

6.7 Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών :

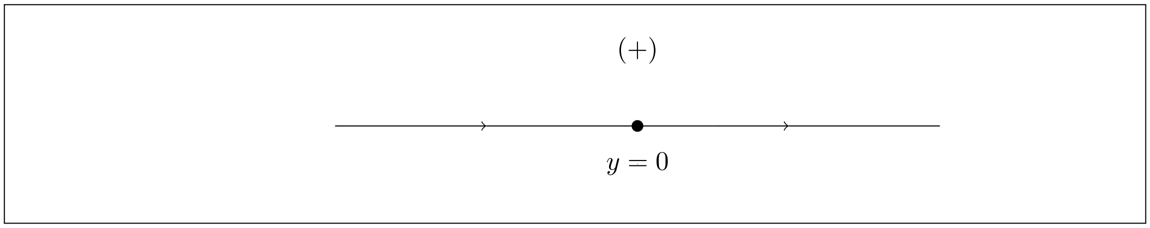
$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0,\ t \in [0,\pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}.$$

6.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 6

6.1 Να γίνουν τα διαγράμματα φάσης για τις κάτωθι διαφορικές εξισώσεις :

$$(i)\ y' = y^2 \qquad (ii)\ y' = (1+y)^2 \qquad (iii)\ y' = 1 + y^2.$$

Λύση. (i) Λύνουμε την εξίσωση $f(y) = y^2 = 0$, άρα $\bar{y} = 0$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας.Μάλιστα παρατηρούμε ότι $f(y) > 0$ για κάθε $y \neq \bar{y}$ άρα, το διάγραμμα φάσης είναι



(ii) Η λύση είναι όμοια με το (i).

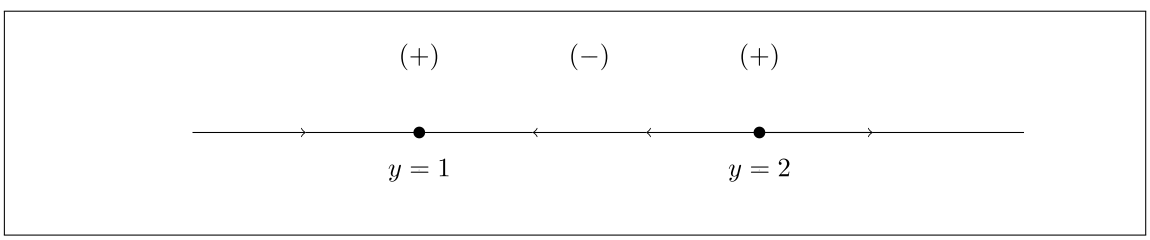
(iii) Λύση όμοια με το (i) με τη διαφοροποίηση ότι η $f(y) = 1+y^2$ δεν έχει ρίζα άρα η διαφορική εξίσωση δεν έχει σημεία ισορροπίας.

■

6.2 Να γίνει το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 3y + 2.$$

Λύση. Λύνουμε την εξίσωση $f(y) = y^2 - 3y + 2 = 0$ και παρατηρούμε ότι $\bar{y} = 1$ και $\bar{y} = 2$ τα μοναδικά σημεία ισορροπίας.Βρίσκουμε το πρόσημο της $f(y)$ για τις διάφορες τιμές του y και προκύπτει πως το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης είναι το :



όπου παρατηρούμε ότι το $\bar{y} = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, ενώ το $\bar{y} = 2$ είναι ασταθές. ■

6.3 Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης :

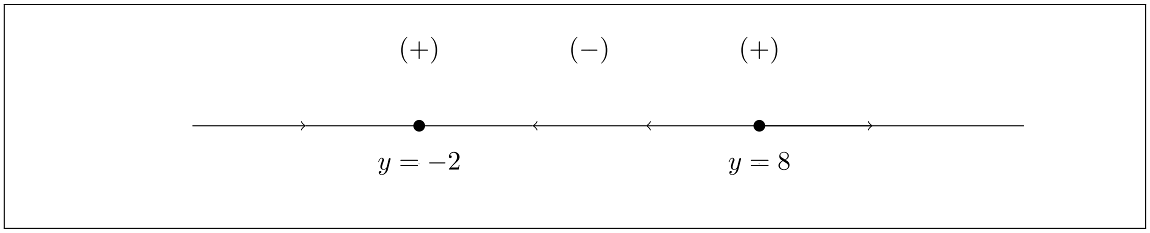
$$y' = y^2 - 6y - 16$$

και να βρεθούν το $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες :

$$(i)\ y(0) = 0 \qquad (ii)\ y(0) = -3 \qquad (iii)\ y(0) = 8.$$

Λύση.

Όμοια με 6.2 έχουμε πως, το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης είναι :



(i) Για την πρώτη περίπτωση αφού $-2 < y(0) < 8$ από το μονοσήμαντο της λύσης του Π.Α.Τ. έχουμε πως, $-2 < y < 8$ και μάλιστα αφού το $\bar{y} = -2$ έχει σημείο ευστάθειας τότε έχουμε πως,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -2.$$

(ii) Για $y(0) = -3$ έχουμε πως, $y(0) < -2$ και από το μονοσήμαντο λύσης του Π.Α.Τ. έχουμε πως, $y < -2$ και αφού $\bar{y} = -2$ σημείο ευστάθειας τότε,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -2.$$

(iii) Για $y(0) = 8$ από το μονοσήμαντο λύση του Π.Α.Τ. έχουμε πως, $y(t) = 8$ και μάλιστα

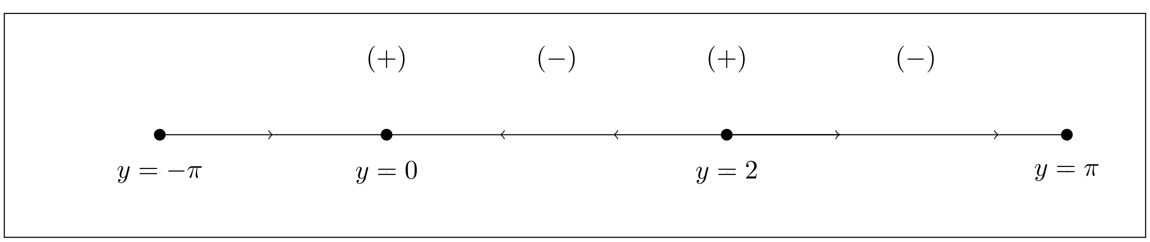
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 8.$$

■

6.4 Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dt} = (y-2)\sin y, \ -\pi \leq y \leq \pi.$$

Λύση. Λύνουμε την εξίσωση $f(y) = (y-2)\sin y = 0$, όπου προκύπτει πως $\bar{y} = 2$ και $\bar{y} = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ είναι σημεία ισορροπίας.Ελέγχουμε το πρόσημο της $f(y)$ και έχουμε πως, το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης είναι :

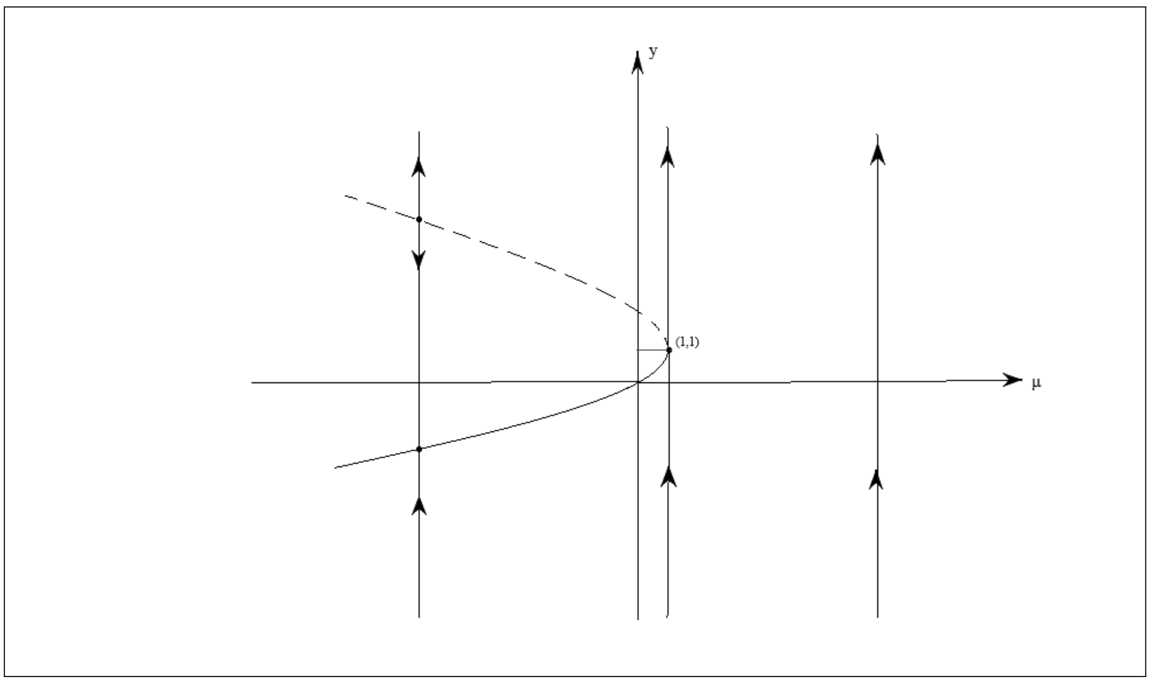


■

6.5 Να γίνουν τα διαγράμματα διακλάδωσης των διαφορικών εξισώσεων :

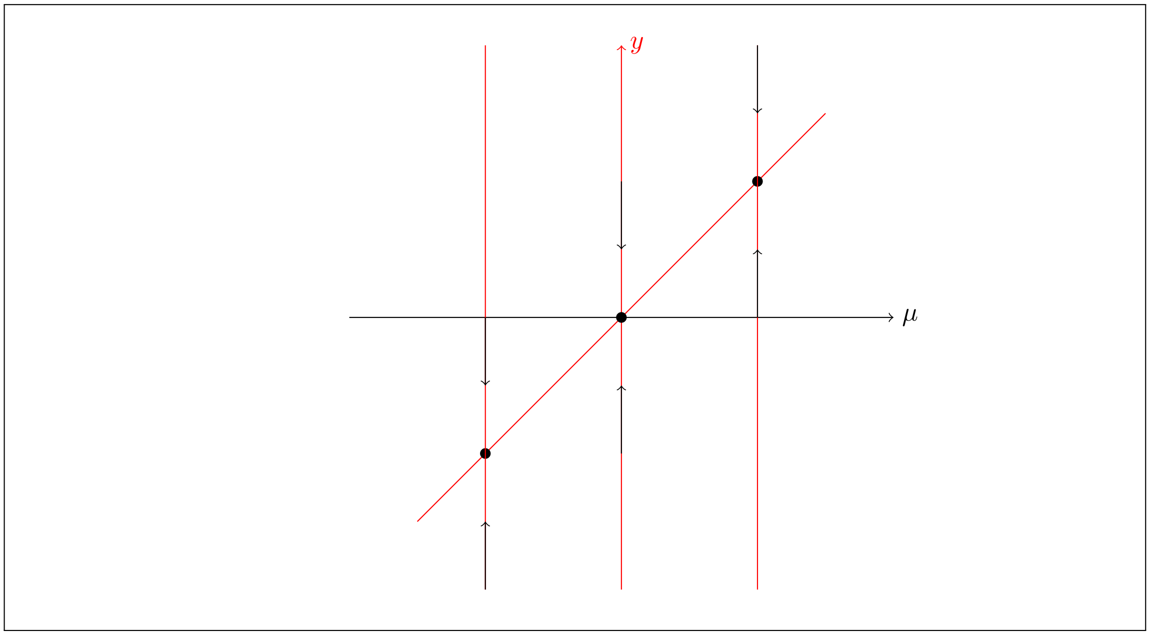
$$(i)\ y' = y^2 - 2y + \mu \qquad (ii)\ y' = y^2 + 4y + \mu \qquad (iii)\ y' = \mu - y.$$

Λύση. (i) Έχουμε πως $y' = f_\mu(y)$ με $f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu = (y-1)^2 + \mu - 1$.Τότε, ελέγχουμε την γραφική παράσταση της $f_\mu(y) = 0$ για την εύρεση του διαγράμματος διακλάδωσης όπου $\mu = 1$ είναι η τιμή της διακλάδωσης με $(1, 1)$ η κορυφή της παραβολής τότε το διάγραμμα διακλάδωσης είναι :



(ii) Η λύση είναι όμοια με το (i).

(iii) Έχουμε την διαφορική εξίσωση $y' = f_\mu(y)$ όπου $f_\mu(y) = \mu - y$ όπου παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει άπειρα σημεία ισορροπίας τα $\bar{y} = \mu$ και μάλιστα $f_\mu(y) > 0 \Leftrightarrow \mu > y$ ενώ $f_\mu(y) < 0 \Leftrightarrow \mu < y$.Τότε έχουμε πως, το διάγραμμα διακλάδωσης είναι :



■

6.6 Να λυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών :

$$(i)\begin{cases} x''+x=t,\ t\in[0,\pi] \\ x(0)-x(\pi)=0 \\ x'(0)-x'(\pi)=0 \end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} x''+x=0,\ t\in[0,\pi] \\ x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{cases}$$

Λύση. (i) Αρχικά λύνουμε την διαφορική εξίσωση

$$x''+x=0$$

όπου μέσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2+1=0$ συμπεραίνουμε ότι η λύση της $x_{o\mu}$ είναι :

$$x_{o\mu}(t)=c_1\cos t+c_2\sin t.$$

Ακόμη υπολογίζουμε πως, $x'_{o\mu}(t)=-c_1\sin t+c_2\cos t$ και παρατηρούμε ότι μια ειδική λύση είναι η $x_\epsilon(t)=t$.Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+t \quad \kappa\alpha\iota \quad x'(t)=-c_1\sin t+c_2\cos t+1.$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει το παρακάτω αλγεβρικό σύστημα :

$$\begin{cases} 2c_1-\pi=0 \\ 2c_2=0 \end{cases}$$

όπου προκύπτει ότι η μοναδική λύση είναι η $(c_1,c_2)=(\frac{\pi}{2},0)$ δηλαδή η λύση του π.σ.τ. είναι

$$x(t)=\frac{\pi}{2}\cos t+t,\ t\in[0,\pi].$$

(ii) Αρχικά λύνουμε την διαφορική εξίσωση

$$x'' + x = 0$$

όπου μέσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 1 = 0$ συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι :

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως, $c_1 = 0$ άρα, η λύση του π.σ.τ. είναι

$$x(t) = c \sin t,\ t \in [0, \pi].$$

■

6.7 Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών :

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0,\ t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Λύση. Διακρίνουμε περιπτώσεις σχετικά με τις τιμές του λ :

(i) Αν $\lambda = 0$, εχουμε πως $x'' = 0$ όπου από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως, η λύση του π.σ.τ. έιναι η τετριμμένη

$$x(t) = 0.$$

(ii) Αν $\lambda < 0$, έχουμε πως η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t}$$

όπου από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως η λύση του π.σ.τ. είναι η τετριμμένη $x(t) = 0$.

(iii) Αν $\lambda > 0$, έχουμε πως η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} t + c_2 \sin \sqrt{\lambda} t\ ,$$

όπου από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως,

$$c_1 = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad c_2 \sin \sqrt{\lambda} t = 0.$$

Για να έχει το π.σ.τ. μη-τετριμμένες λύσεις πρέπει να ισχύει πως, $\sin \sqrt{\lambda}\pi \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \Leftrightarrow \lambda = n^2$.

Οι τιμές του λ κατα τις οποίο ισχύει ότι $\lambda(n) = n^2$ είναι ιδιοτιμές του π.σ.τ. ενώ οι αντίστοιχες λύσεις $x_n(t) = c \sin nt$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ.

■