

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόχειρες Σημειώσεις και Ασκήσεις

Κωνσταντίνος Μπιζάνος

Αθήνα,
20 Ιουλίου 2025

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Εξισώσεις πρώτης τάξης	9
1.1	Ορισμοί	9
1.2	Διαφορική Εξίσωση Χωριζόμενων Μεταβλητών	10
1.3	Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις	14
1.4	Εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενείς	17
1.5	Γραμμικές εξισώσεις	20
1.6	Εξίσωση Bernoulli	27
1.7	Εξίσωση Riccati	32
1.8	Ακριβείς Εξισώσεις	34
1.9	Εξισώσεις Clairaut	45
2	Θεώρημα Picard - Lindelöf	47
2.1	Εισαγωγή	47
2.2	Θεώρημα Σταθερού Σημείου	51
2.3	Απόδειξη του Θεωρήματος Picard	53

2.4	Πορίσματα του Θεωρήματος Picard - Lindelöf	56
2.5	Εφαρμογές - Ασκήσεις του Θεωρήματος	56
2.6	Ασκήσεις	61
2.7	Παράρτημα	62
3	Ποιοτική Θεωρία	63
3.1	Ορισμοί και Θεωρητικά Στοιχεία	63
3.2	Παραδείγματα	65
3.3	Πεδία Ορισμού Λύσεων Π.Α.Τ.	68
3.4	Ασκήσεις	71
4	Γραμμικές Εξισώσεις Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης	73
4.1	Προκαταρκτικά	73
4.2	Εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές	76
4.3	Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	77
4.4	Μέθοδος του Lagrange	81
4.5	Μέθοδος Απροσδιόριστων Συντελεστών	84
4.6	Εξίσωση Euler	87
4.7	Ασκήσεις	88
5	Μέθοδος Δυναμοσειρών	99
5.1	Προκαταρκτικά	99
5.2	Ομαλά σημεία	104
5.3	Εξίσωση Legendre	113
6	Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων	115

6.1	Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας	115
6.2	Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων	121
6.3	Γραμμικά Ομογενή Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων	122
6.4	Πίνακες απλής δομής	126
6.5	Πίνακες Μη Απλής Δομής	134
7	Προβλήματα Συνοριακών Τιμών	141
7.1	Εισαγωγή	141
7.2	Διάδοση θερμότητας σε ράβδο	142
7.3	Κυματική Εξίσωση	149
7.4	Η διδιάσταση εξίσωση Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες	153
7.5	Ασκήσεις	155
8	Μετασχηματισμός Laplace	157
8.1	Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί	157
8.2	Μετασχηματισμός Laplace	158
8.3	Ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace	162
8.4	Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace	165
8.5	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace	168
8.6	Εφαρμογές στην Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων	170
8.7	Εφαρμογές στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις	172
8.7.1	Εφαρμογές σε Π.Α.Τ.	172
8.7.2	Συνάρτηση Heaviside	176
8.7.3	Συνάρτηση δ - Dirac	179
8.7.4	Συνέλιξη συναρτήσεων	181

8.8 Ασκήσεις	184
--------------	-----

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν αρχείο αποτελεί ένα πακέτο σημειώσεων για το προπτυχιακό μάθημα **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις**. Έχει γίνει μια ουσιαστική προσπάθεια να καλυφθεί πλήρως το εύρος της ύλης, ενώ ταυτόχρονα διορθώθηκαν τυπογραφικά και μαθηματικά σφάλματα από την προηγούμενη έκδοση. Τα καταφέραμε; Ίσως. (Προχωράμε)

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου περιλαμβάνονται αρκετές ασκήσεις για εξάσκηση, οι οποίες **σκόπιμα** δεν συνοδεύονται από λύσεις. **Αλλά**, κάθε κεφάλαιο συνοδεύεται από αρκετά λυμένα παραδείγματα που βοηθούν τον αναγνώστη να εξοικειωθεί σταδιακά με τις νέες έννοιες.

Αν εντοπίσετε τυπογραφικά ή άλλα λάθη όπως και αν έχετε κάποια πρόταση για να βελτιωθούν οι σημειώσεις, μη διστάσετε να επικοινωνήσετε μαζί μου μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου στις παρακάτω διευθύνσεις:

- i. kostasbizanos@gmail.com
- ii. bizanosk@math.uoa.gr

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1. Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$F(t, y, y') = 0 \quad (1.1)$$

όπου F είναι μια συνάρτηση σε ένα χωρίο D . Ζητούνται όλες οι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις $y = \varphi(t)$ που ορίζονται σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και ικανοποιούν ταυτοτικά την σχέση 1.1.

Ορισμός 1.1.2. Η συνάρτηση $y = \varphi(t)$, $t \in I$ θα λέμε ότι είναι λύση της εξίσωσης 1.1 αν για κάθε $t \in I$ ισχύει ότι

- (α) $\varphi(t) \in C^1(I)$,
- (β) $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D$
- (γ) $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$.

Θεωρούμε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης λυμένης (ή κανονικής μορφής)

$$y' = f(t, y) \quad (1.2)$$

όπου η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Οι διαφορικές εξισώσεις συνήθως συνοδεύονται από αρχικές συνθήκες. Τότε αναζητούμε λύση της εξίσωσης η οποία να έχει δοσμένη τιμή σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Η διαφορική εξίσωση μαζί με μια αρχική συνθήκη ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών** και συνήθως θα συμβολίζεται με Π.Α.Τ. Άρα, η μορφή του Π.Α.Τ. για διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (λυμένης μορφής) θα είναι

$$y' = f(t, y), \quad y'(t_0) = y_0 \quad (1.3)$$

Ορισμός 1.1.3. Ορίζουμε ως **λύση του Π.Α.Τ. 1.3** στο $t_0 \in I$, η συνάρτηση

$$\varphi(t) \in C^1(I)$$

που ικανοποιεί στο I τη σχέση

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \text{για κάθε } t \in I$$

και την αρχική συνθήκη $\varphi(t_0) = y_0$.

1.2 Διαφορική Εξίσωση Χωριζόμενων Μεταβλητών

Ορισμός 1.2.1. Μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y)$$

με $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$.

Επίλυση μιας Διαφορικής Εξίσωσης Χωριζόμενων Μεταβλητών

Αν $h(y) \neq 0$, τότε ισχύει ότι

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t) dt$$

και ολοκληρώνοντας ως κατά μέλος προκύπτει ότι

$$\int \frac{dy}{h(y)} dt = \int g(t) dt + c$$

από όπου προκύπτει μια σχέση για να λύσουμε ως προς y , όποτε αυτό είναι εφικτό. Για την επίλυση του Π.Α.Τ. :

$$y'(t) = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in (a, b)$$

Από την γενική λύση βρίσκουμε c με την βοήθεια της αρχικής συνθήκης.

Παράδειγμα 1.2.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $dy = y^2 e^{-x} dx$.

Λύση. Αν $y \neq 0$, παρατηρούμε ότι

$$-\frac{dy}{y^2} = -e^{-x} dx$$

Συνεπώς, ολοκληρώνοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\int -\frac{dy}{y^2} = \int -e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = e^{-x} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{e^{-x} + c}$$

Προσοχή ! Στην αρχή υποθέσαμε ότι $y \neq 0$, όμως παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y(x) = 0$ είναι λύση της εξίσωσης, συνεπώς οφείλουμε να την συμπεριλάβουμε στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης. ■

Παράδειγμα 1.2.2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών :

$$y' = (y + 1) \cdot x, \quad y(0) = 1.$$

Λύση. Αν $y \neq -1$, ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int x dx \Leftrightarrow \log |y+1| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow e^{\log |y+1|} = e^{x^2/2+c}$$

$$\Leftrightarrow |y+1| = (e^c) \cdot e^{x^2/2}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm (e^c) \cdot e^{x^2/2} - 1$$

Αν θέσουμε

$$a = \pm e^c$$

έχουμε ότι

$$y(x) = a \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

Θέτοντας στη τελευταία σχέση $x = 0$ προκύπτει ότι $a = 2$. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$y(x) = 2 \cdot e^{x^2/2} - 1$$

Τέλος έχουμε ότι $y(x) = -1$ δεν μπορεί να αποτελεί λύση της εξίσωσης, αφού ισχύει ότι

$$y(0) = 1 \neq -1$$

■

Ιανουάριος 2023

Να προσδιοριστούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = 2te^{-y} \quad y(1) = a$$

είναι θετική.

Λύση. Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι χωριζόμενων μεταβλητών και μάλιστα

$$e^y dy = 2t dt$$

$$\Rightarrow e^y = t^2 + C$$

$$\Rightarrow y(t) = \ln(t^2 + c)$$

Έχουμε ότι $y(1) = a$, δηλαδή $\ln c + 1 = a$ συνεπώς $c = e^a - 1$. Έχουμε ότι η λύση είναι θετική, όταν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$y(t) > 0 \Rightarrow t^2 + e^a - 1 > 1 \Rightarrow e^a > 2 \Rightarrow a > \ln 2.$$

■

Ασκήσεις

1.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' - e^{x-y} = 0, \quad y(0) = 1.$$

1.2. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = \cos x \cdot (y - 1), \quad y(0) = 1.$$

1.3. Λύστε το Π.Α.Τ.

$$e^x e^y y' = e^{-y}, \quad y(0) = 0.$$

1.4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{3x^2}{3y^2 - 4}$$

και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της λύσης.

1.5. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x + 2) \sin(y) + x \cos(y) y' = 0.$$

1.6. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$(1 + x^4) y y' - x^3 (y^2 + 1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

1.7. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x^2 - 1) y y' + 2x (y + y^2) = 0, \quad x > 1.$$

1.8. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{2x}{1 + y^2}, \quad y(0) = 0$$

και να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $\mathbb{R}$.

1.9. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$3 \frac{dy}{dx} = y \cos x.$$

1.10. 1. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$x f(tx) + t g(tx) x' = 0$$

όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

2. Χρησιμοποιώντας το 1. να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2 x) x' = 0.$$

1.3 Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

Ορισμός 1.3.1. Μια συνεχής συνάρτηση $f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **ομογενής βαθμού n** ως x και y αν για κάθε $(x, y) \in D$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $(\lambda x, \lambda y) \in D$ και

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y) \quad (1.4)$$

Παράδειγμα 1.3.1. Το πολυώνυμο

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$$

είναι ομογενές βαθμού 2 ως προς x και y , γιατί

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 3(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2 f(x, y).$$

Θεώρημα 1.3.1. Αν οι συντελεστές $M(x, y)$ και $N(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού ως προς x και y , τότε η διαφορική εξίσωση

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.5)$$

λέγεται **ομογενής** και μπορεί να αναχθεί σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών μέσω του μετασχηματισμού

$$v = \frac{y}{x}.$$

Απόδειξη. Επειδή οι M και N είναι συναρτήσεις ομογενείς του ίδιου βαθμού ομογένειας, έστω k , θα έχουμε

$$\begin{aligned} M(x, y) &= M(x, vx) = x^k M(1, v), \\ N(x, y) &= N(x, vx) = x^k N(1, v). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{M(1, v)}{N(1, v)} = f(v). \quad (1.6)$$

Από την $y = vx$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx},$$

οπότε η εξίσωση 1.5 λόγω της 1.6 παίρνει τη μορφή

$$v + x \frac{dv}{dx} = -f(v),$$

που γράφεται

$$\frac{dv}{v + f(v)} = -\frac{dx}{x}$$

η οποία είναι μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. □

Παράδειγμα 1.3.2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Λύση. Οι συναρτήσεις $x+y, x-y$ είναι ομογενείς πρώτου βαθμού. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx, \text{ για } x \neq 0$$

δηλαδή

$$y' = xv' + v$$

Από τον μετασχηματισμό αναγόμεστε στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$xv' + v = \frac{x+vx}{x-vx} \Leftrightarrow xv' + v = \frac{1+v}{1-v}$$

που τελικά γράφεται

$$\frac{1-v}{1+v^2} dv = \frac{dx}{x},$$

η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Ολοκληρώνουμε και στα δύο μέλη :

$$\int \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2} \right) dv = \int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\arctan v - \frac{1}{2} \log(1+v^2) = \log|x| + c_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \arctan v - \log(1+v^2) = 2 \log|x| + 2c_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \arctan v = \log x^2 (1+v^2) + 2c_1$$

Αφού έχουμε ότι $v = \frac{y}{x}$ για $x \neq 0$, θέτοντας $c = 2c_1$, η γενική λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή

$$2 \arctan \frac{y}{x} = \log(x^2 + y^2) + c.$$

■

Ιανουάριος 2023

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{t}{y} + 2 = 0, \quad y \neq 0, t > 0$$

Λύση. Αρχικά η δοσμένη διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$y' = -\frac{t+2y}{y}$$

όπου οι συναρτήσεις $M(t, y) = t + 2y$ και $N(t, y) = y$ είναι ομογενείς βαθμού 1. Άρα, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$v = \frac{y}{t} \Leftrightarrow y = vt \quad t \neq 0$$

άρα

$$y' = tv' + v$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$tv' + v = -\frac{t+2tv}{tv} = -\frac{1+2v}{v}$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην σχέση

$$-\frac{v}{(v+1)^2} dv = \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow \int -\frac{v}{(v+1)^2} dv = \int \frac{1}{t} dt + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v+1} - \ln|v+1| = \ln|t| + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{y}{t}+1} - \ln\left|\frac{y}{t}+1\right| = \ln|t| + c$$

όπου η λύση της εξίσωσης είναι σε πεπλεγμένη μορφή. ■

Ασκήσεις

1.11. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^2 dx - x(x+y)dy = 0.$$

1.12. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$$

1.13. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(xe^{\frac{y}{x}} - y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) dx + x \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

1.14. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

1.15. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2xyy' + x^2 + y^2 = 0.$$

1.16. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy}{x^2}.$$

1.17. Μια σημαντική κατηγορία ομοιογενών διαφορικών εξισώσεων αποτελούν οι **κλασματικές γραμμικές εξισώσεις**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (1.7)$$

Ναδειχθεί ότι η λύσεις τις (4) δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$x = C \cdot \exp\left(\int F(v)dv\right)$$

όπου C είναι μία σταθερά, $v = y/x$ και F μία προσδιορίσιμη συνάρτηση.

1.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε ομογενείς

Διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (1.8)$$

όπου $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, ανάγονται σε ομογενείς με μετασχηματισμό μεταφοράς της αρχής των συντεταγμένων στο σημείο τομής (x_1, y_1) των ευθειών με εξισώσεις

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{και} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Μέθοδος Επίλυσης Εξίσωσης που Ανάγεται σε Ομογενή

1. Αν $c_1 = c_2 = 0$ τότε η εξίσωση 1.4 είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$$

που είναι ομογενής βαθμού 1.

2. Στη γενική περίπτωση υποθέτουμε ότι

$$(c_1, c_2) \neq (0, 0) \quad \text{και} \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

Έστω (x_1, y_1) η μοναδική λύση του συστήματος

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Κάνουμε το μετασχηματισμό

$$X = x - x_1 \quad Y = y - y_1.$$

Τότε, από την 1.8 έχουμε

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1(X + x_1) + b_1(Y + y_1) + c_1}{a_2(X + x_1) + b_2(Y + y_1) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$$

Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί αν οι ευθείες

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{και} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

είναι παράλληλες. Στην περίπτωση αυτή ισχύει :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

και η 1.5 μπορεί να γραφτεί στη μορφή στη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y).$$

Έτσι μέσω του μετασχηματισμού

$$z = a_1x + b_1y$$

γίνεται διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.4.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Λύση. Από τη λύση του συστήματος

$$x - y + 1 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

προκύπτει το σημείο τομής $(x_1, y_1) = (1, 2)$. Θέτοντας

$$x = X + 1 \quad y = Y + 2$$

έχουμε

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y},$$

που είναι ομογενής εξίσωση βαθμού 1. Ο μετασχηματισμός $v = \frac{Y}{X}$ οδηγεί στην εξίσωση

$$v + X \cdot \frac{dv}{dX} = \frac{1 - v}{1 + v}$$

που είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$|1 - 2v - v^2| \cdot X^2 = c$$

από την οποία για $v = \frac{Y}{X}$ προκύπτει ότι

$$|X^2 - 2XY - Y^2| = c$$

Αφού $X = x - 1$ και $Y = y - 2$, τελικά προκύπτει ότι η γενική λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή

$$|x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y| = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

■

Ασκήσεις

1.18. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y + 5}{x - y + 1}.$$

1.19. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0 .$$

1.20. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x - 2y)dx + (y - 1)dy = 0 .$$

1.21. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x - y + 1} .$$

1.5 Γραμμικές εξισώσεις

Ορισμός 1.5.1. Μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$y' = f(x, y)$$

ονομάζεται **γραμμική** όταν

$$f(x, y) = -p(x) \cdot y + g(x)$$

όπου p, g συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και συνεχείς. Δηλαδή η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Μέθοδος Ολοκληρωτικού Παράγοντα

Για την εφαρμογή της μεθόδου σκεπτόμαστε ως εξής : μπορεί να προσδιορισθεί συνεχής συνάρτηση $\mu(x) \neq 0$ (ολοκληρωτικός παράγοντας) τέτοια ώστε το πρώτο μέλος της ισοδύναμης εξίσωσης

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y = \mu(x)g(x) \quad (1.9)$$

να είναι παράγωγος της συνάρτησης $\mu(x)y(x)$;

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\mu(x) \cdot y' + [p(x)\mu(x)] y(x) = (\mu(x)y(x))' = \mu(x) \cdot y'(x) + \mu'(x) \cdot y,$$

η οποία, υπό τη προϋπόθεση ότι $\mu(x), y(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, ισοδυναμεί με τη διαφορική εξίσωση

$$\mu'(x) = p(x) \cdot \mu(x)$$

η λύση της οποίας

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \quad (1.10)$$

ικανοποιεί την απαίτηση που θέσαμε.

Αντικαθιστώντας τη $\mu(x)$ στην 1.9 από την 1.10 παίρνουμε τη μορφή

$$(\mu(x) \cdot y(x))' = \mu(x)g(x) \quad (1.11)$$

η οποία πλέον λύνεται απευθείας με ολοκλήρωση

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)g(x)dx + c,$$

ή

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)g(x)dx + c \right] = e^{-\int p(x)dx} \left[\int \mu(x)g(x)dx + c \right].$$

Παράδειγμα 1.5.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' + \frac{y}{x} = 1, \quad y(1) = 0, \quad x > 0.$$

Λύση. Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης με

$$p(x) = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = 1$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας ισούται με

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x.$$

Πολλαπλασιάζουμε επί x και τα δύο μέλη της εξίσωσης και ολοκληρώνουμε

$$(xy)' = x \Rightarrow xy = \int xdx + c = \frac{x^2}{2} + c,$$

άρα

$$y(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(c + \frac{x^2}{2} \right).$$

Επειδή δίνεται ότι $y(1) = 0$, από τη παραπάνω γενική λύση προκύπτει ότι $c = -\frac{1}{2}$ και

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right), \quad x > 0.$$

■

Σεπτέμβριος 2022

Εστω $\alpha, \sigma > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$ σταθερές. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

για κάθε λύση $y(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + \alpha y = \beta e^{-\sigma t}.$$

Λύση. Εξετάζουμε περιπτώσεις :

- Αν $a = \sigma$, τότε έχουμε ότι η εξίσωση είναι γραμμική και θεωρούμε ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int a dx} = e^{ax}$$

άρα έχουμε ότι

$$e^{ax} y' + a e^{ax} y = b \Rightarrow (e^{ax} y)' = b \Rightarrow y = e^{-ax} (bx + c) \rightarrow 0,$$

για $x \rightarrow \infty$, το οποίο αποδεικνύεται με χρήση του κανόνα De'l Hospital.

- Αν $a \neq \sigma$, ομοίως, έχουμε ότι

$$e^{ax} y' + a e^{ax} y = e^{(a-\sigma)x} \Rightarrow (e^{ax} y)' = e^{(a-\sigma)x} \Rightarrow y = \frac{e^{-\sigma x}}{a - \sigma} + c e^{-ax} \rightarrow 0,$$

για $x \rightarrow \infty$.

■

Σεπτέμβριος 2022

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$ty' + y = \begin{cases} t + 2, & 0 < t < 1 \\ t, & t \geq 1 \end{cases}$$

έτσι ώστε να είναι συνεχής για $t > 0$ και στην συνέχεια να βρεθεί η ειδική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(2) = 2$.

Λύση. Αρχικά λύνουμε κάθε μια διαφορική εξίσωση, για κάθε ένα κλάδο, ξεχωριστά. Για την πρώτη εξίσωση και $t \in (0, 1)$ έχουμε

$$y_1' + \frac{y_1}{t} = 1 + \frac{2}{t}$$

η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξης και επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$$\mu_1(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln t} = t$$

άρα

$$(t \cdot y_1)' = 1 + 2t$$

$$\Rightarrow t \cdot y_1(t) = t + t^2 + c_1$$

$$\Rightarrow y_1(t) = c_1 \cdot t^{-1} + t + 1$$

Όμοια, για $t \geq 1$, ισχύει

$$y_2(t) = \frac{t}{2} + c_2 \cdot t^{-1}$$

Αφού η λύση πρέπει να είναι συνεχής, ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} y_2(t) \Leftrightarrow c_2 = c_1 + \frac{3}{2}.$$

Άρα, έχουμε ότι

$$y(t) = \begin{cases} c_1 \cdot t^{-1} + t + 1, & 0 < t < 1 \\ \frac{t}{2} + \left(c_1 + \frac{3}{2}\right) \cdot t^{-1}, & t \geq 1 \end{cases}$$

Αφού $y(2) = 2$, ισχύει ότι $c_1 = -1$, επομένως η λύση του Π.Α.Τ. είναι η ακόλουθη :

$$y(t) = \begin{cases} -t^{-1} + t + 1, & 0 < t < 1 \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}, & t \geq 1 \end{cases}$$

■

Σεπτέμβριος 2022

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(\ln t - 2) y' + \frac{y}{t} + 6t = 0$$

Λύση. Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης με

$$p(t) = \frac{1}{t(\ln t - 2)} \quad g(t) = \frac{6t}{\ln t - 2}.$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας ισούται με

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int \frac{1}{t(\ln t - 2)} dt}.$$

Θέτουμε $u = \ln t - 2$, οπότε $du = \frac{1}{t} dt$, και συνεπώς

$$\int \frac{1}{t(\ln t - 2)} dt = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |\ln t - 2|.$$

Άρα ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(t) = e^{\ln |\ln t - 2|} = \ln t - 2$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και έχουμε

$$[(\ln t - 2) \cdot y]' = -\frac{6t}{\ln t - 2}$$

Ολοκληρώνοντας,

$$(\ln t - 2) \cdot y = -\int \frac{6t}{\ln t - 2} dt + c$$

οπότε

$$y(t) = \frac{1}{\ln t - 2} \left(-\int \frac{6t}{\ln t - 2} dt + c \right)$$

■

Σεπτέμβριος 2021

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} + 2\frac{y}{t} \ln y = 4ty, \quad t > 0, \quad y > 0.$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $u = \ln y$, ώστε $u' = \frac{y'}{y}$. Τότε, η εξίσωση γράφεται:

$$u' + 2\frac{u}{t} = 4t.$$

Αυτή είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$\mu(t) = e^{\int 2/t dt} = e^{2 \ln t} = t^2.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με t^2 :

$$t^2 u' + 2tu = 4t^3.$$

Αναγνωρίζουμε ότι η αριστερή πλευρά είναι η παράγωγος του γινομένου:

$$\frac{d}{dt}(t^2 u) = 4t^3.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς t :

$$t^2 u = \int 4t^3 dt = t^4 + c.$$

Έτσι,

$$u = \frac{t^4 + c}{t^2} = t^2 + \frac{c}{t^2}.$$

Αντικαθιστούμε $u = \ln y$:

$$\ln y = t^2 + \frac{c}{t^2}.$$

Άρα, η γενική λύση είναι:

$$y(t) = e^{t^2 + c/t^2}, \quad t > 0.$$

■

Ασκήσεις

1.22. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y - xy' = 3 - 2x^2 y', \quad y(-1) = 1.$$

1.23. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - y = e^x.$$

1.24. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - 2y = x.$$

1.25. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy' = 2x + 3y.$$

1.26. Να λυθεί το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$x(x-1)y' + y = x^2(2x-1), \quad y(2) = 4.$$

1.27. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

1.28. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y = t^2, \quad t > 0.$$

1.29. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \int_0^2 y(t) dt, \quad y(0) = 1.$$

1.30. Ναδειχθεί ότι αν a και λ είναι θετικές σταθερές και b οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

έχει την ιδιότητα $y \rightarrow 0$ καθώς το $x \rightarrow \infty$.

(Υπόδειξη. Θεωρήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $a = \lambda$ και $a \neq \lambda$.)

1.31. Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε το ακόλουθο Π.Α.Τ. να έχει περιοδική λύση

$$y' - \frac{1}{2}y = 2 \sin x, \quad y(0) = \alpha.$$

1.32. Να εξεταστεί η συμπεριφορά των λύσεων της

$$y' = -(\sin x)y + 1$$

καθώς το $x \rightarrow \infty$.

1.33 (Σεπτέμβριος 2021). Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dt} + 2\frac{y}{t} \ln y = 4ty, \quad t > 0, y > 0$$

αν με την αντικατάσταση $u = \ln y$ μετασχηματίζεται σε γραμμική εξίσωση.

1.6 Εξίσωση Bernoulli

Ορισμός 1.6.1. Κάθε εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$y' + a(x)y = b(x)y^r, \quad (1.12)$$

όπου $a(x), b(x)$ πραγματικές συναρτήσεις συνεχείς σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται διαφορική εξίσωση του **Bernoulli**.

Για $r = 0$ ή $r = 1$ η εξίσωση 1.12 είναι γραμμική. Επίσης αν $r > 0$ η $y(t) = 0$ είναι λύση της εξίσωσης.

Μεθοδολογία Επίλυσης Μιας Εξίσωσης Bernoulli

Για $r \neq 0, 1$ και $y \neq 0$ η εξίσωση 1.12 είναι μη γραμμική, ωστόσο με το μετασχηματισμό

$$u = y^{1-r}$$

μπορεί να λυθεί σαν γραμμική. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $(1-r)y^{-r}$, έχουμε

$$(1-r)y^{-r}y' + (1-r)a(x)y^{1-r} = (1-r)b(x)$$

ενώ παραγωγίζοντας το μετασχηματισμό $u = y^{1-r}$ έχουμε ότι

$$u' = (1-r)y^{-r}y'$$

Έτσι εύκολα προκύπτει ότι

$$u' + [(1-r)a(x)] \cdot u = (1-r)b(x),$$

που είναι γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης και έχει γενική λύση

$$u(x) = e^{-P(x)} \cdot \left[\int [(1-r)b(t)] \cdot e^{P(t)} dt + c \right],$$

όπου

$$P(t) = (1-r) \int a(t) dt$$

Παράδειγμα 1.6.1. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$t \cdot y' + 6y = (3t) \cdot y^{4/3}.$$

Λύση. Για $t \neq 0$ η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' + \frac{6}{t} \cdot y = 3y^{4/3}$$

η οποία είναι Bernoulli με $r = 4/3$, οπότε $1-r = -1/3$. Για $y \neq 0$, με το μετασχηματισμό

$$u = y^{1-r} = y^{-1/3}$$

δηλαδή

$$u' = -\frac{1}{3} \cdot y^{-4/3} \cdot y'$$

Έτσι, η αρχική εξίσωση γράφεται ως εξής :

$$u' - \frac{2}{t} \cdot u = -1,$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$u(t) = t + c \cdot t^2$$

και αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό, δηλαδή $y = u^{-3}$, προκύπτει η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης

$$y(t) = \frac{1}{(t + c \cdot t^2)^3}, \quad t \neq 0.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι η $y(t) = 0$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης. ■

Ιούνιος 2024

Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $y(t)$, για $t \geq 0$, η οποία να ικανοποιεί την σχέση

$$y(t) + 1 = \int_0^t [y(\tau) \cdot (\tau \cdot y(\tau) - 1)] d\tau$$

Λύση. Παραγωγίζοντας την δοσμένη σχέση, υποθέτοντας ότι μια τέτοια y είναι παραγωγίσιμη¹, έχουμε ότι

$$y'(t) = y(t) \cdot [t \cdot y(t) - 1] \Leftrightarrow y' + y = t \cdot y^2$$

η οποία είναι μια εξίσωση Bernoulli. Από την δοσμένη σχέση είναι σαφές ότι $y \neq 0$ (όχι η μηδενική συνάρτηση), άρα θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$v = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow v' = -y^{-2} \cdot y'$$

Άρα, από την παραπάνω σχέση, πολλαπλασιάζοντας με $-y^{-2}$, έχουμε ότι

$$v' - v = -t$$

η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξης, η οποία έχει γενική λύση

$$v(t) = t + 1 + c \cdot e^t$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$y(t) = \frac{1}{1 + t + c \cdot e^t}$$

Η παραπάνω $y(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση. ■

Σεπτέμβριος 2023

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$ty^2y' + y^3 = 1, \quad t > 0.$$

Λύση. Για $t \neq 0$, η εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$y' + \frac{y}{t} = \frac{1}{ty^2},$$

που είναι μια εξίσωση Bernoulli με $r = -2$, οπότε $1 - r = 3$. Για $y \neq 0$, ο μετασχηματισμός

$$u = y^{1-r} = y^3$$

¹Παρατηρήστε ότι η ύπαρξη μιας τέτοιας y που ικανοποιεί στην δοσμένη σχέση, πρέπει να είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.

οδηγεί σε

$$u' = 3y^2 y'.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $3 \cdot y^2$:

$$u' + \frac{3}{t}u = \frac{3}{t}.$$

Η παραπάνω είναι γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης με ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$\mu(t) = e^{\int 3/t \, dt} = e^{3 \ln t} = t^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με t^3 :

$$t^3 u' + 3t^2 u = 3t^2.$$

Τότε έχουμε ότι

$$(t^3 u)' = 3t^2.$$

Ολοκληρώνοντας:

$$t^3 u = t^3 + c.$$

Έτσι,

$$u = 1 + \frac{c}{t^3}.$$

Αντικαθιστούμε $u = y^3$:

$$y^3 = 1 + \frac{c}{t^3}.$$

Συνεπώς

$$y = \left(1 + \frac{c}{t^3}\right)^{1/3}.$$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y(t) = \left(1 + \frac{c}{t^3}\right)^{1/3}, \quad t > 0.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι η $y(t) = 0$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης. ■

Σεπτέμβριος 2021

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$yy' - \frac{1}{2t} \cdot y^2 = \frac{1}{t^2}, \quad t > 0, \quad y(1) = 2.$$

Λύση. Για $t > 0$, διαιρούμε την εξίσωση με y (για $y \neq 0$):

$$y' - \frac{y}{2t} = t^{-2} \cdot y^{-1}$$

Η εξίσωση είναι Bernoulli για $r = -1$, αλλά μπορούμε να τη μετατρέψουμε με την αντικατάσταση:

$$u = y^2 \Rightarrow u' = 2yy'.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $2y$:

$$u' - \frac{u}{t} = \frac{2}{t^2}.$$

Η παραπάνω είναι γραμμική εξίσωση με ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $\frac{1}{t}$:

$$\frac{1}{t}u' - \frac{1}{t^2}u = \frac{2}{t^3}.$$

Άρα,

$$\left(\frac{u}{t}\right)' = \frac{2}{t^3}.$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\frac{u}{t} = -\frac{2}{t^2} + c.$$

Έτσι,

$$u = -2 + c \cdot t.$$

Αντικαθιστούμε $u = y^2$:

$$y^2 = c \cdot t - 2.$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$:

$$4 = c - 2 \Rightarrow C = 6.$$

Επίσης, αφού $y \neq 0$ και $y(1) = 2 > 0$, τότε $y(t) > 0$ στο διάστημα που ορίζεται. Συνεπώς,

$$y(t) = \sqrt{6t - 2}, \quad t > \frac{1}{3}.$$

■

Ασκήσεις

1.34. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + xy = xy^{-3}.$$

1.35. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = y - \frac{1}{4}y^{3/2}.$$

1.36. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + xy = xy^3.$$

1.37. Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}, \quad x > 0, \quad y(1) = 0.$$

1.38. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y - (\log t)y^2 = 0, \quad t > 0.$$

1.39. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{t}y = y^2t^2, \quad t > 0.$$

1.40. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$x^2y' - y^3 = xy, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της λύσης.

1.7 Εξίσωση Riccati

Ορισμός 1.7.1. Κάθε εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \tag{1.13}$$

όπου $p(x), q(x), f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται διαφορική εξίσωση του **Riccati**.

Μέθοδος Επίλυσης μιας Εξίσωσης Riccati

Υποθέτουμε ότι είναι γνωστή μια (ειδική) λύση $y_1(x)$ της εξίσωσης 1.13. Θα δείξουμε ότι με αλλαγή μεταβλητής της μορφής

$$y(x) = y_1(x) + u(x),$$

η εξίσωση μετασχηματίζεται σε διαφορική εξίσωση Bernoulli ως προς $u(x)$. Πράγματι, η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$y_1'(x) + u'(x) + p(x)(y_1(x) + u(x)) + q(x)[y_1(x) + u(x)]^2 = f(x)$$

καταλήγουμε στην

$$u'(x) + [p(x) + 2q(x)y_1(x)]u(x) + q(x)u^2(x) = 0,$$

που είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli.

Παράδειγμα 1.7.1. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2.$$

Λύση. Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση Riccati με

$$p(x) = 2x \quad q(x) = -1 \quad f(x) = 1 + x^2.$$

Γράφοντάς τη στη μορφή

$$y'(x) = 1 + (x - y)^2$$

παρατηρούμε ότι η $y_1(x) = x$ είναι μια ειδική λύση. Εισάγουμε τώρα την αλλαγή μεταβλητής

$$y(x) = y_1(x) + u(x) = x + u(x).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$1 + u'(x) = 1 + x^2 - 2x(x + u(x)) + (x + u(x))^2 = 1 + u^2(x).$$

Έπεται ότι $u' = u^2$, η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών και έχει γενική λύση

$$u(x) = \frac{1}{c - x}$$

Επανερχόμαστε στην αρχική μεταβλητή και παίρνουμε την γενική λύση της αρχικής εξίσωσης

$$y(x) = x + \frac{1}{c - x}.$$

■

Ασκήσεις

1.41. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$$

αν γνωρίζουμε ότι μια ειδική λύση της είναι $y_1(x) = \frac{a}{x}$.

(Υπόδειξη. Μέσα από την απαίτηση η $y_1(x) = \frac{a}{x}$ να είναι λύση της εξίσωσης προσδιορίζεται η σταθερά a , ώστε να έχουμε μια λύση αυτής και κατόπιν επιλύουμε τη διαφορική εξίσωση.)

1.42. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - e^x y^2 - 3y - 3e^{-x} = 0,$$

αν $y_1(x) = \lambda e^{-x}$ είναι μια ειδική λύση της.

1.8 Ακριβείς Εξισώσεις

Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (1.14)$$

Αν

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad N(x, y) \neq 0,$$

η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη (διαφορική) μορφή

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.15)$$

Είναι γνωστό από την Ανάλυση ότι αν μια συνάρτηση $F(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε υπάρχει το (ολικό) διαφορικό dF της F και είναι

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy. \quad (1.16)$$

Στη συνέχεια δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.8.1. Η διαφορική μορφή

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

όπου M και N είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ένα τόπο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και συνεχείς στον D , ονομάζεται **ακριβής** στον D , αν υπάρχει συνάρτηση $F(x, y)$ ορισμένη στον D

και με συνεχείς μερικές παραγώγους τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Τότε, έχουμε :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x, y). \quad (1.17)$$

Αν λοιπόν η διαφορική μορφή $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ είναι ακριβής, διαφορική εξίσωση 1.15 γράφεται

$$dF(x, y) = 0,$$

και το γενικό ολοκλήρωμα της 1.15 είναι

$$F(x, y) = c,$$

όπου c σταθερά.

Παράδειγμα 1.8.1. Η διαφορική μορφή

$$ydt + tdy$$

είναι ακριβής, διότι η $F(t, y) = ty$ ικανοποιεί την σχέση

$$dF(t, y) = d(ty) = ydt + tdy.$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση $ydt + tdy = 0$ είναι ακριβής, ισοδύναμα

$$d(ty) = 0$$

που έχει γενικό ολοκλήρωμα $ty = c$, όπου c σταθερά. Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y = \frac{c}{t}$$

Παράδειγμα 1.8.2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2ty + ye^t)dt + (t^2 + e^t)dy = 0.$$

Λύση. Αν

$$M(t, y) = 2ty + ye^t \quad N(t, y) = t^2 + e^t$$

τότε η διαφορική μορφή είναι ακριβής, γιατί υπάρχει συνάρτηση

$$F(t, y) = t^2y + e^ty$$

τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = 2ty + ye^t = M(t, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = t^2 + e^t = N(t, y).$$

Συνεπώς η διαφορική εξίσωση γράφεται $dF = 0$, απ' όπου προκύπτει το γενικό ολοκλήρωμα

$$F(t, y) = t^2y + e^ty = c,$$

όπου c σταθερά, και η γενική λύση διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \frac{c}{t^2 + e^t},$$

με c σταθερά. ■

Το ερώτημα που προκύπτει στη συνέχεια είναι το εξής: κάτω από ποιες συνθήκες η διαφορική μορφή $M(t, y)dt + N(t, y)dy$ είναι ακριβής και αν είναι, τότε πως προσδιορίζεται η συνάρτηση $F(t, y)$; Η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα δίνεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.8.1. Έστω $M(t, y), N(t, y)$ συνεχείς και με συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς t και y μέσα σε ένα χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (απλά συνεκτικό). Υπάρχει συνάρτηση $F(t, y)$, τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N,$$

αν και μόνο αν

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Παράδειγμα 1.8.3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3y + e^t) + (3t + \cos y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0,$$

όπου

$$M(t, y) = 3y + e^t \quad N(t, y) = 3t + \cos y$$

Ισχύει ότι

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = 3 = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)$$

άρα η εξίσωση είναι ακριβής. Επομένως, υπάρχει συνάρτηση $F(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = 3y + e^t \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = 3t + \cos y \quad (1.19)$$

Από την 1.18 ολοκληρώνοντας ως προς t , έχουμε

$$F(t, y) = \int (3y + e^t) dt + h(y) = 3ty + e^t + h(y).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = 3t + h'(y),$$

η οποία σε συνδυασμό με την 1.19 δίνει την

$$3t + h'(y) = 3t + \cos y.$$

Επομένως

$$h'(y) = \cos y \quad \Rightarrow \quad h(y) = \int \cos y dy = \sin y + c',$$

οπότε

$$F(t, y) = 3ty + e^t + \sin y + c'$$

και το γενικό ολοκλήρωμα είναι

$$3ty + e^t + \sin y = c$$

■

Παράδειγμα 1.8.4. Να εξετασθεί αν είναι ακριβής η εξίσωση

$$e^y dt + (te^y + 2y) dy = 0.$$

Στη συνέχεια, αν είναι ακριβής να λυθεί.

Λύση. Θέτουμε $M(t, y) = e^y$, $N(t, y) = te^y + 2y$, οπότε $\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial t}$. Άρα, η διαφορική εξίσωση είναι ακριβής και κατά συνέπεια υπάρχει συνάρτηση $F(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = e^y \quad (1.20)$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial y} = te^y + 2y \quad (1.21)$$

Από την 1.20, ολοκληρώνοντας ως προς t , έχουμε

$$F(t, y) = \int e^y dt + h(y) = te^y + h(y),$$

από όπου προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial y} = te^y + h'(y),$$

που σε συνδυασμό με την 1.18 δίνει την

$$te^y + h'(y) = te^y + 2y.$$

Άρα, $h'(y) = 2y$ και $h(y) = y^2$ (επιλέγουμε σταθερά ολοκλήρωσης $c = 0$ διότι το c εμφανίζεται στη γενική λύση). Η γενική λύση είναι της μορφής

$$te^y + y^2 = c,$$

όπου c σταθερά. ■

Παράδειγμα 1.8.5. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(6ty - y^3)dt + (4y + 3t^2 - 3ty^2)dy = 0.$$

Λύση. Θέτουμε $M(t, y) = 6ty - 3y^2$, $N(t, y) = 4y + 3t^2 - 3ty^2$ οπότε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial t},$$

άρα η διαφορική εξίσωση είναι ακριβής και υπάρχει συνάρτηση $F(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6ty - y^3, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y + 3t^2 - 3ty^2 \tag{1.23}$$

Από την 1.24 ολοκληρώνοντας ως προς t έχουμε

$$F(t, y) = \int (6ty - y^3)dt + h(y) = 3t^2y - ty^3 + h(y),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3t^2 - 3ty^2 + h'(y),$$

που σε συνδυασμό με την 1.25 δίνει

$$3t^2 - 3ty^2 + h'(y) = 4y + 3t^2 - 3ty^2.$$

Αρα,

$$h'(y) = 4y \Rightarrow h(y) = \int 4y dy = 2y^2$$

(επιλέγουμε σταθερά ολοκλήρωσης $c = 0$ διότι το c εμφανίζεται στη γενική λύση). Η γενική λύση είναι

$$3t^2y - ty^3 + 2y^2 = c,$$

όπου c σταθερά. ■

Δεν είναι όμως όλες οι εξισώσεις ακριβείς. Σε περίπτωση που $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$ κάνουμε χρήση πολλαπλασιαστική Euler $\mu(t, y) = \mu \neq 0$ η εύρεση του οποίου προκύπτει από την σχέση

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial t}.$$

Ιανουάριος 2023

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$t + 2ye^{4ty} + \lambda te^{4ty} \frac{dy}{dt} = 0$$

είναι ακριβής και στη συνέχεια να λυθεί για αυτή την τιμή του λ .

Λύση. Η δοσμένη εξίσωση παίρνει την μορφή

$$M(t, y)dy + N(t, y)dy = 0$$

όπου

$$M(t, y) = t + 2ye^{4ty} \quad N(t, y) = \lambda te^{4ty}$$

Έχουμε ότι η εξίσωση είναι ακριβής αν και μόνο αν

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) \Leftrightarrow 2e^{4ty} \cdot (1 + 4ty) = \lambda e^{4ty} \cdot (1 + 4ty)$$

Αρα, είναι σαφές ότι $\lambda = 2$. Για $\lambda = 2$ έχουμε ότι η δοσμένη εξίσωση

$$M(t, y)dy + N(t, y)dy = 0$$

όπου

$$M(t, y) = t + 2ye^{4ty} \quad N(t, y) = 2te^{4ty}$$

είναι ακριβής, άρα υπάρχει $F(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = M(t, y) = t + 2ye^{4ty}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = N(t, y) = 2te^{4ty}$$

Από την δεύτερη σχέση έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = N(t, y) = 2te^{4ty} \Leftrightarrow F(t, y) = \frac{1}{2} \cdot e^{4ty} + h(t)$$

Παραγωγίζοντας ως προς t και μέσω της πρώτης σχέσης έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = M(t, y) = t + 2ye^{4ty} \Leftrightarrow 2ye^{4ty} + h'(t) = t + 2ye^{4ty}$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι

$$h(t) = \frac{t^2}{2} + c$$

Συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι της μορφής

$$F(t, y) = C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{4ty} + \frac{t^2}{2} = c$$

λύση σε πεπλεγμένη μορφή. ■

Ιούνιος 2023

Να βρεθεί η διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi(t)$ με $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$2 + y^4 \sin t + \varphi(t)y^3y' = 0$$

είναι ακριβής. Στη συνέχεια να λυθεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Λύση. Η διαφορική εξίσωση έχει την μορφή

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$$

όπου

$$M(t, y) = 2 + y^4 \sin t \quad \text{και} \quad N(t, y) = \varphi(t) \cdot y^3$$

Η εξίσωση είναι ακριβής αν και μόνο αν

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)$$

$$\Rightarrow 4y^3 \sin t = y^3 \varphi'(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = -4 \cos t + c$$

Από την αρχική συνθήκη έχουμε ότι $\varphi(t) = -4 \cos t$. Τώρα, η δοσμένη εξίσωση είναι ακριβής, επομένως υπάρχει $F(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = M(t, y) = 2 + y^4 \sin t$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = N(t, y) = -4 \cos t y^3$$

Από την πρώτη σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$F(t, y) = 2t - y^4 \cos t + h(y)$$

και από την δεύτερη έχουμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = N(t, y) = -4 \cos t y^3 \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1.$$

Συνεπώς, ισχύει ότι

$$dF(t, y) = 0 \Rightarrow F(t, y) = c_2 \Rightarrow 2t - y^4 \cos t = c$$

■

Φεβρουάριος 2022

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y^2 + 5t^2 + 3t) y' + 10ty + 3y = 0.$$

Λύση. Θέτουμε

$$M(t, y) = y^2 + 5t^2 + 3t, \quad N(t, y) = 10ty + 3y,$$

οπότε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial t},$$

άρα η διαφορική εξίσωση είναι ακριβής και υπάρχει συνάρτηση $F(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y^2 + 5t^2 + 3t, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 10ty + 3y. \quad (1.25)$$

Από την (1.24) ολοκληρώνοντας ως προς t έχουμε

$$F(t, y) = \int (y^2 + 5t^2 + 3t) dt + h(y) = 5t^2 y + \frac{3}{2} t^2 + h(y),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 5t^2 + h'(y).$$

Σε συνδυασμό με την (1.25) δίνει

$$5t^2 + h'(y) = 10ty + 3y.$$

Άρα,

$$h'(y) = 3y \Rightarrow h(y) = \int 3y dy = \frac{3}{2} y^2.$$

(επιλέγουμε σταθερά ολοκλήρωσης $c = 0$ διότι το c εμφανίζεται στη γενική λύση).

Η γενική λύση είναι

$$5t^2 y + \frac{3}{2} t^2 + \frac{3}{2} y^2 = c,$$

όπου c σταθερά. ■

Σεπτέμβριος 2021

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t^2 y^3 - y^2 + y) dt + (2t - ty) dy = 0$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(t, y) = t^a y^b$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση. Θέτουμε

$$M(t, y) = 3t^2 y^3 - y^2 + y \quad N(t, y) = 2t - ty$$

και παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = 9t^2 y^2 - 2y + 1 \neq 2 - y = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η δοσμένη εξίσωση δεν είναι ακριβής. Επομένως, αναζητούμε ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(t, y) = t^a y^b$ ώστε η παρακάτω εξίσωση να είναι ακριβής :

$$\tilde{M}(t, y)dt + \tilde{N}(t, y)dy = 0 \quad (1.26)$$

Θέτουμε

$$\tilde{M}(t, y) = \mu(t, y) \cdot M(t, y) = 3t^{a+2}y^{b+3} - t^a y^{b+2} + t^a y^{b+1}$$

$$\tilde{N}(t, y) = \mu(t, y) \cdot N(t, y) = 2t^{a+1}y^b - t^{a+1}y^{b+1}$$

Για να είναι η εξίσωση 1.33 ακριβής πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow (b+3)3t^{a+2}y^{b+2} - (b+2)t^a y^{b+1} + (b+1)t^a y^b = 2(a+1)t^a y^b - (a+1)t^a y^{b+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+3=0 \\ b+2=a+1 \\ 2(a+1)=b+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = -3 \quad \text{και} \quad a = -2$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\tilde{M}(t, y) = \mu(t, y) \cdot M(t, y) = -t^{-2}y^{-1} + t^{-2}y^{-2}$$

$$\tilde{N}(t, y) = \mu(t, y) \cdot N(t, y) = 2t^{-1}y^{-3} - t^{-1}y^{-2}$$

Αφού η ?? είναι ακριβής, τότε υπάρχει $F(t, y)$ ώστε

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = \tilde{M}(t, y) = -t^{-2}y^{-1} + t^{-2}y^{-2} \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = \tilde{N}(t, y) = 2t^{-1}y^{-3} - t^{-1}y^{-2} \quad (1.28)$$

Από την εξίσωση 1.34 προκύπτει ότι

$$F(t, y) = t^{-1}y^{-1} - t^{-1}y^{-2} + h(y)$$

και από την εξίσωση 1.28 έχουμε ότι

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = 2t^{-1}y^{-3} - t^{-1}y^{-2} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1 \in \mathbb{R}.$$

Από την εξίσωση 1.33 προκύπτει ότι

$$dF(t, y) = 0 \Leftrightarrow F(t, y) = c_2 \Leftrightarrow t^{-1}y^{-1} - t^{-1}y^{-2} = c$$

όπου c σταθερά. ■

Ασκήσεις

1.43. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0.$$

1.44. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0, \quad y(1) = 1.$$

1.45. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-y} + 1.$$

1.46. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2ty^2 - 3t^2)dt + (2t^2y + 2t^2y^2 - 2t^3)dy = 0$$

αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(y)$.

1.47. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$ty^2 + \lambda t^2y + t^2(t+y)y' = 0$$

είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση για αυτή την τιμή του λ .

1.48. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$e^{at+y} + 3t^2y^2 + (2t^3y + e^{at+y})y' = 0 \tag{1.29}$$

Να βρεθεί το a ώστε η 1.29 να είναι ακριβής και να λυθεί η 1.29.

1.49. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2) + (t + 4yt + 5y^2) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1.30)$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κανόνα της αλυσίδας.

1.50 (Σεπτέμβριος 2021). Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t^2y^3 - y^2 + y) dt + (2t - ty) dy = 0$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(t, y) = t^a y^b$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

1.9 Εξισώσεις Clairaut

Ορισμός 1.9.1. Οι εξισώσεις αυτές είναι της ειδικής μορφής

$$y = xy' + g(y') \quad (1.31)$$

θα λέγεται **εξίσωση Clairaut**.

Για την επίλυση της 1.31, θέτουμε $y' = p(x)$ και παραγωγίζουμε ως προς x την εξίσωση που προκύπτει.

$$y = xp + g(p) \quad (1.32)$$

Θα έχουμε

$$y' = p = p + p'x + g'(p) \cdot p' \Rightarrow [x + g'(p)]p' = 0.$$

(α) Αν $p' = 0 \Rightarrow p = y' = c$, όπου c είναι μία σταθερά, τότε η λύση της 1.31, όπως προκύπτει από την 1.24, είναι η μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών

$$y = cx + g(c) \quad (1.33)$$

(β) Εάν

$$x + g'(p) = 0$$

και η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί ώστε $p = p(x)$, τότε μία άλλη λύση της 1.31, όπως διαβάζουμε από την 1.32, είναι η

$$y = xp(x) + g(p(x)) \quad (1.34)$$

Ασκήσεις

1.51. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y = ty' + (y')^2.$$

1.52. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y = xy' + \log y'.$$

1.53. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y = xy' - (y')^3.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΗΜΑ PICARD - LINDELÖF

2.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα στην θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας του Picard. Είναι εν τέλει αυτό το θεώρημα όμως τόσο σημαντικό? Ας αναλογιστούμε ότι είναι εφελτήριο (γενικεύοντάς το) για την εγγύηση ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων σε διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης, καθώς και σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Επίσης το συγκεκριμένο θεώρημα αποτελεί μια εισαγωγή σε μια ευρεία κλάση θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας που χρησιμοποιούν την ύπαρξη σταθερών σημείων.

Θεώρημα 2.1.1 (Υπαρξης και μοναδικότητας του Picard). Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε ένα κλειστό ορθογώνιο

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq h_1, |y - y_0| \leq a_1\}$$

το οποίο περιέχει το (x_0, y_0) στο εσωτερικό του. Τότε υπάρχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα της μορφής $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ με $h > 0$. Επίσης, η ακολουθία συναρτήσεων

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην λύση αυτή στο I .

Παράδειγμα 2.1.1. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(2) = 0.$$

Έχουμε ότι η

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2y^{-1/3}$$

δεν είναι συνεχής στο 0, επομένως δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $y^{1/3} = x - 2$ και $y = 0$ είναι λύσεις του Π.Α.Τ., ορισμένες σε κατάλληλα διαστήματα.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να αποδειχθεί η ύπαρξη λύσης σε ένα Π.Α.Τ. Ο απλούστερος είναι να την προσδιορίσουμε ρητά και να βρούμε ακριβή τύπο. Μια τέτοια κατηγορία είναι οι γραμμικές πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Παρόλα αυτά αρκετές διαφορικές εξισώσεις δεν μπορούν να επιλυθούν με στοιχειώδεις τρόπους, οπότε η εύρεση αυτών με την προηγούμενη προσέγγιση “καταρρέει”.

Ένας άλλος τρόπος είναι να την βρούμε προσεγγιστικά, δηλαδή να κατασκευάσουμε κατάλληλη ακολουθία συναρτήσεων που να προσεγγίζει σε μια λύση του Π.Α.Τ. Αυτήν ακριβώς την προσέγγιση θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Picard.

Ολοκληρωτική Διατύπωση

Υποθέτουμε ότι στο αρχικό Π.Α.Τ., η f είναι συνεχής σε κάποιο κατάλληλο (ανοικτό) ορθογώνιο και ότι υπάρχει μία λύση $y(x)$ η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα I . Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης έπεται η:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (2.1)$$

Συνεπώς, λόγω των υποθέσεων ύπαρξης και συνέχειας, το Π.Α.Τ. είναι ισοδύναμο με την **2.1.** Με μια προσεκτική ματιά παρατηρεί κανείς δύο προβλήματα :

- Η εξίσωση δεν είναι καλά ορισμένη, εκτός αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια λύση.
- Η εξίσωση είναι πολύ δύσκολη στην επίλυση, εκτός από στοιχειώδη Π.Α.Τ. όπου το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι υπολογίσιμο με στοιχειώδεις τρόπους.

Ορίζουμε έναν τελεστή T , ο οποίος απεικονίζει μια συνάρτηση $y(x)$ σε μία συνάρτηση

$T[y](x)$ η οποία δίνεται από:

$$T[y](x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Τότε η 2.1 γίνεται $y = T[y]$ και κάθε λύση του Π.Α.Τ. είναι ένα σταθερό σημείο του T .

Για την εύρεση σταθερών σημείων, συχνά αποδεικνύονται χρήσιμες οι προσεγγιστικές μέθοδοι. Για να βρούμε ένα σταθερό σημείο του μετασχηματισμού T θα χρησιμοποιήσουμε τις λεγόμενες **προσεγγίσεις Picard**¹.

Οι προσεγγίσεις Picard ορίζονται ως εξής: ξεκινάμε με τη συνάρτηση $y_0(x) \equiv y_0$ και θα ορίσουμε τους υπόλοιπους όρους της ακολουθίας αναδρομικά ως εξής:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

για να παράξουμε την ακολουθία συναρτήσεων $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$. Αν αυτή η ακολουθία συγκλίνει, το όριό της θα είναι ένα σταθερό σημείο του T .

Παράδειγμα 2.1.2. Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$y' = 2y, \quad y(0) = 1$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το:

$$y = 1 + \int_0^x 2y dt$$

Συνεπώς, η ακολουθία Picard ορίζεται ως: $y_0(x) \equiv 1$,

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2y_0(t) dt = 1 + 2x \quad (2.2)$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 2(1 + 2t) dt = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} \quad (2.3)$$

κ.ο.κ. Επαγωγικά προκύπτει ότι

$$y_n(x) = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{i=1}^n \frac{(2x)^i}{i!}$$

όπου το n -οστό μερικό άθροισμα είναι η σειρά Maclaurin για το e^{2x} , άρα $y_n(x) \rightarrow e^{2x}$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

¹Συχνά στην βιβλιογραφία μπορεί να χαρακτηρίζεται ως ακολουθία Picard.

Για να εξετάσουμε τη σύγκλιση (κάτι το οποίο είναι ιδιαίτερα αναγκαίο όταν δεν αναγνωρίζουμε την ακολουθία του Picard), χρειαζόμαστε κάποια έννοια απόστασης μεταξύ συναρτήσεων. Η απόσταση που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος του Picard βασίζεται στη νόρμα συνάρτησης, η οποία δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.1. Έστω $\mathcal{C}[a, b]$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων, οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Αν $y \in \mathcal{C}[a, b]$, τότε η νόρμα του y είναι $\|y\| := \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$.

Η νόρμα μιας συνάρτησης $y(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η απόσταση της $y(x)$ και της $y \equiv 0$. Με βάση αυτό μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο συναρτήσεων $y, z \in \mathcal{C}[a, b]$ να είναι η νόρμα της $y - z$, ή αλλιώς

$$\|y - z\| = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - z(x)|.$$

Μέσα από αυτόν τον υπολογισμό της απόστασης δύο συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε τη σύγκλιση μίας ακολουθίας συναρτήσεων σε μία συνάρτηση.

Ορισμός 2.1.2. Μία ακολουθία $\{y_n(x)\}$ συναρτήσεων στο $\mathcal{C}[a, b]$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $y(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0.$$

Η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορεί να γίνει κατανοητή αν θυμηθούμε το Παράδειγμα 2.1.2, όπου είδαμε ότι $y_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(2x)^i}{i!}$ και ότι $y(x) = e^{2x}$ στο διάστημα $[0, 1]$. Τότε

$$\begin{aligned} \|y_n - y\| &= \max_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{k=0}^n \frac{(2x)^k}{k!} - e^{2x} \right| = \max_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, $y_n \xrightarrow{\text{uni}} y$. Μία σημαντική παρατήρηση που πρέπει να γίνει σε αυτό το παράδειγμα είναι ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας $\{y_n(x)\}$ στην $y(x) = e^{2x}$ στο $[a, b]$ συμβαίνει μόνον όταν το διάστημα είναι φραγμένο από τα δεξιά, ισοδύναμα, το b πρέπει να είναι πεπερασμένο. Σε διαφορετική περίπτωση, η ακολουθία δε θα συνέκλινε ομοιόμορφα, καθώς $\|y_n - y\|$ θα ήταν άπειρη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για το γεγονός ότι αν μια ακολουθία παραγωγίσιμων (και άρα συνεχών) συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η συνάρτηση στην οποία συγκλίνει είναι και αυτή συνεχής.

2.2 Θεώρημα Σταθερού Σημείου

Θεώρημα 2.2.1 (Σταθερού σημείου για τελεστές του Banach). Έστω S το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ που απέχουν το πολύ μία σταθερή απόσταση $\alpha > 0$ από μία δεδομένη συνάρτηση $y^t(x) \in C[a, b]$, δηλαδή

$$S = \{y \in C[a, b] \mid \|y - y^t\| \leq \alpha\}.$$

Έστω $G: S \rightarrow S$ ένας τελεστής ο οποίος είναι μια συστολή στο S , δηλαδή υπάρχει $0 \leq k < 1$ τέτοιο ώστε

$$\|G[w] - G[z]\| \leq k\|w - z\| \quad \text{για κάθε } w, z \in S.$$

Τότε ο τελεστής G έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο S . Επιπλέον, η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων που ορίζονται από

$$y_{n+1} := G[y_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε αυτό το σταθερό σημείο, για οποιαδήποτε επιλογή αρχικής συνάρτησης $y_0 \in S$.

Παρατήρηση 2.2.1. Για να αποδείξουμε το θεώρημα, πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις της ακολουθίας

$$y_{n+1} = G[y_n]$$

είναι καλά ορισμένες, δηλαδή ότι κάθε y_n είναι στο σύνολο S . Στο τέλος, δείχνουμε ότι αυτό το όριο είναι ένα σταθερό σημείο του G , δηλαδή

$$y_\infty = G[y_\infty].$$

Απόδειξη. Ύπαρξη: Ας πάρουμε μία τυχαία αρχική συνάρτηση $y_0 \in S$. Αφού $y_0 \in \text{Dom}_G$, τότε ορίζεται η $y_1 = G[y_0]$. Αφού G από την αρχική υπόθεση είναι συστολή, τότε είναι άμεσο ότι $y_1 \in S$. Επαγωγικά, προκύπτει ότι $y_n \in S$, επομένως $G[y_n]$ είναι καλά ορισμένη, για κάθε $n \geq 0$.

Τώρα, ας ξαναγράψουμε την

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1})$$

έτσι ώστε

$$y_n(x) = y_0(x) + \sum_{j=0}^{n-1} [y_{j+1}(x) - y_j(x)] \quad (2.4)$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{y_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα στοιχείο του S . Αυτό θα γίνει μέσα από την εφαρμογή του M - κριτηρίου του Weierstrass, το οποίο είναι μία επέκταση του κριτηρίου σύγκρισης.² Άρα, πρέπει να βρούμε ένα φράγμα M των όρων της σειράς 2.4.

Ισχυρισμός 1. Ισχύει ότι $\|y_{j+1} - y_j\| \leq k^j \|y_1 - y_0\|$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $j \in \mathbb{N}$.

- **Βάση.** Ο ισχυρισμός επαληθεύεται άμεσα για $j = 0$.
- **Επαγωγικό Βήμα.** Έστω ότι ισχύει για κάποιο $j \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\|y_{j+2} - y_{j+1}\| = \|G[y_{j+1}] - G[y_j]\| \leq k \|y_{j+1} - y_j\| \leq k^{j+1} \|y_1 - y_0\|$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

□

Επιστρέφοντας στη σειρά 2.4, είναι σαφές από τον ισχυρισμό ότι

$$\max_{x \in [a, b]} |y_{j+1}(x) - y_j(x)| = \|y_{j+1} - y_j\| \leq k^j \|y_1 - y_0\|.$$

Έστω

$$M_j := k^j \|y_1 - y_0\|.$$

Αφού η

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_j = \|y_0 - y_1\| \sum_{j=0}^{\infty} k^j$$

συγκλίνει, το M - κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η $\{y_n\}_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή συνάρτηση y_∞ . Επιπλέον, $y_\infty \in S$.

Σε αντίθετη περίπτωση, αν $\|y_\infty - y^t\| > \alpha$ προκύπτει ότι

$$\|y_n - y^t\| > \alpha$$

για κάποιο n , το οποίο αντιφάσκει το γεγονός ότι $y_n \in S$.

Αφού η G είναι συστολή, έχουμε ότι

$$\|G[y_\infty] - G[y_n]\| \leq k \|y_\infty - y_n\|, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Όμως,

$$\|y_\infty - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

² Η διατύπωση του κριτηρίου καθώς και η απόδειξή του παρατίθεται στο Παράρτημα.

συνεπώς

$$\|G[y_\infty] - G[y_n]\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Τελικά,

$$G[y_\infty] - y_\infty = (G[y_\infty] - y_{n+1}) + (y_{n+1} - y_\infty)$$

έτσι ώστε

$$\|G[y_\infty] - y_\infty\| \leq \|G[y_\infty] - y_{n+1}\| + \|y_{n+1} - y_\infty\|.$$

Άρα, είναι σαφές ότι $G[y_\infty] = y_\infty$, συνεπώς η y_∞ είναι ένα σταθερό σημείο του G .

Μοναδικότητα

Τώρα, έστω $z \in S$ ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο του G , δηλαδή το z ικανοποιεί την σχέση $G[z] = z$. Τότε

$$\|y_\infty - z\| = \|G[y_\infty] - G[z]\| \leq k\|y_\infty - z\|$$

το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $\|y_\infty - z\| = 0$. Με άλλα λόγια, $z = y_\infty$, άρα η y_∞ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του G . Με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου για τελεστές του Banach. $\square$

2.3 Απόδειξη του Θεωρήματος Picard

Θεώρημα 2.3.1 (Υπαρξης και μοναδικότητας του Picard). Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε ένα κλειστό ορθογώνιο

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq h_1, |y - y_0| \leq a_1\}$$

το οποίο περιέχει το (x_0, y_0) στο εσωτερικό του. Τότε υπάρχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα της μορφής $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ με $h > 0$. Επίσης, η ακολουθία συναρτήσεων

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην λύση αυτή στο I .

Θυμίζουμε τον τελεστή T που ορίζεται ως $T[y] = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ και την ακολουθία του Picard που ορίζεται ως εξής :

$$y_0(x) = y_0 \quad \text{και} \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Η αποδειξή θα γίνει με χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου για τελεστές του Banach. Για τον σκοπό αυτό αναζητούμε

- κατάλληλο διάστημα $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ και $a > 0$ ώστε
- ο τελεστής T περιορισμένος στο $S = \{g \in \mathcal{C}(I) \mid \|g - y_0\| \leq a\}$ να δίνει τιμές στο S και να είναι συστολή.

Οι $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο R και λόγω της συμπίεσης του R , υπάρχουν $M, L > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x, y)| \leq M \quad \text{και} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L, \quad (x, y) \in R.$$

Τώρα, αν $I_1 = [x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ και $g \in \mathcal{C}(I_1)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $\|g - y_0\| \leq a_1$, τότε για $x \in I_1$ έχουμε ότι

$$|T[g](x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, g(t))| dt \leq M|x - x_0|.$$

Από γεωμετρική σκοπιά, πρέπει να δείξουμε ότι αν $g \in \mathcal{C}(I_1)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $\|g - y_0\| \leq a_1$, τότε το γράφημα της $T[g]$ πρέπει να βρίσκεται στα τμήματα που φράσσονται από τις ευθείες

$$y_{1,2} = y_0 \pm M(x - x_0) \quad (\text{βλέπε σχήμα}).$$

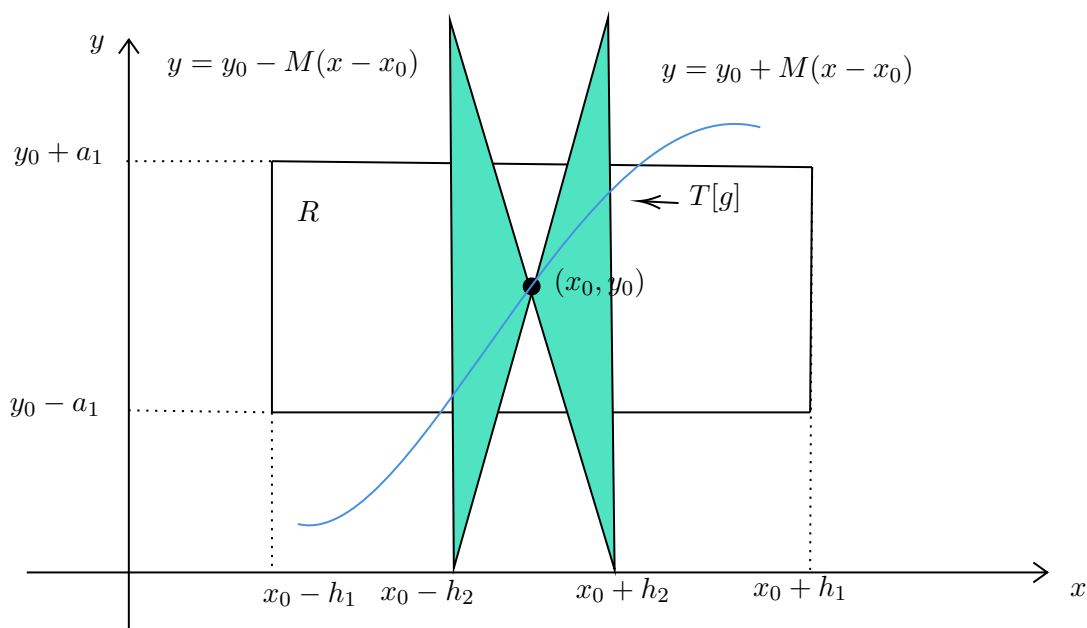
Για να κρατήσουμε το $T[g]$ μέσα στο ορθογώνιο, θέλουμε το ζητούμενο h να ικανοποιεί την σχέση

$$0 < h < \min\{h_1, a_1/M\}.$$

Τελικά επιλέγουμε

$$0 < h < \min\{h_1, a_1/M, 1/L\},$$

όπου η τελευταία επιλογή θα δείξει ότι T είναι συστολή στο S .



(α) Ο T απεικονίζει το S στο S . Πράγματι, αν $g \in S$ και $x \in I_1$ τότε έχουμε από πριν ότι

$$|T[g](x) - y_0| \leq M|x - x_0| < Mh < a_1.$$

(β) Ο T είναι συστολή στο S . Έστω $u, v \in S$, τότε έχουμε ότι

$$|T[u](x) - T[v](x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt.$$

Τώρα, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει συνάρτηση $z(t)$ μεταξύ των $u(t)$ και $v(t)$ ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, z(t)) [u(t) - v(t)] = f(t, u(t)) - f(t, v(t)).$$

Επομένως, από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι

$$|T[u](x) - T[v](x)| \leq \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z(t)) [u(t) - v(t)] \right| dt \leq Lh \|u - v\|$$

με $Lh < 1$, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Μας απομένει να λύσουμε ένα λεπτό και εξαιρετικά σημαντικό ζήτημα. Το θεώρημα σταθερού σημείου μας εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα στο S . Υπάρχει όμως μοναδική λύση στο $I = [x_0 - h, x_0 + h]$? Έστω u μια λύση του Π.Α.Τ. ορισμένη στο I . Τότε,

$$|u(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq a_1.$$

Άρα, $u \in S$ και έχουμε το ζητούμενο. □

2.4 Πορίσματα του Θεωρήματος Picard - Lindelöf

Πόρισμα 2.4.1. Από εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος Picard - Lindelöf προκύπτει ότι με τις ίδιες προϋποθέσεις του Θεωρήματος, για

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

το Π.Α.Τ.

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα

$$I = [t_0 - h, t_0 + h].$$

Επί της ουσίας, δεν υπάρχει εξάρτηση από την σταθερά $L > 0$.

Πόρισμα 2.4.2. Η συνθήκη η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial y}$ να είναι συνεχής στο ορθογώνιο μπορεί να αντικατασταθεί από την συνθήκη **η συνάρτηση $f(t, y)$ να είναι Lipschitz συνεχής ως προς y στο ορθογώνιο.**

Πόρισμα 2.4.3. Στην ειδική περίπτωση που η $f(t, y)$ η συνάρτηση $f(t, y)$ να είναι Lipschitz συνεχής ως προς y , για κάθε $y \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει μοναδική λύση του Π.Α.Τ. **σε όλο το $\mathbb{R}$.**

Πόρισμα 2.4.4. Το Θεώρημα Έπαρξης και μοναδικότητας διασφαλίζει ότι αν έχουμε δύο λύσεις y_1, y_2 της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = f(t, y)$$

τέτοιες ώστε

$$y_1(t_0) < y_2(t_0)$$

στο ίδιο διάστημα $t_0 \in I$, τότε

$$y_1(t) < y_2(t), \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

2.5 Εφαρμογές - Ασκήσεις του Θεωρήματος

Ιούνιος 2023

Έστω το Π.Α.Τ.:

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(0) = 1,$$

όπου $f(t, y) = t^2|y|^{1/3}$. Δείξτε ότι αν $0 < B < 1$ και

$$0 < A < \frac{B^{1/3}}{(1+B)^{1/9}},$$

το Θεώρημα Picard-Lindelöf εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στο ορθογώνιο:

$$\mathcal{S} = \{(t, y) : |t| \leq A, |y - 1| \leq B\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Για να δείξουμε ότι το Θεώρημα Picard-Lindelöf εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στο ορθογώνιο:

$$\mathcal{S} = \{(t, y) : |t| \leq A, |y - 1| \leq B\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

αρκεί να δείξουμε :

i. Οι συναρτήσεις $f(t, y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο $\mathcal{S}$ και

ii. ότι η σταθερά

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

του θεωρήματος ισούται με a . Τότε, το διάστημα που εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα είναι το

$$I = [-a, a]$$

και έτσι θα έχουμε το ζητούμενο.

Θυμίζουμε, με βάση την απόδειξη του Θεωρήματος, ότι

$$a = A, \quad b = B, \quad M = \max_{\mathcal{S}} |f(t, y)|.$$

Με βάση τα παραπάνω, αρκεί να δείξουμε ότι

$$a \leq \frac{b}{M} \iff A \leq \frac{B}{M}$$

και τότε θα έχουμε ότι

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ A, \frac{B}{M} \right\} = A.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |f(t, y)| &= |t|^2 |y|^{1/3} \\ &\leq A^2 \cdot (B+1)^{1/3}, \quad \text{για κάθε } (t, y) \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Άρα, είναι σαφές ότι

$$\leq A^2 \cdot (1+B)^{1/3} \iff \frac{B}{A^2 \cdot (B+1)^{1/3}} \leq \frac{B}{M}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 < A < \frac{B^{1/3}}{(1+B)^{1/9}} &\iff A^3 < \frac{B}{(1+B)^{1/3}} \\ &\iff A < \frac{B}{A^2(1+B)^{1/3}} \\ &\Rightarrow A < \frac{B}{A^2(1+B)^{1/3}} < \frac{B}{M} \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε δείξει το ζητούμενο. ■

Ιανουάριος 2023

Να δειχθεί ότι:

(α) η συνάρτηση $f(t, y) = |y - t|$, $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, είναι Lipschitz ως προς y .

(β) η λύση $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y' = |y - t|, \quad y(0) = 0,$$

$$\text{ικανοποιεί } y(t) < 1 + t.$$

Λύση. (α) Έστω $t \in \mathbb{R}$ και $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= ||y_1 - t| - |y_2 - t|| \\ &\leq |y_1 - t - (y_2 - t)| \\ &= 1 \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Άρα, η $f(t, y)$ είναι 1 - Lipschitz ως προς y σε όλο το $\mathbb{R}$.

(β) Από το (α) και το Πόρισμα 2.4.3 η $y(t)$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Τώρα, αν

$$\tilde{y}(t) = 1 + t$$

παρατηρούμε ότι $\tilde{y}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = |y - t|$$

με

$$\tilde{y}(0) = 1 > 0 = y(0).$$

Από το Πόρισμα 2.4.4, έχουμε ότι

$$y(t) < \tilde{y}(t) \iff y(t) < 1 + t, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

■

Θέμα Εξετάσεων

Έστω $f(t, y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο:

$$S = \{(t, y) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Τότε το θεώρημα **Picard-Lindelöf** εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του ΠΑΤ: $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ στο διάστημα $I_\delta = [t_0, t_0 + \delta)$, όπου

$$\delta = \min \left(a, \frac{b}{M} \right) \quad \text{και} \quad M = \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in S\}.$$

Δείξτε ότι αν $f = (1 + y)^2$ και $y(1) = 1$, τότε το θεώρημα **Pickard-Lindelöf** εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στο διάστημα

$$I = \left[1, \frac{9}{8} \right).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι η

$$f(t, y) = (1 + y)^2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 2(1 + y)$$

είναι συνεχείς σε οποιοδήποτε ορθογώνιο

$$S = \{(t, y) : 1 \leq t \leq 1 + a, |y - 1| \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Αρα, για κάθε επιλογή $a, b > 0$ για :

$$\delta = \min \left(a, \frac{b}{M_S} \right)$$

όπου

$$M_S = \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in S\}$$

το Θεώρημα Picard - Lindelöf εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα στο διάστημα

$$I_\delta = [1, 1 + \delta).$$

Για ένα τέτοιο τυχαίο ορθογώνιο S έχουμε ότι

$$|f(t, y)| = (1 + y)^2 \leq (2 + b)^2$$

αφού $|y - 1| < b$. Αρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, βλέπε πρώτο παράδειγμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$M = (2 + b)^2.$$

Αρα,

$$\delta = \min \left(a, \frac{b}{(2 + b)^2} \right).$$

Θα εξετάσουμε που μεγιστοποιείται η συνάρτηση

$$g(b) = \frac{b}{(2 + b)^2}.$$

Με χρήση μονοτονίας και παραγώγων μπορούμε να δείξουμε ότι η μέγιστη τιμή της $g(b)$ επιτυγχάνεται για $b = 2$ και τότε

$$g(2) = \frac{2}{(2 + 2)^2} = \frac{1}{8}.$$

Επιλέγοντας,

$$a > g(2) = \frac{1}{8}$$

στο ορθογώνιο

$$S = \left\{ (t, y) : 1 \leq t \leq 1 + a, |y - 1| \leq \frac{1}{8} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

έχουμε ότι

$$\delta = \delta = \min \left(a, \frac{b}{M_S} \right) = \frac{1}{8}$$

και το Θεώρημα Picard - Lindelöf εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα στο διάστημα

$$\left[1, 1 + \frac{1}{8} \right) = \left[1, \frac{9}{8} \right).$$

■

2.6 Ασκήσεις

2.1. Δείξτε ότι αν $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις Lipschitz, τότε $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$ (αν f_1, f_2 είναι φραγμένες) και $f_2 \circ f_1$ είναι επίσης συναρτήσεις Lipschitz.

Παράδειγμα 2.6.1. (α) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(t) = \tan t$ ικανοποιεί

$$\varphi'(t) \leq 2(\cos t + \varphi^2(t)), \quad \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(β) Να εξεταστεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 2(\cos t + y^2), \quad y(0) = 0,$$

ως προς την ύπαρξη ολικής λύσης.

2.2. (α) Βρείτε το μέγιστο διάστημα $[0, \alpha)$ στο οποίο το θεώρημα Picard-Lindelöf εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα για το Π.Α.Τ.:

$$y' = y^2, \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0 > 0.$$

Συγκρίνετέ το με το πραγματικό μέγιστο διάστημα που προκύπτει από την αναλυτική λύση της εξίσωσης.

(β) Δείξτε ότι αν $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.3. (i) Δίνεται το Π.Α.Τ.: $y'(t) = y^2(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = 1$. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος, $\phi(t)$, και το μέγιστο διάστημα $J = [0, \alpha^*)$ στο οποίο ορίζεται.

(ii) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα $J_1 = [0, t_1^*]$ στο οποίο το Θεώρημα Picard-Lindelöf εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για το Π.Α.Τ. στο (i).

(iii) Έστω $J_k = [t_{k-1}^*, t_k^*]$ το μέγιστο διάστημα στο οποίο το Θεώρημα Picard-Lindelöf εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για τα Π.Α.Τ.:

$$y'(t) = y^2(t), \quad y(t_{k-1}^*) = \phi(t_{k-1}^*), \quad k \in \mathbb{N}$$

όπου $t_0^* = 0$ και όπου $\phi(t)$ η λύση του Π.Α.Τ. στο (i). Δείξτε ότι η ακολουθία $t_k^* \rightarrow \alpha^*$ όπου α^* ορίζεται στο (i).

2.4. Δίνεται το π.α.π. $y' = \sqrt{y}$ με αρχική συνθήκη $y(0) = \alpha$. Να το λύσετε όταν

1. $\alpha = 0$ και $\alpha = 1$.

2. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματά σας ως προς το Θεώρημα Picard - Lindelöf.

2.7 Παράρτημα

Θεώρημα 2.7.1 (M - κριτήριο του Weirstrass). Έστω $\{f_n\}_n$ μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένες σε ένα σύνολο E . Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένας $M_n \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{για κάθε } x \in E$$

Τότε, αν η $\sum_n M_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_n f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E .

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει και $M_n \geq 0$ για κάθε n , από το κριτήριο του Cauchy προκύπτει ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n > N$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=n+1}^m M_k < \varepsilon.$$

Αρα, για κάθε $m > n > N$ και κάθε $x \in E$ έχουμε ότι

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k < \varepsilon.$$

Η $S_n(x)$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει σε κάποιο $S(x)$. Για $n > N$ έχουμε

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) - S_n(x) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |S_m(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Αφού το N δεν εξαρτάται από το x , η S_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην S . Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

3.1 Ορισμοί και Θεωρητικά Στοιχεία

Ορισμός 3.1.1. Η εξίσωση $y' = f(t, y)$ λέγεται **αυτόνομη** αν η f δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή t , δηλαδή είναι της μορφής $f(y)$.

Ορισμός 3.1.2. i. Ο χώρος φάσης της εξίσωσης $y' = f(y)$ είναι ο άξονας των y .

ii. Το $\bar{y}$ λέγεται **σημείο ισορροπίας** αν $f(\bar{y}) = 0$.

iii. Το διάγραμμα φάσης είναι ο άξονας των y μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που καταδεικνύουν το πρόσημο της κλίσης της λύσης.

Συμβολίζουμε τη λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.: $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ με $\phi(t, y_0)$. Εξ' ορισμού ισχύει ότι $\phi(0, y_0) = y_0$.

Έστω ότι ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων του Π.Α.Τ. Τότε, αν $\bar{y}$ σημείο ισορροπίας

$$\phi(t, \bar{y}) \equiv \bar{y}$$

για όλα τα t . (η σταθερή λύση $y(t) = y_0$ ικανοποιεί τόσο την δ.ε. όσο και την αρχική συνθήκη και από το μονοσήμαντο των λύσεων είναι η μοναδική λύση).

Αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας, τότε η $\phi(t, y_0)$ δεν είναι ποτέ ίση με σημείο ισορροπίας.

Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας τότε, η $t \rightarrow f(\phi(t, y_0))$ δεν αλλάζει πρόσημο στο χρόνο. Επομένως σε αυτή τη περίπτωση $\phi(t, y_0)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Επίσης λόγω του μονοσήμαντου της λύσης, η $\phi(t, y_0)$ δεν μπορεί να φτάσει το σημείο ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο.

Ορισμός 3.1.3. Το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ λέγεται **ευσταθές** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|y - \bar{y}| < \delta$ να ισχύει

$$|\phi(t, y) - \phi(t, \bar{y})| < \varepsilon$$

για $t \geq 0$.

Το $\bar{y}$ λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει $\eta > 0$ ώστε αν $|y_0 - \bar{y}| < \eta$ να ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y_0) = \bar{y}.$$

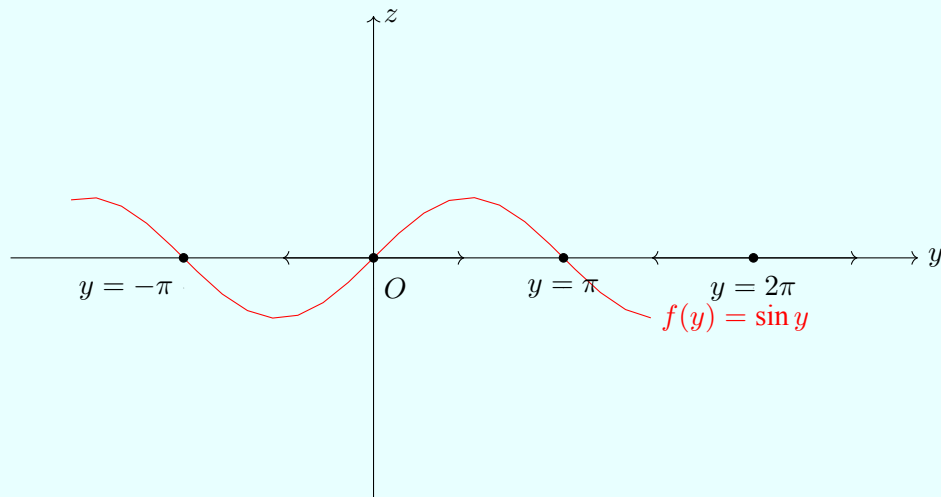
Τέλος το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ λέγεται **ασταθές** αν δεν είναι ευσταθές.

Στην περίπτωση που $f'(\bar{y}) \neq 0$, τότε $\bar{y}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν $f'(\bar{y}) < 0$ και ασταθές όταν $f'(\bar{y}) > 0$.

Παράδειγμα 3.1.1. Η αυτόνομη διαφορική εξίσωση: $y' = \sin y$ έχει σημεία ισορροπίας :

$$y = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Το διάγραμμα φάσης είναι :



Τα σημεία ισορροπίας

$$y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

είναι ασταθή σημεία ισορροπίας γιατί τα βέλη απομακρύνονται από το σημείο και τα

$$y = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας, διότι τα βέλη "κοιτούν" προς το σημείο.

Ορισμός 3.1.4. Μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y),$$

όπου σε κάθε τιμή της παραμέτρου μ αντιστοιχεί μια διαφορική εξίσωση, καλείται **μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορικών εξισώσεων**.

Η τιμή $\bar{\mu}$ της παραμέτρου μ για την οποία έχουμε αλλαγή του αριθμού των σημείων ισορροπίας ή αλλαγή της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας λέγεται **τιμή διακλάδωσης**.

3.2 Παραδείγματα

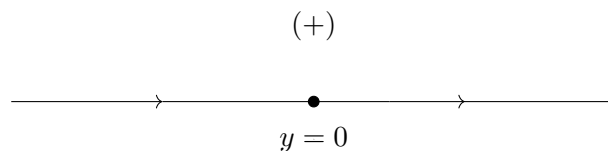
Παράδειγμα 3.2.1. Να γίνουν τα διαγράμματα φάσης για τις κάτωθι διαφορικές εξισώσεις :

i. $y' = y^2$

ii. $y' = (1 + y)^2$

iii. $y' = 1 + y^2$

Λύση. i. Λύνουμε την εξίσωση $f(y) = y^2 = 0$, άρα $\bar{y} = 0$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Μάλιστα παρατηρούμε ότι $f(y) > 0$ για κάθε $y \neq \bar{y}$ άρα, το διάγραμμα φάσης είναι



ii. Η λύση είναι όμοια με το i.

iii. Λύση όμοια με το i. με τη διαφοροποίηση ότι η $f(y) = 1 + y^2$ δεν έχει ρίζα άρα η διαφορική εξίσωση δεν έχει σημεία ισορροπίας.

■

Παράδειγμα 3.2.2. Να γίνει το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 3y + 2.$$

Λύση. Λύνουμε την εξίσωση

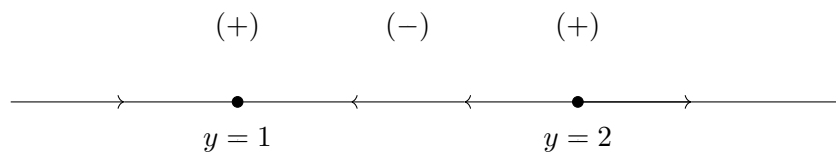
$$f(y) = y^2 - 3y + 2 = 0$$

και παρατηρούμε ότι

$$\bar{y} = 1 \quad \text{και} \quad \bar{y} = 2$$

τα μοναδικά σημεία ισορροπίας.

Βρίσκουμε το πρόσημο της $f(y)$ για τις διάφορες τιμές του y και προκύπτει πως το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης είναι το :



όπου παρατηρούμε ότι το $\bar{y} = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, ενώ το $\bar{y} = 2$ είναι ασταθές. ■

Παράδειγμα 3.2.3. Να γίνει το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης :

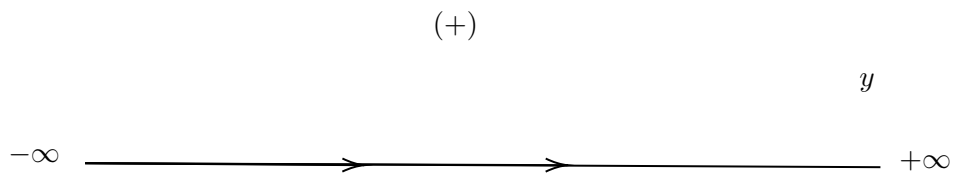
$$y' = y^2 - 2y + \mu$$

Λύση. Έχουμε πως $y' = f_\mu(y)$ με

$$f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu = (y - 1)^2 + \mu - 1.$$

Τότε, ελέγχουμε την γραφική παράσταση της $f_\mu(y) = 0$ για την εύρεση του διαγράμματος διακλάδωσης όπου $\mu = 1$ είναι η τιμή της διακλάδωσης με $(1, 1)$ η κορυφή της παραβολής. Παρατηρούμε ότι

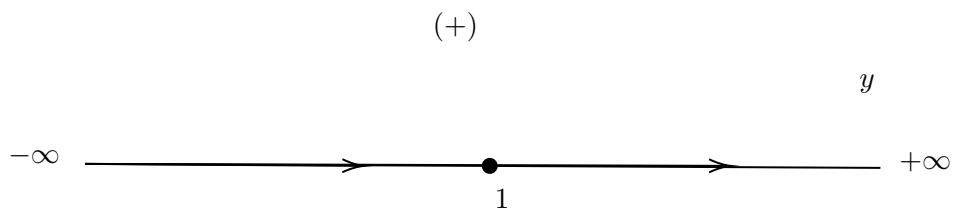
i. Για $\mu > 1$, τότε η $f_\mu(y)$ δεν έχει καμία ρίζα και $f_\mu(y) > 0$, συνεπώς :



ii. Για $\mu = 1$, τότε έχουμε ότι

$$f_1(y) = (y - 1)^2$$

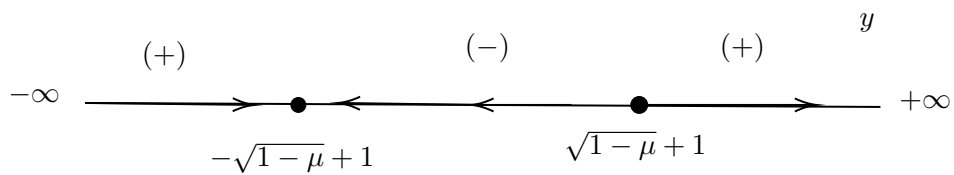
συνεπώς το αντίστοιχο διάγραμμα φάση είναι :



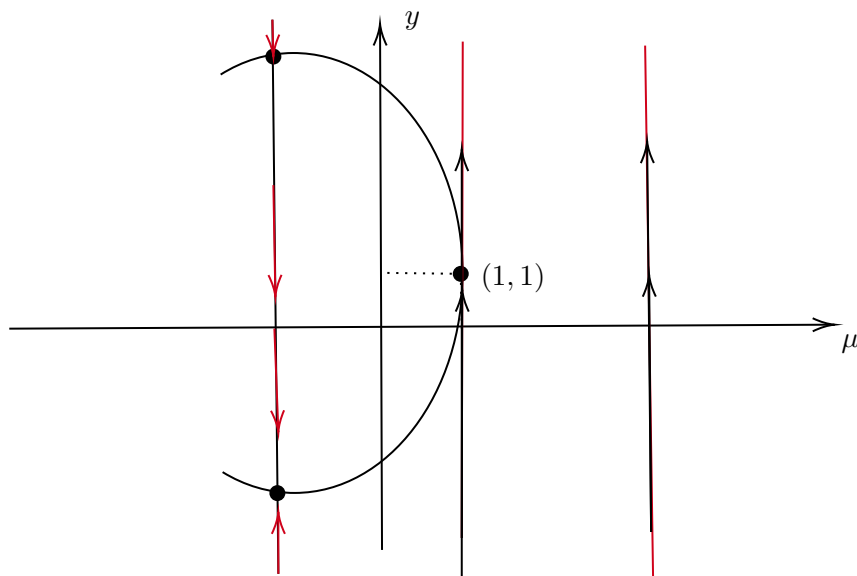
iii. Για $\mu < 1$ έχουμε ότι η $f_\mu(y) = 0$ έχει δύο ρίζες

$$\bar{y}_{1,2} = \pm\sqrt{1-\mu} + 1.$$

με αντίστοιχο διάγραμμα φάση :



Τελικά το διάγραμμα διακλάδωσης είναι :



■

3.3 Πεδία Ορισμού Λύσεων Π.Α.Τ.

Με χρήση της ποιοτικής θεωρίας έχουμε την δυνατότητα να βρούμε σε ορισμένες περιπτώσεις ακριβώς το πεδίο ορισμού της λύσης $\varphi(t, y_0)$ του Π.Α.Τ.

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0.$$

ι. Αν ισχύει

$$y_0 > \bar{y}_2, \quad \text{με} \quad f(\bar{y}_2) = 0$$

και

$$f(y) > 0, \quad \forall y > \bar{y}_2$$

τότε η λύση $\varphi(t; y_0)$ ορίζεται στο διάστημα

$$(-\infty, A_{y_0})$$

με

$$A_{y_0} = \int_{y_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} \in [0, +\infty]$$

και έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t; y_0) = \bar{y}_2, \quad \lim_{t \rightarrow A_{y_0}^-} \varphi(t; y_0) = +\infty$$

ii. Αν ισχύει

$$y_0 > \bar{y}_2, \quad \mu\epsilon \quad f(\bar{y}_2) = 0$$

και

$$f(y) < 0, \quad \forall y > \bar{y}_2$$

τότε η λύση $\varphi(t; y_0)$ ορίζεται στο διάστημα $(A_{y_0}, +\infty)$ με

$$A_{y_0} = \int_{-\infty}^{y_0} \frac{ds}{f(s)} \in [-\infty, 0]$$

και έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t; y_0) = \bar{y}_2, \quad \lim_{t \rightarrow A_{y_0}^+} \varphi(t; y_0) = +\infty$$

iii. Αν ισχύει

$$y_0 > \bar{y}_1, \quad \mu\epsilon \quad f(\bar{y}_1) = 0$$

και

$$f(y) > 0, \quad \forall y > \bar{y}_1$$

τότε η λύση $\varphi(t; y_0)$ ορίζεται στο διάστημα $(B_{y_0}, +\infty)$ με

$$B_{y_0} = \int_{y_0}^{-\infty} \frac{ds}{f(s)} \in (-\infty, 0)$$

και έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow B_{y_0}^+} \varphi(t; y_0) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t; y_0) = \bar{y}_1$$

iv. Αν ισχύει

$$y_0 < \bar{y}_1 \quad \text{και} \quad f(\bar{y}_1) = 0$$

και

$$f(y) < 0, \quad \forall y < \bar{y}_1$$

, τότε η λύση $\varphi(t; y_0)$ ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, B_{y_0})$ με

$$B_{y_0} = \int_{y_0}^{-\infty} \frac{ds}{f(s)} \in (0, +\infty]$$

και έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t; y_0) = \bar{y}_1, \quad \lim_{t \rightarrow B_{y_0}^-} \varphi(t; y_0) = -\infty$$

Ιούνιος 2024

(α) Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας της Σ.Δ.Ε.

$$y' = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$$

και να μελετηθεί η ευστάθειά τους. Να κατασκευαστεί το διάγραμμα φάσης.

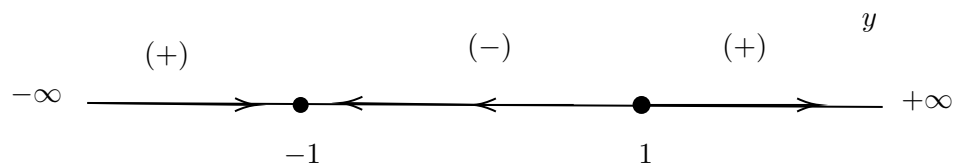
(β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y' = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(0) = 4.$$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$f(y) = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = 0 \iff \bar{y} = \pm 1.$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα φάση είναι :



Αφού τα βέλη ``δείχνουν`` προς το -1, τότε το -1 είναι ευσταθές, ενώ το 1 είναι ασταθές.

(β) Αφού

$$y(0) = 4 > 1 = \bar{y}_2$$

και

$$f(y) = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} > 0, \quad \text{για κάθε } y > 1$$

τότε το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης λύσης του Π.Α.Τ. είναι το

$$I = (-\infty, A_{y_0})$$

όπου

$$A_{y_0} = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)}$$

Τώρα, αφού

$$y^2 - 1 < y^2$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}A_{y_0} &= \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} \\&= \int_4^{+\infty} \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1} ds \\&\geq \int_4^{+\infty} \frac{s^2 + 1}{s^2} ds \\&= \int_4^{+\infty} 1 + \frac{1}{s^2} ds \\&= \left. s - \frac{1}{s} \right|_4^{+\infty} \\&= +\infty\end{aligned}$$

Άρα, το πεδίο ορισμού του Π.Α.Τ. είναι το

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

■

3.4 Ασκήσεις

3.1. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 6y - 16$$

και να βρεθούν το $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες :

- i. $y(0) = 0$
- ii. $y(0) = -3$
- iii. $y(0) = 8$

3.2. Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2) \sin y, \quad -\pi \leq y \leq \pi.$$

3.3. Να γίνουν τα διαγράμματα διακλάδωσης των διαφορικών εξισώσεων :

i. $y' = y^2 - 2y + \mu$

ii. $y' = y^2 + 4y + \mu$

iii. $y' = \mu - y$

3.4. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y' = \mu y - y - y^3, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Να προσδιοριστούν οι λύσεις ισορροπίας και τα σημεία διακλάδωσης. Επίσης, να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης και να εξεταστεί η ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας.

3.5. (α) Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας της Σ.Δ.Ε.

$$y' = y(y - 2)e^{-y}$$

και να μελετηθεί η ευστάθειά τους. Να κατασκευαστεί το διάγραμμα φάσης.

(β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y' = y(y - 2)e^{-y}, \quad y(0) = 3.$$

3.6. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης για την οικογένεια διαφορικών εξισώσεων:

$$y' = (y + \mu)(y^2 - \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Ποια είναι τα σημεία διακλάδωσης;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

4.1 Προκαταρκτικά

Ορισμός 4.1.1. Μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$a_0(t) \cdot y''(t) + a_1(t) \cdot y'(t) + a_2(t) \cdot y(t) = g(t) \quad (4.1)$$

Αν $a_0 \neq 0$, τότε η 4.1 γράφεται ως

$$y''(t) + a(t) \cdot y'(t) + b(t) \cdot y(t) = f(t) \quad (4.2)$$

όπου

$$a(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)}, \quad b(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)}, \quad f(t) = \frac{g(t)}{a_0(t)}$$

Συχνά μας εξυπηρετεί να εισάγουμε συμβολισμό διαφορικών τελεστών στην θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, ορίζοντας ως L τον διαφορικό τελεστή

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a(t) \frac{d}{dt} + b(t)$$

η 4.2 γράφεται

$$L[y] = f(t) \quad (4.3)$$

Ορισμός 4.1.2. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς,

(α) Η $L[y] = 0$ λέγεται η αντίστοιχη **ομογενής** της 4.3.

(β) Η 4.3 λέγεται **μη ομογενής**.

Ορισμός 4.1.3. Έστω $\varphi_1, \varphi_2: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) Δύο συναρτήσεις $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ λέγονται **γραμμικά εξαρτημένες** αν η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης επί μια σταθερά.

(β) Δύο συναρτήσεις $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητες** αν ισχύει η ισοδυναμία

$$c_1 \cdot \varphi_1(t) + c_2 \cdot \varphi_2(t) = 0 \iff c_1 = c_2 = 0,$$

για κάθε $t \in I$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 4.1.4. Η **ορίζουσα Wronski** δύο συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(I)$, όπου διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, είναι η

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2'(t) - \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2(t).$$

Θεώρημα 4.1.1 (Τύπος του Liouville). Έστω $\varphi_1, \varphi_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ λύσεις της $L[y] = 0$, $W(t)$ η ορίζουσα Wronski των φ_1, φ_2 και $t_0 \in I$. Τότε ισχύει ότι

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t -a(s)ds}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$W(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2'(t) - \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2(t).$$

Επειδή φ_1, φ_2 είναι λύσεις της $L[y] = 0$ έχουμε

$$\varphi_1''(t) = -a(t) \cdot \varphi_1'(t) - b(t) \cdot \varphi_1(t)$$

$$\varphi_2''(t) = -a(t) \cdot \varphi_2'(t) - b(t) \cdot \varphi_2(t)$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$W' = \varphi_1 \cdot [-a \cdot \varphi_2' - b \cdot \varphi_2] - \varphi_2 [-a \cdot \varphi_1' - b \cdot \varphi_1] = -a \cdot W.$$

Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$h(t) = W(t) \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^t -a(s)ds \right)$$

ορισμένη στο I , παρατηρήστε ότι $h'(t) = 0$ από την παραπάνω σχέση, για κάθε $t \in I$. Συνεπώς,

$$h(t) = h(t_0) = W(t_0) \quad \text{σταθερή}$$

και έχουμε την ζητούμενη σχέση. □

Θεώρημα 4.1.2 (Υπαρξης και Μοναδικότητας). Αν $a(t), b(t), f(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I , τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} L[y] = y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = a \\ y'(t_0) = b \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση για κάθε αρχική συνθήκη $(t_0, (a, b))$.

Παρατήρηση 4.1.1. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n y = 0.$$

(α) Αν φ_1, φ_2 λύσεις της $L[y] = 0$, τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad \text{με} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

αποτελεί επίσης λύση της $L[y] = 0$. Συνεπώς, ο χώρος λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $L[y] = 0$ είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη.

$$L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = L(c_1\varphi_1) + L(c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2) = 0.$$

□

(β) Ο χώρος λύσεων ή το σύνολο λύσεων της $L[y] = 0$ είναι ένας γραμμικός χώρος διάστασης n .

Θεώρημα 4.1.3. Έστω μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής $L[y] = f(t)$ (όχι αναγκαστικά δεύτερης τάξης). Τότε, η γενική λύση της $L[y] = f(t)$ είναι της μορφής

$$y(t) = y_{\text{ομ}}(t) + y_{\text{ειδ}}(t)$$

όπου $y_{\text{ομ}}(t)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και $L[y] = 0$ και $y_{\text{ειδ}}(t)$ μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$.

Απόδειξη. Έστω p ειδική λύση της $L[y] = f(t)$, δηλαδή ικανοποιεί την σχέση $L[p] = f(t)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{h + p \mid L[h] = 0\}.$$

Θα δείξουμε ότι το S ισούται με το σύνολο λύσεων Λ της $L[y] = f(t)$. Από τη γραμμικότητα του τελεστή L είναι σαφές ότι $S \subseteq \Lambda$. Αντίστροφα, αν $\varphi \in \Lambda$ τότε έχουμε ότι

$$L[\varphi - p] = L[\varphi] - L[p] = f(t) - f(t) = 0.$$

Άρα, προκύπτει ότι $\varphi = (\varphi - p) + p \in S$, αφού δείξαμε ότι $\varphi - p$ είναι λύση της $L[y] = 0$. $\square$

Αφήνεται στον αναγνώστη να ορίσει και αποδείξει τα αντίστοιχα αποτελέσματα για κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n .

4.2 Εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

όπου $p, q: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Η παρακάτω μέθοδος που θα περιγράψουμε μας υποδεικνύει, γνωρίζοντας ήδη μια λύση φ_1 της $L[y] = 0$, ένα τρόπο να βρίσκουμε φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες με την φ_1 λύσεις της εξίσωσης $L[y] = 0$. Επομένως, από την Παρατήρηση 4.1.1 η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y_t = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Μέθοδος με την ορίζουσα Wronski

Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $L[y] = 0$. Ισχύει ότι

$$\frac{\varphi_1 \cdot \varphi_2' - \varphi_1' \cdot \varphi_2}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2} \iff \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' = \frac{W}{\varphi_1^2} \iff \varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{W(t)}{\varphi_1^2} dt.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Liouville :

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2} dt.$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι φ_1, φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 4.2.1. Να λυθεί η

$$y'' - \left(\frac{t+1}{t}\right) y' + \frac{1}{t} \cdot y = 0, \quad t > 0$$

αν $\varphi_1(t) = e^t$ είναι μία λύση της.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)} dt = e^t \int \frac{e^{\int \frac{t+1}{t} dt}}{e^{2t}} dx = e^t \int \frac{te^t}{e^{2t}} dx = e^t \int \frac{t}{e^t} dx$$

Έτσι προκύπτει ότι μια επιλογή είναι $\varphi_2(t) = -t - 1$. Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t) = c_1 e^t + c_2(-t - 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

4.3 Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε μια εξίσωση της μορφής

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (4.4)$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές. Η συνάρτηση

$$y(t) = e^{rt}$$

έχει την ιδιότητα ότι οι $y'(t)$ και $y''(t)$ είναι πολλαπλάσιά της. Υποπευόμαστε λοιπόν ότι έχει νόημα να αναζητούμε λύσεις της παραπάνω μορφής για κατάλληλα $r \in \mathbb{R}$.

Αντικαθιστώντας,

$$L[e^{rt}] = 0 \iff r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_2 e^{rt} = 0 \iff r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \quad (4.5)$$

Ορισμός 4.3.1. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, το

$$r^2 + a_1 r + a_2$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της 4.4. Η

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της 4.4.

Θεωρούμε την διακρίνουσα

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2$$

της $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(α) Αν $\Delta > 0$, οι $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ είναι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης, έχουμε ότι

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Στην περίπτωση αυτή, οι

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{και} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, αφού

$$W_{(y_1, y_2)}(t) = (r_1 - r_2)e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0.$$

Άρα, η γενική λύση είναι η

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(β) Αν $\Delta = 0$, τότε $r_1 = r_2 = -\frac{a_1}{2}$ η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης και

$$y(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}$$

είναι μια λύση της εξίσωσης. Εφαρμόζοντας την μέθοδο της παραγράφου 3.2 προκύπτει ότι

$$y_2(t) = y_1(t) \cdot \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)} dt, \quad p(t) = a_1.$$

Άρα, μια επιλογή είναι

$$y_2(t) = t \cdot e^{-\frac{a_1}{2}t},$$

συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t} (c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(γ) Αν $\Delta < 0$, τότε η $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες τις

$$r_{1,2} = \sigma \pm \omega i \in \mathbb{C}, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}.$$

Η γενική λύση στη περίπτωση αυτή (στο $\mathbb{C}$) είναι

$$y(t) = c_1 e^{(\sigma + \omega i)t} + c_2 e^{(\sigma - \omega i)t}.$$

Υπενθυμίζουμε τον **τύπο του Euler** : $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$.

Βάσει αυτού του τύπου, η γενική λύση γίνεται

$$y(t) = c_1 e^{\sigma t} [(c_1 + c_2) \cos(\omega t) + i(c_1 - c_2) \sin(\omega t)].$$

Θέτοντας $\kappa_1 = c_1 + c_2$ και $\kappa_2 = i(c_1 - c_2)$ καταλήγουμε στον τύπο της γενικής λύσης

$$y(t) = e^{\sigma t} [\kappa_1 \cos(\omega t) + \kappa_2 \sin(\omega t)].$$

Προφανώς, αν περιορίσουμε το εύρος τιμών των κ_1, κ_2 στο $\mathbb{R}$, τότε παρατηρήστε ότι ο παραπάνω τύπος περιγράφει την γενική λύση της $L[y] = 0$, αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι οι $e^{\sigma t} \cos(\omega t), e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις της $L[y] = 0$.

Παράδειγμα 4.3.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της δοσμένης εξίσωσης είναι η

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

και οι λύσεις της $r_1 = 2$ και $r_2 = 3$. Άρα, έχουμε ότι

$$y_1(t) = e^{2t} \quad \text{και} \quad y_2(t) = e^{3t}$$

γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$W_{(y_1, y_2)}(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 3e^{5t} - 2e^{5t} = e^{5t} \neq 0.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Παράδειγμα 4.3.2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 + 6r + 9 = 0$ έχει λύσεις $r_{1,2} = -3$. Άρα, $y_1(t) = e^{-3t}$ και από γνωστό τύπο έχουμε ότι

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int 6dt}}{y_1^2(t)} dt \Rightarrow y_2(t) = te^{-3t}.$$

Αφού $W_{(y_1, y_2)}(t) \neq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}.$$

■

Παράδειγμα 4.3.3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Λύση. Θεωρώντας την χαρακτηριστική εξίσωση έχουμε ότι $r^2 - 4r + 5 = 0$ με $\Delta = -4 < 0$, συνεπώς

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Άρα, έχουμε ότι η γενική λύση είναι της μορφής

$$y(t) = e^{2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι ισχύουν αντίστοιχα αποτελέσματα για κάθε διαφορική εξίσωση ανώτερης τάξης. Για παράδειγμα :

Παραλλαγή - Ιούνιος 2024

Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.:

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$r^4 - 5r^2 + 4 = 0.$$

Δηλαδή

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = -4, \quad r_4 = 4.$$

Άρα, οι συναρτήσεις

$$y_1(t) = e^{-t}$$

$$y_2(t) = e^t$$

$$y_3(t) = e^{-4t}$$

$$y_4(t) = e^{4t}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Συνεπώς, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η ακόλουθη :

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 e^{-4t} + c_4 e^{4t}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

■

4.4 Μέθοδος του Lagrange

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο επίλυσης της μη ομογενούς εξίσωσης

$$L[y] = y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t) \quad (4.6)$$

με τη προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $L[y] = 0$. Τότε, θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$ και με βάση το Θεώρημα 4.1.3 θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τη γενική λύση και της $L[y] = f(t)$.

Έστω φ_1, φ_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς $L[y] = 0$. Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της $L[y] = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να μεταβάλλουμε τις παραμέτρους c_1, c_2 , δηλαδή να θέσουμε $c_1 = c_1(t)$ και $c_2 = c_2(t)$ ελπίζοντας ότι έτσι θα βρούμε μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$.

Θεωρούμε λοιπόν $y(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ λύση της αρχικής εξίσωσης. Τότε, έχουμε ότι

$$y'(t) = c_1'(t)\varphi_1(t) + c_1(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + c_2(t)\varphi_2'(t)$$

$$y''(t) = c_1''(t)\varphi_1(t) + 2c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_1(t)\varphi_1''(t) + c_2''(t)\varphi_2(t) + 2c_2'(t)\varphi_2'(t) + c_2(t)\varphi_2''(t)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $L[y] = f(t)$ έχουμε ότι

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = f(t)$$

$$if f \quad (a_1 + 1)(c'_1\varphi_1 + c'_2\varphi_2) + (c'_1\varphi'_1 + c'_2\varphi'_2) = f(t)$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση, αρκεί να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c'_1\varphi_1 + c'_2\varphi_2 &= 0 \\ c'_1\varphi'_1 + c'_2\varphi'_2 &= f(t) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα σύστημα με c'_1, c'_2 ως αγνώστους. Τότε, έχουμε ότι

$$W_{(\varphi_1, \varphi_2)}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi'_1(t) & \varphi'_2(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

αφού φ_1, φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L[y] = 0$. Έτσι, το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση και σύμφωνα με τους τύπους του Cramer (βλέπε Γραμμική Άλγεβρα) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c'_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & \varphi_2(t) \\ f(t) & \varphi'_2(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2(t) \\ \varphi'_1 & \varphi'_2(t) \end{pmatrix}} = \frac{-f(t) \cdot \varphi_2(t)}{W_{(\varphi_1, \varphi_2)}(t)} \Rightarrow c_1(t) = - \int \frac{f(t) \cdot \varphi_2(t)}{W_{(\varphi_1, \varphi_2)}(t)} dt \\ c'_2 &= \frac{\det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ \varphi'_1(t) & f(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2(t) \\ \varphi'_1 & \varphi'_2(t) \end{pmatrix}} = \frac{f(t) \cdot \varphi_1(t)}{W_{(\varphi_1, \varphi_2)}(t)} \Rightarrow c_2(t) = \int \frac{f(t) \cdot \varphi_1(t)}{W_{(\varphi_1, \varphi_2)}(t)} dt \end{aligned}$$

Επειδή μας ενδιαφέρει η εύρεση μιας ειδικής λύσης της $L[y] = f(t)$, αυθαίρετα, παραλείψαμε τις προκύπτουσες σταθερές ολοκλήρωσης. Άρα, μια ειδική λύση της $L[y] = f(t)$ είναι

$$y(t) = -\varphi_1(t) \int \frac{f(t) \cdot \varphi_2(t)}{W_{(\varphi_1, \varphi_2)}(t)} dt + \varphi_2(t) \int \frac{f(t) \cdot \varphi_1(t)}{W_{(\varphi_1, \varphi_2)}(t)} dt.$$

Συνεπώς, οι ελπίδες μας ανταμείφθηκαν ! Η παραπάνω μέθοδος επίλυσης μη ομογενούς εξίσωσης καλείται μέθοδος **Lagrange** ή μέθοδος μεταβολής παραμέτρων.

Παράδειγμα 4.4.1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y' - 2y = e^{-t}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = r^2 - r - 2$$

με ρίζες τις

$$r_1 = -1 \quad \text{και} \quad r_2 = 2,$$

και οι δύο με πολλαπλότητα 1, επομένως οι συναρτήσεις

$$y_1(t) = e^{-t} \quad \text{και} \quad y_2(t) = e^{2t}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς είναι η ακόλουθη :

$$y_{\text{ομ}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Μια ειδική λύση $y_{\text{ειδ}}(t)$ της μη ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}}(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{2t},$$

όπου οι $c'_1(t), c'_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} c'_1 e^{-t} + c'_2 e^{2t} &= 0 \\ -c'_1 e^{-t} + 2c'_2 e^{2t} &= e^{-t} \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς c'_1, c'_2 έχουμε

$$c'_1(t) = -\frac{1}{3}, \quad c'_2(t) = \frac{1}{3}e^{-3t}.$$

Με ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$c_1(t) = -\frac{t}{3}, \quad c_2(t) = -\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9},$$

συνεπώς μία $y_{\text{ειδ}}(t)$ θα δίνεται από την

$$y_{\text{ειδ}}(t) = -\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση

$$-\frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}$$

είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, μπορούμε να θεωρήσουμε την απλούστερη ειδική λύση

$$y_{\text{ειδ}}(t) = -\frac{t}{3}e^{-t}$$

της μη ομογενούς. Τελικά η γενική λύση της $y'' - y' - 2y = e^{-t}$ έχει τη μορφή

$$y(t) = -\frac{t}{3}e^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

4.5 Μέθοδος Απροσδιόριστων Συντελεστών

Έστω

$$L[y] = f(t) \Leftrightarrow y'' + ay' + by = f(t)$$

με $a, b \in \mathbb{R}$ και $f(t) \in C(I)$. Αν $f(t)$ είναι εκθετική συνάρτηση, σταθερή, πολυώνυμου του t , τριγωνομετρική συνάρτηση ή συνδυασμός αυτών τότε, γίνεται χρήση της παρακάτω μεθόδου.

Περιγραφή της μεθόδου

Θεωρούμε

$$y'' + ay' + by = f(t), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

και

$$f(t) = e^{\gamma t} [P_n(t) \cos(\delta t) + Q_m(t) \sin(\delta t)] \quad (4.7)$$

με $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $P_n(t), Q_m(t) \in \mathbb{R}[t]$ βαθμού n και m αντίστοιχα.

Αν $\gamma + \delta i$ ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, πολλαπλότητας p τότε η μη-ομογενής διαφορική εξίσωση έχει ειδική λύση της μορφής

$$y_\epsilon = t^p e^{\gamma t} [p_N(t) \cos(\delta t) + q_N(t) \sin(\delta t)]$$

με $p_N(t), q_N(t)$ πολυώνυμα βαθμού $N = \max\{n, m\}$ του t .

Η αρχή της υπέρθεσης

Η παραπάνω μορφή της $f(t)$ για μέσω της οποίας έχουμε (ή δεν έχουμε) την δυνατότητα να εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο είναι ορισμένες φορές περιοριστική. Παρόλα αυτά ενδέχεται η $f(t)$ να είναι άθροισμα τέτοιων. Σε τέτοιες (και όχι μόνο) περιπτώσεις χρησιμοποιείται η **αρχή της υπέρθεσης**. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$L[y] = f_1(t) + f_2(t), \quad f_1(t), f_2(t) \in C(I) \quad (4.8)$$

Θεωρούμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$L(y) = f_1(t) \quad (4.9)$$

και

$$L(y) = f_2(t) \quad (4.10)$$

με $y_{\epsilon_1}(t), y_{\epsilon_2}(t)$ ειδικές λύσεις των 4.9 και 4.10, αντίστοιχα. Τότε,

$$y_\epsilon(t) = y_{\epsilon_1}(t) + y_{\epsilon_2}(t)$$

ειδική λύση της 4.8.

Η παραπάνω θεωρία που αναπτύξαμε μας δίνει ανάλογα αποτελέσματα και σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξης $n > 2$ και αφήνεται στον αναγνώστη η επαλήθευσή τους.

Παράδειγμα 4.5.1. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - y + y = x^2.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή δ.ε.

$$y'' - y + y = 0,$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - r + 1 = 0$ και ρίζες $r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Άρα έχουμε ότι

$$y_{\text{ομ}} = e^{x/2} \left[c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right].$$

Τώρα, αφού x^2 είναι πολυώνυμο βαθμού 2, η ειδική λύση θα είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$y''_{\text{ειδ}} - y'_{\text{ειδ}} + y_{\text{ειδ}} = x^2 \Leftrightarrow Ax^2 + (B - 2A)x + 2A - B + C = x^2.$$

Συνεπώς, αναγόμενους στη επίλυση τους συστήματος

$$A = 1$$

$$B - 2A = 0$$

$$2A - B + C = 0$$

Επομένως, έχουμε ότι $(A, B, C) = (1, 2, 0)$, άρα $y_{\text{ειδ}} = x^2 + 2x$ και η γενική λύση της εξίσωσης είναι της μορφής

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left[c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] + x^2 + 2x.$$

□

Παρατήρηση 4.5.1. Αν είχαμε να λύσουμε την δ.ε.

$$y'' - y' = x^2,$$

τότε έχουμε ότι το 0 είναι ρίζα του x^2 καθώς και της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - r = 0$, **πολλαπλότητας 1**, άρα η ειδική λύση θα είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}} = x (Ax^2 + Bx + C).$$

Για τον ίδιο λόγο στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' = x^2$$

αφού το 0 είναι ρίζα του x^2 και της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 = 0$ **πολλαπλότητας 2**, μια ειδική λύση θα είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}}(x) = x^2 (Ax^2 + Bx + C).$$

Παράδειγμα 4.5.2. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

όπου μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 4r + 4 = 0$ έχουμε ότι η $y_{\text{ομ}}$ είναι της μορφής

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Τώρα, έχουμε ότι η $f(x) = 3xe^{-2x}$ είναι της μορφής **4.8** για

$$\gamma = -2, P_1(x) = 3x \quad \text{και} \quad \delta = 0.$$

Συνεπώς, μια υποψήφια ειδικής λύση είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}} = x^2 e^{-2x} (Ax + B).$$

Ομοίως με Παράδειγμα **4.5.1** υπολογίζουμε ότι

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad B = 0,$$

άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι της μορφής

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2} x^3 e^{-2x}.$$

□

Παράδειγμα 4.5.3. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 2y' - 3y = 5 \sin(3x).$$

Απόδειξη. Αρχικά θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$y'' - 2y' + 3y = 0,$$

όπου μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - 2r - 3 = 0$ έχουμε ότι η $y_{\text{ομ}}$ είναι της μορφής

$$y_{\text{ομ}} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Τώρα, αφού το $3i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουμε ότι μια ειδική λύση είναι της μορφής

$$y_{\text{ειδ}}(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x).$$

Τώρα, παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση και αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε ότι $A = \frac{1}{6}$ και $B = -\frac{1}{3}$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{6} \cos(3x) - \frac{1}{3} \sin(3x).$$

□

4.6 Εξίσωση Euler

Ορισμός 4.6.1. Η Εξίσωση Euler είναι η διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$t^2 y'' + aty + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Ζητώντας η συνάρτηση t^r με $t > 0$ να είναι λύση της εξίσωσης, προκύπτει πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$r(r-1) + ar + b = 0.$$

- (α) Αν $\Delta > 0$ τότε για r_1, r_2 λύσεις της εξίσωσης με $r_1 \neq r_2$ έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}.$$

- (β) Αν $\Delta = 0$ για $r = \frac{1-a}{2}$ η διπλή λύση της εξίσωσης έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = c_1 t^r + c_2 \log t t^r.$$

(γ) Αν $\Delta < 0$ για $r_{1,2} = \sigma \pm \omega i$ λύσεις της εξίσωσης έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = t^\sigma [c_1 \cos(\omega \log t) + c_2 \sin(\omega \log t)].$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να συμπληρώσει τις αποδείξεις των παραπάνω προκύπτουσων σχέσεων, με όμοιο τρόπο σε σχέση με τη παράγραφο 2.3.

4.7 Ασκήσεις

4.1. (α) Αν y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$(1 + x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$$

και αν $W_{(y_1, y_2)}(1) = 2$ να βρεθεί η τιμή της $W_{(y_1, y_2)}(3)$.

(β) Αν y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$xy'' + 2y' + xe^x y = 0$$

και αν $W_{(y_1, y_2)}(1) = 4$ να βρεθεί η τιμή της $W_{(y_1, y_2)}(2)$.

4.2. Αν φ_1, φ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης :

$$(1 + x^2) y'' - 2ty' + 2y = 0$$

με $\varphi_1(1) = \varphi_1'(1) = 1, \varphi_2(1) = 0$ και $\varphi_2'(1) = 2$ να υπολογιστεί η $W(\varphi_1, \varphi_2)(t)$.

4.3. (α) Να δειχθεί ότι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων

$$x^a, x^b, x^c,$$

όπου $x > 0$ ισούται με

$$(a - b)(b - c)(c - a)x^{a+b+c-3}.$$

(β) Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski για το ζεύγος συναρτήσεων

$$x^m \sin \log x^n, x^m \cos \log x^n,$$

για $x > 0$, όπου m και n σταθερές.

4.4. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αν η $y_1(x)$ είναι μια λύση αυτών :

(α) $(x+1)y'' - 2y' - (x-1)y = 0, x > -1, y_1(x) = e^{ax}$

(β) $y'' - (1 + 2 \tan^2 x)y = 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y_1(x) = \frac{1}{\cos x}$

4.5. Να βρεθεί η γενική λύση της παρακάτω διαφορική εξίσωσης

$$x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0, x > 0$$

αν $y_1(x) = x^2 \sin x$ είναι μια ειδική λύση της.

4.6. Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = 1 + x^2$$

$$y_2(x) = 2 + x^2$$

$$y_3(x) = \log x$$

αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y''' + xy'' - y' = 0.$$

4.7. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Υπόδειξη. Αναζητήστε λύση της μορφής $y = x^m$.

4.8. Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων.

(α) $y'' - 6y' + 8y = 0$

(β) $y'' + 6y' + 9y = 0$

(γ) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

(δ) $y'' + 4y = 0$

4.9. Μια ομογενής γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές έχει χαρακτηριστική εξίσωση με ρίζες

$$2, 2, 2, 3 - 4i, 3 + 4i, 3 - 4i, 3 + 4i, 3, 3.$$

4.10. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

4.11. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4 = \frac{e^{-2x}}{x^2}.$$

4.12. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2(1 - \log x)y'' + xy' - y = \frac{(1 - \log x)^2}{x}, \quad x > e$$

αν $y_1(x) = x$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

4.13. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

4.14. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 3y = t^3 - 1.$$

4.15. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = t^2 e^t.$$

4.16. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' + y = t^2 + t + 1.$$

4.17. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y = 1 + t + \sin t.$$

4.18. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = te^t + t \sin(2t).$$

4.19. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 5y' + 4y = t^2 e^{7t}.$$

4.20. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2y' + 3y = 1 + te^t.$$

4.21. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^t - te^{2t}.$$

4.22. Να λυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y''' + y'' = t + e^{-t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1 \end{cases}.$$

4.23. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y = 4 \cos(2t) + 6 \cos(t) + 8t^2 - 4t.$$

4.24. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + ky = \sin bt$$

με $k, b > 0$.

4.25. Αν $a, b, c > 0$, ναδειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \phi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0.$$

4.26. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$(\alpha) \quad y'' + y' - 2y = e^{3t}$$

$$(\beta) \quad y'' + y' - 2y = 2e^t$$

$$(\gamma) \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$$

$$(\delta) \quad y'' + y = 3e^t$$

$$(\epsilon) \quad y'' + 4y = \sin t$$

4.27. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} - 2 \cos x + 6 \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4.28. Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων

$$(\alpha) \quad t^2 y'' + 5ty' - 5y = 0$$

$$(\beta) \quad 2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$$

$$(\gamma) \quad t^2 y'' + ty' + y = 0$$

4.29. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xy' + y = \log x, \quad x > 0.$$

4.30. Να λυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

στο διάστημα $(0, \infty)$.

4.31. (Ιούνιος 2024) Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.:

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^t.$$

Υπόδειξη: Euler και Lagrange

4.32. (Ιούνιος 2023) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$t^2 y'' + 3ty' - 3y = t^2, \quad t > 0.$$

4.33. (Ιούνιος 2023) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$2ty'' + (1 - 4t)y' + (2t - 1)y = e^t, \quad t > 0,$$

αν είναι γνωστές δύο λύσεις της:

$$y_1(t) = te^t \quad \text{και} \quad y_2(t) = e^t + te^t, \quad t > 0.$$

4.34. (Ιανουάριος 2023) Ναδειχθεί ότι μία λύση $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της Σ.Δ.Ε.:

$$y^{(4)} - y = 0$$

είναι φραγμένη αν και μόνο αν ισχύει:

$$y(0) + y''(0) = 0 \quad \text{και} \quad y'(0) + y'''(0) = 0.$$

4.35. (Ιανουάριος 2023) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0,$$

αν δύο λύσεις της είναι

$$y_1(t) = t - 2t^2, \quad y_2(t) = t + te^t - 2t^2, \quad t > 0.$$

4.36. (Αύγουστος 2022) Να αποδειχθεί ότι:

(α) Κάθε μη τετριμμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' + e^t y = 0$$

έχει άπειρα σημεία μηδενισμού στο $(0, \infty)$.

(β) Υπάρχει μη τετριμμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' - e^t y = 0$$

η οποία έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο $(0, \infty)$.

4.37. (Αύγουστος 2022) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

και να υπολογιστεί το $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ όταν για τις πραγματικές σταθερές ισχύει ότι:

(α) $a > 0, b = 0, c > 0$.

(β) $a > 0, b > 0, c = 0$.

4.38. (Αύγουστος 2022) Δείξτε ότι $y_1(t) = 1 - 2t^2$ είναι λύση της εξίσωσης:

$$y''(t) - 2ty'(t) + 4y(t) = 0.$$

Με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης να βρεθεί η δεύτερη λύση, $y_2(t)$, γραμμικά ανεξάρτητη από την $y_1(t)$.

Γράψτε την $y_2(t)$ στην μορφή ολοκληρώματος (το οποίο δεν χρειάζεται να το υπολογίσετε αναλυτικά).

4.39. (Ιούνιος 2022) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$t^2 y'' + ty' - 4y = 2t^4, \quad t > 0.$$

4.40. (Ιούνιος 2022) Αν μία λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' - 4ty' + (4t^2 - 2)y = 0$$

είναι $y_1(t) = te^{t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, να βρείτε μία άλλη λύση της, $y_2(t)$, που να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

$$y_2(0) = 2, \quad y_2'(0) = 1.$$

4.41. (Φεβρουάριος 2022) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη επί των a, b , ώστε η λύση του Π.Α.Τ.

$$y'' - y' - 2y = 4e^{-t}; \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b,$$

να είναι φραγμένη στο $[0, +\infty)$.

4.42. (Φεβρουάριος 2022)

Έστω $p \in C^1([1, \infty))$ με $0 < p(t) \leq t^2$ και $q \in C([1, \infty))$ με $q(t) \geq \theta > \frac{1}{4}$, όπου θ σταθερά.

Να αποδειχθεί ότι κάθε μη τετριμμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(p(t)y')' + q(t)y = 0,$$

έχει άπειρα σημεία μηδενισμού στο $[1, \infty)$.

4.43. (Σεπτέμβριος 2021) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 6y' + 9y = te^{3t} + 5t.$$

4.44. (Ιούνιος 2021) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' + 6y' + 10y = \sin t.$$

4.45. (Ιούνιος 2021) Έστω $\phi_1(t), \phi_2(t)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad t \in I,$$

όπου $p(t), q(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στο I . Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο ριζών της ϕ_1 υπάρχει μία ρίζα της ϕ_2 .

4.46. (Σεπτέμβριος 2020) Να λυθεί η δ.ε.

$$y'' + 2y' + \omega^2 y = \cos(\theta t), \quad (4.11)$$

όπου $\omega > 1$ και θ πραγματικές σταθερές.

4.47. (Σεπτέμβριος 2020) Έστω η δ.ε.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad t \in (-a, a), \quad (4.12)$$

όπου $p, q \in C((-a, a))$, με p περιττή και q άρτια συνάρτηση στο $(-a, a)$. Να αποδειχθεί ότι

1. Αν η $y(t)$ είναι λύση της δ.ε., τότε και η $n(t) := y(-t)$ είναι επίσης λύση.
2. Υπάρχει μια βάση λύσεων $\{y_1, y_2\}$ της δ.ε., από τις οποίες η μία είναι άρτια και η άλλη περιττή συνάρτηση στο $(-a, a)$.

4.48. (Ιούνιος 2019) Να λύσετε τη δ.ε.

$$y'' - 2y' + y = (t - 8)e^t. \quad (4.13)$$

4.49. (Σεπτέμβριος 2017)

1. Να βρεθεί η γενική λύση των διαφορικών εξισώσεων:

$$e^y(1 + t^2)y' - 2t(1 + e^y) = 0 \quad (4.14)$$

και

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + y(t) = 0, \quad (t > 0). \quad (4.15)$$

[1 βαθμός]

2. (i) Να λυθεί η εξίσωση:

$$t y'(t) - y(t) + 5t^2 = 0, \quad (4.16)$$

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(t)$.

[1 βαθμός]

- (ii) Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t, \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (4.17)$$

[1 βαθμός]

4.50. (Σεπτέμβριος 2017) Να υπολογισθεί η τιμή της παραμέτρου $\omega \geq 0$ ώστε η λύση του Π.Α.Τ.:

$$y''(t) + y(t) = \cos(\omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (4.18)$$

να μην είναι φραγμένη. Να βρεθεί επίσης η λύση του ΠΑΤ για αυτήν την τιμή της παραμέτρου ω .

4.51. (Σεπτέμβριος 2017) Δείξτε με την μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων ότι αν $u_1(t)$ και $u_2(t)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης:

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0, \quad (4.19)$$

όπου $a_1 \in C(\mathbb{R})$, $a_2 \in C(\mathbb{R})$, τότε

$$y_p(t) = \int_0^t \frac{u_2(t)u_1(\tau) - u_1(t)u_2(\tau)}{W[u_1, u_2](\tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.20)$$

είναι λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης:

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \quad (4.21)$$

όπου $W[u_1, u_2](t)$ είναι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $u_1(t)$ και $u_2(t)$ και $f \in C(\mathbb{R})$.

Επομένως, δείξτε ότι:

$$y_p(t) = \int_0^t \sin(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (4.22)$$

είναι λύση της εξίσωσης:

$$y''(t) + y(t) = f(t). \quad (4.23)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (5.1)$$

όπου οι συναρτήσεις $p(t)$ και $q(t)$ είναι δεδομένες.

Όπως έχουμε ήδη δει, όταν οι p και q είναι σταθερές συναρτήσεις, ο χώρος λύσεων της (5.1) προσδιορίζεται σχετικά εύκολα. Όταν όμως οι $p(t)$ και $q(t)$ είναι μεταβλητές, τότε απαιτείται συνήθως η γνώση μίας αρχικής λύσης, προκειμένου να κατασκευάσουμε τη γενική.

Το βασικό ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι: **Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (5.1) όταν δεν γνωρίζουμε καμία αρχική λύση;** Μια γενική και ισχυρή μέθοδος βασίζεται στις δυναμοσειρές και ονομάζεται **μέθοδος των δυναμοσειρών**.

5.1 Προκαταρκτικά

Ας υπενθυμίσουμε βασικά στοιχεία από τη θεωρία των δυναμοσειρών.

Ορισμός 5.1.1. Μια σειρά της μορφής:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n,$$

όπου $a_n \in \mathbb{R}$ και $t_0 \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **δυναμοσειρά** με κέντρο t_0 .

Πρόταση 5.1.1. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$, όπου r είναι η **ακτίνα σύγκλισης**, υπολογιζόμενη από τους τύπους:

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Για t εκτός του διαστήματος σύγκλισης, δηλαδή $t \notin (t_0 - r, t_0 + r)$, η σειρά αποκλίνει^{α□}.

^{α□} Το σημείο $t_0 \pm r$ μπορεί να χρειάζεται ξεχωριστή εξέταση: η σύγκλιση δεν είναι πάντα δεδομένη εκεί.

Παρατήρηση 5.1.1. Η $f(t)$ είναι παραγωγίσιμη όσες φορές θέλουμε στο διάστημα σύγκλισης, και ισχύει:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1}, \quad f''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t - t_0)^{n-2}.$$

Ορισμός 5.1.2. Μια συνάρτηση $f(t)$ η οποία παριστάνεται με μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά σε κάποιο διάστημα με κέντρο το t_0 ονομάζεται **αναλυτική συνάρτηση** στο t_0 .

Έτσι, για τα σημεία t που ανήκουν σε αυτό το διάστημα, η f δίνεται από μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση n φορές και θέτοντας $t = t_0$ έχουμε ότι:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}.$$

Ορισμός 5.1.3. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Ένα σημείο $t_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται **ομαλό** αν οι p, q είναι αναλυτικές στο t_0 . Αν μία τουλάχιστον από τις p, q δεν είναι αναλυτικές στο t_0 , τότε το t_0 είναι **ιδιάζων** σημείο της εξίσωσης.

Τέλος παραθέτουμε μερικά βασικά αναπτύγματα Taylor για συναρτήσεις που θα εμφανιστούν (άμεσα) στη συνέχεια του κεφαλαίου:

- $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
- $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
- $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
- $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$.
- $\log(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}$, $|t| < 1$.

Υπολογισμός Ακτίνας Σύγκλισης Δυναμοσειράς

i. Αν έχουμε μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης ισούται με

$$\limsup_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Αν οι προηγούμενες ακολουθίες συγκλίνουν, τότε η ακτίνα σύγκλισης ταυτίζεται με τα όρια των προηγούμενων ακολουθιών.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, τότε είναι αναλυτική στα σημεία x_0 που ορίζεται, δηλαδή για $Q(x_0) \neq 0$.

Στη προκειμένη περίπτωση, η θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων μας δίνει έναν ευκολότερο τρόπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης του αντίστοιχου αναπτύγματος σε δυναμοσειρά της f με κέντρο το x_0 .

Αποδεικνύεται ότι ο λόγος τέτοιων πολυωνυμικών συναρτήσεων, έστω $\frac{P(x)}{Q(x)}$, διαθέτει συγκλίνον ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το x_0 για το οποίο $Q(x_0) \neq 0$.

Επιπλέον, έχοντας απλοποιήσει τυχόν κοινούς όρους των $Q(x)$ και $P(x)$, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς για το $\frac{P(x)}{Q(x)}$ γύρω από το x_0 είναι ίση με την απόσταση του σημείου x_0 από την πλησιέστερη ρίζα — συμπεριλαμβανομένων και των μιγαδικών ριζών — του παρονομαστή.

Παράδειγμα 5.1.1. Να υπολογισθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} t^n.$$

Λύση. Αν $a_n = \frac{n}{2^n}$, έχουμε ότι:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2.$$

Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι $R = 2$, δηλαδή για $|t| < 2$ συγκλίνει, ενώ για $|t| > 2$ αποκλίνει. Για $t = \pm 2$ η σειρά αποκλίνει (γιατί); ■

Παράδειγμα 5.1.2. Να εξετασθεί αν το σημείο $t_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

(α) $(1 - t^2)y'' - 2ty' + a(a+1)y = 0$, $a \in \mathbb{R}$ (Εξίσωση Legendre)

(β) $ty'' + (e^t - 1)y' + t^3y = 0$

Λύση. (α) Ο συντελεστής $p(t) = \frac{-2t}{(1-t^2)}$ και ο συντελεστής $q(t) = \frac{a(a+1)}{(1-t^2)}$ είναι συναρτήσεις αναλυτικές στο μηδέν. Άρα, το $t_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης. Τα μόνα ιδιάζοντα σημεία είναι αυτά που μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή τα $t_{1,2} = \pm 1$.

(β) Για τον συντελεστή $p(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ έχουμε ότι:

$$p(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - 1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

Άρα είναι σαφές ότι p είναι αναλυτική στο 0. Επίσης, η συνάρτηση $q(t) = \frac{t^3}{t} = t^2$ είναι αναλυτική στο 0.



Παράδειγμα 5.1.3. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor γύρω από το $t_0 = 0$ της συνάρτησης

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 2}.$$

Απόδειξη. Το πολυώνυμο $t^2 - 2t + 2$ έχει ρίζες τα $1 + i$ και $1 - i$ οι οποίες στο μιγαδικό επίπεδο απέχουν

$$d_1 = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

και

$$d_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

από το 0, αντίστοιχα. Συνεπώς, έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης ισούται με $R = \sqrt{2}$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{για} \quad |t| < \sqrt{2}.$$

□

Ασκήσεις

5.1. Να βρεθεί ένα κάτω φράγμα για την ακτίνα σύγκλισης των λύσεων υπό μορφή δυναμοσειράς γύρω από το δοθέν σημείο για την διαφορική εξίσωση:

(α) $(1 + t^3) y'' + ty' + 4y = 0$, για

i. $t_0 = 0$

ii. $t_0 = 2$

(β) $(t^3 + 8) y'' + 2ty' + (t + 2)y = 0$, για

i. $t_0 = 0$

ii. $t_0 = 1$

(γ) $(t^2 - 2t + 3) y'' + ty' + 4y = 0$, για

¹Συναρτήσεις όπως οι p, q στη Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων λέμε ότι έχουν *επουσίωδη ανωμαλία* στο σημείο t_0 , καθώς παρότι δεν ορίζονται στο t_0 , το γεγονός αυτό δεν εμποδίζει τη σύγκλιση της συνάρτησης στο σημείο αυτό καθώς και το ανάπτυγμά της σε δυναμοσειρά.

- i. $t_0 = 4$
- ii. $t_0 = -4$
- iii. $t_0 = 0$

5.2. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n (t - 1)^n$$

$$(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} t^n$$

$$(\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!} (t - 2)^n$$

5.3. Να εξετασθεί αν το $t_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

$$(\alpha) \quad t^2 y'' + t y' + (t^2 - p^2) y = 0, \quad p \in \mathbb{R} \text{ (Εξίσωση Euler)}$$

$$(\beta) \quad y'' + t^3 y' + \sqrt{t} y = 0$$

5.2 Ομαλά σημεία

Στην προηγούμενη ενότητα περιγράψαμε την έννοια του ομαλού σημείου και τώρα ήρθε η ώρα να τηρήσουμε την υπόσχεση που δώσαμε στην εισαγωγή: ότι μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.2}$$

μπορεί να επιλυθεί χωρίς γνώση μιας συγκεκριμένης λύσης της.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η εξής: αντί να προσπαθούμε να εκφράσουμε τη λύση μέσω περιορισμένου αριθμού γνωστών συναρτήσεων, την εκφράζουμε υπό τη μορφή δυναμοσειράς

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

η οποία — όταν οι συντελεστές είναι γνωστοί — αποτελεί την πλησιέστερη δυνατή αναπαράσταση που μπορεί να έχει κανείς για μια συνάρτηση.

Άλλωστε οι συναρτήσεις που θεωρούνται «γνωστές», όπως οι e^t , $\cos t$, $\sin t$, $\log t$, δεν εκφράζονται σε κλειστή μορφή, αλλά ορίζονται και αυτές μέσω κατάλληλων δυναμοσειρών.

Η μέθοδος συνίσταται στα εξής: Υποθέτουμε τη λύση υπό μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το σημείο t_0 :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n, \quad (5.3)$$

και εισάγοντας αυτήν στη διαφορική εξίσωση υπολογίζουμε τους συντελεστές της δυναμοσειράς. Όμως, η παραπάνω δυναμοσειρά θα πρέπει να συγκλίνει σε κάποια περιοχή του t_0 , δηλαδή για $|t - t_0| < R$, όπου R είναι συνήθως η ακτίνα σύγκλισης της σειράς. Διαφορετικά, δεν αναπαριστά συνάρτηση και πολύ περισσότερο λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Ερώτημα 5.2.1. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμόζεται πάντα;

Όχι! Αυτό εξαρτάται από τη συμπεριφορά των συναρτήσεων p και q στο σημείο t_0 . Η περίπτωση που θα μας απασχολήσει είναι αυτή των *αναλυτικών συντελεστών*, δηλαδή αυτών για τους οποίους οι p, q διαθέτουν ανάπτυγμα Taylor στο t_0 , δηλαδή η περίπτωση που το t_0 είναι **ομαλό σημείο** της διαφορικής εξίσωσης.

Θεώρημα 5.2.1. Έστω p και q αναλυτικές στο $x_0 \in \mathbb{R}$, με αντίστοιχες σειρές

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \quad \text{και} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n, \quad (5.4)$$

συγκλίνουσες για $|x - x_0| < R$. Τότε, η μοναδική λύση της εξίσωσης (5.2) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \quad (5.5)$$

είναι αναλυτική στο x_0 , με ανάπτυγμα Taylor που συγκλίνει τουλάχιστον για $|x - x_0| < R$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (5.6)$$

και υποθέτουμε ότι συγκλίνει για $|x - x_0| < R$. Οι συντελεστές a_0 και a_1 δίνονται από τις αρχικές συνθήκες (5.5), ενώ οι υπόλοιποι a_n με $n \geq 2$ θα προσδιοριστούν από την εξίσωση (5.2), την οποία απαιτούμε να ικανοποιεί η (5.6).

Από τις (5.4) και (5.6) προκύπτει:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n,$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x - x_0)^n,$$

$$p(x)y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} p_{n-k} (x - x_0)^n,$$

$$q(x)y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} (x - x_0)^n.$$

Αντικαθιστούμε στην (5.2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right] (x - x_0)^n = 0.$$

Άρα, η y είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης αν και μόνο αν:

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right], \quad \text{για } n \geq 0,$$

ή ισοδύναμα:

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) a_{k+1} p_{n-k-2} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k q_{n-k-2} \right], \quad \text{για } n \geq 2. \quad (5.7)$$

Για να δείξουμε τη σύγκλιση, επειδή οι σειρές (5.4) συγκλίνουν για $|x - x_0| = r < R$, υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε:

$$|p_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad |q_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Από την (5.7) προκύπτει:

$$|a_n| \leq \frac{M}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+1)|a_{k+1}|}{r^{n-k-2}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{r^{n-k-2}} \right], \quad \text{για } n \geq 2. \quad (5.8)$$

Ορίζουμε ακολουθία A_n με:

$$A_0 \geq |a_0|, \quad A_1 \geq |a_1|,$$

και

$$A_n = \frac{M}{n(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+1)A_{k+1}}{r^{n-k-2}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{A_k}{r^{n-k-2}} \right], \quad \text{για } n \geq 2. \quad (5.9)$$

Με επαγωγή προκύπτει ότι:

$$|a_n| \leq A_n, \quad \text{για κάθε } n. \quad (5.10)$$

Θέτοντας $n+1$ στην (5.9) έχουμε:

$$A_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)A_{k+1}}{r^{n-k-1}} + \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{r^{n-k-1}} \right]. \quad (5.11)$$

Συνδυάζοντας τις (5.9) και (5.11):

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{r} + M \cdot \frac{n+r}{n(n+1)} \cdot \frac{A_n}{A_n}.$$

Άρα:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{r},$$

δηλαδή η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-x_0)^n$ συγκλίνει για $|x-x_0| < r$. Άρα και η (5.6) συγκλίνει για $|x-x_0| < r < R$. $\square$

Παράδειγμα 5.2.1. Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = 0.$$

Λύση. Οι συντελεστές $p(x) = 0$ και $q(x) = -1$ είναι αναλυτικοί για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ας αναζητήσουμε λύση αναλυτική στο $x_0 = 0$ της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση, έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n] x^n = 0,$$

οπότε προκύπτει η αναδρομική σχέση:

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Από την αναδρομική σχέση:

α. Για $n = 0, 2, 4, \dots$:

$$a_2 = \frac{a_0}{1 \cdot 2},$$

$$a_4 = \frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$a_6 = \frac{a_4}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!}.$$

β. Για $n = 1, 3, 5, \dots$:

$$a_3 = \frac{a_1}{2 \cdot 3},$$

$$a_5 = \frac{a_3}{4 \cdot 5} = \frac{a_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$a_7 = \frac{a_5}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7},$$

$$\vdots$$

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!}.$$

Άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

■

Παράδειγμα 5.2.2. Να βρεθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + xy' + y = 0$$

γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

Λύση. Οι συντελεστές $p(x) = x$ και $q(x) = 1$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $x_0 = 0$, συνεπώς η εξίσωση επιδέχεται λύση της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Επιπλέον:

$$xy'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n + a_n] x^n = 0,$$

δηλαδή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+2) a_n] x^n = 0,$$

οπότε:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Από την αναδρομική σχέση:

α. Για $n = 0, 2, 4, \dots$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2}, \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4}, \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\ &\vdots \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^k k!} a_0. \end{aligned}$$

β. Για $n = 1, 3, 5, \dots$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_1}{3}, \\ a_5 &= -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5}, \\ a_7 &= -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \\ &\vdots \\ a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!}{(2k+1)!} a_1. \end{aligned}$$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= a_0 e^{-x^2/2} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.2.3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Λύση. Έχουμε ότι οι συντελεστές $p(x) = 0$ και $q(x) = -x$ είναι αναλυτικές σε κάθε σημείο, συνεπώς η εξίσωση επιδέχεται λύση της μορφής:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Επίσης:

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση:

$$y'' - xy = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}] x^n = 0.$$

Από το παραπάνω προκύπτει:

$$a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{για } n \geq 0.$$

Η σχέση είναι αναδρομική 3 βημάτων, και έτσι έχουμε: - $a_2 = 0$, άρα και κάθε όρος $a_{3k+2} = 0$, - οι όροι a_{3k} εξαρτώνται από το a_0 , - οι όροι a_{3k+1} εξαρτώνται από το a_1 .

Συνεπώς:

$$a_{3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} a_0, \quad a_{3k+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} a_1, \quad a_{3k+2} = 0.$$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

■

Ασκήσεις

5.4. Να λυθεί, με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 0.$$

5.5. Να λυθεί, με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, η διαφορική εξίσωση

$$y' - y = 0$$

5.6. Να λυθεί, με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, η διαφορική εξίσωση

$$(1 + t^2)y'' + ty' - y = 0$$

γύρω από το σημείο $t_0 = 0$.

5.7. Να προσδιορισθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + ty' - y = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.8. Αν $\varepsilon > 0$, να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + e^{-\varepsilon t}y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

5.9. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + \sin(t)y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.10 (Ιούνιος 2023). Το Π.Α.Τ.:

$$y' - 2ty' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

έχει λύση της μορφής

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n , $n = 0, 1, 2, \dots, 7$.

5.11 (Αύγουστος 2022). Να επιλυθεί η εξίσωση:

$$y''(t) - 2ty'(t) + 4y(t) = 0$$

με την μέθοδο δυναμοσειρών. Επιλέξτε ως κέντρο το σημείο $t = 0$. Δείξτε ότι αν

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

τότε $a_{2n} = 0$ για κάθε $n \geq 2$.

5.12 (Σεπτέμβριος 2021). Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + ty = 0.$$

5.13 (Σεπτέμβριος 2017). Να λυθεί με την μέθοδο των δυναμοσειρών το Π.Α.Τ.:

$$y''(t) + ty(t) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1. \quad (5.12)$$

5.3 Εξίσωση Legendre

Ορισμός 5.3.1. Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + a(a + 1)y = 0, \quad a \in \mathbb{R} \quad (5.13)$$

λέγεται **εξίσωση Legendre** τάξης a .

Έχουμε ότι οι συντελεστές της (5.13), $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ και $q(x) = \frac{a(a+1)}{1-x^2}$ είναι αναλυτικές στο $x_0 = 0$, συνεπώς το $x_0 = 0$ είναι ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης και οι σειρές Taylor των p, q συγκλίνουν για $|x| < 1$ (άσκηση).

Αρα, η (5.13) επιδέχεται λύση της μορφής:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - n + a(a+1))a_n] x^n = 0,$$

άρα:

$$a_{n+2} = -\frac{(a-n)(a+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι οι συναρτήσεις y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης, όπου:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (a)(a-2) \cdots (a-2n+2)(a+1)(a+3) \cdots (a+2n-1)}{(2n)!} \right] x^{2n} \quad (5.14)$$

και

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (a-1)(a-3) \cdots (a-2n+1)(a+2)(a+4) \cdots (a+2n)}{(2n+1)!} \right] x^{2n+1}. \quad (5.15)$$

Αφήνεται επίσης στον αναγνώστη να δείξει με χρήση της ορίζουσας Wronski ότι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης.

Όταν $a = n \in \mathbb{N}$, η εξίσωση (5.13) έχει πολωνυμική λύση βαθμού n , η οποία συμβολίζεται με $P_n(x)$. Εφόσον ο χώρος λύσεων είναι γραμμικός, μπορούμε να επιλέξουμε τη λύση ώστε $P_n(1) = 1$ (αν $p_n(x)$ είναι η πολωνυμική λύση, τότε $P_n(x) = \frac{p_n(x)}{p_n(1)}$).

Ορισμός 5.3.2. Με τον παραπάνω συμβολισμό, τα πολώνυμα $P_n(x)$ ονομάζονται **πολώνυμα Legendre** βαθμού n ή **συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους** τάξης n .

Αποδεικνύεται ότι τα πολώνυμα Legendre δίνονται από τον **τύπο του Rodrigues** :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Ορθογωνιότητα πολωνύμων Legendre

Για $n \neq m$, τα P_n, P_m είναι λύσεις της (5.13). Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση για P_n με $P_m(x)$ και για P_m με $P_n(x)$ και αφαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

6.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Στην παρακάτω παράγραφο παρουσιάζονται συνοπτικά στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στις επόμενες ενότητες.

Ορισμός 6.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ και $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $X \neq 0$.

Αν ισχύει η σχέση

$$AX = \lambda X, \quad (6.1)$$

τότε λέμε ότι το λ είναι **ιδιοτιμή** του A και ότι το X είναι αντίστοιχο **ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Παράδειγμα 6.1.1. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- i. Έχουμε ότι $AX = X$, άρα η τιμή 1 είναι ιδιοτιμή του A και το X είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A .
- ii. Έχουμε ότι $AY = -Y$, άρα η τιμή -1 είναι ιδιοτιμή του A και το Y είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A .

iii. Υπολογίζουμε:

$$AZ = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, επομένως το Z δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A .

Παράδειγμα 6.1.2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A .

Λύση. Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για την εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων χρησιμοποιούμε τη σχέση (6.1) και αναζητούμε τα λ και X ώστε να ισχύει:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 3y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = \lambda x \\ 4x + 2y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 3y = 0 \\ 4x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2.$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda = 5$ και $\lambda = -2$. Τώρα προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

(i) Για $\lambda = -2$ ισχύει:

$$3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Επομένως:

$$V(-2) = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \mid y = -x\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(ii) Για $\lambda = 5$ ισχύει:

$$-4x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x.$$

Άρα:

$$V(5) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \mid y = \frac{4}{3}x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{4x}{3} \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

■

Παράδειγμα 6.1.3. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$.

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A στις εξής περιπτώσεις:

(i) $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

(ii) $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$

Λύση. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Υποθέτουμε ότι $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Τότε παρατηρούμε ότι

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases},$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R},$$

άρα δεν υπάρχουν ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A στο $\mathbb{R}$.

(b) Αν υποθέσουμε ότι $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, για $\lambda \in \mathbb{C}$ και $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$, ισχύει ότι

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}.$$

Το σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = i \quad \text{ή} \quad \lambda = -i.$$

(i) Για την ιδιοτιμή $\lambda = i$ έχουμε ότι ικανοποιείται η σχέση

$$ix - y = 0 \Leftrightarrow y = ix.$$

Επομένως:

$$V(i) = \{X \in \mathbb{C}^{2 \times 1} \mid y = ix\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle,$$

δηλαδή το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = i$.

(ii) Για την ιδιοτιμή $\lambda = -i$ έχουμε ότι ικανοποιείται η σχέση

$$-ix - y = 0 \Leftrightarrow y = -ix.$$

Επομένως:

$$V(-i) = \{X \in \mathbb{C}^{2 \times 1} \mid y = -ix\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle,$$

δηλαδή το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$.

■

Ιδιότητες 6.1.1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i. Το λ είναι ιδιοτιμή του A .
- ii. Υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda I_n)X = 0$.
- iii. $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Απόδειξη. • i $\rightarrow$ ii. Από τον ορισμό, υπάρχει $X \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $X \neq 0$ ώστε να ισχύει:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0.$$

- ii $\rightarrow$ iii. Η συνεπαγωγή έπεται άμεσα από την παρακάτω πρόταση:

Αν $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Το ομογενές σύστημα

$$BX = 0$$

έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det B = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Έχουμε ότι

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

αν και μόνο αν υπάρχει $X \neq 0$ με

$$(A - \lambda I_n)X = 0 \Leftrightarrow AX = \lambda X$$

άρα το λ είναι ιδιοτιμή του A . □

Πρόταση 6.1.1. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ κάποιες από τις διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Έστω $X_1, \dots, X_s \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με

$$X_i \in V_A(\lambda_i), \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Αν

$$X_1 + \dots + X_s = 0$$

τότε

$$X_1 = X_2 = \dots = X_s = 0.$$

Απόδειξη. Δείξτε το με επαγωγή στο s . □

Πόρισμα 6.1.1. Ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας και την Πρόταση 6.1.1 □

Ορισμός 6.1.2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ή $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$) και λ_i ιδιοτιμή του A .

- i. Ο μέγιστος αριθμός $\mathbf{d}(\lambda_i)$ γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i , δηλαδή

$$\mathbf{d}(\lambda_i) := \dim V_A(\lambda_i)$$

ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της λ_i .

- ii. Η πολλαπλότητα $\tau(\lambda_i)$ της ιδιοτιμής λ_i ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ_i .

Παρατήρηση 6.1.1. Αποδεικνύεται ότι αν λ_i είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A , τότε ισχύει ότι

$$\mathbf{d}(\lambda_i) \leq \tau(\lambda_i).$$

Ορισμός 6.1.3. Ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ λέγεται **απλής δομής** αν για κάθε ιδιοτιμή λ_i του A ισχύει ότι

$$\mathbf{d}(\lambda_i) = \tau(\lambda_i).$$

Αν υπάρχει ιδιοτιμή λ του A τέτοια ώστε

$$\mathbf{d}(\lambda) < \tau(\lambda)$$

τότε ο πίνακας A λέγεται **μη απλής δομής**.

Ασκήσεις

6.1. (a) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 1}.$$

Είναι το X ιδιοδιάνυσμα του A ; Είναι το 6 ιδιοτιμή του A ;

(b) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

6.2. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$$

στις παρακάτω περιπτώσεις:

(a) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

(b) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

6.3. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων και να εξεταστεί αν είναι απλής δομής:

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$(b) \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

6.2 Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Σημειώνουμε ότι, αν $A(t) = (a_{ij}(t))$ είναι πίνακας με στοιχεία παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς t στο σημείο t_0 , τότε ορίζουμε την **παράγωγο** του A στο t_0 και τη συμβολίζουμε με $A'(t_0)$, ως τον πίνακα:

$$A'(t_0) = (a'_{ij}(t_0)) .$$

Για παράδειγμα, αν:

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & t^2 \\ 2 & \sin t \end{pmatrix} ,$$

τότε:

$$A'(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 2t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} .$$

Ορισμός 6.2.1. Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης γενικής μορφής:

$$y'_1(t) = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y'_2(t) = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y'_n(t) = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

όπου y_i είναι οι άγνωστες συναρτήσεις του t και οι f_i ορίζονται σε πεδίο $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, μπορεί να γραφεί σε διανυσματική μορφή.

Θέτοντας:

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, \underline{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

το σύστημα γράφεται ως:

$$\underline{y}'(t) = f(t, \underline{y}),$$

το οποίο αποτελεί διανυσματική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Θεώρημα 6.2.1. Έστω $A(t) = (a_{ij}(t))$ για $1 \leq i, j \leq n$, και η διανυσματική συνάρτηση:

$$\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

είναι συνεχής σε ανοιχτό διάστημα $I = (a, b)$, με $t_0 \in I$. Τότε, το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα I .

Ο πίνακας $A(t)$ ονομάζεται **πίνακας συντελεστών** και το $\underline{b}(t)$ **μη ομογενής όρος** του συστήματος.

6.3 Γραμμικά Ομογενή Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Όπως παραπάνω, αν $\underline{b}(t) = 0$ για κάθε $t \in I$, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές** και έχει τη μορφή:

$$\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t), \quad (6.2)$$

όπου:

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Μέθοδος Απαλοιφής

Σε περιπτώσεις επίλυσης γραμμικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές (2 ή 3 εξισώσεων), η μέθοδος απαλοιφής προσφέρει μια απλή και σαφή διαδικασία επίλυσης, χωρίς την ανάγκη σύνθετων θεωριών.

Παράδειγμα 6.3.1. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{y}(t),$$

όπου $y_1, y_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Λύση. Παραγωγίζουμε την πρώτη εξίσωση:

$$y_1'' = y_1' + y_2'.$$

Από τις δύο εξισώσεις του συστήματος προκύπτει:

$$y_1'' = y_1' + (4y_1 + y_2).$$

Από την πρώτη εξίσωση: $y_2 = y_1' - y_1$. Άρα:

$$y_1'' = y_1' + 4y_1 + y_1' - y_1 = 2y_1' + 3y_1,$$

και επομένως:

$$y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 3, -1.$$

Άρα:

$$y_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Από $y_2 = y_1' - y_1$ προκύπτει:

$$y_1'(t) = 3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}.$$

Άρα η γενική λύση είναι:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Θεώρημα 6.3.1. Αν $\underline{y}^{(1)}(t), \dots, \underline{y}^{(n)}(t)$ είναι n λύσεις του (6.2), τότε κάθε γραμμικός τους συνδυασμός:

$$c_1 \cdot \underline{y}^{(1)}(t) + \dots + c_n \cdot \underline{y}^{(n)}(t)$$

είναι επίσης λύση του (6.2), για κάθε $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Δείξτε ότι ο χώρος λύσεων του συστήματος (6.2) είναι διανυσματικός χώρος. □

Αν $\underline{y}^{(1)}(t), \dots, \underline{y}^{(n)}(t)$ είναι n λύσεις του (6.2), τότε ο πίνακας:

$$X(t) = \left(\underline{y}^{(1)}(t), \dots, \underline{y}^{(n)}(t) \right)$$

ονομάζεται **θεμελιώδης πίνακας** αν οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή:

$$\det X(t) \neq 0 \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Παράδειγμα 6.3.2. Στο Παράδειγμα 6.3.1, οι λύσεις:

$$\underline{y}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \underline{y}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, διότι:

$$\det \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} = -4e^{2t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 6.3.1. Με τους παραπάνω συμβολισμούς, η ορίζουσα $\det X(t)$ συμβολίζεται με:

$$W_{\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(n)}}(t)$$

και ονομάζεται **ορίζουσα Wronski** των λύσεων $\underline{y}^{(1)}(t), \dots, \underline{y}^{(n)}(t)$.

Θεώρημα 6.3.2. Ο χώρος λύσεων του συστήματος (6.2) είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n .

Δηλαδή, αν οι διανυσματικές συναρτήσεις $\underline{y}^{(1)}(t), \dots, \underline{y}^{(n)}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (6.2) στο I , τότε κάθε λύση $\underline{y}(t)$ γράφεται μοναδικά ως:

$$\underline{y}(t) = c_1 \underline{y}^{(1)}(t) + \dots + c_n \underline{y}^{(n)}(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Υπενθυμίζεται ότι αν:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

τότε το **ίχνος** (trace) του A είναι:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

Θεώρημα 6.3.3 (Τύπος του Abel). Αν $\underline{y}^{(1)}(t), \dots, \underline{y}^{(n)}(t)$ είναι λύσεις του (6.2), τότε για κάθε $t_0 \in I$ ισχύει:

$$W_{\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(n)}}(t) = W_{\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(n)}}(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(x)) dx \right).$$

Ασκήσεις

6.4. Να λυθεί με τη μέθοδο της απαλοιφής το σύστημα:

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = 3x_1 - x_2 \end{cases}.$$

6.5. Ναδειχθεί ότι ο πίνακας:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & \log t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

είναι θεμελιώδης πίνακας του συστήματος:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} y,$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη:

$$y(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.4 Πίνακες απλής δομής

Θεωρούμε ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι πίνακας απλής δομής και υποθέτουμε ότι έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, στις οποίες αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιάνυσματα $v_1, \dots, v_n$.

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $\underline{y}(t) = e^{\lambda t} v$, για κάποια ιδιοτιμή λ και ιδιοδιάνυσμα v . Τότε:

$$\underline{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} v, \quad A \underline{y}(t) = A e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v.$$

Συνεπώς:

$$\underline{y}'(t) = A \underline{y}(t) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v \Leftrightarrow A v = \lambda v.$$

Άρα, η $\underline{y}(t)$ είναι λύση της (6.2) αν και μόνο αν το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ .

Επομένως, οι συναρτήσεις:

$$\underline{y}^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \quad \underline{y}^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} v_2, \quad \dots, \quad \underline{y}^{(n)}(t) = e^{\lambda_n t} v_n$$

είναι λύσεις του συστήματος (6.2).

Η Wronski ορίζουσα τους είναι:

$$W(t) = \det \left(e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_n t} v_n \right).$$

Για $t = 0$:

$$W(0) = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0,$$

εφόσον τα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από τον τύπο του Abel έπεται ότι $W(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, άρα οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Από το Θεώρημα 6.3.2 προκύπτει ότι η γενική λύση του συστήματος (6.2) είναι:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 6.4.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$\underline{y}'(t) = A \underline{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-11 - \lambda)(13 - \lambda) + 128 = \lambda^2 - 2\lambda - 15.$$

Ρίζες:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 5.$$

Ιδιοδιανύσματα:

Για $\lambda_1 = -3$:

$$A + 3I = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Για $\lambda_2 = 5$:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -16 & 16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Γενική λύση:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Αρχική συνθήκη:

$$\underline{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 4 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 2.$$

Τελική λύση:

$$\underline{y}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

Παράδειγμα 6.4.2. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Με απλοποίηση, βρίσκουμε:

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$\lambda_1 = 1 \text{ (πολλαπλότητα 1)}, \quad \lambda_2 = -2 \text{ (πολλαπλότητα 2)}.$$

—

Ιδιοχώροι:

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$:

Λύνουμε το σύστημα $(A - I)X = 0$:

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z.$$

Άρα ο ιδιοχώρος είναι:

$$V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$:

Λύνουμε το σύστημα $(A + 2I)X = 0$:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αυτό δίνει τη σχέση:

$$x + y + z = 0.$$

Γενική μορφή λύσης:

$$X = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ο ιδιοχώρος είναι:

$$V_A(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τα διανύσματα v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί μέσω του ορίζοντα 2×2).

Εφόσον η διάσταση του ιδιοχώρου είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα ($d_2 = \tau_2 = 2$), ο A είναι απλής δομής.

—

Γενική λύση:

Αφού τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Ιδιοτιμές με φανταστικό μέρος — Πραγματικές Λύσεις από Μιγαδικά Ιδιοδιανύσματα

Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει ιδιοτιμή $\lambda = \sigma + i\omega$ με $\omega \neq 0$, και είναι απλής δομής στο $\mathbb{C}$ ¹.

Αν $v = y + iz$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε η μιγαδική συνάρτηση:

$$x(t) = e^{\lambda t} v = e^{(\sigma + i\omega)t} (y + iz)$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $x'(t) = A \cdot x(t)$ στο $\mathbb{C}$

Θα δείξουμε πώς από αυτή τη μιγαδική λύση μπορούμε να κατασκευάσουμε

****Δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις**.**

¹ Δηλαδή ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$, άρα υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με μιγαδικές τιμές.

Χρήσιμες ταυτότητες:

- Παράγωγος μιγαδικής εκθετικής:

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

- Τύπος του Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t).$$

Ανάλυση του ιδιοδιανύσματος: Από $Av = \lambda v$ προκύπτει:

$$A(y + iz) = (\sigma + i\omega)(y + iz).$$

Αναπτύσσοντας:

$$Ay + iAz = \sigma y - \omega z + i(\omega y + \sigma z).$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη², παίρνουμε:

$$\begin{cases} Ay = \sigma y - \omega z \\ Az = \omega y + \sigma z \end{cases}$$

Ενοποίηση σε ένα σύστημα:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma I & -\omega I \\ \omega I & \sigma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα:

$$\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma I & -\omega I \\ \omega I & \sigma I \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Αυτό το ενιαίο σύστημα επιτρέπει την εύρεση του y και z ταυτόχρονα.

Γραμμική ανεξαρτησία: Τα y και z είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν υπήρχε $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $z = \mu y$, τότε:

$$v = y + i\mu y = (1 + i\mu)y,$$

²Κάθε μιγαδική ισότητα $a + ib = c + id$ συνεπάγεται $a = c$ και $b = d$.

και:

$$Av = \lambda v \Rightarrow Ay = \lambda y.$$

Όμως Ay είναι πραγματικό, ενώ λy είναι μιγαδικό³. Αποπο.

Υπενθύμιση 6.4.1. Αν $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$, τότε η συζυγής του (συμβολίζεται $\bar{\lambda}$) είναι ο $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$.

Ομοίως, αν $v = y + iz$, τότε η συζυγής του είναι $\bar{v} = y - iz$. Αν $Av = \lambda v$, τότε:

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \bar{v}.$$

Παρατήρηση 6.4.1. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $A = (a_{ij})$, τότε η συζυγής πίνακας του A είναι:

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}).$$

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ισχύει $\bar{A} = A$.

Παράδειγμα 6.4.3. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Ιδιοδιάνυσμα για $\lambda = 1 + i$:

Λύνουμε:

$$(A - (1+i)I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Το σύστημα είναι:

$$-ix - y = 0 \Rightarrow x = iy.$$

³Εκτός αν $y = 0$, πράγμα που αποκλείεται, αφού το ιδιοδιάνυσμα $v \neq 0$.

Άρα:

$$X = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = y \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για $\lambda = 1 - i$ είναι:

$$\bar{v} = y \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

■

Θεώρημα 6.4.1. Αν

$$\underline{y}(t) = \underline{\varphi}_1(t) + i\underline{\varphi}_2(t)$$

είναι μιγαδική λύση της εξίσωσης

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$$

με $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε οι πραγματικές συναρτήσεις $\underline{\varphi}_1(t)$ και $\underline{\varphi}_2(t)$ είναι επίσης λύσεις του συστήματος, και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητες.

Απόδειξη. Παράγωγίζοντας:

$$\underline{y}' = \underline{\varphi}_1' + i\underline{\varphi}_2' = A\underline{y} = A\underline{\varphi}_1 + iA\underline{\varphi}_2.$$

Άρα:

$$\underline{\varphi}_1' = A\underline{\varphi}_1, \quad \underline{\varphi}_2' = A\underline{\varphi}_2.$$

□

Πόρισμα 6.4.1. Αν στην ιδιοτιμή $\lambda = \sigma + i\omega$ αντιστοιχεί ιδιοδιάνυσμα $v = y + iz$, τότε η λύση:

$$\underline{y}(t) = e^{(\sigma+i\omega)t}(y + iz)$$

μπορεί να γραφεί ως:

$$\underline{y}(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] (y + iz),$$

και επομένως:

$$\underline{y}(t) = e^{\sigma t} [(\cos(\omega t)y - \sin(\omega t)z) + i(\sin(\omega t)y + \cos(\omega t)z)].$$

Άρα οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις είναι:

$$\varphi_1(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t)y - \sin(\omega t)z], \quad \varphi_2(t) = e^{\sigma t} [\sin(\omega t)y + \cos(\omega t)z].$$

Ασκήσεις

6.6. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \underline{y}(t), \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6.7. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \underline{y}(t), \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6.8. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{y}(t), \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

6.9. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{y}(t), \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6.10. Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει πραγματική ιδιοτιμή $\lambda < 0$. Τότε η εξίσωση $\underline{y}' = A\underline{y}$ έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση $\underline{y}(t)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = 0.$$

6.11. Θεωρούμε το σύστημα

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{y}(t).$$

- Να βρεθεί η γενική λύση.
- Να προσδιορισθεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις να τείνουν στο 0 καθώς το $t \rightarrow \infty$.

6.12. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}(t).$$

6.13. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{y}(t), \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6.5 Πίνακες Μη Απλής Δομής

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) \quad (6.3)$$

με $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μη απλής δομής. Σκοπός είναι να περιγράψουμε τον τρόπο επίλυσης του συστήματος (6.3) στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι μη απλής δομής.

Θα αναφερθούμε σε μεμονωμένες περιπτώσεις και θα καταλήξουμε σε μια περιγραφή μιας γενικής μεθόδου — ευελπιστούμε ότι δεν θα μπερδέσουμε τον αναγνώστη. Ο λόγος αυτής της παρουσίας είναι η αποφυγή της εκτενούς αναφοράς στη γενική θεωρία των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων και της μορφής Jordan ενός πίνακα.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του A .

- i. Υποθέτουμε ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ είναι 2 και η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με 1. Τότε, αν v είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , η

$$\underline{y}^{(1)}(t) = e^{\lambda t} v \neq 0$$

είναι μία λύση του συστήματος.

Αφού ο A είναι μη απλής δομής, δεν μπορούμε να αναχθούμε στις μεθόδους της προηγούμενης παραγράφου. Σκεπτόμενοι όμως αναλογικά με εξισώσεις 2ης τάξης, αναζητούμε μια δεύτερη λύση της μορφής:

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda t} tv.$$

Όμως, υπολογίζοντας:

$$\underline{y}'(t) = (\lambda e^{\lambda t} t + e^{\lambda t}) v = A e^{\lambda t} tv \Rightarrow (\lambda t + 1) e^{\lambda t} v = \lambda t e^{\lambda t} v \Rightarrow v = 0,$$

όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα, αναζητούμε λύση της μορφής:

$$\underline{y}^{(2)}(t) = e^{\lambda t}(tv + u), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση, προκύπτει ότι:

$$\underline{y}^{(2)'}(t) = A\underline{y}^{(2)}(t) \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = v.$$

Η λύση καθορίζεται από την επίλυση αυτού του γραμμικού συστήματος.

Παράδειγμα 6.5.1. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Λάθος! Ας κάνουμε σωστά:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Άρα, η ιδιοτιμή είναι $\lambda = 2$, με αλγεβρική πολλαπλότητα 2.

Βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ από:

$$(A - 2I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Άρα:

$$V_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad d_2 = 1.$$

Η μία λύση είναι:

$$\underline{y}^{(1)}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Για δεύτερη λύση, αναζητούμε:

$$\underline{y}^{(2)}(t) = e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \right), \quad u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Από:

$$\begin{aligned} (A - 2I)u &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow a + b &= -1 \\ \Rightarrow b &= -1 - a. \end{aligned}$$

Άρα:

$$u = \begin{pmatrix} a \\ -1-a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, μπορούμε να πάρουμε $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ και η λύση:

$$\underline{y}^{(2)}(t) = e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες (η δεύτερη περιέχει γραμμικό όρο ως προς t), άρα η γενική λύση είναι:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

- ii. Θεωρούμε ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ είναι 3 και η γεωμετρική της ίση με 2. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα v_1 και v_2 του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ , τα οποία δίνουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (6.3):

$$\underline{y}^{(1)}(t) = e^{\lambda t} v_1, \quad \underline{y}^{(2)}(t) = e^{\lambda t} v_2.$$

Όπως και στο Παράδειγμα 6.5.1, αναζητούμε μια τρίτη λύση⁴ της μορφής:

$$\underline{y}^{(3)}(t) = e^{\lambda t} (tv + u),$$

όπου v είναι ιδιοδιάνυσμα της μορφής

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

και το διάνυσμα u προκύπτει από τη λύση του συστήματος:

$$(A - \lambda I)u = v.$$

Παράδειγμα 6.5.2. Να λυθεί το σύστημα

$$\underline{y}'(t) = A \underline{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

⁴Στην περίπτωση πίνακα μη απλής δομής αναζητούμε $\tau_\lambda - d_\lambda$ επιπλέον λύσεις για την εύρεση της γενικής λύσης.

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3.$$

Άρα η ιδιοτιμή είναι $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\tau_1 = 3$.

Βρίσκουμε τον ιδιοχώρο:

$$(A - I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Από τις γραμμές:

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y,$$

οπότε το γενικό ιδιοδιάνυσμα είναι:

$$X = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα:

$$V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

με

$$d_1 = 2 < \tau_1 = 3$$

άρα ο A δεν είναι απλής δομής.

Θέτουμε

$$v = \lambda v_1 + \mu v_2$$

όπου:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{και επιλέγουμε } \lambda = 1, \mu = 1.$$

Άρα:

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Αναζητούμε $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ τέτοιο ώστε:

$$(A - I)u = v \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Από τη δεύτερη ή τρίτη εξίσωση:

$$a + 3b = 1 \Rightarrow a = 1 - 3b.$$

Άρα:

$$u = \begin{pmatrix} 1 - 3b \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Μια απλή επιλογή είναι:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα η τρίτη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι:

$$\underline{y}^{(3)}(t) = e^t \left(t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \left(t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

- iii. Υποθέτουμε τώρα ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι ίση με 3 και η γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με 1. Έστω v ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Τότε μία λύση του συστήματος είναι:

$$\underline{y}^{(1)}(t) = e^{\lambda t} v.$$

Αναζητούμε άλλες δύο λύσεις, ώστε οι συναρτήσεις $\underline{y}^{(1)}(t)$, $\underline{y}^{(2)}(t)$, $\underline{y}^{(3)}(t)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Όπως προηγουμένως, μία δεύτερη λύση είναι της μορφής:

$$\underline{y}^{(2)}(t) = e^{\lambda t} (tv + u),$$

όπου u προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$(A - \lambda I)u = v.$$

Για την εύρεση μιας τρίτης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης, σκεπτόμενοι τις αναλογίες με τις εξισώσεις 2ης τάξης, αναζητούμε λύση της μορφής:

$$\underline{y}^{(3)}(t) = e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2!} v + tu + w \right),$$

όπου w προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$(A - \lambda I)w = u.$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι οι λύσεις $\underline{y}^{(1)}(t)$, $\underline{y}^{(2)}(t)$, $\underline{y}^{(3)}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Γενική Μέθοδος

Έστω $\dim V_A(\lambda) = 1$ και $\tau_\lambda = s$. Για την επίλυση του συστήματος

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$$

εφαρμόζουμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε ένα ιδιοδιάνυσμα v_1 του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Τότε η πρώτη λύση είναι:

$$\underline{y}^{(1)}(t) = e^{\lambda t} v_1.$$

2. Η δεύτερη λύση έχει τη μορφή:

$$\underline{y}^{(2)}(t) = e^{\lambda t} (tv_1 + v_2),$$

όπου v_2 προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$(A - \lambda I)v_2 = v_1.$$

3. Η τρίτη λύση είναι:

$$\underline{y}^{(3)}(t) = e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2!} v_1 + tv_2 + v_3 \right),$$

όπου v_3 προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$(A - \lambda I)v_3 = v_2.$$

4. Γενικά, η s -οστή λύση είναι της μορφής:

$$\underline{y}^{(s)}(t) = e^{\lambda t} \left(\frac{t^s}{s!} v_1 + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} v_2 + \cdots + tv_{s-1} + v_s \right),$$

όπου το v_s προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$(A - \lambda I)v_s = v_{s-1}.$$

Στην περίπτωση που $\dim V_A(\lambda) = \ell > 1$ και $\tau_\lambda = s > \ell$, τότε αναζητούμε $s - \ell$ επιπλέον λύσεις (διαφορετικές των ιδιοδιανυσμάτων), οι οποίες κατασκευάζονται όπως παραπάνω. Σε αυτή την περίπτωση, το v_1 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός από τη βάση του ιδιοχώρου $V_A(\lambda)$, αρκεί να υπάρχει λύση για το αντίστοιχο σύστημα. (Βλ. Παράδειγμα 6.5.2)

Ορισμός 6.5.1. Τα διανύσματα v_j , για $j = 1, \dots, s$, που προκύπτουν από τη διαδικασία κατασκευής, λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A τάξης j** για την ιδιοτιμή λ .

Ασκήσεις

6.14. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

6.15. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \underline{y}(t).$$

6.16. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underline{y}(t).$$

6.17. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{y}(t).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

7.1 Εισαγωγή

Τα περισσότερα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου, όπως τα κύματα διαφόρων ειδών έως τα φαινόμενα διάχυσης, λαμβάνουν χώρα στον χώρο και τον χρόνο. Επομένως, τα φαινόμενα θα περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής :

$$u = u(x, y, z, t)$$

που εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες x, y, z του σημείου στο οποίο αναφερόμαστε όσο και από τη χρονική μεταβλητή t κατά τη οποία μελετάμε το φαινόμενο. Οι διαφορικές εξισώσεις, που είναι ο μαθηματικός τρόπος διατύπωσης των νόμων που διέπουν τέτοιου είδους φαινόμενα, θα εμπεριέχουν τις μερικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης u , εν γένει ως προς όλες τις μεταβλητές της και συνεπώς οι εξισώσεις αυτές δεν μπορεί παρά να είναι **Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**.

Επομένως, οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις αποτελούν τον κανόνα και όχι την εξαίρεση στα φυσικά προβλήματα. Αν και η επίλυση μια μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι, εν γένει, πιο δύσκολη από την επίλυση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, εν τούτοις η πραγματική κατάσταση είναι καλύτερη από ότι θα περίμενε κανείς για δύο λόγους :

- (α) Τα περισσότερα φυσικά προβλήματα, άλλοτε μια ακρίβεια και άλλοτε προσεγγιστικά, μπορούν να περιγραφούν από μία από τις παρακάτω τρεις γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Κυματική Εξίσωση} \quad (7.1)$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{Εξίσωση Laplace} \quad (7.2)$$

$$a^2 \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{Εξίσωση Θερμότητας ή Διάχυσης} \quad (7.3)$$

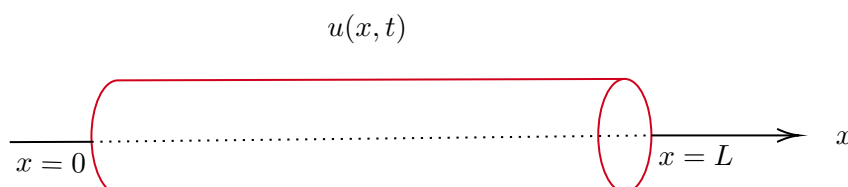
όπου και στις τρεις περιπτώσεις το σύμβολο

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

είναι ένας τελεστής γνωστός ως **Λαπλασιανός τελεστής**.

7.2 Διάδοση θερμότητας σε ράβδο

Θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα διάδοσης θερμότητας σε ευθύγραμμη ράβδο μήκους L , ομοιόμορφης διατομής και ομογενούς υλικού. Η ράβδος είναι προσανατολισμένη έτσι ώστε ο άξονας x να συμπίπτει με τον άξονα της ράβδου. Έστω $x = 0$ και $x = L$ τα άκρα της ράβδου. Θα υποθέσουμε ότι η πλευρική επιφάνεια είναι τέλεια μονωμένη έτσι ώστε να μην διέρχεται θερμότητα από αυτήν. Θα υποθέσουμε επίσης ότι η θερμοκρασία u είναι συνάρτηση μόνο της αξονικής συντεταγμένης x και του χρόνου t και όχι από τις πλευρικές συντεταγμένες y και z . Δηλαδή, η θερμοκρασία παραμένει σταθερή σε κάθε διατομή της ράβδου. Αυτή η υπόθεση είναι συνήθως ικανοποιητική όταν οι πλευρικές διαστάσεις της ράβδου είναι μικρές σε σχέση με το μήκος της.



Η διαφορική εξίσωση που διέπει τη θερμοκρασία στο εσωτερικό της ράβδου είναι

$$a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (7.4)$$

και αποτελεί την μαθηματική έκφραση μίας θεμελιώδους φυσικής ισορροπίας, όπου ο ρυθμός με τον οποίο εισρέει η θερμότητα σε κάθε τμήμα της ράβδου είναι ίσος με τον ρυθμό απορρόφησής της από το τμήμα της ράβδου. Ο συντελεστής a^2 , είναι μια σταθερά γνωστή ως συντελεστής θερμικής διάχυσης και εξαρτάται από το υλικό κατασκευής της ράβδου.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στη ράβδο είναι γνωστή, δηλαδή

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (7.5)$$

όπου $f(x)$ είναι μια γνωστή συνάρτηση. Τέλος υποθέτουμε ότι τα άκρα της ράβδου έχουμε μηδενικές θερμοκρασίες, δηλαδή

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.6)$$

Αναζητούμε επομένως την συνάρτηση $u(x, t)$ που ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (4), για $0 < x < L$, $t > 0$. σε συνδυασμό με την αρχική συνθήκη (5) όταν $t = 0$, και τις συνοριακές συνθήκες (6) στα σημεία $x = 0$ και $x = L$.

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος θα εφαρμόσουμε την *μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών*, της οποίας η βασική ιδέα έχει ως εξής :

Ως πρώτο βήμα αναζητούμε λύσεις της (4) που έχουν την χωριζόμενη μορφή

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (7.7)$$

Για να δούμε αν η (4) διαθέτει λύσεις της μορφής (7) κάνουμε την σχετική αντικατάσταση στην (4) και παίρνουμε ότι

$$X''T - \frac{1}{a^2}XT' = 0. \quad (7.8)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν διαιρέσουμε τα δύο μέλη της (8) με το γινόμενο XT , θα έχουμε

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T}. \quad (7.9)$$

Αφού το αριστερό μέλος εξαρτάται μόνο από το x και το δεξί μέλος μόνο από την μεταβλητή t , συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σταθερά λ (σταθερά διαχωρισμού), ώστε

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = -\lambda. \quad (7.10)$$

Η σχέση (10) ισοδυναμεί με τις δύο εξισώσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L \quad \text{και} \quad T' + \lambda a^2 T = 0, \quad t > 0 \quad (7.11)$$

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε αν οι συνοριακές συνθήκες (6) μπορούν να ικανοποιηθούν από λύσεις της χωριζόμενης μορφής (7), όπου αναγκαστικά θα προκύψει ότι $X(0) = X(L) = 0$.

Έχουμε λοιπόν να λύσουμε ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.)** που απαρτίζεται από τις εξισώσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L \quad \text{και} \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (7.12)$$

το οποίο είναι διαφορετικό από τα Π.Α.Τ., που έχουμε αντιμετωπίσει μέχρι τώρα, αφού οι αρχικές συνθήκες ορίζονται στα άκρα του διαστήματος και όχι σε ένα σημείο ίσως συμβαίνει στα Π.Α.Τ.

Ορισμός 7.2.1. Αν έχουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο εξαρτάται από μια μεταβλητή λ , οι τιμές του λ για τις οποίες το π.σ.τ. έχει λύση εκτός της μηδενικής ονομάζονται **ιδιοτιμές** και οι αντίστοιχες λύσεις, **ιδιοσυναρτήσεις ή ιδιολύσεις** του π.σ.τ. Το σύνολο των ιδιοτιμών ονομάζεται **φάσμα** του π.σ.τ.

Ιούνιος 2023

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών:

$$y'' + 4y' - (\lambda - 4)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της δ.ε. είναι :

$$r^2 + 4r - (\lambda - 4) = 0$$

με

$$\Delta = 16 + 4(\lambda - 4) = 4\lambda.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

i. Αν $\Delta > 0$: τότε η εξίσωση έχει ρίζες

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{\lambda}.$$

Τότε, η γενική της λύση είναι :

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Αφού $y(0) = 0$, τότε

$$c_1 + c_2 = 0$$

και αφού $y(2) = 0$, τότε

$$c_1 e^{2\lambda_1} + c_2 e^{2\lambda_2} = 0$$

από όπου προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 0$ και η λύση του Π.Σ.Τ. είναι τετριμμένη.

ii. Αν $\Delta = 0$, δηλαδή $\lambda = 0$ τότε

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

Όμοια, για $t = 0$ και $t = 2$, προκύπτει ότι η λύση του Π.Σ.Τ. είναι η τετριμμένη $y(t) = 0$.

iii. Αν $\Delta < 0$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-\lambda}i$$

και η γενική λύση της εξίσωσης ισούται με

$$y(t) = e^{-2t} \left[c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}t) \right].$$

Για $t = 0$ και $t = 2$ έχουμε :

$$c_1 = 0$$

$$c_2 \sin(2\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Αν $c_1 = c_2 = 0$, η λύση του Π.Σ.Τ. είναι η τετριμμένη. Αν $c_2 \neq 0$, τότε πρέπει

$$\sin(2\sqrt{-\lambda}) = 0$$

ισοδύναμα :

$$2\sqrt{-\lambda} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς,

$$\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

είναι οι ιδιοτιμές του Π.Σ.Τ. Επομένως, οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} y_k(t) &= e^{-2t} \left[c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}t) \right] \\ &= c_2 e^{-2t} \sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του Π.Σ.Τ.

■

Για να βρούμε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του Π.Σ.Τ. (12) είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ και $\lambda > 0$, επειδή η μορφή της λύσης είναι διαφορετική σε κάθε μία περιπτώσεις από αυτές.

i. Αν $\lambda = 0$, τότε η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad (7.13)$$

όπου οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται αν και μόνο αν $A = B = 0$. Συνεπώς, έχουμε την τετριμμένη λύση, για την οποία δεν ενδιαφερόμαστε.

- ii. Αν $\lambda < 0$, για να αποφύγουμε την συχνή εμφάνιση ριζικών θέτουμε $\lambda = -\mu^2$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση γράφεται

$$X'' - \mu^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}. \quad (7.14)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι ικανοποιούνται μόνο όταν $A = B = 0$, επομένως δεν υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις για $\lambda < 0$.

- iii. Αν $\lambda > 0$ θέτουμε $\lambda = \mu^2$ και στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$X'' + \mu^2 X = 0 \quad (7.15)$$

και η γενική λύση είναι της μορφής

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x). \quad (7.16)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε ότι

$$X(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

και επομένως η γενική λύση θα περιορισθεί στη μορφή $X(x) = B \sin(\mu x)$, για την οποία

$$X(L) = 0 \Rightarrow B \sin(\mu L) = 0.$$

Αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις συνεπώς θέλουμε $B \neq 0$, άρα αναγκαστικά $\sin(\mu L) = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{n\pi}{L}$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Έτσι προκύπτει ότι οι αντίστοιχες τιμές του λ είναι

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ο λόγος όπου $n \geq 0$ είναι ότι οι αρνητικοί όροι θα αλλάξουν απλώς το πρόσημο των λύσεων, όπου δεν μας αφορά αφού οι λύσεις είναι πολλαπλασιασμένες επί μιας αυθαίρετης σταθεράς. Έτσι οι μόνες μη τετριμμένες λύσεις των εξισώσεων (12) είναι οι ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.17)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση ως προς $T(t)$ και αντικαθιστώντας το λ με $\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ έχουμε ότι

$$T' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} T = 0, \quad t > 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.18)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις λύσεις (17) και (18) των εξισώσεων και αγνοώντας τις αυθαίρετες σταθερές αναλογίας συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.19)$$

αποτελούν μια άπειρη οικογένεια λύσεων που ικανοποιούν την (4) και τις συνοριακές συνθήκες (6), για κάθε θετικό ακέραιο n . Τώρα, το μόνο που απομένει είναι να ικανοποιηθεί η αρχική συνθήκη (5)

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Να υπενθυμίσουμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και ομογενής και επομένως κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της θα είναι και πάλι λύση της (αρχή της υπέρθεσης). Επίσης, αρκετές φορές λύσαμε Π.Α.Τ. κάνοντας χρήση της αρχής της υπέρθεσης, δηλαδή σχηματίσαμε ένα γραμμικό συνδυασμό ενός συνόλου θεμελιωδών λύσεων και κατόπιν προσδιορίσαμε του συντελεστές, ώστε να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες. Το ανάλογο πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ είναι να σχηματίσουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων (19) και κατόπιν να προσδιορίσουμε τους συντελεστές έτσι ώστε να ικανοποιούν της εξίσωση (5). Η βασική διαφορά με τα προηγούμενα προβλήματα είναι ότι υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις (19), συνεπώς ο γενικός γραμμικός συνδυασμός είναι μια άπειρη σειρά. Έτσι υποθέτουμε ότι

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \quad (7.20)$$

Για $t = 0$ έχουμε λοιπόν

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right),$$

οπότε η αρχική συνθήκη (5) ικανοποιείται αν τα C_n επιλεγούν με τρόπο τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) = f(x) \quad (7.21)$$

Το ερώτημα που τίθενται είναι : Μπορούμε πάντα να βρούμε σταθερές C_n έτσι ώστε η αντίστοιχη άπειρη επαλληλία ημιτόνων να μπορεί να αναπαραστήσει μια τυχαία συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[0, L]$?

Θεωρώντας δεδομένο ότι η απάντηση είναι καταφατική το πρακτικό ερώτημα είναι : Δεδομένης της $f(x)$, πως μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές C_n του αναπτύγματος (21) ?

Παρατήρηση 7.2.1. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει τους ακόλουθους ισχυρισμούς. Ισχύει ότι :

(α) Ισχύει $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right) dx$, για κάθε $n \neq m$.

$$(\beta) \int_0^L \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right) dx = \frac{L}{2}$$

$$(\gamma) \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$(\delta) \sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$$

Ο υπολογισμός τώρα των C_n είναι απλός. Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (21) με $\sin \left(\frac{m\pi}{L} \right)$ και ολοκληρώσουμε από 0 έως L , τότε από την παραπάνω παρατήρηση έχουμε ότι

$$\int_0^L f(x) \sin \left(\frac{m\pi}{L} \right) dx = C_m \int_0^L \sin^m \left(\frac{m\pi}{L} \right) dx = C_m \frac{L}{2}$$

και επομένως

$$C_m = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{m\pi}{L} \right) dx. \quad (7.22)$$

Παράδειγμα 7.2.1. Έστω ότι μεταλλική ράβδος ($a^2 = 1$) μήκος 20 cm θερμαίνεται έτσι ώστε η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στη ράβδο $f(x)$ είναι γνωστή. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα άκρα της ράβδου βυθίζονται σε παγωμένο λουτρό θερμοκρασίας 0° C και κατόπιν διατηρούνται σε αυτήν την θερμοκρασία, ενώ καμία ποσότητα θερμότητας δεν διαφεύγει από την πλευρική επιφάνεια της ράβδου.

Να βρεθεί μια έκφραση για την θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ράβδου για κάθε μεταγενέστερη χρονική στιγμή, στην περίπτωση που $f(x) = 100 \text{ C}$.

Απόδειξη. Η θερμοκρασία στη ράβδο ικανοποιεί το πρόβλημα διάδοσης θερμότητας με $L = 20 \text{ cm}$ και $a^2 = 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 20, \quad t > 0 \quad (7.23)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 20 \quad (7.24)$$

$$u(0, t) = u(20, t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.25)$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία χωρισμού των μεταβλητών, σύμφωνα με την εξίσωση (19) οι συναρτήσεις (ιδιολύσεις)

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{400}t} \sin \left(\frac{n\pi x}{20} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.26)$$

αποτελούν θεμελιώδεις σύστημα λύσεων του Π.Σ.Τ. (23) και (25). Επειδή οι (23) και (25) είναι γραμμικές έπεται ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των λύσεων (26), δηλαδή οι συναρτήσεις

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{400}t} \sin \left(\frac{n\pi x}{20} \right), \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N} \quad (7.27)$$

Οι λύσεις (26) είναι άπειρες στο πλήθος και ο γενικός γραμμικός συνδυασμός θα είναι μια άπειρη σειρά. Έτσι υποθέτουμε ότι

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{400} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right) \quad (7.28)$$

Για την ικανοποίηση της αρχικής συνθήκης (24) θα πρέπει να έχουμε ότι

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right) = f(x) \quad (7.29)$$

δηλαδή οι συντελεστές C_n θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε η ημιτονική σειρά της εξίσωσης (29) να συγκλίνει στην αρχική συνάρτηση $f(x) = 100$ για $0 \leq x \leq 20$.

Σύμφωνα με την εξίσωση (22), συνθήκη (29) θα ικανοποιείται εφόσον οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς επιλεγούν, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{20} \int_0^{20} 100 \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right) dx = -\frac{200}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \\ &= -\frac{200}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{400}{n\pi}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

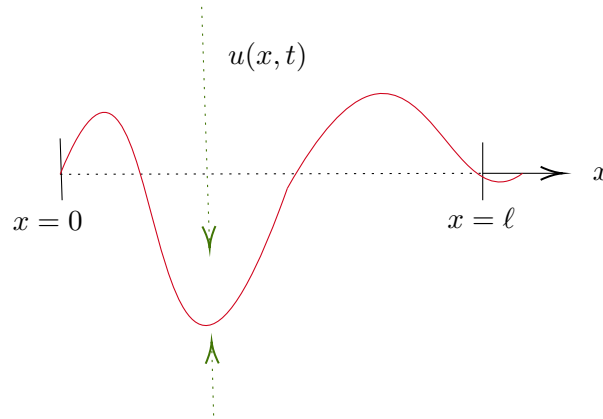
$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{400} t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{20}\right) \quad (7.30)$$

□

7.3 Κυματική Εξίσωση

Κάποια μορφή της κυματικής εξίσωσης, ή μια γενίκευση αυτής, εμφανίζεται σχεδόν αναπόφευκτα σε κάθε μαθηματική ανάλυση φαινομένων που περιλαμβάνουν τη διάδοση κυμάτων σε συνεχές μέσο. Για παράδειγμα, όλες οι μελέτες ακουστικών, υδάτινων, ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων βασίζονται στη κυματική εξίσωση.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη γραμμική ομογενή κυματική εξίσωση στη μία διάσταση και σε φραγμένο διάστημα, η οποία περιγράφει την ταλάντωση μιας ελαστικής χορδής. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ελαστική χορδή μήκους ℓ , πακτωμένη στα δύο άκρα τα οποία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε ο άξονας x να βρίσκεται κατά μήκος της χορδής.



Ως ελαστική χορδή μπορεί να θεωρηθεί μια χορδή κιθάρας, ένα σκληρό σύρμα ή ακόμα και μια γραμμή ηλεκτρικής ενέργειας. Υποθέτουμε ότι η χορδή τίθεται σε κίνηση (για παράδειγμα, μέσω ενός ελαφρού τραβήγματος), έτσι ώστε να ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο, και έστω ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ συμβολίζει την κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής στο σημείο x την χρονική στιγμή t . Αν τα φαινόμενα απόσβεσης, όπως η αντίσταση του αέρα, θεωρηθούν αμελητέα, και αν το πλάτος της κίνησης δεν είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το μήκος της χορδής, τότε η $u(x, t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0. \quad (7.31)$$

Ο σταθερός συντελεστής c^2 δίνεται από την σχέση

$$c^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (7.32)$$

όπου T είναι η τάση που ασκείται στη χορδή και ρ είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους του υλικού της χορδής. Επομένως, το c έχει μονάδες μήκος/χρόνος, δηλαδή ταχύτητας.

Για την πλήρη περιγραφή της κίνησης της χορδής θα πρέπει να καθοριστούν οι κατάλληλες συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Με την παραδοχή ότι η ταλάντωση της χορδής λαμβάνει χώρα με πακτωμένα τα άκρα της, οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να εκφράζουν ότι στα ακραία σημεία της $x = 0$ και $x = \ell$ η μετατόπιση πρέπει να είναι μηδενική για κάθε t . Θα είναι επομένως,

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t > 0. \quad (7.33)$$

Για τις αρχικές συνθήκες δεδομένου ότι η εξίσωση είναι δευτέρας τάξης ως προς τον χρόνο, είναι εύλογο ότι θα πρέπει να δοθούν τόσο η συνάρτηση όσο και η παράγωγός της ως προς t κατά την χρονική στιγμή $t = 0$. Θα είναι λοιπόν

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (7.34)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (7.35)$$

όπου $f(x)$ και $g(x)$ είναι δοσμένες συναρτήσεις. Προκειμένου οι συνθήκες (33),(34),(35) να είναι συμβατές θα πρέπει

$$f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell). \quad (7.36)$$

Για την εύρεση των λύσεων εφαρμόζουμε την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Επομένως αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (7.37)$$

Από την (31) προκύπτει ότι

$$X''T = \frac{1}{c^2}XT''$$

όπου διαιρώντας με $u = XT$, παίρνουμε

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}.$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν οι συναρτήσεις των δύο μελών ισούνται με μια κοινή σταθερά (σταθερά διαχωρισμού). Θα πρέπει λοιπόν αναγκαστικά

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \quad (7.38)$$

Ως προς τη χωρική συνάρτηση $X(t)$ η (38) δίνει

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (7.39)$$

η οποία θα πρέπει να λυθεί σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες (33), όπου εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι $X(0) = X(\ell) = 0$. Οι παραπάνω σχέσεις συνιστούν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών (Sturm Liouville) το οποίο λύθηκε στην προηγούμενη ενότητα με τα εξής αποτελέσματα

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\right), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (7.40)$$

Για τις τιμές του λ που βρήκαμε, η εξίσωση (38) ως προς την χρονική συνάρτηση $T(t)$ γίνεται

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 T_n(t) = 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) \quad (7.41)$$

Οπότε οι χωριζόμενες λύσεις που βρήκαμε θα γράφονται τελικά

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) \right] \quad (7.42)$$

ομοίως λοιπόν με την παράγραφο 2 η αντίστοιχη ”γενική” λύση είναι

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) \right] \quad (7.43)$$

η οποία ικανοποιεί επίσης τόσο την εξίσωση όσο και τις συνοριακές συνθήκες, αφού κάθε όρος χωριστά τις ικανοποιεί.

Εκείνο που απομένει είναι να απαιτήσουμε η γενική λύση να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (34) και (35) και βάσει αυτής της απαίτησης να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n και b_n .

Για την πρώτη αρχική συνθήκη θα πρέπει να απαιτήσουμε η γενική λύση να ικανοποιεί τη $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq \ell$. Ζητάμε επομένως να είναι

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = f(x).$$

όπου τα a_n υπολογίζονται με τον γνωστό τύπο

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7.44)$$

Για να εφαρμόσουμε τη δεύτερη αρχική συνθήκη $u_t(x, t) = g(x)$, $0 \leq x \leq \ell$, παραγωγίζουμε την γενική λύση (43) ως προς t οπότε

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \left[-a_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) \right].$$

Η ικανοποίηση της αρχικής συνθήκης επιβάλει η δοθείσα συνάρτηση $g(x)$ να αναπαρίσταται από την ημιτονική σειρά $u_t(x, t)$, δηλαδή

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

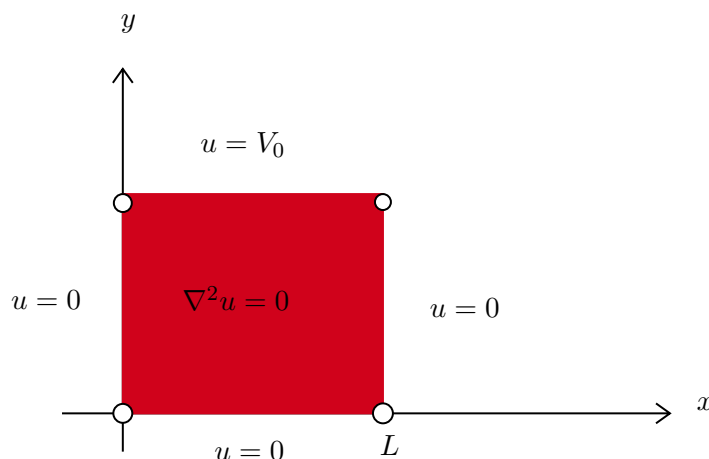
με τους συντελεστές b_n να προσδιορίζονται όπως στη παράγραφο 2, δηλαδή

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (7.45)$$

Αφού προσδιορίσαμε τους συντελεστές a_n και b_n έχουμε περιγράψει πλήρως τις λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών.

7.4 Η διδιάσταση εξίσωση Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Από μαθηματικής πλευράς το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε τώρα είναι σαφώς διατυπωμένο στο παρακάτω σχήμα. Αναζητούμε μια συνάρτηση $u(x, y)$ που θα ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό τετραγώνου πλευράς L , και θα παίρνει τις τιμές που φαίνονται στο σχήμα στην περίμετρό του.



Έχουμε δηλαδή να λύσουμε το πρόβλημα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (7.46)$$

$$u(0, y) = u(L, y) = 0 \quad (7.47)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \text{και} \quad u(x, L) = V_0 \quad (7.48)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες, αφού η μεταβλητή του χρόνου δεν υπάρχει μεταβλητή χρόνου στην εξίσωση. Επομένως, όλες οι συνθήκες είναι ””συνοριακού τύπου””.

Από τα προηγούμενα προβλήματα, είδαμε ότι εφαρμόζοντας την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, πρώτα επιβάλλαμε τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες και μετά τις μη ομογενείς, οι οποίες αφορούσαν πάντα στη χρονική εξάρτηση και είχαν τον χαρακτήρα ””αρχικών συνθηκών””. Στην παρούσα περίπτωση η μη ομογενής συνθήκη αφορά σε μια χωρική μεταβλητή y το οποίο δεν έχει άλλη σημασία πέρα από αυτή. Οπότε από προηγούμενη εμπειρία η συνθήκη αυτή θα επιβληθεί στο τέλος.

Φυσική Ερμηνεία. Πρόκειται για άπειρο μήκους πυκνωτή, του οποίου ο ένας οπλισμός έχει μορφή ενός καναλιού σχήματος Π , ενώ ο άλλος είναι μια μεταλλική λωρίδα άπειρου μήκους

που κλείνει το κανάλι από πάνω με την παρεμβολή βέβαια ενός μονωτικού υλικού στα σημεία επαφής ώστε να είναι δυνατή η ύπαρξη διαφοράς δυναμικού μεταξύ των δύο οπλισμών. (Τα σχετικά κυκλώματα στις δύο επάνω γωνίες του τετραγώνου δηλώνουν τη διακοπή επαφής μεταξύ των οπλισμών.)

Το ηλεκτρικό πεδίο και αντίστοιχο ηλεκτρικό δυναμικό που θα διαμορφωθεί στον χώρο μεταξύ των δύο οπλισμών είναι ανεξάρτητο από την μεταβλητή z και επομένως θα ικανοποιεί τη διδιάστατη εξίσωση Laplace πάνω σε μια τυχαία διατομή κάθετη στον άξονα των z . Λύνοντας την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό του τετραγώνου με τις συνοριακές συνθήκες, θα βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό $u(x, y)$ που επικρατεί μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή σε μια τυχαία διατομή και με βάση αυτό θα μπορούμε να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$.

Επίλυση. Για την εύρεση της λύσης εφαρμόζουμε την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Επομένως, αναζητούμε λύσεις της (46) της μορφής

$$u(x, y) = X(y)Y(y) \quad (7.49)$$

Οπότε η (46) θα γίνει

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Διαιρώντας με XY , παίρνουμε

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

που θα ικανοποιηθεί μόνο αν οι δύο συναρτήσεις των δύο μελών ισούνται με μια κοινή σταθερά. Θα είναι λοιπόν αναγκαστικά

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda. \quad (7.50)$$

Ως προς τη χωρική συνάρτηση $X(x)$ η εξίσωση (50) δίνει

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (7.51)$$

η οποία σε συνδυασμό με τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (47), δίνει άμεσα ότι $X(0) = X(L) = 0$. Όμοια με την παράγραφο 2 έχουμε ότι

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7.52)$$

Για τις τιμές του λ που βρήκαμε η εξίσωση (50) ως προς τη χωρική συνάρτηση $Y(y)$ γίνεται

$$Y'' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y = 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$Y(y) = a_n e^{\frac{n\pi y}{L}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} \quad (7.53)$$

7.5 Ασκήσεις

7.1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

7.2. Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τις (αντίστοιχες) ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm-Liouville με περιοδικές συνοριακές συνθήκες:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad t \in (-\pi, \pi); \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi). \quad (7.54)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

8.1 Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μια διαφορετική μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

Ο μετασχηματισμός Laplace ανήκει στην κατηγορία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται για να απαντήσουν στο ακόλουθο ερώτημα: πόσο πολύ μια δοσμένη συνάρτηση "μοιάζει" με μια συγκεκριμένη άλλη συνάρτηση;

Για παράδειγμα, αν $y(t)$ παριστάνει μια συνάρτηση ραδιοφωνικού κύματος, θα θέλαμε να τη συγκρίνουμε με τη συνάρτηση $\sin(\omega t)$, η οποία είναι ημιτονοειδής με συχνότητα $\frac{\omega}{2\pi}$. Συγκεκριμένα, για κάθε τιμή του ω , θέλουμε έναν αριθμό που να δείχνει πόσο πολύ η $y(t)$ μοιάζει με την $\sin(\omega t)$.

Ένας τρόπος για να επιτύχουμε αυτή τη σύγκριση είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\int_{-\rho}^{\rho} y(t) \sin(\omega t) dt,$$

για μεγάλες τιμές του ρ . Αν η $y(t)$ έχει συχνότητα $\frac{\omega}{2\pi}$ και το ίδιο πρόσημο με την $\sin(\omega t)$ στις ίδιες περιοχές, τότε το ολοκλήρωμα είναι μεγάλο. Διαφορετικά, η τιμή του μειώνεται λόγω ακυρώσεων.

Για την εφαρμογή αυτής της ιδέας στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, είναι φυσικό να συγκρίνουμε την $y(t)$ με την εκθετική συνάρτηση, η οποία εμφανίζεται συχνά.

Ορισμός 8.1.1. Ο γενικευμένος γραμμικός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός $Y(s)$ μιας συνάρτησης $y(t)$ ορίζεται ως:

$$Y(s) = \int_a^b y(t)k(s, t) dt,$$

όπου η $k(s, t)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από την παράμετρο s και ονομάζεται **πυρήνας του μετασχηματισμού**.

Η χρησιμότητα των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών —και ιδίως του μετασχηματισμού Laplace— έγκειται στο ότι η μετασχηματισμένη συνάρτηση $Y(s)$ έχει συνήθως απλούστερες ιδιότητες από την αρχική $y(t)$.

Η μεθοδολογία συνίσταται στο να βρίσκουμε πρώτα τη $Y(s)$ και στη συνέχεια, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού, να ανακτούμε την $y(t)$.

8.2 Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός 8.2.1. Έστω $f(t)$ μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη για $t \geq 0$. Ο **μετασχηματισμός Laplace** της f είναι η συνάρτηση $F(s)$ ορισμένη ως:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

για εκείνες τις τιμές του s για τις οποίες το ολοκλήρωμα συγκλίνει, δηλαδή το όριο

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Στη συνέχεια παραθέτουμε παραδείγματα μετασχηματισμών Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 8.2.1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = c \neq 0$.

Παράδειγμα 8.2.2. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = c \neq 0$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A c e^{-st} dt = c \left(\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-sA}}{s} \right) = \begin{cases} \frac{c}{s}, & s > 0 \\ \infty, & s \leq 0 \end{cases}.$$

Άρα προκύπτει ότι:

$$F(s) = \mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}, \quad s > 0.$$

■

Παράδειγμα 8.2.3. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = e^{at}$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-(s-a)A}}{s - a} = \begin{cases} \frac{1}{s-a}, & s > a \\ \infty, & s \leq a \end{cases}.$$

Άρα,

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

■

Παράδειγμα 8.2.4. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων $\cos(at)$ και $\sin(at)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \cos(at) dt, \quad \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \sin(at) dt.$$

Υπενθυμίζουμε την ταυτότητα του Euler:

$$e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta).$$

Άρα,

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} + i\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} e^{iat} dt = \begin{cases} \frac{1}{s - ia} = \frac{s + ia}{s^2 + a^2}, & s > 0 \\ \infty, & s \leq 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς, εξισώνοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

■

Παράδειγμα 8.2.5. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = t^a$, $a > -1$.

Λύση. Για $x > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι $\Gamma(1) = 1$ και $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, απ' όπου προκύπτει ότι $\Gamma(n+1) = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τον ορισμό έχουμε:

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt.$$

Θέτουμε $u = st \Rightarrow dt = \frac{du}{s}$, και αντικαθιστούμε:

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^a \cdot \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^a du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad s > 0.$$

Για ακέραιες τιμές $n \in \mathbb{N}$, προκύπτει:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

■

Παράδειγμα 8.2.6. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ k, & t = 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$$

Λύση. Η f είναι ασυνεχής στο $t = 1$. Για $0 < \varepsilon < 1$, έχουμε:

$$\int_0^1 e^{-st} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} e^{-st} dt = \begin{cases} \infty, & s \leq 0 \\ \frac{1-e^{-s}}{s}, & s > 0 \end{cases}$$

και

$$\int_1^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_1^{\infty} e^{-st} \cdot 0 dt = 0.$$

Άρα:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} f(t) dt + \int_1^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

8.1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{3t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.2. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{-5t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.3. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το $\mathcal{L}\{f(t)\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t - 1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}.$$

8.3 Ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace

Ορισμός 8.3.1. Μια πραγματική συνάρτηση f λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα $[0, A]$ αν:

- Υπάρχουν το πολύ πεπερασμένου πλήθους σημεία $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq A$, στα οποία η f είναι ασυνεχής.
- Σε κάθε σημείο ασυνέχειας t_i , τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή:

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t), \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t) \in \mathbb{R}.$$

Θα μελετήσουμε προσεκτικά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια συνάρτηση f έχει μετασχηματισμό Laplace.

Μια λεπτομερής και αυστηρή προσέγγιση αυτού του προβλήματος απαιτεί εξοικείωση με τη γενική θεωρία του γενικευμένου ολοκληρώματος. Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t) dt$$

υπάρχει αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$. Συνεπώς, αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής για $t \geq 0$, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

υπάρχει για κάθε $b > 0$.

Για την ύπαρξη του ορίου αυτού του ολοκληρώματος όταν $b \rightarrow \infty$, είναι αναγκαία κάποια συνθήκη που να περιορίζει το ρυθμό αύξησης της $f(t)$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Με κίνητρο αυτό δίνεται ο επόμενος ορισμός:

Ορισμός 8.3.2. Η συνάρτηση $f(t)$ ονομάζεται **εκθετικής τάξης** καθώς $t \rightarrow \infty$, αν και μόνο αν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M, c και T τέτοιες ώστε:

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad \text{για κάθε } t \geq T.$$

Αρα μια συνάρτηση εκθετικής τάξης (όταν $t \rightarrow \infty$) αυξάνεται όχι ταχύτερα από ένα σταθερό πολλαπλάσιο μιας εκθετικής συνάρτησης με γραμμικό εκθέτη.

Παράδειγμα 8.3.1. Κάθε φραγμένη συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης, αφού υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(t)| < M$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. (Εδώ $c = 0$.)

Παράδειγμα 8.3.2. Η συνάρτηση t^n είναι εκθετικής τάξης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού γνωρίζουμε ότι $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. Άρα:

$$\left| \frac{t^n}{n!} \right| \leq e^t \Rightarrow |t^n| \leq n! \cdot e^t, \quad \forall t \geq 0.$$

Παράδειγμα 8.3.3. Η συνάρτηση e^{t^2} δεν είναι εκθετικής τάξης. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^2}}{e^{at}} = \infty, \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R},$$

και έτσι να συμπεράνει ότι η e^{t^2} δεν είναι εκθετικής τάξης.

Θεώρημα 8.3.1 (Υπαρξης). Εάν η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ υπάρχει.

Απόδειξη. Αφού η f είναι εκθετικής τάξης, υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M, c, T τέτοιες ώστε:

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad \text{για κάθε } t \geq T.$$

Τότε:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt = I_1 + I_2.$$

Η ύπαρξη του I_1 εξασφαλίζεται από την τμηματική συνέχεια της f (βλ. προηγούμενο ορισμό).

Για το I_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_T^A e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_T^A e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_T^A e^{-st} e^{ct} dt \\
 &= M \int_T^A e^{-(s-c)t} dt \\
 &= -\frac{M}{s-c} \left[e^{-(s-c)A} - e^{-(s-c)T} \right] \\
 &\xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)T},
 \end{aligned}$$

για $s > c$.

Άρα το I_2 συγκλίνει και επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ για $s > c$. $\square$

Πόρισμα 8.3.1. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος και $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ για $s > c$, τότε:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την τελευταία εκτίμηση της προηγούμενης απόδειξης, όπου φάνηκε ότι

$$F(s) \leq \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)T} \rightarrow 0, \quad \text{για } s \rightarrow \infty.$$

$\square$

Παρατήρηση 8.3.1. Οι συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα 8.3.4. Η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

δεν είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$, ωστόσο έχει μετασχηματισμό Laplace. (Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει γιατί.)

8.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Θεώρημα 8.4.1 (Γραμμικότητα). Αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\},$$

για όλα τα s για τα οποία υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} [af(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + b \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 8.4.1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της

$$f(t) = 2e^{-3t} + 4\cos(2t) - 5\sin(3t).$$

Λύση. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\} + 4\mathcal{L}\{\cos(2t)\} - 5\mathcal{L}\{\sin(3t)\} \\ &= \frac{2}{s+3} + \frac{4s}{s^2+4} - \frac{15}{s^2+9}.\end{aligned}$$

■

Θεώρημα 8.4.2. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $s > a$ και $c > 0$, τότε ισχύει:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right).$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(ct) dt.$$

Θέτουμε $\tau = ct \Rightarrow dt = \frac{d\tau}{c}$ και $t = \frac{\tau}{c}$, οπότε:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right),$$

για

$$\frac{s}{c} > a \Rightarrow s > ca.$$

□

Παράδειγμα 8.4.2. Αφού γνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}, \quad \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1},$$

τότε έχουμε:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Θεώρημα 8.4.3. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $s > a$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s - c), \quad \text{για } s > a + c.$$

Παράδειγμα 8.4.3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $e^{3t} \cos(2t)$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2+4}$ για $s > 0$. Άρα:

$$\mathcal{L}\{e^{3t} \cos(2t)\} = F(s - 3) = \frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 4}, \quad \text{για } s > 3.$$

■

Θεώρημα 8.4.4 (Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου). Αν $f(t)$ είναι συνεχής και εκθετικής τάξης, και η $f'(t)$ υπάρχει και είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$, τότε:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Απόδειξη. Εφόσον f είναι εκθετικής τάξης, υπάρχουν $c, M, T \geq 0$ ώστε:

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \quad \text{για κάθε } t \geq T.$$

Άρα

$$|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-c)t},$$

και επομένως:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}f(t) = 0, \quad \text{για } s > c.$$

Αν τα σημεία ασυνέχειας της $f'(t)$ στο $[0, T]$ είναι $t_1, \dots, t_n$, θέτουμε $t_0 = 0, t_{n+1} = x$ για $x \geq T$. Τότε:

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-st}f'(t) dt &= \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-st}f'(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^n \left[e^{-st}f(t) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \right] + s \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-st}f(t) dt \\ &= e^{-sx}f(x) - f(0) + s \int_0^x e^{-st}f(t) dt. \end{aligned}$$

Άρα, για $s > c$:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-sx} f(x) - f(0) + s \int_0^x e^{-st} f(t) dt \right] = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

□

Θεώρημα 8.4.5. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $s > a$, τότε:

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}.$$

Ασκήσεις

8.4. Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}\{(t-2)^2\}$$

αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.5. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}\{5e^{-7t} + t + 2e^{2t}\},$$

αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.6. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}\{e^{3t} \sin t\},$$

αν υπάρχει, και βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.5 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Στις προηγούμενες παραγράφους αναλύσαμε εκτενώς τον τρόπο εύρεσης μετασχηματισμού Laplace, αν υπάρχει, καθώς και τις αλγεβρικές ιδιότητές του. Στην παρούσα παράγραφο θα ασχοληθούμε με το αντίστροφο πρόβλημα:

Δοθείσης συνάρτησης $F(s)$, υπάρχει $f(t)$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$;

Το συγκεκριμένο ερώτημα είναι μείζονος σημασίας για την επίτευξη του τελικού μας στόχου: την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Η διαδικασία εύρεσης της συνάρτησης $f(t)$ ονομάζεται **αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace**, και η ίδια η $f(t)$ καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** της $F(s)$ και συμβολίζεται ως

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Δοθείσας συνάρτησης $F(s)$, τίθενται τα εξής ερωτήματα:

- i. Υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)$;
- ii. Αν υπάρχει, είναι μοναδικός ;
- iii. Αν υπάρχει, πώς μπορούμε να τον προσδιορίσουμε ;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα δεν είναι πάντα καταφατική. Όπως είδαμε στο Πρόβλημα 8.3.1, για να υπάρχει αντίστροφος μετασχηματισμός πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0,$$

και είναι σαφές ότι υπάρχουν πολλές συναρτήσεις που δεν ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα.

Όσον αφορά στον υπολογισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού, η διαδικασία συχνά απαιτεί εργαλεία της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων και γι' αυτό θα παραλειφθεί στο παρόν πλαίσιο.

Για τη μονοσημαντικότητα του μετασχηματισμού Laplace, όταν αυτός υπάρχει, ισχύει το εξής σημαντικό θεώρημα (χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα 8.5.1. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 8.3.1, οπότε υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace αυτών, $F(s)$ και $G(s)$ αντίστοιχα. Αν $F(s) = G(s)$ για όλα τα $s > c$ (για κάποιο $c \in \mathbb{R}$), τότε $f(t) = g(t)$ σε όλα τα υποδιαστήματα του $[0, \infty)$ όπου οι f και g είναι συνεχείς.

Ειδικότερα, αν οι f και g είναι συνεχείς στο $[0, \infty)$, τότε είναι ίσες σε όλο το $[0, \infty)$.

Ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Θεώρημα 8.5.2 (Γραμμικότητα). Αν $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ και $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ για $s > a$, τότε για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\} = c_1 f(t) + c_2 g(t).$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα ακολουθεί άμεσα από τα Θεωρήματα 8.4.1 και 8.5.1, τα οποία εγγυώνται γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace και μονοσημαντότητα του αντιστρόφου του. $\square$

Θεώρημα 8.5.3 (Αντίστροφη μετατόπιση). Αν $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ για $s > a$, τότε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct}f(t).$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.4.3, που αφορά τη μετατόπιση στη μεταβλητή s κατά c . $\square$

8.6 Εφαρμογές στην Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

Η πιο σπουδαία εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace αφορά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων αρχικών τιμών. Η βασική ιδέα είναι να μετασχηματίσουμε κάθε όρο της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace (ιδίως της παραγώγου), να μετατρέψουμε δηλαδή τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική εξίσωση ως προς $F(s)$, να λύσουμε και να εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό για να προσδιορίσουμε το $f(t)$.

Παράδειγμα 8.6.1. Να λυθεί με χρήση μετασχηματισμού Laplace η αρχική τιμή:

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace σε κάθε όρο:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες παραγώγου:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = 0$$

Αντικαθιστούμε τις αρχικές τιμές:

$$(s^2Y(s) - 2s - 1) + 4(sY(s) - 2) + 3Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) - 2s - 1 - 8 = 0$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = 2s + 9$$

$$Y(s) = \frac{2s + 9}{(s + 1)(s + 3)}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{2s+9}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

Άρα :

$$2s+9 = A(s+3) + B(s+1)$$

$$\Rightarrow (A+B)s + (3A+B) = 2s+9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{7}{2}, B = -\frac{3}{2}$$

Άρα:

$$Y(s) = \frac{7/2}{s+1} - \frac{3/2}{s+3}$$

συνεπώς

$$y(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}.$$

■

Θεώρημα 8.6.1. Αν $F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$, όπου $f(t)$ τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a , τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n F}{ds^n}\right\} = (-t)^n f(t).$$

Παράδειγμα 8.6.2. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2s}{(s^2 + a^2)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} \right) \right\} = -\frac{1}{2} \cdot (-t \sin(at)) = \frac{t \sin(at)}{2}.$$

■

8.7 Εφαρμογές στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

8.7.1 Εφαρμογές σε Π.Α.Τ.

Έχοντας δομήσει πλέον τα περισσότερα εργαλεία που χρειαζόμαστε, θα δούμε πώς ο μετασχηματισμός Laplace εφαρμόζεται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 8.7.1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη έχουμε ότι:

$$\mathcal{L}\{y'' + 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-1}, \quad s > 1$$

Αντικαθιστώντας:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

Άρα:

$$s^2 Y(s) - s + 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s-1} + s + 3 = \frac{s^2 + 2s - 3}{s-1}$$

Οπότε:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s - 3}{(s-1)(s+1)(s+2)}.$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{s^2 + 2s - 3}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Βρίσκουμε:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

Άρα:

$$Y(s) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2}$$

και

$$y(t) = \frac{1}{6}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t}$$

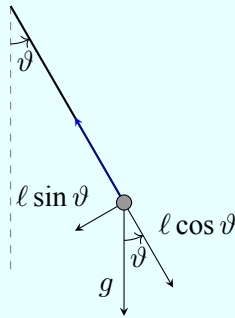
■

Παράδειγμα 8.7.2. Θα δούμε την ακόλουθη εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην περίπτωση του μαθηματικού εκκρεμούς. Το μαθηματικό εκκρεμές αποτελείται από μία σημειακή μάζα m αναρτημένη στο ένα άκρο αβαρούς, μη εκτατού νήματος μήκους ℓ , του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Εάν η μάζα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας (δηλαδή το νήμα σχηματίζει γωνία ϑ με την κατακόρυφο), τότε στη μάζα θα ασκείται μία δύναμη μέτρου

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \vartheta.$$

Θεωρώντας τη γωνία αρκετά μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\sin \vartheta \approx \vartheta$, με $s = \ell \vartheta$, όπου s το μήκος τόξου που διαγράφεται. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $\vartheta(0) = \vartheta_0$ και $\vartheta'(0) = \vartheta_1$, τότε προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$\vartheta''(t) + \frac{g}{\ell} \vartheta(t) = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \vartheta'(0) = \vartheta_1. \quad (8.1)$$



Να βρεθεί η τιμή $\vartheta(t)$ για κάθε $t > 0$.

Λύση. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (8.1) έχουμε:

$$\mathcal{L}\left\{\vartheta''(t) + \frac{g}{\ell}\vartheta(t)\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$\Rightarrow s^2 \mathcal{L}\{\vartheta(t)\} - s\vartheta(0) - \vartheta'(0) + \frac{g}{\ell} \mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = 0$$

$$\Rightarrow \left(s^2 + \frac{g}{\ell}\right) \cdot \mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = s\vartheta_0 + \vartheta_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = \frac{s\vartheta_0 + \vartheta_1}{s^2 + \frac{g}{\ell}}$$

Αναγνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)\right\} = \frac{s}{s^2 + \frac{g}{\ell}}, \quad \mathcal{L}\left\{\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)\right\} = \frac{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}{s^2 + \frac{g}{\ell}}$$

Άρα:

$$\mathcal{L}\{\vartheta(t)\} = \vartheta_0 \cdot \mathcal{L}\left\{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)\right\} + \vartheta_1 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \mathcal{L}\left\{\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)\right\}$$

Συνεπώς:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + \vartheta_1 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$$

■

Παράδειγμα 8.7.3 (Εφαρμογή στα γραμμικά συστήματα). Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) = 4t \\ y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2 \end{cases}, \quad t > 0, \quad x(0) = 4, \quad y(0) = -5.$$

Λύση. Έστω $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ και $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Τότε, από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} - 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{4t\}$$

$$sX(s) - x(0) - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} \quad (8.2)$$

$$sX(s) - 4 - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} \quad (1)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση:

$$\mathcal{L}\{y'(t) + 2y(t) - 4x(t)\} = \mathcal{L}\{-4t - 2\}$$

$$\begin{aligned} sY(s) - y(0) + 2Y(s) - 4X(s) &= -\left(\frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}\right) \\ sY(s) + 5 + 2Y(s) - 4X(s) &= -\left(\frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Το σύστημα που προκύπτει είναι:

$$\begin{cases} sX(s) - 4 - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} \\ (s+2)Y(s) - 4X(s) = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} - 5 \end{cases}$$

Από την (1):

$$sX(s) - 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + 4 \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{4}{s^2} + 4 + 2Y(s) \right)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) και επιλύοντας το σύστημα (αλγεβρικά ή με αντικατάσταση) τελικά βρίσκουμε:

$$X(s) = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)} = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2}$$

και

$$Y(s) = \frac{-6}{s+4} + \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s^2}$$

Επομένως, με χρήση πίνακα αντιστροφών:

$$x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}, \quad y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t$$

■

8.7.2 Συνάρτηση Heaviside

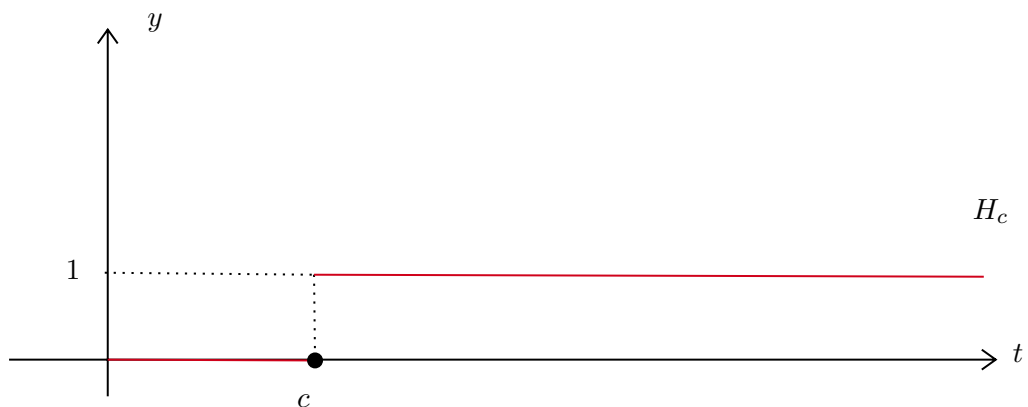
Μερικές από τις πλέον ενδιαφέρουσες εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace εμφανίζονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με συναρτήσεις εξαναγκασμού που είναι ασυνεχείς ή συναρτήσεις ώθησης. Διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν ασυνεχείς συναρτήσεις στον μη ομογενή όρο, ενώ είναι δύσκολο να λυθούν αναλυτικά με χρήση των προηγούμενων μεθόδων, αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά με το μετασχηματισμό Laplace όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η αντιμετώπιση ασυνεχών συναρτήσεων με πεπερασμένο άλμα διευκολύνεται με το ορισμό της **συνάρτησης μοναδιαίου βήματος ή συνάρτησης Heaviside**, μέσω της οποίας μοντελοποιούνται ασυνεχή φαινόμενα.

Ορισμός 8.7.1. Για $c \geq 0$, η συνάρτηση

$$H_c(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

ονομάζεται **συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ή συνάρτηση Heaviside**.



Ο μετασχηματισμός Laplace της $H_c(t)$ είναι:

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} H_c(t) dt = \frac{e^{-sc}}{s}, \quad s > 0.$$

Έστω $f(t)$ μια δοσμένη συνάρτηση. Επιθυμούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $g(t)$ η οποία είναι ακριβώς ίδια με την f αλλά μετατοπισμένη κατά τέτοιο τρόπο ώστε το σημείο της f που αντιστοιχεί στο $t = 0$ να αντιστοιχεί στο σημείο της g με $t = c$. Ένας αποτελεσματικός τρόπος να ορισθεί η g είναι μέσω της $H_c(t)$, με τον τύπο:

$$g(t) := H_c(t)f(t - c).$$

Θεώρημα 8.7.1. Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, για $s > a \geq 0$, και $c > 0$, τότε:

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t - c)\} = e^{-sc}F(s), \quad s > a.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Παράδειγμα 8.7.4. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων:

$$1. F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4}$$

$$2. F(s) = \frac{(s - 4)e^{-3s}}{s^2 - 4s + 5}$$

Λύση. 1. Έχουμε:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{-s}}{s^2 + 4} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}H_1(t) \sin 2(t - 1)\right\}$$

Άρα:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}H_1(t) \sin 2(t - 1)$$

2. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(s-4)e^{-3s}}{s^2-4s+5} = \frac{e^{-3s}(s-2)}{(s-2)^2+1} - \frac{2e^{-3s}}{(s-2)^2+1} \\ &= e^{-3s} \mathcal{L}\{e^{2t} \cos t\} - 2e^{-3s} \mathcal{L}\{e^{2t} \sin t\} \\ &= \mathcal{L}\left\{H_3(t)e^{2(t-3)} \cos(t-3) - 2H_3(t)e^{2(t-3)} \sin(t-3)\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{H_3(t)e^{2(t-3)} [\cos(t-3) - 2\sin(t-3)]\right\} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = H_3(t)e^{2(t-3)} [\cos(t-3) - 2\sin(t-3)]$$

■

Παράδειγμα 8.7.5. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'' + 4y = g(t)$ με $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, όπου

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}.$$

Λύση. Με χρήση της συνάρτησης Heaviside έχουμε ότι η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$y'' + 4y = 1 - H_\pi(t).$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη:

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y\}\mathcal{L}\{1 - H_\pi(t)\}$$

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 4)\mathcal{L}\{y(t)\} - s = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)}.$$

Αναλύουμε το $\frac{1}{s(s^2+4)}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2 + 4)}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\} &= \frac{s}{s^2 + 4} + \left(\frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2 + 4)} \right) - e^{-\pi s} \left(\frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2 + 4)} \right) \\ &= \mathcal{L}\{\cos 2t\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{\cos 2t\} - \frac{1}{4}e^{-\pi s} [\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos 2t\}] \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}\{4\cos(2t) + 1 - \cos(2t) - H_\pi(t)(1 - \cos[2(t - \pi)])\}.\end{aligned}$$

Άρα, τελικά έχουμε:

$$y(t) = \frac{1}{4} [3\cos(2t) + 1 - H_\pi(t)(1 - \cos[2(t - \pi)])].$$

■

8.7.3 Συνάρτηση δ - Dirac

Έχουμε δει ότι ο μετασχηματισμός Laplace μας επιτρέπει να εργαστούμε σε εξισώσεις στις οποίες οι δυνάμεις εξαναγκασμού περιγράφονται με ασυνεχείς συναρτήσεις. Στην ενότητα αυτή θα

μελετήσουμε έναν άλλο τύπο δυνάμεων που περιγράφονται με τις καλούμενες δυνάμεις ώθησης.

Θεωρούμε μια δύναμη $f(t)$ η οποία δρα πάνω σε ένα σώμα μόνο κατά τη διάρκεια ενός πολύ μικρού χρονικού διαστήματος $a \leq t \leq b$ και είναι $f(t) = 0$ για κάθε t εκτός του $[a, b]$. Οι δυνάμεις τέτοιου είδους ονομάζονται **δυνάμεις ώθησης** και εμφανίζονται σε φαινόμενα που χαρακτηρίζονται από ώθηση π.χ. ηλεκτρικές τάσεις, το χτύπημα από ένα σφυρί ή το αποτέλεσμα μιας έκρηξης.

Όταν εμφανίζονται περιπτώσεις δυνάμεων αυτής της μορφής, το αποτέλεσμα εξαρτάται κυρίως μόνο από την τιμή του ολοκληρώματος

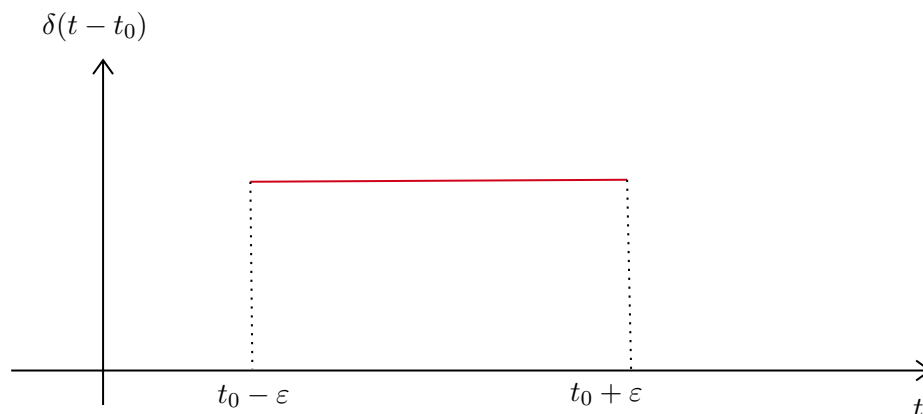
$$p = \int_a^b f(t) dt$$

και όχι από το πώς η f μεταβάλλεται μέσα στο χρόνο. Ο αριθμός p ονομάζεται **ώθηση** της δύναμης $f(t)$ στο διάστημα $[a, b]$.

Για την αντιμετώπιση τέτοιων καταστάσεων, είναι λογικό η άγνωστη δύναμη $f(t)$ να αντικατασταθεί με μια απλή και συγκεκριμένη δύναμη που έχει την ίδια ώθηση. Υποθέτουμε ότι η $f(t)$ έχει ώθηση 1 και δρα πάνω στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = t_0$ για ένα μικρό χρονικό διάστημα μήκους 2ε . Ορίζουμε:

$$\delta_\varepsilon(t - t_0) := \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η παραπάνω λέγεται **συνάρτηση μοναδιαίας ώθησης** ή **μοναδιαίος παλμός** και έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:



Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι η παραπάνω συνάρτηση έχει ώθηση 1, ανεξάρτητα από την τιμή του ε . Περνώντας στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, ορίζουμε:

$$\delta_{t_0}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t - t_0),$$

οπότε,

$$\delta_{t_0}(t) = \begin{cases} +\infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

Η παραπάνω γενικευμένη συνάρτηση λέγεται **συνάρτηση δέλτα του Dirac**.

Αν και η συνάρτηση δέλτα δεν ικανοποιεί τις συνθήκες ύπαρξης μετασχηματισμού Laplace, μπορεί να οριστεί κατάλληλα ως το όριο του μετασχηματισμού της δ_ε όταν $\varepsilon \rightarrow 0$. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι:

$$\mathcal{L}\{\delta_{t_0}(t)\} = e^{-st_0}.$$

Γενικότερα ισχύει:

$$\mathcal{L}\{\delta_{t_0}(t)f(t)\} = e^{-st_0}f(t_0).$$

8.7.4 Συνέλιξη συναρτήσεων

Ορισμός 8.7.2. Έστω f και g τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, \infty)$. Ονομάζουμε **συνέλιξη των f και g** τη συνάρτηση

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

Ιδιότητες 8.7.1. i. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

ii. $(f * g) * h = f * (g * h)$

iii. $f * 0 = 0 * f = 0$

Απόδειξη. Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Θεώρημα 8.7.2. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι τμηματικά συνεχείς στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης $(f * g)$ και μάλιστα ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε όλους τους μετασχηματισμούς Laplace των στοιχειωδών συναρτήσεων και τις βασικές ιδιότητές του. Σημειώνουμε ότι για λόγους πρακτικότητας παραλείπονται οι προϋποθέσεις και οι συνθήκες ύπαρξης. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα σχετικά θεωρήματα του κεφαλαίου.

Μετασχηματισμοί Laplace	
1	$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}, \quad c \in \mathbb{R}$
2	$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3	$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1$
4	$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$
5	$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$
6	$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$
7	$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$
8	$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$
9	$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-sc} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$
10	$\mathcal{L}\{\delta_{t_0}(t)f(t)\} = e^{-st_0} f(t_0)$
11	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}, \quad a, b \in \mathbb{R}$
12	$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
13	$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \quad c \in \mathbb{R}$
14	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
15	$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$
16	$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
17	$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right\} = \lambda f(\lambda t), \quad \lambda > 0$
18	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct}f(t), \quad c \in \mathbb{R}$
19	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n F}{ds^n}\right\} = (-t)^n f(t)$
20	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$

8.8 Ασκήσεις

8.7. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, να βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{3t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει, να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, να βρείτε το $\mathcal{L}\{e^{-5t}\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει, να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.9. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{(t-2)^2\}$, αν υπάρχει, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.10. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, να βρείτε το $\mathcal{L}\{f(t)\}$, αν υπάρχει. Αν ο μετασχηματισμός υπάρχει, να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

8.11. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{5e^{-7t} + t + 2e^{2t}\}$, αν υπάρχει, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.12. Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{e^{3t} \sin t\}$, αν υπάρχει, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(s)$.

8.13. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, αν υπάρχει, της συνάρτησης
$$F(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s^2-4s+4)}.$$

8.14. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, αν υπάρχει, της συνάρτησης
$$F(s) = \frac{1}{(2s-1)^2}.$$

8.15. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, αν υπάρχει, των συναρτήσεων:

(α)
$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

(β)
$$F(s) = \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$$

8.16. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y'' - 8y' + 4y = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y^{(3)}(0) = 3.$$

8.17. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \quad F(s) = \frac{e^{-s}}{(2s-1)^2}$$

$$(\beta) \quad F(s) = \frac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$$

8.18. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t)$ με $y(0) = y'(0) = 0$, όπου

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

8.19. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \quad f(t) = 2t^2 e^{-3t} - \cos^2 t$$

$$(\beta) \quad f(t) = 2t^2 - 1 + t \cos(3t)$$

$$(\gamma) \quad f(t) = te^{2t} \sin t$$

$$(\delta) \quad f(t) = 1 - \cosh(4t) + e^t \sinh t$$

8.20. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \quad F(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 9}$$

$$(\beta) \quad F(s) = \frac{(s-3)e^{-2s}}{s^2 - 4s + 5}$$

$$(\gamma) \quad F(s) = \frac{2(s-1)e^{-s}}{s^2(s^2+2)}$$

8.21. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων κάνοντας χρήση του θεωρήματος συνέλιξης:

$$(\alpha) \quad F(s) = \frac{e^{-4s}}{s(s+2)}$$

$$(\beta) \quad F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$(\gamma) \quad F(s) = \frac{1}{(s^2+16)^2}$$

$$(\delta) \quad F(s) = \frac{s}{(s-2)(s+1)}$$

8.22. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

$$y'' + y = \begin{cases} 3t + 5, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

8.23. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

$$y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

8.24. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

$$y'' + y = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & t \geq \pi \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$$

8.25. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t) + H_{2\pi}(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

8.26. Να λυθεί το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

$$y'' + 2y' + 5y = \sin t \cdot \delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right), \quad y(0) = 2, \quad y'(\pi) = 0$$

8.27. Να λυθεί η εξίσωση:

$$y(t) - \int_0^t (1+u)y(t-u)du = 1 - \sinh t$$

8.28. Να λυθεί η εξίσωση:

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)du = \sin t, \quad y(0) = 1$$

Clairaut, 45

Legendre, 113

Picard-Lindelöf, 59

Rodrigues, 114

Π.Σ.Τ., 143

ακριβείς μορφές, 34

ακτίνα σύγκλισης, 100

αλγεβρική πολλαπλότητα, 119

αναλυτική συνάρτηση, 100

αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, 169

απλής δομής, 120

αρχή της υπέρθεσης, 84

ασταθές, 64

ασυμπτωτικά ευσταθές, 64

γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, 140

γεωμετρική πολλαπλότητα, 119

γραμμικά ανεξάρτητες, 74

γραμμικά εξαρτημένες, 74

γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, 73

γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης, 20

διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, 9

δυναμοσειρά, 100

εκθετικής τάξης, 163

εξίσωση Bernoulli, 27

εξίσωση Euler, 87

εξίσωση Laplace, 142

εξίσωση Riccati, 33

εξίσωση θερμότητας, 142

ευσταθές, 64

θεμελιώδης πίνακας, 124

ιδιάζων, 101

ιδιοδιάνυσμα, 115

ιδιοσυναρτήσεις, 144

ιδιοτιμές, 144

ιδιοτιμή, 115

κυματική εξίσωση, 141

λύση διαφορικής εξίσωσης, 9

μέθοδος Lagrange, 82

μέθοδος των δυναμοσειρών, 99

μετασχηματισμός Laplace, 158

μη απλής δομής, 120

μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορικών εξισώσεων., 65

ομαλό, 101

ομογενής, 14, 74

ομογενής συνάρτηση, 14

ορίζουσα Wronski, 74, 124

πίνακας συντελεστών, 122

παράγωγος πίνακα, 121
πολυνόμια Legendre, 114
προσεγγίσεις Picard, 49
πρόβλημα αρχικών τιμών, 10
σημείο ισορροπίας, 63
συζυγής πίνακας, 131
συνάρτηση Heaviside, 176
συνάρτηση μοναδιαίας ώθησης, 180
συνέλιξη, 181

σύστημα διαφορικών εξισώσεων, 121
τιμή διακλάδωσης, 65
τμηματικά συνεχής, 162
τύπος του Liouville, 74
φάσμα, 144
χαρακτηριστική εξίσωση, 78
χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 78
χωριζομένων μεταβλητών, 10
χώρος φάσης, 63