ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Εαρινό εξάμηνο 2011-2012
Τμήμα Χατζηαφράτη

1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

1.1. Ορισμοί. Ο **Ευκλείδειος χώρος** $\mathbb{R}^n$ είναι ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):\ x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$ εφοδιασμένος με το **εσωτερικό γινόμενο**

$$x\cdot y=\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \ \text{ για } x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n .$$

Η **απόλυτη τιμή** του σημείου $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ (ή του διανύσματος $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$) είναι $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$. Ο αριθμός $|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ είναι το **μήκος** του διανύσματος $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Η **απόσταση** των σημείων $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ είναι $|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

Η **γωνία** θ μεταξύ των διανυσμάτων $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ έχει συνημίτονο $\cos\theta=\dfrac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$. Τα διανύσματα x και y του $\mathbb{R}^n$ είναι **κάθετα** αν $\langle x,y\rangle=0$.

1.2. Ανισότητα Cauchy-Schwarz. Για $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|\langle x,y\rangle|\le|x|\cdot|y|$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι συγγραμμικά.

1.3. Τριγωνική ανισότητα. Για $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x+y|\le|x|+|y|$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y=\lambda x$ ή $x=\lambda y$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\ge 0$.

1.4. Ταυτότητα του Lagrange. Για $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$,

$$|x|^2|y|^2-(x\cdot y)^2=\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}(x_jy_k-x_ky_j)^2 .$$

1.5. Ασκήσεις. 1. Αποδείξτε την ταυτότητα $\left||x|^2y-(x\cdot y)x\right|^2=|x|^2(|x|^2|y|^2-|x\cdot y|^2)$ (για $x,y\in\mathbb{R}^n$).

2. Δείξτε ότι αν $v_1,v_2,\dots,v_m\in\mathbb{R}^n$ και $v_j\cdot v_k=0$ για $j<k$, τότε $|v_1+v_2+\cdots+v_m|^2=|v_1|^2+|v_2|^2+\cdots+|v_m|^2$.

3. Αν $v_1,v_2,\dots,v_m\in\mathbb{R}^n$ και $|v_1+v_2+\cdots+v_m|=|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_m|$, τί συμπέρασμα βγάζετε;

4. Δείξτε ότι αν $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_j>0$, και $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ τότε $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\ge n^2$.

5. Υπολογίστε το $\min\{x_1^{16}+x_2^{16}+\cdots+x_n^{16}:\ x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$.

6. Υπολογίστε το $\max\{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n:\ x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$ (όταν δίδονται τα $a_j\in\mathbb{R}$). Γενικότερα υπολογίστε το $\max\{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n:\ \mu\varepsilon\ \lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2=1\}$ ($\lambda_j>0$).

7. Σκεφθείτε την σχέση της καθετότητας των διανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{R}^n$ με τις λύσεις των γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων. Π.χ. παρατηρήστε ότι το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n:\ \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0\}$ αποτελείται από τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{u}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ του $\mathbb{R}^n$.

1.6. Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον $xyz-$χώρο. Το **εξωτερικό γινόμενο** $\vec{u}\times\vec{v}$, των διανυσμάτων $\vec{u}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$ και $\vec{v}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$ του $\mathbb{R}^3$, ορίζεται ως εξής:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\vec{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{k} .$$

Η γεωμετρική του σημασία είναι η εξής: Το διάνυσμα $\vec{u}\times\vec{v}$ είναι κάθετο στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, το μήκος του είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγουν τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, και η φορά του είναι έτσι ώστε το σύστημα $[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}]$ να είναι θετικά προσανατολισμένο.

1.7. Εμβαδόν παραλληλογράμμου. Για δύο διανύσματα $\vec{u}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$ και $\vec{v}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$, είναι $\sqrt{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}^2}$.

Γενικότερα για δύο διανύσματα $\vec{u}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ και $\vec{v}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ δίδεται από τον τύπο

$$\text{εμβαδόν του παραλληλογράμμου } \{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}:\ 0\le\lambda,\mu\le 1\}=\sqrt{\sum_{1\le j<k\le n}\left[\det\begin{pmatrix}\alpha_j & \alpha_k\\ \beta_j & \beta_k\end{pmatrix}\right]^2}.$$

1.8. Όγκος παραλληλεπιπέδου. Αν $\vec{u}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$, $\vec{v}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$ και $\vec{w}=\gamma_1\vec{i}+\gamma_2\vec{j}+\gamma_3\vec{k}$ είναι τρία διανύσματα στον χώρο $\mathbb{R}^3$, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των διανυσμάτων:

$$\text{όγκος παραλληλεπιπέδου } \{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\kappa\vec{w}:\ 0\le\lambda,\mu,\kappa\le 1\}=\left|\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}\right|.$$

1.9. Ασκήσεις. 1. Έστω $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το μήκος της προβολής του $\vec{x}$ πάνω στο $\vec{y}$ είναι ίσο με $|\vec{x}\cdot\vec{y}|/|\vec{y}|$.

2. Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου (α,β,γ) από το επίπεδο $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$ είναι

$$\frac{|\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\Gamma\gamma+\Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}.$$

3. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών

$\ell_1:\ x=2t+3,\ y=-t+\sqrt{2},\ z=5t-\sqrt{7},\ -\infty<t<\infty$, και $\ell_2:\ x=9t+2,\ y=\sqrt{5}t+2,\ z=-5t-3,\ -\infty<t<\infty$.

4. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών

$$\ell_1:\ \begin{cases}x-y+3z=1\\ 2x+3y-z=-2\end{cases}\quad \text{και}\quad \ell_2:\ \begin{cases}5x-7y+z=3\\ 8x+y-2z=-9.\end{cases}$$

1.10. Σχόλιο. Για m γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{v}_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in})$, $i=1,2,\ldots,m$, στον χώρο $\mathbb{R}^n$, θεωρήστε το *$m-$διάστατο* παραλληλεπίπεδο $\Pi_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m)=\{\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+\lambda_m\vec{v}_m:\ 0\le\lambda_i\le 1, i=1,2,\ldots,m\}$ που παράγεται από τα διανύσματα αυτά και ορίστε

$$\mathbb{V}_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m)=\sqrt{\sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n}\left[\det\begin{pmatrix}\alpha_{1j_1} & \cdots & \alpha_{1j_m}\\ \vdots & & \\ \alpha_{mj_1} & \cdots & \alpha_{mj_m}\end{pmatrix}\right]^2}.$$

Παρατηρήστε ότι για $m=1$ η ποσότητα $\mathbb{V}_1(\vec{v}_1)$ είναι το μήκος του διανύσματος $\vec{v}_1$, ενώ για $m=2$ η ποσότητα $\mathbb{V}_2(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2$. Γενικότερα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα. *Έστω $m\le n$. Για $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m\in\mathbb{R}^n$,*

$$\text{ο } m-\text{διάστατος όγκος του } \Pi_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m)=\mathbb{V}_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_m).$$

Ιδιαιτέρως για n διανύσματα $\vec{v}_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{in})\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$\text{ο όγκος του } \Pi_n(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)=\left|\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\right|.$$

2. Σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$

2.1. Ορισμοί. Μια ακολουθία $(a_k \in \mathbb{R}^n)_{k\in\mathbb{N}}$ **συγκλίνει** στο σημείο p του $\mathbb{R}^n$ αν $|a_k - p| \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Το σημείο p λέγεται **όριο** της (συγκλίνουσας) ακολουθίας a_k. Αν γράψουμε αναλυτικά $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn})$ και $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ τότε $|a_k - p| \to 0$ αν και μόνο αν $a_{k1} \to p_1$, $a_{k2} \to p_2$, ..., $a_{kn} \to p_n$ (εννοείται του $k \to \infty$).

Μια **υποακολουθία** της ακολουθίας a_k είναι μια ακολουθία της μορφής a_{s_k} όπου s_k είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων, δηλαδή $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$.

Μια ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ότι είναι **φραγμένη** αν υπάρχει θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε $|a_k| \le M$ για κάθε $k = 1,2,3,...$.

Μια ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ότι είναι **ακολουθία *Cauchy*** αν $|a_k - a_l| \to 0$, των $k, l \to \infty$, αν δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|a_k - a_l| < \varepsilon$ για $k, l > k(\varepsilon)$.

2.2. Θεώρημα. *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσες υποακολουθίες.*

2.3. Θεώρημα. *Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

2.4. Ανοικτά και κλειστά σύνολα. Ορισμοί. Έστω σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$. Η **μπάλα** $B(p,r)$ με κέντρο το σημείο p και ακτίνα r είναι το σύνολο $B(p,r)=\{x \in \mathbb{R}^n : |x-p| < r\}$.

Ένα υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ανοικτό** αν για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχει $r(a) > 0$ ούτως ώστε $B(a, r(a)) \subset \Omega$.

Ένα υποσύνολο F του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **κλειστό** αν το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^n - F$, είναι ανοικτό.

Πρόταση. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$. Το F είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in F$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι $x \in F$.

Ιδιότητες. Η τομή δυο ανοικτών συνόλων είναι επίσης ανοικτό σύνολο. Γενικότερα αν $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε και η τομή $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \cdots \cap \Omega_N$ είναι ανοικτό σύνολο. Μια άπειρη τομή ανοικτών εν γένει δεν είναι ανοικτό σύνολο. Ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Η ένωση δυο κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό. Και η οσοδήποτε μεγάλη τομή κλειστών είναι κλειστό σύνολο.

Πρόταση. Έστω ότι $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Τότε η τομή των είναι επίσης μη κενή: $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

2.5. Σημεία συσσώρευσης και σημεία επαφής. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο **συσσώρευσης** του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$, η μπάλα $B(p,\varepsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A διαφορετικό από το p, δηλαδή $B(p,\varepsilon) \cap A - \{p\} \neq \varnothing$. Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in A'$. Ένα σημείο του συνόλου A το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσής του λέγεται ότι είναι **μεμονωμένο** σημείο του A.

Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο **επαφής** του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$, η μπάλα $B(p,\varepsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A, δηλαδή $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in \overline{A}$.

Ιδιότητες. 1. Το σημείο $p \in A'$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A - \{p\}$ με $a_k \to p$.

2. Το σημείο $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A$ με $a_k \to p$.

3. Για κάθε σύνολο A, $\overline{A} = A \cup A'$.

2.6. Σχετικότητα στη τοπολογία. Έστω T ένα <u>τυχόν</u> υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$. Ένα υποσύνολο $A \subset T$ λέγεται **ανοικτό στο** T (ή **ως προς το** T ή ακόμη **σχετικά με το** T), αν υπάρχει σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$, ούτως ώστε $A = \Omega \cap T$. Ομοίως, ένα υποσύνολο $B \subset T$ λέγεται **κλειστό στο** T (ή **ως προς το** T ή **σχετικά με το** T), αν υπάρχει σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$, κλειστό στον $\mathbb{R}^n$, ούτως ώστε $B = F \cap T$. Τα σύνολα T και $\varnothing$ είναι συγχρόνως και ανοικτά και κλειστά ως προς το T. Επίσης το σύνολο $A \subset T$ είναι ανοικτό στο T αν και μόνο αν το $T - A$ είναι κλειστό στο T.

Χαρακτηρισμός σχετικά κλειστών συνόλων με ακολουθίες. Το σύνολο $B \subset T$ είναι κλειστό στο T αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in B$ η οποία συγκλίνει σε σημείο του T έπεται ότι $\lim x_k \in B$.

2.7. Ασκήσεις. 1. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις ακολουθίες: $\left(\frac{k-1}{2k+1},\frac{2k^2-1}{\sqrt{3k^4+k^3+1}}\right)$, $\left((-1)^k\frac{k-1}{2k+1},\frac{k^2-1}{k^3+1}\right)$, $\left(\frac{1}{k},k\right)$, $\left(\frac{1}{k},(-1)^k k\right)$, $\left(\frac{k-1}{k+1},\frac{2k^2-k-1}{k^2+k+1},\frac{3k^3-k^2-k-1}{k^3+k^2+k+1},\ldots,\frac{nk^n-k^{n-1}-k^{n-2}-\cdots-1}{k^n+k^{n-1}+\cdots+k+1}\right)$.

2. Αν λ_k είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και η ακολουθία $(\lambda_k,k\lambda_k)$ είναι συγκλίνουσα στον $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\lambda_k\to 0$.

3. Αν η ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο p του $\mathbb{R}^n$ και η ακολουθία $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο q του $\mathbb{R}^n$, και αν $p\neq q$ δείξτε ότι η ακολουθία $a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\ldots$ δεν είναι συγκλίνουσα.

4. Υπολογίστε το όριο κάθε μιας από τις επόμενες ακολουθίες – του $k\to\infty$ – στις περιπτώσεις που αυτό υπάρχει:

$\left(\frac{\cos k}{k},\frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\sin k}}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[k]{k}}{k},\sqrt[k]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}\right)$, $\left(\frac{1}{k},\sqrt[k]{k!}\right)$, $\left(\frac{k\cos k}{2^k},\frac{k^{10^{100}}\sin k}{2^{k/10^{100}}}\right)$, $\left(\frac{1}{k},(-1)^k\right)$,

$\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^k,\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}},\frac{\sqrt{k}\sin(1/k)}{\sin(1/\sqrt{k})}\right)$, $\left(\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt{k}},\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt[k]{k}},\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^k\right)$, $\left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k},\sqrt[k^2]{k!},\sqrt[k^3]{k!},\ldots,\sqrt[k^n]{k!}\right)$,

$\left(\sqrt[k]{1^{100}+2^{100}+\cdots+k^{100}},\frac{k}{k^2+1^2}+\frac{k}{k^2+2^2}+\cdots+\frac{k}{k^2+k^2},1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right)$,

$\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k},\sqrt[k]{1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}},\left(1+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)^k,\sqrt[k]{\log k}\right)$.

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι: 1ον $\sqrt[k]{x_k}\to 1$, αν $\varepsilon\le x_k\le M$ για θετικές σταθερές ε και M. Γενικότερα $\sqrt[k]{x_k}\to 1$, αν $\varepsilon k^{\alpha}\le x_k\le M k^{\beta}$ 2ον Αν $x_k\to x$ τότε $\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)\to x$. 3ον $\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\to e^x$. Γενικότερα $\left(1+\frac{x_k}{k}\right)^k\to e^x$, αν $x_k\to x$. 4ον $\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}f(m/k)\to\int_0^1 f(x)dx$, για κατάλληλες συναρτήσεις f. 5ον $k!\approx\sqrt{2\pi k}\,\frac{k^k}{e^k}$ (του $k\to\infty$) δηλαδή $\frac{k!}{\sqrt{2\pi k}}\frac{e^k}{k^k}\to 1$. 6ον $1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\to\log 2$. 7ον $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\to\frac{\pi^2}{6}$.

5. Αν $P(x_1,\ldots,x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο δείξτε ότι το σύνολο $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \mu\varepsilon\ P(x_1,\ldots,x_n)=0\}$ είναι κλειστό και το σύνολο $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \mu\varepsilon\ P(x_1,\ldots,x_n)>0\}$ είναι ανοικτό.

6. Αν $p\in A'$ δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, το σύνολο $B(p,\varepsilon)\cap A$ είναι άπειρο.

7. Δείξτε ότι το σύνολο $\overline{A}$ είναι κλειστό, μάλιστα δε είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το A, δηλαδή, $\overline{A}=\bigcap\{F\subset\mathbb{R}^n : F\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \kappa\alpha\iota\ F\supset A\}$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο A' είναι πάντοτε κλειστό.

8. Αν $A\subset A'$, έπεται ότι το σύνολο A είναι ανοικτό;

9. Δείξτε ότι $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. Είναι σωστό ότι $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

10. Υπάρχει ακολουθία a_k στον χώρο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο x του $\mathbb{R}^n$ να υπάρχει υποακολουθία της a_k η οποία να συγκλίνει στο x;

11. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι αριθμήσιμη ένωση μπαλών, δηλαδή αν Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο τότε υπάρχει μια ακολουθία από μπάλες $B_1,B_2,B_3,\ldots$ ούτως ώστε $\Omega=B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots$.

12. Σωστό ή λάθος;Ένα υποσύνολο T του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό (στον $\mathbb{R}^n$) αν και μόνο αν ισχύει το εξής: Για κάθε ακολουθία $B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots$ μη κενών και φραγμένων υποσυνόλων του T, κλειστών ως προς το T, έπεται ότι $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}B_k\neq\varnothing$.

3. Όρια και συνεχείς συναρτήσεις

3.1. Όρια. 1. Ορισμός. Ας θεωρήσουμε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και a ένα σημείο συσσώρευσης του A. Δοθείσης συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$, θα λέγουμε ότι το **όριο** της ποσότητας $f(x)$, καθώς το x **τείνει** στο a, υπάρχει και είναι ο αριθμός ℓ, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε

$$\text{για } x \in A \text{ με } 0 < |x-a| < \delta(\varepsilon) \text{ να ισχύει } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Θα γράφουμε δε τότε $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

2. Άλγεβρα των ορίων. Αν $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι δυο συναρτήσεις και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to a} f(x)$ και $\lim_{x \to a} g(x)$, τότε υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ και $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ και μάλιστα

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \text{ και } \lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)].$$

Αν δε επιπλέον $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]$ και βέβαια

$$\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]/[\lim_{x\to a} g(x)].$$

3. Χαρακτηρισμός της σύγκλισης συναρτήσεων με ακολουθίες. Το $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in A - \{a\}$ με $x_k \to a$, έπεται ότι $f(x_k) \to \ell$.

3.2. Παραδείγματα. 1. Έστω $P(x_1,\dots,x_n)$ και $Q(x_1,\dots,x_n)$ πολυώνυμα των $x_1,\dots,x_n$ και $a = (a_1,\dots,a_n)$ ένα σημείο όπου $Q(a) \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Όταν όμως $Q(a) = 0$ τότε τα πράγματα μπορεί να είναι εντελώς διαφορετικά και εδώ συναντούμε ενδιαφέρουσες και ποικίλες μορφές συμπεριφοράς συναρτήσεων.

2. Τα όρια $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ δεν υπάρχουν.

3. Τα όρια $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}\sin(x^4+y^4)$ δεν υπάρχουν.

3.3. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα όρια: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x^2+y^2-1}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(e^{xy}\pi)}{\sin[(x^2+y^2-1)\pi/2]}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^y$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{(x^2+y^2)^2}$,

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{1-\cos(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)}$, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{1-\cos(xy)}{\sin^2(x-y)}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^4+y^4}-x^4-y^4-1}{\sin^4(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\exp(1/|x|)}y}{x-y}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x-y}$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|x|^\lambda+|y|^\lambda+|z|^\lambda}{(x^2+y^2+z^2)^{\lambda/2}}$.

2. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{x_j}{|x|} = 0$, τί συμπεραίνετε για τα λ_j; Αν απλώς το ανωτέρω όριο υπάρχει, τί συμπέρασμα βγάζετε; Το ίδιο ερώτημα όταν $\lim_{\substack{x\to 0\\ x_j>0}} \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{x_j}{|x|} = 0$.

3. Αν $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2}{x^2+y^2} = 0$, τί συμπέρασμα βγάζετε; Ομοίως αν $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$. Διατυπώστε και απαντήστε ανάλογα ερωτήματα για τρεις μεταβλητές x, y, z.

3.4. Όρια διανυσματικών συναρτήσεων. Δοθείσης συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}^m$, ορισμένης σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, και σημείου $a \in A'$, το όριο της διανυσματικής ποσότητας $f(x)$, του $x \to a$, υπάρχει και είναι το σημείο $\ell \in \mathbb{R}^m$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε για $x \in A$ με $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Θα γράφουμε δε τότε $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Είναι δε αυτό ισοδύναμο με το ότι $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$ για $i = 1,\dots,m$, όπου $(f_1,\dots,f_m) = f$ και $(\ell_1,\dots,\ell_m) = \ell$.

3.5. Όρια στο άπειρο και άπειρα όρια. 1. Όρια της μορφής $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα μη φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Θα λέγουμε ότι το όριο $\lim_{x \to \infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ο αριθμός ℓ, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $R(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x| > R(\varepsilon)$. Θα γράφουμε δε ότι $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ ή ακόμη $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \ell$. Π.χ., τα όρια $\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x}{y}$ και $\lim_{(x,y) \to \infty} \left[x^2 y^3 \sin\left(\frac{1}{x^3 y^2} \right) \right]$ δεν υπάρχουν. **2. Όρια της μορφής** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. Όταν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ορισμένη σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και $a \in A'$, θα λέγουμε ότι $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta(M) > 0$ ούτως ώστε για $x \in A$ με $0 < |x - a| < \delta(M)$ να έχουμε ότι $|f(x)| > M$. Π.χ., $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^4} = \infty$. **Όρια της μορφής** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Όταν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ορισμένη πάνω σε ένα μη φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, θα λέγουμε ότι $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $R(M) > 0$ ούτως ώστε για $x \in A$ με $|x| > R(M)$ να έχουμε ότι $|f(x)| > M$. Π.χ., $\lim_{(x,y) \to \infty} \left(\frac{x^2}{y} + y \right) = \infty$.

3.6. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα όρια

$$\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x^2 y^2 + x^2 y + x y^2 + 1}{5x^2 y^2 - 4x^2 y + 3x y^2 - 1},\ \lim_{(x,y) \to \infty} \left[x^3 y^2 \sin\left(\frac{1}{x^3 y^2} \right) \right],\ \lim_{(x,y) \to \infty} \left[x^3 y \sin\left(\frac{1}{x^3 y^2} \right) \right],\ \lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^4}.$$

2. Δείξτε ότι $\lim_{x \to \infty} \left[x_1 x_2 \dots x_n e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} \right] = 0$. Γενικότερα δείξτε ότι

$$\lim_{x \to \infty} P(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} = 0,$$

για κάθε πολυώνυμο $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Και ακόμα γενικότερα, δείξτε ότι

$$\lim_{x \to \infty} P(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-(|x_1|^{\lambda_1} + |x_2|^{\lambda_2} + \cdots + |x_n|^{\lambda_n})} = 0,$$

για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς λ_j, όσο μικροί και αν είναι.

3.7. Διαδοχικά όρια συναρτήσεων. Πρόταση. Έστω $f(x,y)$ μια συνάρτηση δυο μεταβλητών x και y, ορισμένη για $(x,y) \in \Omega - \{(a,b)\}$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $(a,b) \in \Omega$. Αν

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \ell \quad \text{και το μερικό όριο } \lim_{x \to a} f(x,y) \text{ υπάρχει } (\forall y \neq b)$$

τότε υπάρχει και το διαδοχικό όριο $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y))$ και μάλιστα $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y)) = \ell$.

Επίσης αν $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \ell$ και υπάρχουν τα μερικά όρια $\lim_{x \to a} f(x,y)$ και $\lim_{y \to b} f(x,y)$ τότε υπάρχουν και τα διαδοχικά όρια $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y))$ και $\lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y))$, και μάλιστα είναι ίσα, δηλαδή

$$\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y)) = \lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y)) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y).$$

Ιδιαιτέρως αν $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y)) \neq \lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y))$ τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$.

Παραδείγματα. 1. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & \alpha\nu \quad y\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad y=0. \end{cases}$$

Τότε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχει και είναι 0. Ακόμη τα μερικά όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ όρια υπάρχουν, για κάθε y, και είναι όλα 0. Αλλά τα μερικά όρια $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ δεν υπάρχουν για κανένα $x\neq 0$.

2. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{ορισμένη για } (x,y)\neq(0,0).$$

Στη περίπτωση αυτή τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα: $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=0$.

Αλλά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

3. Για $x+y\neq 0$, ας ορίσουμε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

(στα σημεία όπου $x+y=0$ μπορούμε να δώσουμε οποιεσδήποτε τιμές). Τότε

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=-1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=1.$$

Και το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

3.8. «Ισοδύναμες αποστάσεις». Η ποσότητα $|x-y|$ είναι **«συγκρίσιμη»** με άλλες ποσότητες όπως έπεται από τις ακόλουθες ανισότητες.

1. Για κάθε $a\in\mathbb{R}^n$, $\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|\le|a|\le\sqrt{n}\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|$.

2. Για κάθε $a\in\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|\le|a|\le\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|$.

3. Για κάθε θετικό ακέραιο m, $\frac{1}{\sqrt{n}}|a|\le\sqrt[m]{|a_1|^m+\cdots+|a_n|^m}\le\sqrt[m]{n}|a|$.

4. Για κάθε $\lambda>1$, $\frac{1}{n^\lambda}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|\right)^\lambda\le\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^\lambda\le n\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|\right)^\lambda$.

5. Για κάθε $\lambda>1$, $\frac{1}{n^{1/\lambda}\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^\lambda\right)^{1/\lambda}\le|a|\le n\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^\lambda\right)^{1/\lambda}$.

Εφαρμογή. Το $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ούτως ώστε για $x\in A-\{a\}$ με $|x_1-a_1|<\delta,\ |x_2-a_2|<\delta,\ \ldots,|x_n-a_n|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

3.9. Συνεχείς συναρτήσεις. 1. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, ορισμένη σε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, και a ένα σημείο του A. Η συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο σημείο** a, αν για κάθε ακολουθία σημείων $x_k\in A$ με $x_k\to a$ έπεται ότι $f(x_k)\to f(a)$. Ισοδύναμα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο a αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ ούτως ώστε για $x\in A$ με $|x-a|<\delta(\varepsilon)$ να ισχύει ότι $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Επίσης στην περίπτωση που το σημείο a είναι σημείο συσσώρευσης του A, η συνέχεια της συνάρτησης f στο σημείο a είναι ισοδύναμη με το ότι $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Στη δε περίπτωση που το σημείο a είναι μεμονωμένο σημείο του A, η συνέχεια της συνάρτησης f είναι αυτόματη, αρκεί να σκεφθούμε ότι στην περίπτωση αυτή η μόνη ακολουθία σημείων του A που συγκλίνει στο a είναι «ουσιαστικά» η σταθερή.

2. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

3. Ανάλογα ορίζεται και η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m):A\to\mathbb{R}^m$. Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο a, αν για κάθε ακολουθία σημείων $x_k\in A$ με $x_k\to a$ έπεται ότι $f(x_k)\to f(a)$, μόνο που τώρα η σύγκλιση «$f(x_k)\to f(a)$» γίνεται στον χώρο $\mathbb{R}^m$. Είναι δε αυτό ισοδύναμο με την συνέχεια των συναρτήσεων $f_1,f_2,\ldots,f_m$ στο εν λόγω σημείο. Και βέβαια η συνέχεια (σε κάθε σημείο) μιας συνάρτησης $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m):A\to\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμη με την συνέχεια των συναρτήσεων $f_1,f_2,\ldots,f_m:A\to\mathbb{R}$.

4. Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων. Αν οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $a\in A$, το αυτό συμβαίνει και με τις συναρτήσεις $f+g$ και fg. Αν επιπλέον $g(a)\neq 0$ τότε και η συνάρτηση f/g είναι συνεχής στο σημείο a. (Βέβαια η συνάρτηση f/g ορίζεται στο σύνολο $A-\{x\in A:\ g(x)=0\}$, και αυτή η συνάρτηση λέγουμε ότι είναι συνεχής στο a.) Στην περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων ισχύουν οι ιδιότητες: Αν οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}^m$ και $g:A\to\mathbb{R}^m$ είναι συνεχείς στο σημείο $a\in A$, το αυτό συμβαίνει και με τις συναρτήσεις $f+g$ και $f\cdot g$. Και αν $\lambda:A\to\mathbb{R}$ είναι μια αριθμητική συνάρτηση, επίσης συνεχής στο σημείο a, τότε και η συνάρτηση λf είναι συνεχής στο σημείο a. Γενικότερη των ανωτέρω ιδιοτήτων είναι η εξής: Έστω $f:A\to\mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση και $g:f(A)\to\mathbb{R}^s$ επίσης μια συνάρτηση (ορισμένη πάνω στο σύνολο τιμών της f). Τότε ορίζεται η σύνθεση $g\circ f:A\to\mathbb{R}^s$, και αν η f είναι συνεχής στο σημείο a και η g είναι συνεχής στο σημείο $f(a)$ τότε και η σύνθεση είναι συνεχής στο σημείο a. Ιδιαιτέρως, η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Παραδείγματα. 1. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \alpha\nu\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \alpha\nu\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι συνεχής.

2. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \alpha\nu\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ a & \alpha\nu\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι ασυνεχής για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

3.10. Ασκήσεις. 1. Είναι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} & \alpha\nu\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ a & \alpha\nu\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

συνεχής για κάποιο a;

2. Εξετάστε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin(x-y)}$, ορισμένη για $x\neq y+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$, επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση σε σημεία με $x=y+k\pi$.

3. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $F\subset\mathbb{R}^m$, κλειστό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο A.

4. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $U\subset\mathbb{R}^m$, ανοικτό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο A.

5. Θεωρήστε δυο συνεχείς συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}^m$, και ορίστε το σύνολο

$$X=\{x\in A:\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ \ \textit{ούτως ώστε}\ f(x)=\lambda g(x)\}.$$

Είναι το σύνολο X κλειστό στο A; Το ίδιο ερώτημα με το σύνολο

$$Y=\{x\in A:\ \exists\lambda\in[0,1]\ \ \textit{ούτως ώστε}\ f(x)=\lambda g(x)\}.$$

4. Συμπαγή και συνεκτικά σύνολα και τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων

4.1. Συμπαγή σύνολα. Ορισμός. Ένα υποσύνολο E του χώρου $\mathbb{R}^n$ λέγεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό (εννοείται στον $\mathbb{R}^n$) και φραγμένο.

Θεώρημα Α. *Ένα υποσύνολο E του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία σημείων του E έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, η οποία να συγκλίνει μέσα στο E.*

Θεώρημα Β. *Ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε άπειρο υποσύνολό του έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης που να ανήκει μέσα στο σύνολο E.*

Θεώρημα Γ. *Έστω ότι $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f: E \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε το σύνολο $f(E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή, συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές.*

Θεώρημα Δ. *Έστω ότι $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f: E \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχουν σημεία $q, p \in E$ ούτως ώστε $f(q) \le f(x) \le f(p)$ για κάθε $x \in E$. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ έχει μεγίστη και ελαχίστη τιμή. Και ιδιαιτέρως, αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$, τότε $\inf\{f(x):\ x \in E\} > 0$.*

Πόρισμα. *Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$. Τότε υπάρχει σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ ούτως ώστε $f(p) = \max\{f(x):\ \text{για } x \in \mathbb{R}^n\}$.*

4.2. Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}^m$ ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}^m$ λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε για $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Παραδείγματα. 1. Κάθε γραμμική συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας με ακολουθίες – Πρόταση. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δυο ακολουθίες x_k και y_k από το σύνολο A με $|x_k - y_k| \to 0$ έπεται ότι $|f(x_k) - f(y_k)| \to 0$.

4.3. Θεώρημα. *Έστω ότι $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f: E \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

4.4. Σχόλια. 1. Θεώρημα. *(Heine-Borel) Ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του E περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Ακριβέστερα αυτό σημαίνει ότι για κάθε οικογένεια $\{U_j,\ j \in J\}$ ανοικτών συνόλων για τα οποία $E \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ έπεται ότι υπάρχουν $j_1, \dots, j_N \in J$ ούτως ώστε $E \subset U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_N}$.*

2. Λήμμα του Lebesgue. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο και $\mathcal{U}$ ένα ανοικτό κάλυμμά του. Τότε υπάρχει ένας αριθμός $\lambda > 0$ ώστε για κάθε υποσύνολο $A \subset E$ με $diam(A) < \lambda$, να υπάρχει κάποιο μέλος $U \in \mathcal{U}$ με $A \subset U$.*

4.5. Ορισμοί. 1. Μια **καμπύλη** στον χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ (όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$). Συνήθως μια καμπύλη $\gamma: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ την σκεπτόμαστε σαν το σύνολο των σημείων

$$[\gamma] = \{\gamma(t):\ t \in [\alpha, \beta]\} \quad \text{στον χώρο } \mathbb{R}^n.$$

2. Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n$. Το **ευθύγραμμο τμήμα** $[a, b]$, από το σημείο a στο σημείο b, ορίζεται ως εξής:

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb:\ \text{με } 0 \le t \le 1\}.$$

4.6. Κατά τόξα συνεκτικά σύνολα. Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται ότι είναι **κατά τόξα συνεκτικό** αν κάθε δυο σημεία αυτού μπορούν να συνδεθούν με μια καμπύλη που ευρίσκεται μέσα στο S, αν δηλαδή για κάθε $p, q \in S$ υπάρχει καμπύλη $\gamma: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ με $\gamma(\alpha) = p$, $\gamma(\beta) = q$ και $[\gamma] \subset S$.

Παραδείγματα. 1. Κάθε κυρτό σύνολο είναι κατά τόξα συνεκτικό.

2. Έστω ότι $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα κατά τόξα συνεκτικό σύνολο και $f: S \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε το σύνολο $f(S)$ είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

3. Αν τα σύνολα $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι κατά τόξα συνεκτικά και $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ τότε το σύνολο $S_1 \cup S_2$ είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό. Γενικότερα αν τα σύνολα S_j μιας οικογένειας $\{S_j : j \in J\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικά και $\bigcap_{j\in J} S_j \neq \varnothing$ τότε και το σύνολο $\bigcup_{j\in J} S_j$ είναι κατά τόξα συνεκτικό.

Παρατήρηση. Είναι τετριμμένο ότι κάθε διάστημα στην ευθεία $\mathbb{R}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό. Το αντίστροφο είναι επίσης σωστό — αυτό έπεται από το *Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής*.

Θεώρημα. Συνεχής εικόνα κατά τόξα συνεκτικού συνόλου είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό. Ιδιαιτέρως αν το σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι κατά τόξα συνεκτικό και $f : S \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε δυο σημεία $p, q \in S$ και για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(p)$ και $f(q)$ υπάρχει σημείο $\xi \in S$ με $f(\xi) = \lambda$.

4.7. Θεώρημα. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές και κατά τόξα συνεκτικό σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $m = \inf\{f(x) : x \in E\}$ και $M = \sup\{f(x) : x \in E\}$ τότε $f(E) = [m, M]$. Δηλαδή, για κάθε λ με $m \le \lambda \le M$ υπάρχει σημείο $\xi \in E$ ούτως ώστε $f(\xi) = \lambda$.*

4.8. Ασκήσεις. 1. Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ και $K \subset \mathbb{R}^m$ δυο συμπαγή σύνολα. Δείξτε ότι και το σύνολο $E \times K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ είναι επίσης συμπαγές σύνολο. Γενικότερα δείξτε ότι αν τα σύνολα $K_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, είναι συμπαγή τότε και το σύνολο $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_N$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n_1 + n_2 + \cdots + n_N}$.

2. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $p \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $a \in F$ έτσι ώστε $|p - a| = dist(p, F) = \inf\{|p - x| : x \in F\}$.

3. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $a \in F$ και $b \in K$ τέτοια ώστε $|a - b| = dist(F, K) = \inf\{|x - y| : x \in F, y \in K\}$. Αν το σύνολο K υποτεθεί μόνο κλειστό, ισχύει το συμπέρασμα;

4. Αν $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά και $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, έπεται ότι $dist(F_1, F_2) > 0$;

5. Σωστό ή λάθος; Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο για κάθε κλειστό σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ με $K \cap F \neq \varnothing$, υπάρχουν $p, q \in K \cap F$ με $|p - q| = diam(K \cap F) = \sup\{|x - y| : x, y \in K \cap F\}$.

6. Είναι το σύνολο $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \dfrac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \right\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

7. Είναι το σύνολο $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \dfrac{x_n^3}{a_n^3} = 1 \right\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

8. Είναι το σύνολο $\mathbb{R}^4 - \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \text{ } \textit{και} \text{ } x_4 = 0\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

9. Αν $n \ge 2$, είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n - \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1 \text{ } \textit{και} \text{ } x_n = 0\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

4.9. Σχόλια. Συνεκτικά σύνολα. Ένα υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται **συνεκτικό** αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα A και B (εννοείται ανοικτά στον $\mathbb{R}^n$), με τις ιδιότητες: $S \subset A \cup B$, $A \cap S \neq \varnothing$, $B \cap S \neq \varnothing$ και $A \cap B = \varnothing$.

Παρατηρήσεις. 1. Κάθε κατά τα τόξα συνεκτικό σύνολο είναι συνεκτικό. Το αντίστροφο αυτού δεν ισχύει.

2. Ένα ανοικτό σύνολο είναι κατά τόξα συνεκτικό αν και μόνο αν είναι συνεκτικό.

Θεώρημα Α. *Αν $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικά σύνολα και $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ τότε και η ένωση $S_1 \cup S_2$ είναι επίσης συνεκτικό σύνολο. Γενικότερα, αν $\{S_j : j \in J\}$ είναι μια οικογένεια από συνεκτικά σύνολα και $\bigcap_{j\in J} S_j \neq \varnothing$, τότε και η ένωση $\bigcup_{j\in J} S_j$ είναι συνεκτικό σύνολο.*

Θεώρημα Β. *Κάθε διάστημα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι συνεκτικό σύνολο. Αντίστροφα αν $S \subset \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό σύνολο τότε το S είναι ένα διάστημα.*

Θεώρημα Γ. *Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν υποσύνολά του, X και Y, ανοικτά στο S, με τις εξής ιδιότητες: $S = X \cup Y$, $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$ και $X \cap Y = \varnothing$.* **Πόρισμα.** *Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ ένα συνεκτικό σύνολο και $\Omega \subset S$. Αν το Ω είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στο S, τότε ή $\Omega = \varnothing$ ή $\Omega = S$.*

Θεώρημα Δ. *Συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου είναι επίσης συνεκτικό.*

10. Πεπλεγμένα οριζόμενες συναρτήσεις

10.1. Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης. *Ας θεωρήσουμε μια* C^1 – *απεικόνιση* $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ *ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *και* $a \in \Omega$ *ένα σημείο όπου υποθέτουμε ότι* $\det[(Jf)(a)] \neq 0$. *Τότε η απεικόνιση* f *είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο σημείο* a, *δηλαδή υπάρχουν ανοικτά σύνολα* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *με* $a \in U$ *και* $b = f(a) \in V$, *ούτως ώστε η* f *να είναι* $1-1$ *πάνω στο* U, *να απεικονίζει το* U *επί του* V *και η αντίστροφη απεικόνιση* $f^{-1}: V \to U$ *να είναι επίσης κλάσεως* C^1. *Και* $(Jf^{-1})(f(x)) = [Jf(x)]^{-1}$ *για* $x \in V$.

Το συμπέρασμα με άλλα λόγια. *Για σημεία* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *κοντά στο* $b = f(a)$, *το σύστημα των εξισώσεων*

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1,\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = y_2,\ ...,\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = y_n,$$

έχει ακριβώς μια λύση $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *κοντά στο σημείο* a, *και η εξάρτηση των λύσεων*

$$x_1 = x_1(y_1, y_2, ..., y_n),\ x_2 = x_2(y_1, y_2, ..., y_n),\ ...,\ x_n = x_n(y_1, y_2, ..., y_n),$$

από τα $y_1, y_2, ..., y_n$ *είναι* C^1. *(Εξυπακούεται ότι* $f_1, f_2, ..., f_n$ *είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της απεικόνισης* f.*)*

Παρατήρηση. Για $n = 1$ η υπόθεση στο *Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης* είναι « $f'(p) \neq 0$ ». Για να δείτε πόσο ουσιώδης είναι αυτή η υπόθεση παρατηρήστε ότι αν δεν ικανοποιείται τότε ενδέχεται να συμβαίνουν δυο τινά:

1. Η συνάρτηση f να μην είναι $1-1$ σε καμιά περιοχή του σημείου p. Π.χ., αν $f(x) = x^2$ τότε $f'(0) = 0$ και η συνάρτηση $x \to x^2$ δεν είναι $1-1$ σε κανένα διάστημα που περιέχει το 0.

2. Η συνάρτηση ενδέχεται να είναι $1-1$ αλλά η αντίστροφή της να μην είναι διαφορίσιμη. Π.χ., αν $f(x) = x^3$ τότε η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ αλλά η αντίστροφή της, δηλαδή η συνάρτηση $y \to \sqrt[3]{y}$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $y = 0$. Βέβαια αυτό συμβαίνει διότι $f'(0) = 0$.

10.2. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε την τοπική αντιστροφή της απεικόνισης $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ στα διάφορα σημεία $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης γράψτε το ανάπτυγμα Taylor – μέχρι βαθμού 2 – για τις συντεταγμένες της τοπικής αντίστροφης της f που αντιστοιχεί στο σημείο $(\alpha, \beta) = (1,2)$.

2. Μελετήστε την τοπική αντιστροφή της απεικόνισης $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ στα διάφορα σημεία $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης γράψτε το ανάπτυγμα Taylor – μέχρι βαθμού 2 – για τις συντεταγμένες της τοπικής αντίστροφης της f που αντιστοιχεί σημείο $(\alpha, \beta) = (1,0)$.

3. Θεωρήστε έναν μετασχηματισμό $(u, v) \to (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$, από το $uv-$ επίπεδο στο $xy-$ επίπεδο. Αν $f = f(x, y)$ είναι μια συνάρτηση των x, y, τότε αυτή μέσω του εν λόγω μετασχηματισμού μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση των u, v, δηλαδή εννοούμε την συνάρτηση $f = f(x(u, v), y(u, v))$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ομοίως, αν $(x, y) \to (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Γράψτε αναλυτικά την εξίσωση των πινάκων:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^{-1}.$$

Επίσης δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2.$$

Γράψτε ανάλογους τύπους και για τις άλλες παραγώγους τάξης 2.

4. Γράψτε τύπους ανάλογους – της προηγουμένης άσκησης – για μετασχηματισμούς της μορφής $(u,v,w) \to (x,y,z)$, κ.ο.κ.

5. Δείξτε ότι η απεικόνιση $(u,v) \to (x,y) = (u^2+v^5+uv, u^2v+u+v^2)$ αντιστρέφεται τοπικά στο σημείο $(u,v)=(0,1)$ και ορίζει C^∞ συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, για (x,y) κοντά στο σημείο $(1,1)$. Επίσης υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$.

6. Σωστό ή λάθος; Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, ορισμένες για (x,y) κοντά στο σημείο $(1,1)$, ώστε $u(1,1)=0$, $v(1,1)=1$, και

$$u^2(x,y)+v^6(x,y)+3u(x,y)v(x,y)=x\,,\ u^2(x,y)v(x,y)+u(x,y)+v^2(x,y)=y\,.$$

7. Θεωρήστε την απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)\to(u,v)=(x^3-3xy^2, 3x^2y-y^3)$, και εξετάστε κοντά σε ποιά σημεία αυτή αντιστρέφεται. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $x=x(u,v)$ και $y=y(u,v)$, τάξης 1, για συγκεκριμένη τοπική αντίστροφο.

8. Εξετάστε αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f=f(x,y)$ και $g=g(x,y)$, ορισμένες για (x,y) κοντά στο $(0,0)$, ώστε $fg^2+\sin g = x$ και $e^{fg}-\sin f - 1 = y$.

9. Σωστό ή λάθος; Αν η απεικόνιση $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ είναι C^k ($k\ge 2$) σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και, τοπικά στο σημείο $a\in\Omega$, η f αντιστρέφεται με μια C^1 απεικόνιση τότε αυτή η τοπική αντίστροφη είναι C^k.

10. Δείξτε ότι αν η απεικόνιση $(u,v)\to(x,y)=(x(u,v),y(u,v))$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ και οι συναρτήσεις $x=x(u,v)$ και $y=y(u,v)$ ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v} \text{ και } \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$$

τότε και οι συναρτήσεις $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$, που ορίζουν την αντίστροφη απεικόνιση, ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

10.3. Αμφιδιαφορίσεις. Μια C^1 – απεικόνιση $f:D\to G$, όπου D,G είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, λέγεται **αμφιδιαφόριση** αν είναι $1-1$ *και επί*, με C^1 – αντίστροφη — ακριβέστερα λέγεται ότι είναι C^1 – αμφιδιαφόριση. Αν δε επιπλέον, η f, οπότε και η f^{-1}, είναι κλάσεως C^k, τότε λέγεται C^k – αμφιδιαφόριση. Τα δε ανοικτά σύνολα D και G για τα οποία υπάρχει $f:D\to G$, C^k – αμφιδιαφόριση, λέγεται ότι είναι C^k – **αμφιδιαφορικά**.

Παραδείγματα. 1. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{B}^n=\{y\in\mathbb{R}^n : |y|<1\}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$y=f(x)=\frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}}x=\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}},\dots,\frac{x_n}{\sqrt{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right)$$

για $x\in\mathbb{R}^n$, είναι C^∞ – αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$x=g(y)=\frac{1}{(1-|y|^2)^{1/2}}y=\left(\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}},\dots,\frac{y_n}{\sqrt{1-y_1^2-\cdots-y_n^2}}\right).$$

2. Ας θεωρήσουμε μια C^k – απεικόνιση $f:D\to\mathbb{R}^n$, όπου $k\ge 1$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $D\subset\mathbb{R}^n$ με $0\in D$ και ας υποθέσουμε ότι $\det[(Jf)(0)]\ne 0$. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ούτως ώστε η απεικόνιση F που ορίζεται από τον τύπο $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F(x)=f\left(\varepsilon(1+|x|^2)^{-1/2}\cdot x\right)$ για $x\in\mathbb{R}^n$, να είναι καλά ορισμένη και C^k – αμφιδιαφόριση από το $\mathbb{R}^n$ επί του $F(\mathbb{R}^n)$.

Άσκηση. Δείξτε ότι μια C^1 και επί απεικόνιση $f:\Omega\to\Theta$, μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, είναι C^1 αμφιδιαφόριση αν και μόνο αν η f είναι $1-1$ και $\det Jf(a)\ne 0$ για κάθε $a\in\Omega$.

10.4. Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f:\Omega \to \mathbb{R}^s$ μια C^k – απεικόνιση όπου $s<n$ και $1 \le k \le \infty$. Έστω ακόμη $a \in D$ ένα σημείο με $f(a)=0$ και*

$$\det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_s)}{\partial(x_{m+1},\dots,x_n)}(a)\right) \neq 0,$$

όπου $m=n-s$, $f=(f_1,\dots,f_s)$ (δηλαδή f_i είναι οι συνιστώσες της απεικόνισης f) και $x=(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$ είναι η μεταβλητή στο Ω. Τότε υπάρχουν C^k – συναρτήσεις $g_1,\dots,g_s$ ορισμένες για $(x_1,\dots,x_m)$ κοντά στο σημείο $a'=(a_1,\dots,a_m)$ του $\mathbb{R}^m$ ούτως ώστε το σύστημα των εξισώσεων

$$\{\, f_1(x_1,\dots,x_n)=0, \dots, f_s(x_1,\dots,x_n)=0 \,\},$$

κοντά στο σημείο a, να είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\{\, x_{m+1}=g_1(x_1,\dots,x_m), \dots, x_n=g_s(x_1,\dots,x_m) \,\}.$$

Το συμπέρασμα με άλλα λόγια. *Υπάρχουν ανοικτές περιοχές W του σημείου a στον $\mathbb{R}^n$ και U του σημείου a' στον $\mathbb{R}^m$, καθώς και C^1 – συναρτήσεις $g_1,\dots,g_s:U\to\mathbb{R}$ ούτως ώστε $(x',g(x'))\in W$ για $x'=(x_1,\dots,x_m)\in U$, όπου $g=(g_1,\dots,g_s)$, και $f_1(x',g(x'))=0$, ... , $f_s(x',g(x'))=0$ για $x'\in U$. Αλλά και αντίστροφα, αν $(x',x'')\in W$ και $x'\in U$, και $f_1(x',x'')=0$, ... , $f_s(x',x'')=0$, τότε $x''=g(x')$. (Πρέπει να είναι σαφές ότι $x''=(x_{m+1},\dots,x_n)$.)*

10.5. Ασκήσεις. 1. Δείξτε ότι υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $y=f(x)$, ορισμένη για x κοντά στο 1, ώστε $f(1)=1$ και $x^{f(x)}+[f(x)]^x=2$. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους $f'(1)$ και $f''(1)$.

2. Δείξτε ότι υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $z=f(x,y)$ ορισμένη για (x,y) κοντά στο $(0,0)$, με $f(0,0)=0$ και $e^x+ye^{f(x,y)}+f(x,y)\cos[xyf(x,y)]=1$. Επίσης υπολογίστε τις παραγώγους $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$.

3. Προσεγγίσετε την συνάρτηση $y=y(x)$ που ορίζεται από την εξίσωση $y+e^{xy}=1$ κοντά στο σημείο $(x,y)=(0,0)$.

4. Προσεγγίστε την συνάρτηση $z=z(x,y)$ που ορίζεται από την εξίσωση $e^x+ye^z+z\cos(xyz)-1=0$, κοντά στο σημείο $(x,y,z)=(0,0,0)$.

5. Μελετήστε την δυνατότητα επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων $xy+2yz-3xz=0$ και $xyz+x-y=1$, για δυο από τις μεταβλητές σαν συνάρτηση της τρίτης, κοντά στο σημείο $(x,y,z)=(1,1,1)$.

6. Μελετήστε την δυνατότητα επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων $xy^2+xzu+yv^2=3$ και $u^3yz+2xv-u^2v^2=2$ ως προς u, v και z κοντά στο σημείο $x=y=z=u=v=1$.

7. Τα θεωρήματα αντίστροφης απεικόνισης και πεπλεγμένων συναρτήσεων είναι τρόπον τινά ισοδύναμα. Εξηγήστε τί σημαίνει αυτό και αποδείξτε το. (Μελετήστε στην αρχή κάποιες μερικές περιπτώσεις.

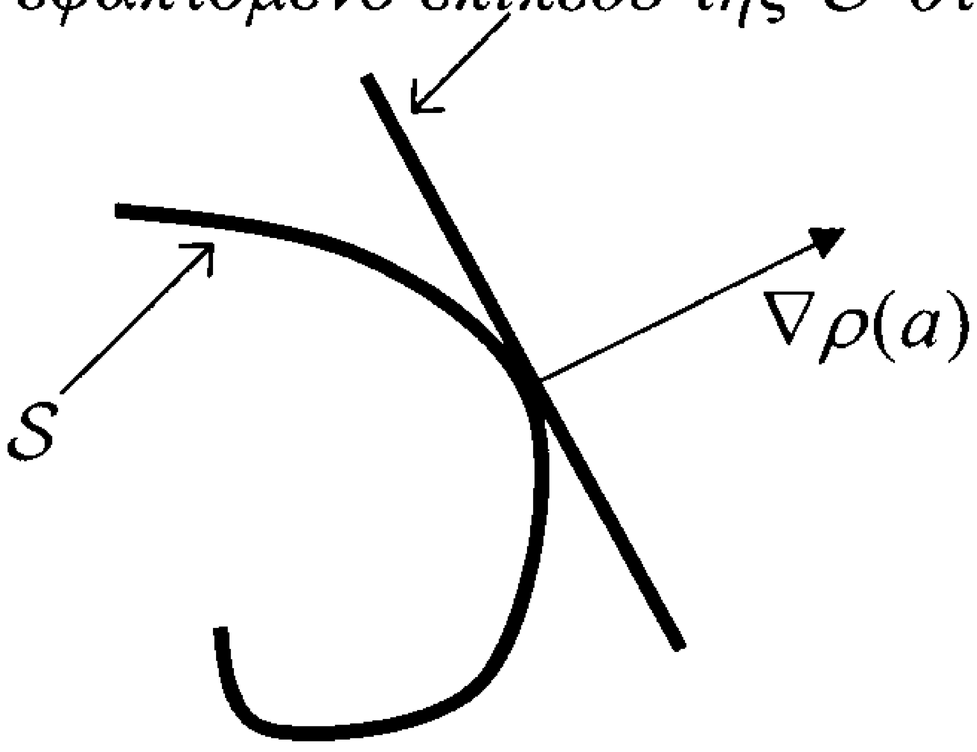
10.6. Σχόλια: Επιφάνειες. 1. Επιφάνειες διάστασης $n-1$ στον $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε μια C^1 συνάρτηση $\rho(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και ας θέσουμε

$$\mathcal{S}=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega:\ \rho(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\}.$$

Αν $\nabla\rho=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1},\frac{\partial\rho}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial\rho}{\partial x_n}\right)\neq 0$ στα σημεία της $\mathcal{S}$ τότε η επιφάνεια $\mathcal{S}$ (διάστασης $n-1$) είναι **ομαλή** υπό την έννοια ότι για κάθε σημείο $a\in\mathcal{S}$ υπάρχει $j=j(a)\in\{1,2,\dots,n\}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial\rho}{\partial x_j}(a)\neq a$ οπότε, από το *Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων*, η εξίσωση $\rho(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, κοντά στο σημείο a, είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση της μορφής $x_j=\varphi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$, όπου φ είναι μια C^1 συνάρτηση σε περιοχή του σημείου $(a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_n)$ ως προς τις μεταβλητές $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$. Έτσι – στην περίπτωση αυτή – η επιφάνεια $\mathcal{S}$, κοντά στο σημείο a, είναι το γράφημα της $x_j=\varphi(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$. Και αφού αυτό συμβαίνει κάθε σημείο $a\in\mathcal{S}$, μας εξασφαλίζει την ομαλότητα της $(n-1)$ – διάστατης επιφάνειας $\mathcal{S}$.

Σε κάθε περίπτωση τώρα το διάνυσμα $\nabla\rho(a)=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(a),\frac{\partial\rho}{\partial x_2}(a),...,\frac{\partial\rho}{\partial x_n}(a)\right)$ είναι **κάθετο** στην επιφάνεια $\mathcal{S}=\{\rho=0\}$ στο σημείο a αυτής. Συνεπώς το επίπεδο (διάστασης $n-1$) με εξίσωση $\nabla\rho(a)\cdot(x-a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}(a)(x_k-a_k)=0$ είναι το **εφαπτόμενο** επίπεδο στην επιφάνεια $\mathcal{S}$ στο σημείο a.

Το εφαπτόμενο επίπεδο της $\mathcal{S}$ στο σημείο a.



2. Επιφάνειες διάστασης $n-2$ στον $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε δυο C^1 συναρτήσεις $\rho(x_1,x_2,...,x_n)$ και $\lambda(x_1,x_2,...,x_n)$ ορισμένες για $(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ας θέσουμε

$$\mathcal{M}=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega:\ \rho(x_1,x_2,...,x_n)=\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=0\}.$$

Αν η τάξη του πίνακα

$$\frac{\partial(\rho,\lambda)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}=\begin{pmatrix}\rho_{x_1} & \rho_{x_2} & \cdots & \rho_{x_n}\\ \lambda_{x_1} & \lambda_{x_2} & \cdots & \lambda_{x_n}\end{pmatrix}$$

είναι 2 σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathcal{M}$ τότε η $\mathcal{M}$ είναι **επιφάνεια διάστασης** $n-2$. Επίσης $\mathcal{M}=\mathcal{S}_\rho\cap\mathcal{S}_\lambda$, δηλαδή $\mathcal{M}$ η τομή των $(n-1)$ – διάστατων επιφανειών $\mathcal{S}_\rho=\{\rho(x_1,x_2,...,x_n)=0\}$ και $\mathcal{S}_\lambda=\{\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=0\}$. Το **εφαπτόμενο** επίπεδο στην επιφάνεια $\mathcal{M}$ στο σημείο a αυτής είναι το σύνολο

$$\{x\in\mathbb{R}^n:\ \nabla\rho(a)\cdot(x-a)=\nabla\lambda(a)\cdot(x-a)=0\}$$

δηλαδή περιγράφεται από τις εξισώσεις: $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}(a)(x_k-a_k)=0$ και $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}(a)(x_k-a_k)=0$.

3. Η γενική περίπτωση: Επιφάνειες διάστασης m στον $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε k το πλήθος C^1 συναρτήσεις

$$\rho_1(x_1,x_2,...,x_n),\ \rho_2(x_1,x_2,...,x_n),\ ...,\ \rho_k(x_1,x_2,...,x_n)$$

ορισμένες για $(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ας θέσουμε

$$\mathcal{M}=\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega:\ \rho_j(x_1,x_2,...,x_n)=0\ \ \textit{για}\ \ j=1,2,...,k\}.$$

Αν η τάξη του πίνακα

$$\frac{\partial(\rho_1,\rho_2,...,\rho_k)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}=\begin{pmatrix}\rho_{1,x_1} & \rho_{1,x_2} & \cdots & \rho_{1,x_n}\\ \rho_{2,x_1} & \rho_{2,x_2} & \cdots & \rho_{2,x_n}\\ \vdots & & & \\ \rho_{k,x_1} & \rho_{k,x_2} & \cdots & \rho_{k,x_n}\end{pmatrix}$$

είναι k σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathcal{M}$ τότε το $\mathcal{M}$ είναι ομαλή **επιφάνεια διάστασης** $m\overset{o\rho}{=}n-k$. Επίσης $\mathcal{M}=\mathcal{S}_{\rho_1}\cap\mathcal{S}_{\rho_2}\cap\cdots\cap\mathcal{S}_{\rho_k}$, δηλαδή $\mathcal{M}$ είναι η τομή των k το πλήθος $(n-1)$ – διάστατων επιφανειών $\mathcal{S}_{\rho_j}=\{\rho_j(x_1,x_2,...,x_n)=0\}$, $j=1,2,...,k$. Το **εφαπτόμενο** επίπεδο (διάστασης m) στην επιφάνεια $\mathcal{M}$ στο σημείο a αυτής είναι το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n:\ \nabla\rho_j(a)\cdot(x-a)=0,\ j=1,2,...,k\}$.

11. Μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων περιορισμένων σε επιφάνειες: Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

11.1. Θεώρημα. *Έστω* $\rho_1,\ldots,\rho_s:\Omega\to\mathbb{R}$, s *το πλήθος* C^1 *– συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοικτό σύνολο* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, *όπου* $s<n$, *και* $\mathcal{M}=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega:\ \rho_1(x_1,\ldots,x_n)=\cdots=\rho_s(x_1,\ldots,x_n)=0\}$. *Ας υποθέσουμε ότι στο σημείο* $a\in\mathcal{M}$, *μια* C^1 *– συνάρτηση* $f:\Omega\to\mathbb{R}$, *περιορισμένη στο* $\mathcal{M}$, *έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο, δηλαδή υπάρχει* $\varepsilon>0$ *ούτως ώστε* $f(x)\le f(a)$ *ή* $f(x)\ge f(a)$ *για κάθε* $x\in\mathcal{M}\cap B(a,\varepsilon)$. *Αν επιπλέον η τάξη του πίνακα Jacobi*

$$\frac{\partial(\rho_1,\ldots,\rho_s)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)=\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le s\\1\le j\le n}}$$

είναι s, *τότε υπάρχουν αριθμοί* $\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\mathbb{R}$ *ούτως ώστε*

$$\vec{\nabla}f(a)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\vec{\nabla}\rho_i(a),\ \textit{δηλαδή}\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(a),\ \textit{για}\ j=1,\ldots,n.$$

Παρατήρηση. Τονίζουμε ότι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με την υπόθεση σχετικά με την τάξη του πίνακα *Jacobi* — χωρίς αυτήν το συμπέρασμα ενδέχεται να μην ισχύει. Π.χ., αν πάρουμε την συνάρτηση $\rho(x,y)=y^2-x^3$, τότε η συνάρτηση $f(x,y)=x$, περιορισμένη στην καμπύλη $\rho(x,y)=0$, έχει ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$ αφού $f(x,y)\ge f(0,0)$ όταν $\rho(x,y)=0$. Εν τούτοις δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(0,0)=\lambda\nabla\rho(0,0)$, αφού $\nabla\rho(0,0)=0$ και $\nabla f(0,0)=(1,0)$.

11.2. Ασκήσεις. 1. Αποδείξτε το ανωτέρω θεώρημα στις περιπτώσεις: $\{n=2,\ s=1\}$, $\{n=3,\ s=1\}$ και $\{n=3,\ s=2\}$.

2. Βρείτε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=x^3+y^2$ πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=1$.

3. Δοθέντων δυο θετικών αριθμών α και β, υπολογίστε την μεγίστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$ για $x+y=1$ με $x\ge 0$ και $y\ge 0$.

4. Πάρτε την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ όπου $a,b>0$, και ας αναζητήστε το σημείο (u,v) πάνω την έλλειψη με $u>0$ και $v>0$ και με την ιδιότητα αν φέρουμε την εφαπτομένη $\mathrm{E}_{(u,v)}$ στην έλλειψη στο σημείο (u,v), αυτή να κόβει από το πρώτο τεταρτημόριο το ελάχιστο δυνατόν εμβαδόν.

5. Βρείτε το σημείο πάνω στην επιφάνεια $z^2-xy=1$ το οποίο είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

6. Δοθέντων αριθμών $a,b,c>0$, υπολογίστε το $\min\{x^3+y^3+z^3:\ ax+by+cz=1\ \textit{και}\ x,y,z>0\}$.

7. Βρείτε τα σημεία στην τομή των επιφανειών $x^2-xy+y^2-z^2-1=0$ και $x^2+y^2-1=0$ τα οποία είναι πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

8. Υπολογίστε την ελαχίστη από τις αποστάσεις των σημείων της έλλειψης $x^2+4y^2=4$ από τα σημεία της ευθείας $x+y=4$.

9. Έστω $a,b,c>0$. Αν $x+y+z=1$ και $x,y,z>0$, πότε γίνεται μέγιστη η ποσότητα $x^a y^b z^c$;

10. Στα σημεία (x,y,z) του ελλειψοειδούς $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, με $x,y,z>0$, φέρουμε τα εφαπτόμενα επίπεδα προς το ελλειψοειδές. Ποιός είναι ο ελάχιστος όγκος που κόβεται με αυτά τα επίπεδα από το πρώτο ογδοημόριο;

11. Έστω $a,b,c>0$. Αν $x,y,z>0$ και $ayz+bzx+cxy=3abc$, δείξτε ότι $xyz\le abc$.

12. Αν $a,b,c>0$, δείξτε ότι $\left(x^5+y^5+z^5\right)\left(a^{5/4}+b^{5/4}+c^{5/4}\right)^4\ge 1$ όταν $ax+by+cz=1$ και $x,y,z>0$.

13. Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση xyz υπό την συνθήκη $x+y+z=a$ και $x,y,z>0$, δείξτε ότι $\sqrt[3]{xyz}\le(x+y+z)/3$. Πότε ισχύει η ισότητα;

14. Υπολογίστε την μεγίστη τιμή της συνάρτησης $\log x + \log y + 3\log z$ στο μέρος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=5r^2$ όπου $x>0$, $y>0$, $z>0$, και εν συνεχεία αποδείξτε την ανισότητα

$$abc^3 \le 27(a+b+c)^5/3125,\text{ για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς } a,b,c.$$

15. Υπολογίστε την μεγίστη και ελαχίστη τιμή των εξής συναρτήσεων:

$$f(x,y)=x^2+xy-y^2 \text{ υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1,\text{ και}$$

$$f(x,y)=x^4+y^6,\text{ υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1.$$

16. Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή των εξής συναρτήσεων:

$f(x,y)=x^2-y^6$, υπό τον περιορισμό $x^4+y^4\le 1$, και $f(x,y)=x^2+y$, υπό τον περιορισμό $x^2+y^4\le 1$.

17. Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y,z)=x^2-y^2+z,\text{ υπό τον περιορισμό } x^2+y^2\le 1 \text{ και } x^2+y^2+z^2\le 1.$$

18. Δείξτε ότι $x^2-y^2+1\ge 0$, όταν $x^2+|y|\le 1$.

19. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου 0 από την επιφάνεια με εξίσωση $x_1^5+x_2^5+\cdots+x_n^5=1$ στον $\mathbb{R}^n$.

20. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου 0 από την επιφάνεια με εξίσωση $(x_n-n)^5=x_1^2+x_2^4+\cdots+x_{n-1}^{2n-2}$ στον $\mathbb{R}^n$.

21. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\frac{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}} \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \quad \text{για κάθε } x_j>0 \text{ και } a_j>0,$$

με την ισότητα να ισχύει ακριβώς όταν $\dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}$.

22. Δείξτε ότι $x_1x_2^2\cdots x_n^n \le \sqrt{\dfrac{1\cdot 2^2\cdots n^n}{N^N}}$ για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$, $x_j>0$. Επίσης δείξτε ότι

αν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$, $x_j>0$, και $x_1x_2^2\cdots x_n^n=\sqrt{\dfrac{1\cdot 2^2\cdots n^n}{N^N}}$ τότε $x_1=\sqrt{\dfrac{1}{N}}$, $x_2=\sqrt{\dfrac{2}{N}}$, …, $x_n=\sqrt{\dfrac{n}{N}}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\log x_1+2\log x_2+\cdots+n\log x_n$.

23. Αποδείξτε ότι αν $a_j>0$, $x_j>0$ και $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1$,

$$\left(x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m\right)\left(a_1^{m/(m-1)}+a_2^{m/(m-1)}+\cdots+a_n^{m/(m-1)}\right)^{m-1}\ge 1,\text{ για } m\ge 2.$$

24. Σωστό ή λάθος; Αν $x_j>0$ και $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2>0$ τότε $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

25. Σωστό ή λάθος; Αν $x_j>0$ και $\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_1\cdots x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_n}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ τότε $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

26. (*Ανισότητα του Hadamard*) Δείξτε ότι για n διανύσματα $a_j=(a_{j1},a_{j2},\ldots,a_{jn})\in\mathbb{R}^n$, $j=1,2,\ldots,n$, έχουμε

$$\left|\det[a_{ji}]_{1\le j,i\le n}\right|\le |a_1||a_2|\cdots|a_n|,$$

με την ισότητα να ισχύει ακριβώς όταν τα διανύσματα αυτά είναι ανά δύο ορθογώνια. *Υπόδειξη*. Αν το σκεφθείτε γεωμετρικά, είναι εύκολο. Αναλυτικά – με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του *Lagrange* – είναι δυσκολότερο.

27. (*Ανισότητα του Hölder*) Δείξτε ότι αν p,q είναι θετικοί αριθμοί και $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, τότε

$$u^{1/p}v^{1/q}\le \frac{1}{p}u+\frac{1}{q}v \text{ (για } u,v>0\text{) και } \left|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right|\le\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{1/q}.$$

28. (*Ανισότητα του Minkowski*) Δείξτε ότι $\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{1/p}$ για $p\ge 1$.

5. Διαφορίσιμες συναρτήσεις και μερικές παράγωγοι

5.1. Διαφορίσιμες συναρτήσεις. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{R}$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, και ένα σημείο $a \in \Omega$. Η συνάρτηση f λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο a αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $A_1, A_2, ..., A_n$ ούτως ώστε

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{|x-a|}\left(f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} A_j (x_j - a_j) \right) = 0 .$$

Παρατηρήσεις. 1. Για $n=1$, ο ανωτέρω ορισμός είναι ισοδύναμος με αυτό που συνήθως ονομάζουμε διαφορισιμότητα στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής δηλαδή την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

2. Διαφορισιμότητα της συνάρτησης f στο σημείο a σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι δυνατόν να **προσεγγισθεί** κοντά στο σημείο a από μια συνάρτηση που είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Δηλαδή $f(x) \approx f(a) + \sum_{j=1}^{n} A_j (x_j - a_j)$ όταν $x \approx a$. Ακριβέστερα η ποσότητα $f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} A_j (x_j - a_j)$ τείνει στο μηδέν <u>γρηγορότερα</u> από την ποσότητα $|x-a|$, εννοείται του $x \to a$. Αυτό ενίοτε το γράφουμε

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} A_j (x_j - a_j) + o(|x-a|) \text{ όταν το } x \to a .$$

3. Γεωμετρικά αυτό που μόλις είπαμε σημαίνει ότι το $n-$ διάστατο επίπεδο με εξίσωση

$$z = f(a) + \sum_{j=1}^{n} A_j(a)(x_j - a_j),$$

στον $(n+1)-$διάστατο $x_1 x_2 \cdots x_n z-$χώρο, **εφάπτεται** στην $n-$διάστατη επιφάνεια με εξίσωση $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Είναι δε το μόνο επίπεδο με αυτήν την ιδιότητα.

4. Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο a τότε είναι συνεχής στο a.

5.2. Μερικές παράγωγοι. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και $a \in \Omega$. Η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης f **ως προς την μεταβλητή** x_j στο σημείο a ορίζεται σαν το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{x_j \to a_j} \frac{f(a_1,...,a_{j-1},x_j,a_{j+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_{j-1},a_j,a_{j+1},...,a_n)}{x_j - a_j},$$

αν βέβαια αυτό υπάρχει. Έτσι η μερική παράγωγος $(\partial f / \partial x_j)(a)$ είναι η <u>συνήθης</u> παράγωγος στο σημείο a_j, της συνάρτησης $h_{j,a}(\tau) = f(a_1,...,a_{j-1},\tau,a_{j+1},...,a_n)$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left.\frac{dh_{j,a}}{d\tau}\right|_{\tau=a_j}$. Από αυτό έπονται οι βασικοί κανόνες διαφόρισης του αθροίσματος, του γινομένου και του πηλίκου συναρτήσεων:

$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(a), \quad \frac{\partial (fg)}{\partial x_j}(a) = g(a)\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$$

και, αν $g(x) \neq 0$ για x κοντά στο σημείο a,

$$\frac{\partial (f/g)}{\partial x_j}(a) = \frac{1}{g(a)}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{f(a)}{[g(a)]^2}\frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$

Αν τώρα η μερική παράγωγος $(\partial f / \partial x_j)(a)$ υπάρχει για κάθε $a \in \Omega$, τότε ορίζεται η **μερική παράγωγος συνάρτηση**

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad a \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Παραδείγματα. 1. Των συναρτήσεων $f(x,y) = x^k y^m$, οι μερικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=kx^{k-1}y^m \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=mx^k y^{m-1}.$$

Γενικότερα αν $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2,\dots,x_n)=k_j x_1^{k_1}\cdots x_j^{k_j-1}\cdots x_n^{k_n}$.

2. Αν $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}$, για $(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq 0$.

3. Αν $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}$ $(n\geq 3)$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{(2-n)x_j}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{n/2}}$.

Ασκήσεις. **1.** Υπολογίστε τις παραγώγους $(\partial g_j/\partial x_k)(x)$ των συναρτήσεων

$$g_j(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{x_j}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{n/2}},\ j=1,2,\dots,n,\ \text{που ορίζονται για}\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n-\{0\}.$$

2. Υπολογίστε τις παραγώγους $(\partial g_a/\partial x_j)(x)$ της συνάρτησης

$$g_a(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{[(x_1-a_1)^2+(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2]^{n/2}},$$

που ορίζεται για $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n-\{a\}$. ($a\in\mathbb{R}^n$ είναι μια παράμετρος.)

5.3. Σχέση διαφορισιμότητας και μερικών παραγώγων. Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο a τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $(\partial f/\partial x_j)(a)$, για $j=1,2,\dots,n$, και μάλιστα είναι οι αριθμοί A_j της σχέσης

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}\left(f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^n A_j(x_j-a_j)\right)=0 \ \text{δηλαδή}\ \lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}\left(f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)\right)=0.$$

Επομένως στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο a, το $n-$διάστατο επίπεδο με εξίσωση $z=f(a)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)$, στον $(n+1)-$διάστατο $x_1x_2\cdots x_nz-$χώρο, εφάπτεται στην $n-$διάστατη επιφάνεια με εξίσωση $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Έτσι το διάνυσμα

$$\vec{\kappa}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),\dots,-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a),1\right)$$

είναι **κάθετο** στο εν λόγω εφαπτόμενο επίπεδο και συνεπώς – εξ' ορισμού – είναι κάθετο και στην επιφάνεια $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ στο σημείο $(a,f(a))$.

Όπως είπαμε αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο a τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $(\partial f/\partial x_j)(a)$. Το αντίστροφο αυτού δεν ισχύει: **Παράδειγμα:** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{αν}\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{αν}\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$

5.4. Θεώρημα. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, η οποία έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x_j:\Omega\to\mathbb{R}$, για κάθε $j=1,2,\dots,n$. Έστω ακόμη ότι οι μερικές αυτές παράγωγοι είναι συνεχείς σε ένα σημείο $a\in\Omega$. Τότε η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο a.*

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, λέγεται **συνεχώς διαφορίσιμη** (στο Ω), αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x_j:\Omega\to\mathbb{R}$, για $j=1,2,\dots,n$. Γράφουμε δε τότε $f\in C^1(\Omega)$.

5.5. Διαφορικό συνάρτησης. Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο a, η γραμμική μορφή $(df)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, η οποία ορίζεται από την σχέση $(df)_a(t)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)t_j$ για $t=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, λέγεται

διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο a. Τυπικά κάπως, η γραμμική μορφή $(df)_a$ είναι στοιχείο του δυϊκού του γραμμικού χώρου $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $(df)_a \in (\mathbb{R}^n)^*$. Και αν η συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο a του Ω, η απεικόνιση $df:\Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ που απεικονίζει το a στο $(df)_a$, λέγεται **διαφορικό** της συνάρτησης f. Για τις συναρτήσεις $f(x) = x_j$ έχουμε ότι $(dx_j)_a(t) = t_j$ για $t \in \mathbb{R}^n$ (και αυτό για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$). Έτσι

$$(df)_a(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(dx_j)_a(t) \quad \text{ή} \quad (df)_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(dx_j)_a, \text{ τέλος δε και στη μορφή } df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j .$$

Αυτή η τελευταία σχέση υπενθυμίζει ότι αν σε κάποιο σημείο $x \in \Omega$ θεωρήσουμε την μεταβολή δf στην συνάρτηση f, η οποία είναι συνέπεια της μεταβολής των μεταβλητών από x_j σε $x_j + \delta x_j$, τότε $\delta f \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_j$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι η ποσότητα $\delta f - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_j$ τείνει στο 0, καθώς το $\delta x \to 0$, <u>**γρηγορότερα**</u> από το δx.

5.6. Οι μερικές παράγωγοι μια διαφορίσιμης συνάρτησης ενδέχεται να έχουν ασυνέχειες. Αυτό φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς την συνάρτηση $g(x)$, ορισμένη για $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = x^2 \sin(1/x) \quad \text{για } x \neq 0 \quad \text{και} \quad g(0) = 0 .$$

Η συνάρτηση αυτή έχει παράγωγο $g'(x)$ σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$, η οποία δίδεται από τον τύπο $g'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ για $x \neq 0$ και $g'(0) = 0$. Αλλά η συνάρτηση g' είναι ασυνεχής στο 0.

Αν επομένως θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x,y) = g(x) + g(y)$, ορισμένη για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, τότε αυτή είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο παρ' όλο που οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ είναι ασυνεχής στο σημείο $(0,0)$. Παραλλαγή του παραδείγματος αυτού είναι το εξής:

$$h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \alpha\nu \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

5.7. Παραδείγματα. 1. Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x,y,z) = e^x \cos y - 2\sin y \cos z + 3z$ ορισμένη για $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, και ας υπολογίσουμε το διαφορικό της στο σημείο $a = (0,0,0)$. Υπολογίζουμε κατ' αρχήν τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y - 2\cos y \cos z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2\sin y \sin z + 3$. Έπεται ότι η συνάρτηση f είναι C^1 σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^3$. Ιδιαιτέρως είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους στο σημείο $a = (0,0,0)$ βρίσκουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 3$. Άρα το διαφορικό $(df)_a$ είναι η γραμμική απεικόνιση $(df)_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t,s,u) \to (df)_a(t,s,u) = t - 2s + 3u$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι $f(x,y,z) = 1 + x - 2y + 3z + o(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ (λαμβάνοντας υπ' όψιν και το ότι $f(0,0,0) = 1$), δηλαδή

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|f(x,y,z) - 1 - x + 2y - 3z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0 .$$

Και απλοϊκά κάπως, $f(x,y,z) \approx 1 + x - 2y + 3z$ όταν $(x,y,z) \approx (0,0,0)$.

Ας υπολογίσουμε τώρα και το διαφορικό της f στο σημείο $b = (\pi/2, \pi, \pi/6)$. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους στο b βρίσκουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(b) = -e^{\pi/2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(b) = \sqrt{3}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(b) = 3$.

Άρα $(df)_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t,s,u) \to (df)_b(t,s,u) = -e^{\pi/2}t + \sqrt{3}s + 3u$. Δηλαδή

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/2,\pi,\pi/6)} \frac{\left|f(x,y,z) + e^{\pi/2} - \pi/2 + e^{\pi/2}(x-\pi/2) - \sqrt{3}(y-\pi) - 3(z-\pi/6)\right|}{\sqrt{(x-\pi/2)^2 + (y-\pi)^2 + (z-\pi/6)^2}} = 0 .$$

Απλοϊκά, όταν $(x,y,z)\approx(\pi/2,\pi,\pi/6)$ τότε $f(x,y,z)\approx -e^{\pi/2}-\pi e^{\pi/2}/2-\pi\sqrt{3}-e^{\pi/2}x+\sqrt{3}y+3z$.

2. Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x,y,z)=\dfrac{ze^{xyz}\sin z}{(x^2+y^2)^2}$, ορισμένη για (x,y,z) με $(x,y)\neq(0,0)$. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους, εύκολα ελέγχουμε την συνέχειά των σε κάθε σημείο του συνόλου $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:$ *με* $(x,y)\neq(0,0)\}$. Άρα $f\in C^1(\Omega)$. Υπολογίζοντας τώρα τις τιμές των μερικών παραγώγων της f στο σημείο $a=(0,1,\pi/2)$, βρίσκουμε $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=\dfrac{\pi^2}{4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=-2\pi$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)=1$. Και αφού $f(a)=\pi/2$, παίρνουμε την προσέγγιση $f(x,y,z)\approx\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi^2}{4}x-2\pi(y-1)+(z-\dfrac{\pi}{2})=2\pi+\dfrac{\pi^2}{4}x-2\pi y+z$ όταν $(x,y,z)\approx(0,1,\pi/2)$.

5.8. Θεώρημα. *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, και ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x_j=0$, σε κάθε σημείο του συνόλου Ω (για $j=1,2,\ldots,n$). Τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.*

5.9. Ασκήσεις. 1. Βρείτε μια συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\quad\text{και}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

2. Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$. Είναι η συνάρτηση f συνεχής;

3. Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} & \text{για } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{για } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$ αν και μόνο αν $\lambda<1$.

4. Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ και $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^y-x-2(y-1)\log 2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}=0$.

5. Αν υπάρχουν, υπολογίστε τα όρια $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-e^{\sqrt{x^2+y^2}}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-|x|-|y|-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-\sqrt{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-\sin(\sqrt{x^2+y^2})-1}{e^{|x|+|y|}-1}.$$

6. Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^y=e^{y\log x}$, $x>0$, $-\infty<y<\infty$, στα διάφορα σημεία.

7. Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^{y^x}=e^{y^x\log x}=e^{(\log x)e^{x\log y}}$ στο σημείο $(2,3)$, καθώς και το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^{y^z}$ το σημείο $(2,3,2)$.

8. Έστω $f(x,y)=(\sin x)^{\cos y}=e^{\cos y\log(\sin x)}$. Αν $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/4,\pi/4)}\frac{|f(x,y)-Ax-By-C|}{\sqrt{(x-\pi/4)^2+(y-\pi/4)^2}}=0$, τί συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς A,B,C;

9. Σωστό ή λάθος; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{x\sqrt{1-\cos(xe^y)}}{|x|+|y-a|}=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

10. Σωστό ή λάθος; Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε δεν υπάρχουν $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(\alpha,\beta,\gamma)}\frac{x^{y^z}-\mathrm{A}-\mathrm{B}x-\Gamma y-\Delta z+\sin(|x-\alpha|+|y-\beta|+|z-\gamma|)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}.$$

6. Διαφορικός λογισμός διανυσματικών συναρτήσεων

6.1. Παράγωγοι συναρτήσεων της μορφής $g : \mathrm{I} = \{t \in \mathbb{R} : \alpha < t < \beta\} \to \mathbb{R}^n$. Μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει σε κάθε σημείο $t \in \mathrm{I}$, ένα διάνυσμα $g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))$ του $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο $\tau \in \mathrm{I}$ αν κάθε μια από τις συναρτήσεις $g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Ορίζουμε δε την παράγωγο $g'(\tau)$ σαν το διάνυσμα με συντεταγμένες τις παραγώγους των $g_j(t)$, δηλαδή

$$g'(\tau) = \frac{dg}{dt}(\tau) \overset{op}{=} \left(\frac{dg_1}{dt}(\tau), \frac{dg_2}{dt}(\tau), ..., \frac{dg_n}{dt}(\tau) \right).$$

Ισοδύναμα,

$$g'(\tau) = \lim_{t \to \tau} \frac{g(t) - g(\tau)}{t - \tau} = \lim_{t \to \tau} \left(\frac{g_1(t) - g_1(\tau)}{t - \tau}, \frac{g_2(t) - g_2(\tau)}{t - \tau}, ..., \frac{g_n(t) - g_n(\tau)}{t - \tau} \right).$$

Αν η συνάρτηση $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $t \in \mathrm{I}$ τότε ορίζεται μια άλλη διανυσματική συνάρτηση, η παράγωγός της: $\frac{dg}{dt} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, $t \to \frac{dg}{dt}(t)$.

6.2. Καμπύλες στον χώρο $\mathbb{R}^n$. Από γεωμετρικής άποψης μια συνάρτηση της μορφής $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ περιγράφει μια καμπύλη: Σε κάθε σημείο $t \in \mathrm{I}$ αντιστοιχεί ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$, το $g(t)$, και όλα αυτά τα σημεία μαζί συνιστούν την καμπύλη. Μερικές φορές θα γράφουμε $\vec{r} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ αντί $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, θέλοντας να τονίσουμε την διανυσματική φύση των τιμών μιας τέτοιας συνάρτησης. Θα λέγουμε δε ακόμη ότι το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}(t)$ περιγράφει μια καμπύλη – την καμπύλη γ με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x_1 = g_1(t),\ x_2 = g_2(t),\ \dots,\ x_n = g_n(t),\quad \alpha < t < \beta.$$

Στην περίπτωση αυτή που βλέπουμε την συνάρτηση $\vec{r} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ σαν μια καμπύλη,

το διάνυσμα $\frac{d\vec{r}}{dt}(\tau)$ *είναι εφαπτόμενο της καμπύλης* γ *στο σημείο* $g(\tau) = \vec{r}(\tau)$.

Έτσι η ευθεία $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την σχέση $\varepsilon(t) = \vec{r}(\tau) + t\left(\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=\tau} \right)$, είναι η **εφαπτομένη** της καμπύλης γ στο σημείο $g(\tau) = \vec{r}(\tau)$. **Παρατήρηση.** Τονίζουμε ότι τα ανωτέρω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι το διάνυσμα $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=\tau} \neq 0$. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι μια καμπύλη μπορεί να μην έχει εφαπτομένη στο σημείο $g(\tau) = \vec{r}(\tau)$ αν $(d\vec{r}/dt)(\tau) = 0$. Θεωρούμε την εξής καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$:

$$h(t) = \begin{cases} \left(t^3 \cos(1/t), t^3 \sin(1/t)\right) & \alpha\nu\ \ t > 0 \\ (0,0) & \alpha\nu\ \ t \le 0. \end{cases}$$

Τότε η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ είναι μια C^1 καμπύλη που περνά από το σημείο $(0,0)$ και $h'(0) = (0,0)$. Η καμπύλη h «περιστρέφεται» γύρω από το σημείο $(0,0)$ άπειρες φορές, καθώς $t \to 0^+$, και έτσι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για εφαπτομένη της h στο σημείο αυτό. Είναι δυνατόν μάλιστα να τροποποιήσουμε την ανωτέρω καμπύλη και να πάρουμε μια παρόμοια που να είναι C^∞ (απεριόριστα διαφορίσιμη). Τέτοια καμπύλη είναι, π.χ., η

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(e^{-1/t^2} \cos(1/t), e^{-1/t^2} \sin(1/t)\right) & \alpha\nu\ \ t > 0 \\ (0,0) & \alpha\nu\ \ t \le 0. \end{cases}$$

Μια άλλη παρόμοια είναι η

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(e^{-1/t^2} \cos(1/t), e^{-1/t^2} \sin(1/t)\right) & \alpha\nu\ \ t > 0 \\ e^t \left(e^{-1/t^2} \cos(1/t), e^{-1/t^2} \sin(1/t)\right) & \alpha\nu\ \ t < 0, \end{cases}$$

και $\varphi(0)=(0,0)$. Στο παράδειγμα αυτό $\dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}=(\cos(1/t),\sin(1/t))$ για $t\neq 0$, και επομένως τα όρια $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}$ και $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}$ δεν υπάρχουν. [Για να δικαιολογήσετε ότι οι ανωτέρω καμπύλες φ είναι C^∞ χρησιμοποιήστε ότι $\lim\limits_{t\to 0}t^{-N}e^{-1/t^2}=0$ για κάθε θετικό ακέραιο N.]

6.3. Ταχύτητα και επιτάχυνση. Στη *Φυσική*, συναρτήσεις της μορφής $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κίνηση ενός κινητού, κυρίως βέβαια στην περίπτωση $n=3$. Τότε την μεταβλητή $t\in\mathrm{I}$ την σκεπτόμαστε σαν τον χρόνο: την χρονική στιγμή t, το κινητό ευρίσκεται στο σημείο $g(t)$ του χώρου. Και στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό $\vec{r}(t)=g(t)$, του διανύσματος θέσεως. Τώρα μάλιστα η παράγωγος

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t)=\left(\frac{dg_1}{dt},\frac{dg_2}{dt},\dots,\frac{dg_n}{dt}\right)\overset{op}{=}\vec{v}(t)$$

έχει την φυσική σημασία της **ταχύτητας** κατά την χρονική στιγμή t. Βέβαια η ταχύτητα $\vec{v}(t)$ που ορίζεται από την ανωτέρω εξίσωση είναι διανυσματικό μέγεθος και δεν πρέπει να συγχέεται με το **μέτρο της ταχύτητας** που είναι η ποσότητα

$$|\vec{v}(t)|=\sqrt{\left(\frac{dg_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dg_2}{dt}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dg_n}{dt}\right)^2}\,.$$

Ακόμη η παράγωγος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο είναι η **επιτάχυνση** $\vec{a}(t)$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)=\left(\frac{d^2g_1}{dt^2},\frac{d^2g_2}{dt^2},\dots,\frac{d^2g_n}{dt^2}\right)\overset{op}{=}\vec{a}(t).$$

Νόμος του Newton. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη αυτόν νόμο, αν σε ένα υλικό σημείο μάζας m ασκηθεί δύναμη $\vec{F}(t)=A(t)\vec{i}+B(t)\vec{j}+C(t)\vec{k}$ (t είναι χρόνος) τότε το υλικό αυτό σημείο θα κινηθεί ούτως ώστε η επιτάχυνσή του $\vec{a}(t)$ να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\vec{F}(t)=m\vec{a}(t),\ \text{δηλαδή}\ \vec{F}(t)=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Και αν $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, η ανωτέρω εξίσωση γράφεται: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=A(t)$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=B(t)$ και $\dfrac{d^2z}{dt^2}=C(t)$.

6.4. Διαφόριση σύνθετης συνάρτησης. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $g:\mathrm{I}\to\Omega$, όπου $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα και Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, καθώς και μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η σύνθεση $f\circ g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$. Αν t είναι η μεταβλητή στο I και $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ η μεταβλητή στο Ω, τότε κάθε $t\in\mathrm{I}$ απεικονίζεται σε ένα σημείο $g(t)=(g_1(t),g_2(t),\dots,g_n(t))$ του Ω και κάθε σημείο $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ του Ω απεικονίζεται σε έναν αριθμό $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, οπότε

η σύνθεση $f\circ g$ απεικονίζει το t στο $h(t)=f(g(t))=f(g_1(t),g_2(t),\dots,g_n(t))$.

Κανόνας της αλυσίδας. Αν η συνάρτηση g είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\tau\in\mathrm{I}$ και η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $g(\tau)$, τότε είναι διαφορίσιμη και η σύνθεση $f\circ g$ στο σημείο τ και ισχύει

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dg_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dg_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dg_n}{dt}\ \text{στο}\ \tau.$$

Αναλυτικότερα: $\dfrac{dh}{dt}(\tau)=\dfrac{d(f\circ g)}{dt}(\tau)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(g(\tau))\dfrac{dg_1}{dt}(\tau)+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(g(\tau))\dfrac{dg_2}{dt}(\tau)+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(g(\tau))\dfrac{dg_n}{dt}(\tau)$.

Ο ανωτέρω κανόνας της αλυσίδας γράφεται ενίοτε και ως εξής:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt},\ \text{υπονοώντας βέβαια ότι}\ x_1(t)=g_1(t),\dots,x_n(t)=g_n(t).$$

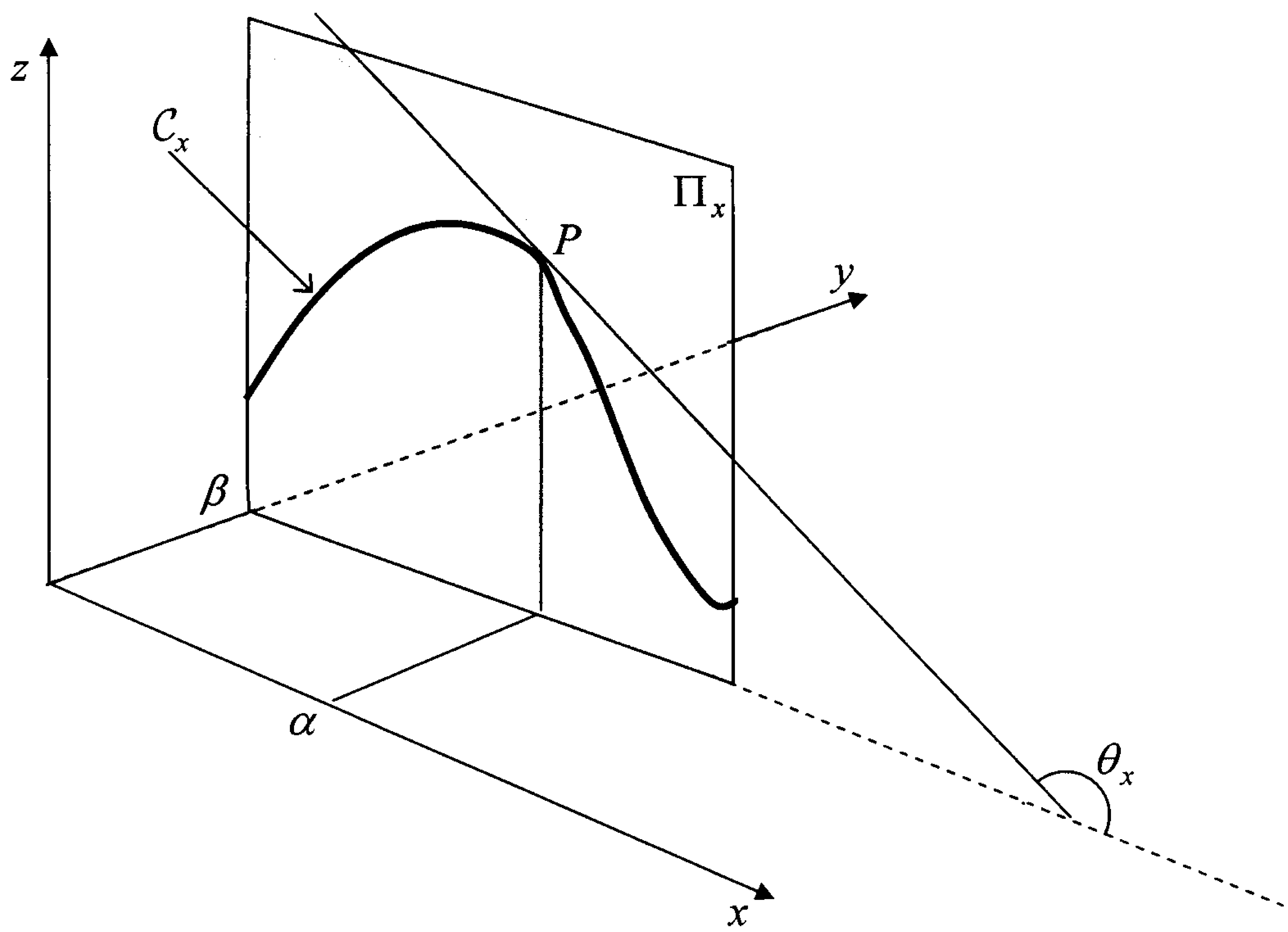
Άσκηση. Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας με την συνάρτηση $f(x,y)=x^y=e^{y\log x}$ και όταν θέσετε $x=t^2$ και $y=t^5$. Δηλαδή υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dt}\left[f(t^2,t^5)\right]$ με δυο διαφορετικούς τρόπους.

6.5. Γεωμετρική σημασία των μερικών παραγώγων. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό, και $p=(\alpha,\beta)$ ένα σημείο του Ω. Η μερική παράγωγος $\lambda=(\partial f/\partial x)(p)$ δίδεται από τον τύπο

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x,\beta)-f(\alpha,\beta)}{x-\alpha}=\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=\alpha},$$

όπου $\phi(t)=f(t,\beta)$. Με άλλα λόγια όταν **<u>περιορίσουμε</u>** την συνάρτηση $f(x,y)$ πάνω στην ευθεία $\{(t,\beta):t\in\mathbb{R}\}$ (εννοείται το μέρος της ευθείας αυτής που ευρίσκεται μέσα στο Ω), τότε η παράγωγος του **<u>περιορισμού</u>** αυτού για $t=\alpha$ είναι η μερική παράγωγος $\lambda=(\partial f/\partial x)(p)$. Γεωμετρικά ο περιορισμός αυτός σημαίνει το εξής:

Ας πάρουμε την επιφάνεια $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=f(x,y)\}$, *δηλαδή το γράφημα της συνάρτησης* $z=f(x,y)$, *καθώς και το επίπεδο* $\Pi_x=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=\beta\}$, *οπότε το επίπεδο αυτό τέμνει την επιφάνεια* S *κατά μήκος μιας καμπύλης* C_x. *Η εφαπτομένη της καμπύλης* C_x *στο σημείο* $P=(\alpha,\beta,f(\alpha,\beta))$ *τέμνει την ευθεία* $\{y=\beta,\ z=0\}$ *και σχηματίζει γωνία* θ_x. *Τότε* $\tan\theta_x=\lambda$.



Ανάλογη βέβαια είναι και η γεωμετρική σημασία της μερικής παραγώγου $\mu=(\partial f/\partial y)(p)$.
Επίσης

$$\text{το διάνυσμα } \vec{\Xi}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p),\frac{\partial f}{\partial y}(p),-1\right)=(\lambda,\mu,-1) \text{ είναι } \textbf{κάθετο} \text{ στην επιφάνεια } S \text{ στο σημείο } P$$

και το επίπεδο με εξίσωση $\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)-(z-f(\alpha,\beta))=0$ είναι το **εφαπτόμενο επίπεδο** στην επιφάνεια S στο σημείο P.

Άσκηση. Θεωρήστε μια C^1 – συνάρτηση $f(x,y,z)$, την επιφάνεια S με εξίσωση $f(x,y,z)=0$, δηλαδή $S=\{(x,y,z): f(x,y,z)=0\}$, καθώς και ένα σημείο (a,b,c) πάνω στην επιφάνεια αυτή. Εξηγήστε – γεωμετρικά – γιατί το διάνυσμα $\vec{\nabla}f(a,b,c)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S στο σημείο (a,b,c). Υποτίθεται ότι $\vec{\nabla}f(a,b,c)\neq\vec{0}$. Γενικεύστε στον $\mathbb{R}^n$. (Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό όταν θα συζητήσουμε το *Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων*. Είναι αυτό το θεώρημα που μας εξασφαλίζει την <u>ομαλότητα</u> της επιφάνειας

$\mathcal{S}=\{(x,y,z): f(x,y,z)=0\}$ με την προϋπόθεση $\vec{\nabla} f(x,y,z)\neq\vec{0}$ στα σημεία $(x,y,z)\in\mathcal{S}$. Αυτή δε η ομαλότητα της επιφάνειας είναι απαραίτητη για να έχουμε εφαπτόμενο επίπεδο στα σημεία της.)

6.6. Κατευθυνόμενη παράγωγος. Αν $f:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση (όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό) και $a\in\Omega$, η **κλίση** $\vec{\nabla} f(a)$ είναι το διάνυσμα

$$\vec{\nabla} f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\vec{e}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\vec{e}_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\vec{e}_n.$$

Βλέποντάς το δε σαν συνάρτηση του $x\in\Omega$, έχουμε την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{\nabla} f:\Omega\to\mathbb{R}^n,\ \ x\to\vec{\nabla} f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $|\vec{u}|=1$) και την συνάρτηση

$$h_{\vec{u}}(t)=f(\vec{a}+t\vec{u})=f(a_1+t\xi_1,a_2+t\xi_2,\dots,a_n+t\xi_n),-\infty<t<\infty \ (t \text{ κοντά στο } 0).$$

Η **κατευθυνόμενη παράγωγος** της f στο σημείο a και στην κατεύθυνση $\vec{u}$ ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$\partial_{\vec{u}} f(a)=\left.\frac{dh_{\vec{u}}}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}[f(\vec{a}+t\vec{u})]\right|_{t=0}.$$

Στη περίπτωση που η f είναι διαφορίσιμη στο a,

$$\partial_{\vec{u}} f(a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\xi_j=\vec{\nabla} f(a)\cdot\vec{u}.$$

Και για δοσμένα f και a, η ποσότητα $\partial_{\vec{u}} f(a)$ γίνεται μέγιστη όταν $\vec{u}=\dfrac{\vec{\nabla} f(a)}{|\vec{\nabla} f(a)|}$, και η μέγιστη αυτή τιμή είναι

$$\frac{\vec{\nabla} f(a)}{|\vec{\nabla} f(a)|}\cdot\vec{\nabla} f(a)=|\vec{\nabla} f(a)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^2}.$$

6.7. Θεώρημα. *Ας θεωρήσουμε μια C^1 − συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, και δυο σημεία $a,b\in\Omega$ ούτως ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]\subset\Omega$. Τότε για κάποιο σημείο $\xi\in[a,b]$,*

$$f(b)-f(a)=\nabla f(\xi)\cdot(b-a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)(b_j-a_j).$$

6.8. Διαφόριση συναρτήσεων της μορφής $\mathbb{R}^n\supset\Omega\to\mathbb{R}^m$. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό. Μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει τα σημεία $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ του Ω σε σημεία $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)$ του $\mathbb{R}^m$, και έστω ότι αν $y=f(x)$ τότε $y_i=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $i=1,2,\dots,m$. Δηλαδή $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ με $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο $a\in\mathbb{R}^n$, αν κάθε συνάρτηση $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Στην περίπτωση αυτή κάθε συνάρτηση $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$ έχει διαφορικό $(df_i)_a$ που είναι η γραμμική απεικόνιση

$$(df_i)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ \ \text{με}\ \ (df_i)_a(t_1,t_2,\dots,t_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)t_j.$$

Και η γραμμική απεικόνιση $(df)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ με $(df)_a=((df_1)_a,(df_2)_a,\dots,(df_m)_a)$, ορίζεται να είναι το **διαφορικό** της συνάρτησης f στο σημείο a, χαρακτηρίζεται δε από την προσεγγιστική σχέση:

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-(df)_a(x-a)|}{|x-a|}=0,$$

ή ισοδύναμα: $f(x)=f(a)+(df)_a(x-a)+o(|x-a|)$ για $x\to a$. Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $(df)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, δηλαδή ο πίνακας των μερικών παραγώγων, ονομάζεται ***πίνακας Jacobi*** της f στο σημείο a και συμβολίζεται με $(Jf)(a)$. Αναλυτικότερα ο πίνακας Jacobi $(Jf)(a)$ είναι ο $m\times n$ πίνακας

$$(Jf)(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Ο εν λόγω πίνακας θα συμβολίζεται και ως εξής:

$$(Jf)(a)=\frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}(a)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right), \text{ ή ακόμη } (Jf)(a)=\frac{\partial(y_1,y_2,\dots,y_m)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}(a),$$

υπονοώντας βέβαια ότι $y_i=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Τέλος, αν η συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $a\in\Omega$, ορίζεται η απεικόνιση $df:\Omega\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $a\to(df)_a$ για $a\in\Omega$, όπου $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ είναι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων της μορφής $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Η απεικόνιση αυτή df λέγεται **διαφορικό** της συνάρτησης f. Ανάλογα, τότε, ορίζεται και η απεικόνιση $Jf:\Omega\to\mathbb{R}^{m\times n}$, $a\to(Jf)(a)$ για $a\in\Omega$, όπου $\mathbb{R}^{m\times n}$ είναι το σύνολο των $m\times n$ πινάκων.

6.9. Συνθέσεις $f\circ g$ με $\Theta\xrightarrow{g}\Omega\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ όπου $\Theta\subset\mathbb{R}^m$ και $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε ανοικτά σύνολα $\Theta\subset\mathbb{R}^m$ και $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και συναρτήσεις $g:\Theta\to\Omega$ και $f:\Omega\to\mathbb{R}$, και ας συμβολίζουμε με $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ την μεταβλητή στο Θ και $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ την μεταβλητή στο Ω. Έτσι σε κάθε σημείο $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ του Θ, η συνάρτηση g απεικονίζει ένα σημείο $y=g(x)$ του Ω, αναλυτικότερα $(y_1,y_2,\dots,y_n)=(g_1(x),g_2(x),\dots,g_n(x))$, το οποίο με την σειρά της η συνάρτηση f το απεικονίζει στο $z=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g_1(x),g_2(x),\dots,g_n(x))$.

Κανόνας της αλυσίδας. *Αν η συνάρτηση g είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a\in\Theta$ και η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $b=g(a)$, τότε η σύνθεση $f\circ g$ είναι διαφορίσιμη στο a και μάλιστα*

$$(d(f\circ g))_a=(df)_b\circ(dg)_a.$$

6.10. Ο γενικός κανόνας της αλυσίδας. *Αν $\Theta\subset\mathbb{R}^m$ και $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτά σύνολα και $g:\Theta\to\Omega$ και $f:\Omega\to\mathbb{R}^s$ είναι συναρτήσεις, η μεν g διαφορίσιμη στο σημείο $a\in\Theta$, η δε f διαφορίσιμη στο σημείο $b=g(a)$, τότε η σύνθεση $f\circ g$ είναι διαφορίσιμη στο a και $(d(f\circ g))_a=(df)_b\circ(dg)_a$.*

Και αν περάσουμε στους πίνακες *Jacobi*, παίρνουμε ότι

$$\big(J(f\circ g)\big)(a)=(Jf)(b)\cdot(Jg)(a).$$

Γράφοντας τώρα $(x_1,\dots,x_m)$ την μεταβλητή στο Θ και $(y_1,\dots,y_n)$ την μεταβλητή στο Ω, η σχέση αυτή αναλυτικά είναι η ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1\circ g)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(f_1\circ g)}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial(f_1\circ g)}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial(f_2\circ g)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(f_2\circ g)}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial(f_2\circ g)}{\partial x_m}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial(f_s\circ g)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(f_s\circ g)}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial(f_s\circ g)}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(b) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(b) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial f_s}{\partial y_2}(b) & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial y_n}(b) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\partial(f_i\circ g)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(b)\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a),\quad j=1,\dots,m,\ i=1,\dots,s.$$

Τέλος, αν $(z_1,...,z_s)$ είναι η μεταβλητή στον $\mathbb{R}^s$, και θεωρήσουμε τα $y_1,...,y_n$ σαν συναρτήσεις των $x_1,...,x_m$, και τα $z_1,...,z_s$ σαν συναρτήσεις των $y_1,...,y_n$, μπορούμε να γράψουμε ακόμη ότι

$$\frac{\partial(z_1,...,z_s)}{\partial(x_1,...,x_m)}(a)=\frac{\partial(z_1,...,z_s)}{\partial(y_1,...,y_n)}(b)\cdot\frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(x_1,...,x_m)}(a).$$

Ιδιαιτέρως στην περίπτωση που $m=n=s$,

$$\det[(J(f\circ g))(a)]=\det[(Jf)(b)]\cdot\det[(Jg)(a)].$$

Και αν επιπλέον $f\circ g=id$ τότε

$$\det[(Jf)(b)]\cdot\det[(Jg)(a)]=1.$$

Ιδιαιτέρως, τότε,

$$\det[(Jf)(b)]\neq 0 \text{ και } \det[(Jg)(a)]\neq 0.$$

Αν επομένως μια απεικόνιση $g:\Theta\to\mathbb{R}^n$ είναι **αντιστρέψιμη** κοντά σε ένα σημείο $a\in\Theta$, τότε $\det[(Jg)(a)]\neq 0$. Εννοείται ότι η g είναι διαφορίσιμη, με διαφορίσιμη τοπική αντίστροφη. Π.χ., η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^3$, έχει συνεχή αντίστροφη την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(y)=\sqrt[3]{y}$, αλλά $g'(0)=0$. (Το αντίστροφο της προηγουμένης παρατήρησης, ότι δηλαδή αν $\det[(Jg)(a)]\neq 0$, η συνάρτηση g αντιστρέφεται τοπικά στο a, ισχύει επίσης, και είναι το *Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης* – θα το μελετήσουμε αργότερα

Συμβολισμός. Για έναν μετασχηματισμό $T:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, την **ορίζουσα** του πίνακα *Jacobi* $JT(a)$ (σε ένα σημείο $a\in\Omega$) θα την συμβολίζουμε με $\mathfrak{J}T(a)$ και θα την ονομάζουμε ***Jacobian***. Δηλαδή $\mathfrak{J}T(a)=\det JT(a)$. (Για την **γεωμετρική σημασία** του αριθμού $\mathfrak{J}T(a)$ θα μιλήσουμε αργότερα.)

6.11. Ασκήσεις. 1. Δίδεται η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}[1-\cos(x^2/y)]\sqrt{x^2+y^2} & \alpha\nu\ \ y\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ \ y=0.\end{cases}$ Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους της f στο $(0,0)$.

2. Θεωρήστε την καμπύλη στον xyz – χώρο με παραμετρικές εξισώσεις

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=e^t,\ -\infty<t<+\infty,$$

και γράψτε εξισώσεις για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(0,1,e^{\pi/2})$. Επίσης γράψτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο αυτό.

3. Μια συνάρτηση μπορεί σε κάποιο σημείο να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) αλλά να μην έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε καμιά άλλη κατεύθυνση (δηλαδή εκτός από τις κατευθύνσεις των αξόνων). Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

4. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση – σε κάποιο σημείο – και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Επίσης δείξτε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας – όταν διαφορίσουμε την σύνθεση $f(\alpha t,\beta t)$ ως προς το t για $t=0$ (όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\beta\neq 0$).

5. Επαληθεύσατε τον κανόνα της αλυσίδας στις περιπτώσεις: (i) $f(x,y)=x^3e^{xy^2}$, $x=t^2$, $y=\sin t$ (ii) $f(x,y)=x^y$, $x=t^2$, $y=t^3$ (iii) $f(x,y)=(\log x)^y$, $x=e^t$, $y=t$.

6. Θεωρήστε μια C^1 – συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$|f(x)-f(y)| \le \left(\sup_{z\in\Omega}|\nabla f(z)|\right)|x-y|, \text{ για κάθε } x,y\in\Omega.$$

7. Σε ποιά κατεύθυνση, η συνάρτηση $f(x,y)=xe^y+x^2y+y^2$ έχει την πιο απότομη μεταβολή στο σημείο $(1,-2,-5)$;

8. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z=2x^2+y^2$, στο σημείο $(-1,2,6)$.

9. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z^2=2x^2+y^2$, στο σημείο $(-1,2,\sqrt{6})$.

10. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $2x^2+y^2+5z^2=16$, στο σημείο $(1,-3,1)$.

11. Θεωρήστε την καμπύλη C στον $xyz-$χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z=y^2-3x^2$ και $z^2+y^2=2$, και γράψτε εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην C στο σημείο $(0,1,1)$.

12. Δείξτε ότι οι εξισώσεις

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}\left(e^{-1/t^2},e^{-1/t^2}\right) & \alpha\nu \quad t>0\\ (0,0) & \alpha\nu \quad t=0\\ \left(-e^{-1/t^2},e^{-1/t^2}\right) & \alpha\nu \quad t<0\end{cases}$$

ορίζουν μια C^∞ παραμέτρηση της καμπύλης $y=|x|$ στο $xy-$επίπεδο.

13. *(Θεώρημα του Euler)* Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού λ (όπου $\lambda\in\mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx)=t^\lambda f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ και κάθε $t>0$, αν και μόνο αν η f ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\lambda f(x).$$

Υπόδειξη. Για την μια κατεύθυνση, διαφορίστε την σχέση $f(tx)=t^\lambda f(x)$ ως προς t. Για το αντίστροφο θεωρήστε την συνάρτηση $\phi(t)=t^{-\lambda}f(tx)$ και δείξτε ότι $\phi'(t)=0$.

14. Για $a_m\in\mathbb{R}$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{m=1}^N\frac{a_m}{(x_1^{2m}+x_2^{2m}+\cdots+x_n^{2m})^{1/2m}}$ και δείξτε ότι ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=-f$.

15. Εξηγήστε γιατί το σύνολο $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (με τις συνήθεις πράξεις) είναι γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$. Εν συνεχεία θεωρήστε τον τελεστή $T:C^\infty(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, που ορίζεται από την σχέση: $T(f)=\partial f/\partial x_1$ για $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός και ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ιδιοτιμή του. Υπόδειξη: $e^{\lambda x_1}$.

16. Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ιδιοτιμή του γραμμικού τελεστή

$$S:C^\infty(\mathbb{R}^n-\{0\})\to C^\infty(\mathbb{R}^n-\{0\}),\ S(f)=\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ για } f\in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

17. Υλικό σημείο μάζας m ευρίσκεται σε ύψος h από οριζόντιο επίπεδο και βάλλεται οριζοντίως με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$, εννοείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Μετά από λίγο χρόνο τ ασκείται πάνω σε αυτό μια οριζόντια δύναμης $\vec{F}_0$, και το κινεί σε συνδυασμό με το βάρος του, μέχρις ότου αυτό συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίστε ακριβώς το σημείο που αυτό θα συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο, τον χρόνο που θα κινηθεί μέχρι που να συναντήσει το επίπεδο αυτό, καθώς και την ταχύτητα που θα έχει την στιγμή αυτή.

7. Τύποι του Taylor

7.1. Λήμμα. *Έστω* $U \subset \mathbb{R}$, *ανοικτό με* $[0,1] \subset U$, *και* $h \in C^m(U)$ *(όπου* $m \in \mathbb{N}$*). Τότε*

$$h(1) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} + \frac{h''(0)}{2!} + \cdots + \frac{h^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 h^{(m)}(t)(1-t)^{m-1}\,dt.$$

Επίσης

$$h(1) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} + \frac{h''(0)}{2!} + \cdots + \frac{h^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{h^{(m)}(\tau)}{m!}, \quad \text{για κάποιο } \tau \in [0,1].$$

Τύποι Taylor στη περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής. **1ος** Έστω $U \subset \mathbb{R}$, ανοικτό με $[\alpha,\beta] \subset U$, και $f \in C^m(U)$ (όπου $m \in \mathbb{N}$). Τότε

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(\beta-\alpha)^{m-1} + \frac{1}{(m-1)!}\int_\alpha^\beta f^{(m)}(t)(\beta-t)^{m-1}\,dt.$$

2ος Για κάποιο $\xi \in [\alpha,\beta]$,

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(\beta-\alpha)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(\beta-\alpha)^m.$$

3ος Θεωρήστε μια συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία να είναι C^m σε περιοχή του σημείου $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(x-\alpha)^m + o\big((x-\alpha)^m\big) \quad \text{του } x \to \alpha \text{, δηλαδή}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{(x-\alpha)^m}\left[f(x) - f(\alpha) - \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) - \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 - \cdots - \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(x-\alpha)^m\right] = 0.$$

Άσκηση. Δείξτε ότι για $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

7.2. Η περίπτωση των συναρτήσεων δυο μεταβλητών. Ας θεωρήσουμε μια C^m – συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για (x,y) σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, καθώς και ένα σημείο $p = (\alpha,\beta)$ του συνόλου Ω. Εν συνεχεία ας σταθεροποιήσουμε ένα άλλο σημείο $q = (x,y) \in \Omega$ ούτως ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[p,q]$, από το σημείο $p = (\alpha,\beta)$ στο σημείο $q = (x,y)$, να περιέχεται στο Ω. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $h(t) = f((1-t)p + tq)$ για $t \in [0,1]$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 8.1, με αυτή την συνάρτηση $h(t)$, παίρνουμε τον τύπο του Taylor για την συνάρτηση $f(x,y)$. Π.χ., για $(x,y) \to (\alpha,\beta)$,

1ον
$$f(x,y) = f(\alpha,\beta) + \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)(x-\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)(y-\beta) + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta)(y-\beta)^2\right] + o(|p-q|^2)$$

2ον
$$\begin{aligned} f(x,y) = f(\alpha,\beta) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)(x-\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)(y-\beta) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta)(y-\beta)^2\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2(y-\beta)\right. \\ &\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\alpha,\beta)(y-\beta)^3\right] + o(|q-p|^3). \end{aligned}$$

Διαφορικά δεύτερης και ανώτερης τάξης. Για να συντομεύσουμε και να διευκολύνουμε την γραφή των ανωτέρω τύπων εισαγάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$(df)_{(x,y)}(u,v) \overset{op}{=} \left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)f \overset{op}{=} u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}, \quad (d^2f)_{(x,y)}(u,v) \overset{op}{=} \left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \overset{op}{=} u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$(d^3f)_{(x,y)}(u,v) \overset{op}{=} \left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f \overset{op}{=} u^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3u^2v\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3uv^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+v^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τύπος του Taylor για συναρτήσεις δυο μεταβλητών. *Αν $f(x,y)$ είναι μια C^m – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[p,q] \subset \Omega$ τότε*

$$f(q)=f(p)+(df)_p(q-p)+\frac{1}{2!}(d^2f)_p(q-p)+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}(d^{m-1}f)_p(q-p)+\frac{1}{m!}(d^m f)_\xi(q-p)$$

για κάποιο σημείο $\xi \in [p,q]$. Και, καθώς το σημείο $q \to p$,

$$f(q)=f(p)+(df)_p(q-p)+\frac{1}{2!}(d^2f)_p(q-p)+\cdots+\frac{1}{m!}(d^m f)_p(q-p)+o(|q-p|^m).$$

7.3. Ασκήσεις. 1. Δείξτε ότι $e^{x\cos(xe^y)}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o((x^2+y^2)^{3/2})$, καθώς $(x,y)\to(0,0)$.

2. Δείξτε ότι καθώς $(x,y)\to(0,0)$,

$$e^{y+x\cos(xe^y)}=1+(x+y)+\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{6}(-2x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+o((x^2+y^2)^{3/2}).$$

3. Δείξτε ότι καθώς $(x,y)\to(1,1)$, $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{(x-1)^2(y-1)}{2}+o(|x-1|^3+|y-1|^3)$.

4. Δείξτε ότι καθώς $(x,y)\to(2,1)$,

$$x^y=2+[(x-2)+2\log 2(y-1)]+\frac{1}{2}[2(1+\log 2)(x-2)(y-1)+2(\log 2)^2(y-1)^2]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}(x-2)^2(y-1)+3\log 2(2+\log 2)(x-2)(y-1)^2+2(\log 2)^3(y-1)^3\right]+o(|x-2|^3+|y-1|^3).$$

5. Υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^y-x-(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)-\sin^3(|x-1|+|y-1|)}{|x-1|^3+|y-1|^3}$;

7.4 Η περίπτωση των συναρτήσεων περισσοτέρων μεταβλητών. Διαφορικά ανώτερης τάξης. Έστω $f(x_1,x_2,...,x_n)$ μια συνάρτηση, ορισμένη για $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, και έστω $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$(df)_x(u)=\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f=\sum_{1\le i\le n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$(d^2f)_x(u)=\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f=\sum_{1\le i,j\le n}u_iu_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)$$

$$(d^3f)_x(u)=\left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^3 f=\sum_{1\le i,j,k\le n}u_iu_ju_k\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(x), \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Θεώρημα του Taylor. *Έστω $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσεως C^m. Έστω ακόμη a και x δυο σημεία του Ω ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,x]\subset\Omega$. Τότε υπάρχει σημείο $\xi\in[a,x]$ ώστε*

$$f(x)=f(a)+(df)_a(x-a)+\frac{1}{2!}(d^2f)_a(x-a)+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}(d^{m-1}f)_a(x-a)+\frac{1}{m!}(d^m f)_\xi(x-a).$$

Και $f(x)=f(a)+(df)_a(x-a)+\frac{1}{2!}(d^2f)_a(x-a)+\cdots+\frac{1}{m!}(d^m f)_a(x-a)+o(|x-a|^m)$, *του* $x\to a$.

Συμβολισμός των παραγώγων με πολλαπλούς δείκτες: Για ακεραίους $k_j \geq 0$,

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k} \quad \text{όπου } k=(k_1,k_2,\ldots,k_n) \text{ και } |k| = k_1+k_2+\cdots+k_n .$$

Επίσης θα γράφουμε $x^k = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$, όταν $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Με αυτόν τον συμβολισμό

$$(d^m f)_x(u) = \left(u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + u_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f = \sum_{1\leq j_1,j_2,\ldots,j_m\leq n} u_{j_1}u_{j_2}\cdots u_{j_m}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\cdots\partial x_{j_m}} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}} = \sum_{|k|=m}\frac{m!}{k!}u^k\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k},$$

όπου βέβαια θέσαμε $k! = k_1!k_2!\cdots k_n!$. Και ο τύπος του *Taylor* λαμβάνει την μορφή:

$$f(x) = f(a) + \sum_{s=1}^{m-1}\sum_{|k|=s}\frac{1}{k!}\frac{\partial^s f}{\partial x^k}(a)(x-a)^k + \sum_{|k|=m}\frac{1}{k!}\frac{\partial^s f}{\partial x^k}(\xi)(x-a)^k, \text{ για κάποιο } \xi\in[a,x].$$

7.4. Θεώρημα του Taylor – Ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου. *Έστω $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσεως C^m. Έστω ακόμη a και x δυο σημεία του Ω ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,x]\subset\Omega$. Τότε*

$$f(x) = f(a) + (df)_a(x-a) + \frac{1}{2!}(d^2 f)_a(x-a)$$

$$+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}(d^{m-1}f)_a(x-a) + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (d^m f)_{(1-t)a+tx}(x-a)(1-t)^{m-1}\,dt .$$

7.5. Ασκήσεις. 1. «Οι συντελεστές στα αναπτύγματα Taylor είναι μοναδικοί». Εξηγήστε τί σημαίνει αυτό και αποδείξτε το.

2. Έστω $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσεως C^m. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\Omega$,

$$\lim_{y\to x}\frac{1}{|y-x|^m}\left|f(y)-f(x)-(df)_x(y-x)-\frac{1}{2}(d^2f)_x(y-x)-\cdots-\frac{1}{m!}(d^m f)_x(y-x)\right| = 0,$$

μάλιστα δε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη για x στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, δηλαδή για κάθε $K\subset\Omega$, συμπαγές, και για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta=\delta(K,\varepsilon)>0$ ούτως ώστε αν $x\in K$ και $|y-x|<\delta$ τότε να ισχύει ότι

$$\left|f(y)-f(x)-(df)_x(y-x)-\frac{1}{2}(d^2f)_x(y-x)-\cdots-\frac{1}{m!}(d^m f)_x(y-x)\right| \leq \varepsilon|y-x|^m.$$

3. Θεωρήστε την συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \alpha\nu\ x>0 \\ 0 & \alpha\nu\ x\leq 0\end{cases}$ και δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι C^∞ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ότι το $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^m}=0$, για κάθε m. Δηλαδή τα αναπτύγματα *Taylor* της f στο σημείο 0 είναι $f(x)=o(|x|^m)$ $(x\to 0)$. Δείξτε ότι το ίδιο φαινόμενο απαντάται και σε κάθε συνάρτηση της μορφής: $f(x)=\begin{cases} p(x)e^{-1/x^2} & \alpha\nu\ x>0 \\ 0 & \alpha\nu\ x\leq 0\end{cases}$ όπου $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του x. Και βέβαια τέτοια παραδείγματα υπάρχουν και στις πολλές μεταβλητές. Π.χ., θεωρήστε μια συνάρτηση της μορφής $f(x,y)=\begin{cases} p(x,y)e^{-1/(x^2+y^4)} & \alpha\nu\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \alpha\nu\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (όπου $p(x,y)$ είναι ένα πολυώνυμο των x,y) και δείξτε ότι $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=0$, για κάθε k,l, και, για κάθε m,

$$f(x,y)=o\left((x^2+y^2)^{m/2}\right),\ \text{για } (x,y)\to(0,0).$$

8. Τοπικά ακρότατα και άλλα κρίσιμα σημεία συναρτήσεων

8.1. Τοπικά ακρότατα. Θα λέγουμε ότι η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $p \in \Omega$ αν υπάρχει $r > 0$ ούτως ώστε $B(p,r) \subset \Omega$ και $f(p) \geq f(x)$ για κάθε $x \in B(p,r)$. Ομοίως η f λέγεται ότι έχει **τοπικό ελάχιστο** σε ένα τέτοιο σημείο p, αν υπάρχει $r > 0$ ούτως ώστε $B(p,r) \subset \Omega$ και $f(p) \leq f(x)$ για κάθε $x \in B(p,r)$.

8.2. Θεώρημα. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο. Αν η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $p \in \Omega$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο σημείο αυτό, τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = 0 \quad \text{για } j = 1,2,\ldots,n.$$

Ορισμός. Το σημείο $p \in \Omega$ λέγεται **κρίσιμο σημείο** μιας C^1 συνάρτησης $f : \Omega \to \mathbb{R}$, αν $(\partial f / \partial x_j)(p) = 0$ για $j = 1,2,\ldots,n$.

8.3. Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x,y) = \lambda x^2 + \mu y^2$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Το μόνο κρίσιμο σημείο αυτής είναι το $(0,0)$, το οποίο είναι:

τοπικό ελάχιστο όταν $\lambda > 0$ και $\mu > 0$ (μάλιστα πρόκειται για *ολικό* ελάχιστο),
τοπικό μέγιστο όταν $\lambda < 0$ και $\mu < 0$ (μάλιστα πρόκειται για *ολικό* μέγιστο), και
σαγματικό σημείο όταν $\lambda\mu < 0$.

2. Γενικότερα, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. Αν όλα τα λ_j είναι θετικά τότε το σημείο $0 = (0,0,\ldots 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Αν όλα τα λ_j είναι αρνητικά τότε το σημείο 0 είναι τοπικό μέγιστο. Αν όλα τα λ_j είναι διάφορα του μηδενός αλλά <u>όχι</u> ομόσημα τότε η συνάρτηση έχει στο σημείο 0 σάγμα. Αν τώρα κάποιο από τα λ_j είναι μηδέν, η συμπεριφορά της συνάρτησης f, όσον αφορά το σημείο 0, εξαρτάται από τα πρόσημα των υπολοίπων (και γενικά αυτών των λ_j που είναι $\neq 0$). Π.χ., αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_j < 0$ για $j = 2,\ldots,n$, τότε στο $0 = (0,0,\ldots 0)$ έχουμε τοπικό μέγιστο. Αν $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ και $\lambda_3 < 0$ τότε το 0 είναι σαγματικό σημείο της f.

3. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = xy$. Το σημείο $(0,0)$ είναι το μόνο κρίσιμο σημείο αυτής και είναι σαγματικό σημείο. Παρατηρήστε ότι $f(x,y) = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$, οπότε όταν αλλάξουμε συντεταγμένες, θέτοντας $u = x + y$ και $v = x - y$, η συνάρτηση γίνεται $f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{1}{4}(u^2 - v^2)$, δηλαδή η περίπτωση του παραδείγματος 1, με $\lambda = 1/4$ και $\mu = -1/4$.

8.4. Η περίπτωση των συναρτήσεων δυο μεταβλητών. Για την συνάρτηση $g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ ισχύει:

Αν $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο $(0,0)$ η $g(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο,
Αν $A > 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο $(0,0)$ η $g(x,y)$ έχει τοπικό ελάχιστο,
Αν $AC - B^2 < 0$, το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της $g(x,y)$.

Γενικότερα αν το σημείο (α, β) είναι κρίσιμο σημείο της C^2 συνάρτησης $f(x,y)$ και θέσουμε

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,\beta) \text{ και } C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta),$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

Αν $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο (α,β), η $f(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο,
Αν $A > 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο (α,β), η $f(x,y)$ έχει τοπικό ελάχιστο,
Αν $AC - B^2 < 0$, το σημείο (α,β) είναι σαγματικό σημείο της $f(x,y)$.

Παραδείγματα. 1. Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$. Υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$f_x = 3x^2 + 2xy \quad \text{και} \quad f_y = x^2 - 2y - 4,$$

και, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $\{ 3x^2 + 2xy = 0$ και $x^2 - 2y - 4 = 0 \}$, βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης: $(x, y) = (0,-2)$, $(1,-3/2)$, $(-4,6)$. Εν συνεχεία υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$f_{xx} = 6x + 2y,\ f_{xy} = 2x \text{ και } f_{yy} = -2,$$

και τις εκτιμούμε διαδοχικά στα κρίσιμα σημεία για να βρούμε τις αντίστοιχες ποσότητες A, B και C.

Στο σημείο $(x, y) = (0,-2)$: $A = -4$, $B = 0$ και $C = -2$. Και αφού $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, στο σημείο $(0,-2)$ έχουμε τοπικό μέγιστο.

Στο σημείο $(x, y) = (1,-3/2)$: $A = 3$, $B = 2$ και $C = -2$. Και αφού $AC - B^2 < 0$, το σημείο $(1,-3/2)$ είναι σαγματικό σημείο.

Τέλος, στο σημείο $(x, y) = (-4,6)$: $A = -12$, $B = -8$ και $C = -2$. Και αφού $AC - B^2 < 0$, το σημείο $(-4,6)$ είναι σαγματικό σημείο.

2. Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x, y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$. Υπολογίζουμε

$$f_x = 2xy^2 - 10x - 8y,\ f_y = 2x^2y - 8x - 10y.$$

Για να λύσουμε το σύστημα

$$2xy^2 - 10x - 8y = 0 \quad \text{και} \quad 2x^2y - 8x - 10y = 0,$$

πολλαπλασιάζουμε την πρώτη των εξισώσεων με x και την δεύτερη με y και βρίσκουμε

$$2x^2y^2 - 10x^2 - 8xy = 0 \quad \text{και} \quad 2x^2y^2 - 8xy - 10y^2 = 0.$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε ότι $x^2 = y^2$, δηλαδή $x = y$ ή $x = -y$.

Εύκολα τώρα βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία τα οποία είναι: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(3,3)$ και $(-3,-3)$. Υπολογίζουμε εν συνεχεία τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$f_{xx} = 2y^2 - 10,\ f_{xy} = 4xy - 8,\ f_{yy} = 2x^2 - 10.$$

και βρίσκουμε ότι:

Στο σημείο $(0,0)$, $A < 0$ και $AC - B^2 > 0$, οπότε έχουμε τοπικό μέγιστο.

Στο σημείο $(1,-1)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

Στο σημείο $(-1,1)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

Στο σημείο $(3,3)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

Στο σημείο $(-3,-3)$, $AC - B^2 < 0$, οπότε έχουμε σάγμα.

8.5. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

$f(x, y) = 12xy - 3x^2y - 4xy^2$,

$f(x, y) = y^3 - 3x^2y$,

$f(x, y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$,

$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 6y$, $f(x, y) = (x-1)(x^2 - y^2)$,

$f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$,

$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$.

2. Για $a > b > 0$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Δείξτε ότι

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = a/e.$$

3. Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύστημα

$$3x^2 + 2xy^5 + y - 2x^4 - 2x^3y^5 - 2x^2y = 0,\ 5xy^4 + 1 - 2x^2y - 2xy^6 - 2y^2 = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον λύση (α, β) με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x, y) = (x^3 + x^2y^5 + xy)e^{-(x^2+y^2)}$.

8.6. Αλγεβρικά προκαταρκτικά: Τετραγωνικές μορφές. 1. Φασματικό Θεώρημα. *Έστω* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *ένας συμμετρικός πίνακας* $n \times n$ *με* $a_{ij} \in \mathbb{R}$. *Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *αποτελούμενη από ιδιανύσματα του* A. *Μάλιστα αν* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του* A *τότε*

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} = \max\{t \cdot A \cdot t^T \,:\, t \in \mathbb{R}^n,\ |t| = 1\} \quad \text{και} \quad \min\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} = \min\{t \cdot A \cdot t^T \,:\, t \in \mathbb{R}^n,\ |t| = 1\}.$$

Επίσης $CAC^T = \Lambda$, *όπου* Λ *είναι ο διαγώνιος πίνακας*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

και C *είναι ο ορθογώνιος πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα* $v_1, v_2, ..., v_n$.

2. Θεώρημα. *Έστω* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *ένας συμμετρικός πίνακας* $n \times n$ *με* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *και*

$$Q(t) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} t_i t_j, \quad t = (t_1, t_2, ..., t_n),$$

η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Τότε

$Q(t) > 0$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι θετικές.*

Και ομοίως, $Q(t) < 0$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι αρνητικές.*

3. Θεώρημα του Sylvester. *Έστω* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *ένας συμμετρικός πίνακας* $n \times n$ *με* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *και*

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \Delta_4 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \text{ κ.ο.κ.}$$

Τότε

1. *Οι ιδιοτιμές του* A *είναι όλες θετικές αν και μόνο αν* $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.
2. *Οι ιδιοτιμές του* A *είναι όλες αρνητικές αν και μόνο αν* $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$.
3. *Αν* $\Delta_j \ne 0$ *για κάθε* $j = 1, 2, ..., n$, *και δυο τουλάχιστον από τους αριθμούς* $\Delta_1, \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}, ..., \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ *είναι ετερόσημοι τότε ο πίνακας* A *έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.*

8.7. Ταξινόμηση κρισίμων σημείων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων μιας συνάρτησης. Δοθείσης συνάρτησης $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ο πίνακας

$$(Hf)(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **Hessian** της συνάρτησης f στο σημείο x — όταν γράφουμε $(Hf)(x)$ εννοούμε ότι οι παράγωγοι εκτιμούνται στο σημείο x. Πρόκειται βέβαια για έναν συμμετρικό πίνακα, και την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή

$$(\mathcal{H}f)_x(t) = \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) t_i t_j,$$

θα την ονομάζουμε ***Hessian* form** της συνάρτησης f στο σημείο x.

Θεώρημα. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια C^2 – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής. Αν όλες οι ιδιοτιμές της Hessian $(Hf)(a)$ είναι θετικές τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο a. Αν όλες οι ιδιοτιμές της $(Hf)(a)$ είναι αρνητικές τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο a. Και αν η $(Hf)(a)$ έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές, το σημείο a είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης.*

8.8. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

$$f(x,y,z)=x^2+xy+y^2+z^2,\ f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1^2+x_2^2+3x_1x_2+4x_3x_5+x_4x_5,$$
$$f(x,y,z)=xyz(4-x-y-z),\ f(x,y,z)=x^3-3x-y^3+9y+z^2,$$
$$f(x,y,z)=x^3+xz^2+3x^2+y^2+2z^2,\ f(x,y,z)=(3x^2+2y^2+z^2)e^{-x^2-y^2-z^2},$$
$$f(x,y,z)=x^3+xz^2-3x^2+y^2+2z^2,\ f(x,y,z)=x^3+xyz+y^2-3x,$$
$$f(x,y,z)=e^x(x^2-y^2-2z^2),\ f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+xyz.$$

2. Έστω $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n\times n$ με $a_{ij}\in\mathbb{R}$ και $Q(t)=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}t_it_j$, $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Δείξτε ότι $t\cdot A\cdot t^T=Q(t)$. Εν συνεχεία, και χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα, αποδείξτε το *θεώρημα 2 της 9.6.*

3. Έστω $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ένας συμμετρικός πίνακας $n\times n$ με $a_{ij}\in\mathbb{R}$ και $Q(t)=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}t_it_j$, $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Δείξτε ότι αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές τότε υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $Q(t)\ge\lambda|t|^2$ για κάθε $t\in\mathbb{R}^n$.

4. Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια C^2 – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή της Hessian $(Hf)(a)$ και v ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $|v|=1$, ορίζουμε την συνάρτηση $g(s)=f(a+sv)$, για $s\in\mathbb{R}$, κοντά στο 0. Δείξτε ότι τότε $g'(0)=0$ και $g''(0)=\lambda$, και συνεπώς $g(s)=g(0)+\frac{\lambda}{2}s^2+o(|s|^2)$, καθώς $s\to0$.

5. Σωστό ή λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1,x_2,...,x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le1$ και C^1 για $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$, και αν $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|>0$ όταν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$, τότε υπάρχουν $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ και $f(x_1,x_2,...,x_n)<f(a_1,a_2,...,a_n)$ όταν $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$.

6. Σωστό ή λάθος; Αν η πραγματική συνάρτηση $f(x_1,x_2,...,x_n)$ είναι συνεχής για $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|\le1$ και C^1 για $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|<1$, και αν

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|>0 \text{ όταν } x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|<1,$$

τότε υπάρχουν $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4+|a_1a_2\cdots a_n|=1$ και

$$f(x_1,x_2,...,x_n)<f(a_1,a_2,...,a_n) \text{ όταν } x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4+|x_1x_2\cdots x_n|<1.$$

7. Σωστό ή λάθος; Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι C^2 σε περιοχή του σημείου $0\in\mathbb{R}^n$ και στο σημείο αυτό η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο τότε

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sqrt{2f(x)-2f(0)-\sum_{j,k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(0)x_jx_k}\right)}{e^{|x|}-1}=0.$$

8.9. Θεώρημα. *Αν $f:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι μια C^2 – συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$ ένα κρίσιμο σημείο αυτής τότε υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{v_1,...,v_n\}$ ούτως ώστε η συνάρτηση f σχετικά με το σύστημα αυτό να γράφεται στην μορφή:*

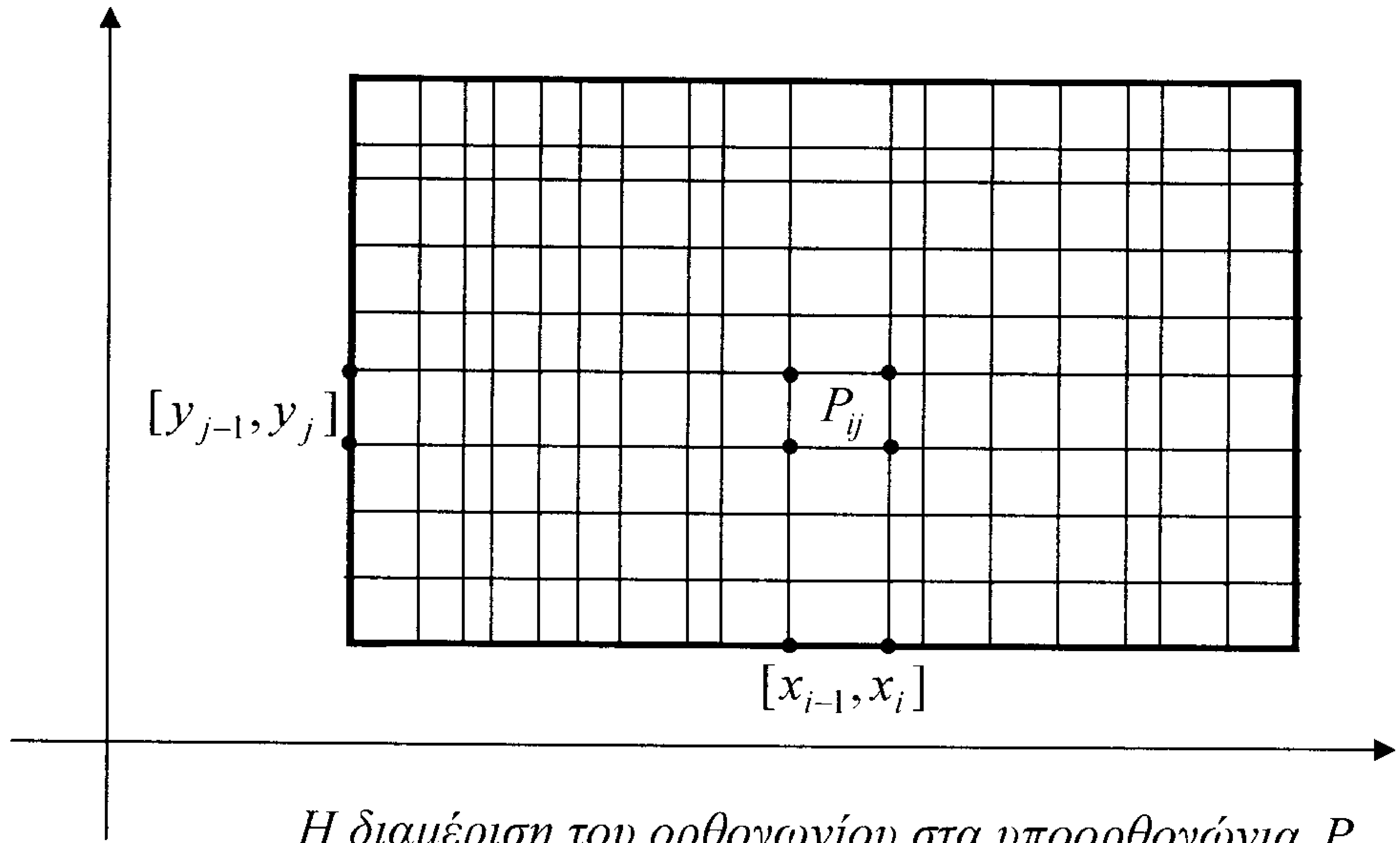
$$f(a+s_1v_1+\cdots+s_nv_n)=f(a)+\frac{1}{2}\left(\lambda_1s_1^2+\lambda_2s_2^2+\cdots+\lambda_ns_n^2\right)+o(|s|^2),\ \textit{καθώς}\ s\to0.$$

12. Διπλά ολοκληρώματα

12.1. Ορισμός διπλού ολοκληρώματος. Μια διαμέριση $P=\{P_{ij}\}$ του ορθογωνίου

$$\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]=\{(x,y):\ \alpha\le x\le\beta,\ \gamma\le y\le\delta\}$$

στο $xy-$επίπεδο αποτελείται από μια διαμέριση $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_N=\beta$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και από μια διαμέριση $\gamma=y_0<y_1<\cdots<y_M=\delta$ του διαστήματος $[\gamma,\delta]$, οι οποίες διαμερίσεις ορίζουν τα υποορθογώνια P_{ij} της P, δηλαδή $P_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $i=1,2,\ldots,N$ και $j=1,2,\ldots,M$.



Η διαμέριση του ορθογωνίου στα υποορθογώνια P_{ij}.

Σε ένα τέτοιο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$, θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση $f:\Pi\to\mathbb{R}$. Για κάθε διαμέριση $P=\{P_{ij}\}$ του ορθογωνίου Π ορίζουμε τα αντίστοιχα **άνω** και **κάτω** αθροίσματα της συνάρτησης f, ως εξής:

$$U(f,P)=\sum_{i,j}\sup\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}\,\mathcal{E}\mu\beta(P_{ij})\quad\text{και}\quad L(f,P)=\sum_{i,j}\inf\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}\,\mathcal{E}\mu\beta(P_{ij}).$$

Προφανώς $L(f,P)\le U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του ορθογωνίου Π. Αλλά, επιπλέον,

$$L(f,P)\le U(f,T)\ \text{ για κάθε } P,T \text{ διαμερίσεις του } \Pi,$$

και συνεπώς $\sup\limits_P L(f,P)\le\inf\limits_T U(f,T)$, όπου P και T διατρέχουν το σύνολο των διαμερίσεων του Π. Ορίζουμε το **κάτω ολοκλήρωμα** $\mathcal{L}\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy$ της συνάρτησης f πάνω στο ορθογώνιο Π από τον τύπο

$$\mathcal{L}\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy=\sup_P L(f,P),$$

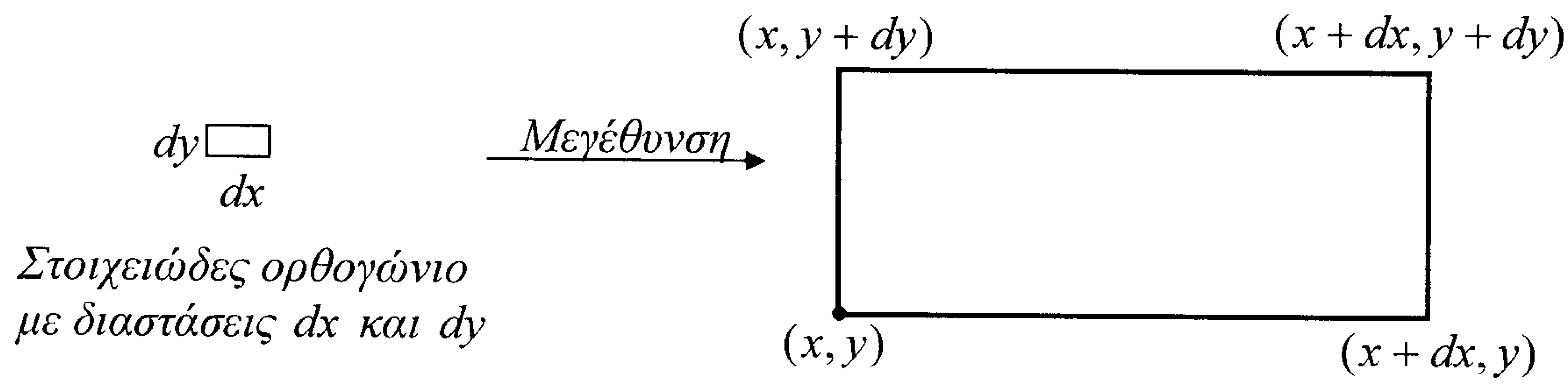
και ομοίως ορίζεται και το **άνω ολοκλήρωμα**

$$\mathcal{U}\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy=\inf_P U(f,P).$$

Και βέβαια για κάθε φραγμένη συνάρτηση f ισχύει $\mathcal{L}\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy\le\mathcal{U}\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy$. Η φραγμένη συνάρτηση $f:\Pi\to\mathbb{R}$ λέγεται ότι είναι **ολοκληρώσιμη** — κατά *Riemann* — πάνω στο ορθογώνιο Π αν στην ανωτέρω σχέση ισχύει η ισότητα, την δε κοινή τιμή του άνω και κάτω ολοκληρώματος την ονομάζουμε ολοκλήρωμα — **διπλό ολοκλήρωμα** — της συνάρτησης f πάνω στο Π, και το συμβολίζουμε με $\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy$. Δηλαδή τότε

$$\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy=\mathcal{L}\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy=\mathcal{U}\iint\limits_{\Pi}f(x,y)dxdy.$$

Επίσης στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\mathcal{I}$ με την ιδιότητα: $L(f,P) \le \mathcal{I} \le U(f,P)$, για κάθε διαμέριση P του Π.



Το ολοκλήρωμα $\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy$ είναι
*το **«συνεχές άθροισμα»** των στοιχειωδών ποσοτήτων $f(x,y)dxdy$.*

12.2. Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann. *Μια φραγμένη συνάρτηση $f:\Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P_0 = P_0(\varepsilon)$ του ορθογωνίου Π, ούτως ώστε*

$$U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon .$$

Τότε μάλιστα $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ για κάθε διαμέριση P λεπτότερη από την P_0.

12.3. Ιδιότητες του ολοκληρώματος και βασικά θεωρήματα. 1. ***Το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης.*** Η σταθερή συνάρτηση 1 είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε ορθογώνιο Π και ότι το ολοκλήρωμά της είναι το **εμβαδόν** του Π: $\iint\limits_{\Pi} 1dxdy = \iint\limits_{\Pi} dxdy = \mathcal{E}\mu\beta(\Pi)$. Και γενικότερα το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης λ είναι

$$\iint\limits_{\Pi} \lambda dxdy = \lambda \iint\limits_{\Pi} dxdy = \lambda\, \mathcal{E}\mu\beta(\Pi).$$

2. ***Το ολοκλήρωμα σαν όγκος στερεού.*** Αν $f:\Pi \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση ≥ 0, τότε η τιμή του ολοκληρώματος $\iint\limits_{\Pi} f$ είναι ίση με τον **όγκο** του στερεού $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Pi \text{ και } 0 \le z \le f(x,y)\}$.

3. ***Η γραμμικότητα του ολοκληρώματος.*** Αν $f,g:\Pi \to \mathbb{R}$ είναι δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τότε και το άθροισμα αυτών είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα $\iint\limits_{\Pi}(f+g) = \iint\limits_{\Pi} f + \iint\limits_{\Pi} g$. Και αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση λf είναι ολοκληρώσιμη και $\iint\limits_{\Pi} \lambda f = \lambda \iint\limits_{\Pi} f$.

4. ***Ολοκλήρωμα και διάταξη συναρτήσεων.*** Αν οι συναρτήσεις $f,g:\Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες και $f \le g$, τότε $\iint\limits_{\Pi} f \le \iint\limits_{\Pi} g$. Ιδιαιτέρως αν $m \le f(x,y) \le M$ για κάθε $(x,y) \in \Pi$, τότε

$$m \cdot \mathcal{E}\mu\beta(\Pi) \le \iint\limits_{\Pi} f \le M \cdot \mathcal{E}\mu\beta(\Pi).$$

Και αφού $-\sup\limits_{\Pi}|f| \le f \le \sup\limits_{\Pi}|f|$, έπεται ότι $\left|\iint\limits_{\Pi} f\right| \le \sup\limits_{\Pi}|f| \cdot \mathcal{E}\mu\beta(\Pi)$.

5. ***Ολοκληρωσιμότητα της απολύτου τιμής μιας συνάρτησης.*** Αν η συνάρτηση $f:\Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $|f|$. Επίσης έχουμε την τριγωνική ανισότητα:

$$\left|\iint\limits_{\Pi} f\right| \le \iint\limits_{\Pi} |f|.$$

Αν τώρα $f,g:\Pi \to \mathbb{R}$ είναι δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις

$$\max(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{και} \quad \min(f,g)=\frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Ιδιαιτέρως, αν $f:\Pi\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις

$$f^{+}=\max(f,0) \quad \text{και} \quad f^{-}=-\min(f,0).$$

Και αφού $f=f^{+}-f^{-}$, έπεται ότι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι διαφορά δυο μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

6. ***Γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη.***

7. ***Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων.*** Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

8. Ολοκληρωσιμότητα της σύνθεσης $\phi\circ f$ με συνεχή ϕ και ολοκληρώσιμη f. Έστω $f:\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, και ας πούμε ότι $m\le f(x,y)\le M$, για κάθε $(x,y)\in\Pi$, όπου $-\infty<m<M<\infty$. Ας θεωρήσουμε επίσης μια συνεχή συνάρτηση $\phi:[m,M]\to\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $\phi\circ f:\Pi\to\mathbb{R}$.

12.4. Θεώρημα. *Έστω $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση πάνω στο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Μάλιστα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση $P=\{Q\}$ του ορθογωνίου Π, της οποίας η λεπτότητα $\|P\|=\max\{diam(Q):Q\in P\}<\eta$, και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_Q\in Q$, ως προς την διαμέριση αυτή, να έχουμε $\left|\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)-\iint_{\Pi} f\right|<\varepsilon$. Δηλαδή $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)=\iint_{\Pi} f$.*

12.5. Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας και ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων. Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^2$ λέγεται ότι έχει **περιεχόμενο μηδέν** αν, για κάθε $\varepsilon>0$, είναι δυνατόν να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους ορθογώνια συνολικού εμβαδού μικρότερου του ε. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν ορθογώνια $R_1,R_2,\dots,R_N$ (που εξαρτώνται από το ε), ούτως ώστε

$$A\subset R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_N \quad \text{και} \quad \mathcal{E}\mu\beta(R_1)+\mathcal{E}\mu\beta(R_2)+\cdots+\mathcal{E}\mu\beta(R_N)<\varepsilon.$$

Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^2$ λέγεται ότι έχει **μέτρο μηδέν** αν, για κάθε $\varepsilon>0$, είναι δυνατόν να καλυφθεί από αριθμήσιμου πλήθους ορθογώνια συνολικού εμβαδού μικρότερου του ε. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν ορθογώνια $R_1,R_2,R_3,\dots$ (που εξαρτώνται από το ε), ούτως ώστε

$$A\subset R_1\cup R_2\cup R_3\cup\cdots \quad \text{και} \quad \mathcal{E}\mu\beta(R_1)+\mathcal{E}\mu\beta(R_2)+\mathcal{E}\mu\beta(R_3)+\cdots<\varepsilon.$$

Πρόταση. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή συνάρτηση $\phi:[\lambda,\mu]\to\mathbb{R}$. Τότε το γράφημά της στο επίπεδο, δηλαδή το σύνολο $A=\{(x,y):y=\phi(x),\ x\in[\lambda,\mu]\}$, έχει περιεχόμενο μηδέν.

12.6. Θεώρημα. (*Lebesgue*) *Έστω $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση πάνω στο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ και A_f το σύνολο των σημείων του Π στα οποία η συνάρτηση f είναι ασυνεχής. Τότε η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το μέτρο του συνόλου A_f είναι μηδέν.*

12.7. Θεώρημα. *Έστω $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση πάνω στο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση $P=\{Q\}$ του ορθογωνίου Π, της οποίας η λεπτότητα $\|P\|<\eta$, και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_Q\in Q$, ως προς την διαμέριση αυτή, να έχουμε*

$$\left|\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)-\iint_{\Pi} f\right|<\varepsilon.$$

Αλλά και αντίστροφα, αν $f:\Pi\to\mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση και $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)=\mathcal{I}$, για κάποιον αριθμό $\mathcal{I}$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\iint_{\Pi} f=\mathcal{I}$.

Εφαρμογή. $\lim_{N,M\to\infty}\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{NM}\sum_{\substack{1\le k\le N\\ 1\le l\le M}} f\left(\alpha+\frac{k}{N}(\beta-\alpha),\gamma+\frac{l}{M}(\delta-\gamma)\right)=\iint_{\Pi} f$ (Η συνάρτηση f υποτίθεται ολοκληρώσιμη). Ιδιαιτέρως

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{N^2}\sum_{1\le k,l\le N} f\left(\alpha+\frac{k}{N}(\beta-\alpha),\gamma+\frac{l}{N}(\delta-\gamma)\right)=\iint_{\Pi} f .$$

12.8. Ολοκλήρωμα σε σύνολα των οποίων το σύνορο έχει μέτρο μηδέν. Ας θεωρήσουμε ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο $D\subset\mathbb{R}^2$ και μια συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$. Θα ορίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D f(x,y)dxdy ,$$

της συνάρτησης f πάνω στο D, με την προϋπόθεση το σύνορο του D να έχει μέτρο μηδέν. Για τον σκοπό αυτόν, ας παρατηρήσουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου D, δηλαδή η συνάρτηση

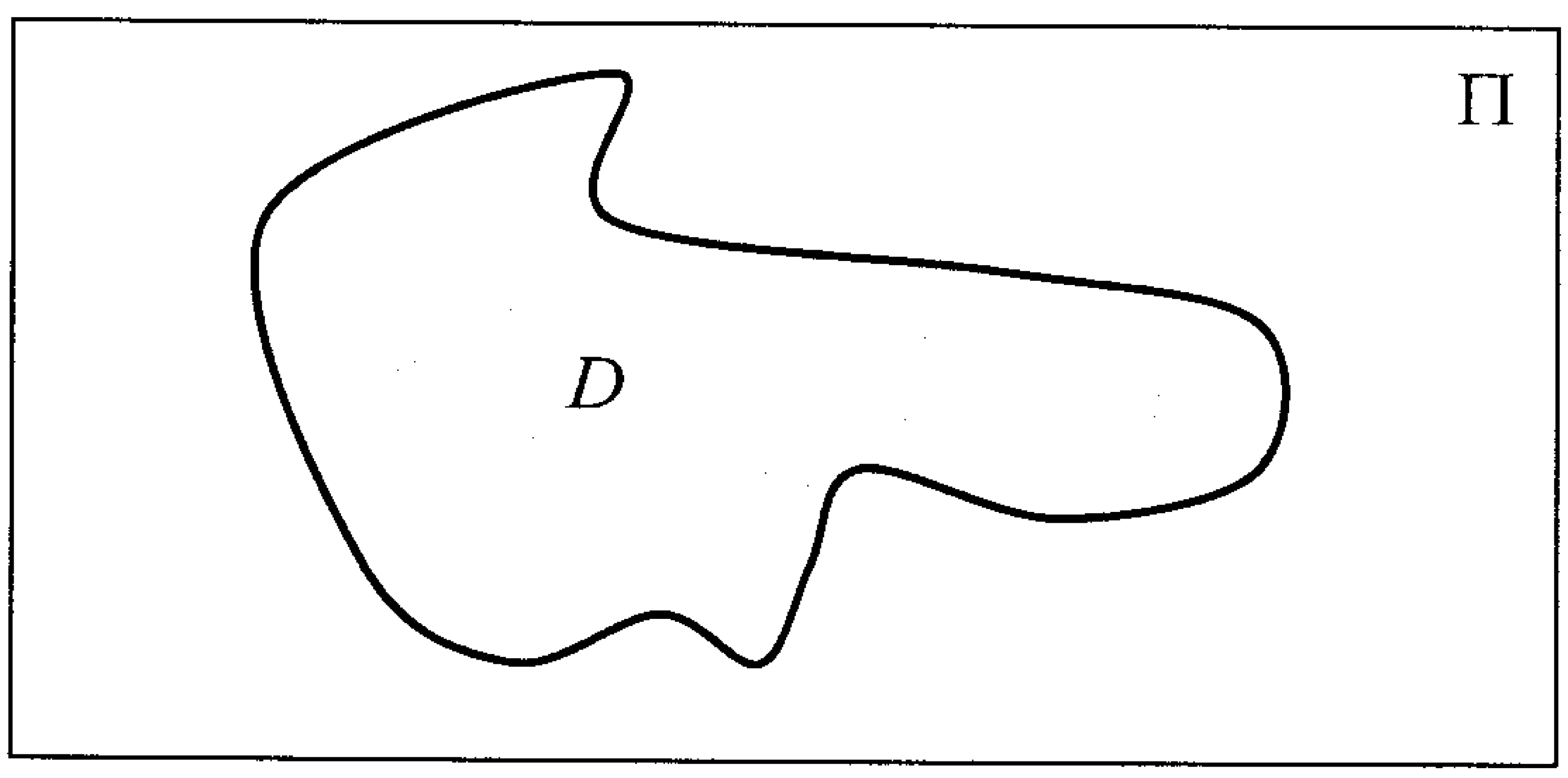
$$\chi_D:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \chi_D(x,y)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ (x,y)\in D\\ 0 & \alpha\nu\ (x,y)\notin D,\end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathbb{R}^2-\partial D$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο του ∂D. Συνεπώς η συνάρτηση $\chi_D f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathbb{R}^2-\partial D$. Βέβαια εννοείται ότι

$$(\chi_D f)(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & \alpha\nu\ (x,y)\in D\\ 0 & \alpha\nu\ (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Αν επομένως πάρουμε ένα ορθογώνιο Π με $\Pi\supset\overline{D}$, και $A_{\chi_D f}$ είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της συνάρτησης $\chi_D f|_{\Pi}$, τότε $A_{\chi_D f}\subset\partial D$, και συνεπώς το μέτρο του συνόλου $A_{\chi_D f}$ είναι μηδέν. Επομένως η συνάρτηση $\chi_D f$ είναι ολοκληρώσιμη πάνω στο Π, και ορίζουμε

$$\iint_D f=\iint_D f(x,y)dxdy\overset{o\rho}{=}\iint_{\Pi}\chi_D f .$$



Παίρνουμε ένα ορθογώνιο $\Pi\supset\overline{D}$ *και ορίζουμε:* $\iint_D f=\iint_{\Pi}\chi_D f$.

Ιδιαιτέρως ορίζεται το ολοκλήρωμα $\iint_{\Pi}\chi_D f$ με $f\equiv 1$, και αυτό δίνει το **εμβαδόν** του συνόλου D:

$$\mathcal{E}\mu\beta(D)\overset{o\rho}{=}\iint_D dxdy=\iint_{\Pi}\chi_D dxdy .$$

Βέβαια εξακολουθούμε να υποθέτουμε ότι το μέτρο του ∂D είναι μηδέν. Γενικότερα, αν η συνεχής συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ είναι μη αρνητική, το ολοκλήρωμα $\iint_D f$ δίνει τον **όγκο** $\mathcal{O}\gamma\kappa(G)$ του στερεού:

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:0<z<f(x,y)\ \kappa\alpha\iota\ (x,y)\in D\}.\ \text{Δηλαδή}\ \mathcal{O}\gamma\kappa(G)=\iint_D f(x,y)dxdy .$$

12.9. Βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος $\iint_D f$. 1. Προσθετικότητα του ολοκληρώματος $\iint_D f$ ως προς το σύνολο D. Δηλαδή αν D_1 και D_2 είναι δυο ανοικτά σύνολα στο επίπεδο των οποίων τα σύνορα έχουν μέτρο μηδέν, και $D_1\cap D_2=\varnothing$, και αν $f:\overline{D_1\cup D_2}\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε $\iint_{D_1\cup D_2} f=\iint_{D_1} f+\iint_{D_2} f$.

Ιδιαιτέρως $\mathcal{E}\mu\beta(D_1 \cup D_2) = \mathcal{E}\mu\beta(D_1) + \mathcal{E}\mu\beta(D_2)$.

2. Αν τώρα τα σύνολα D_1, D_2 δεν είναι ξένα μεταξύ των, ισχύει το εξής:

$$\mathcal{E}\mu\beta(D_1 \cup D_2) \le \mathcal{E}\mu\beta(D_1) + \mathcal{E}\mu\beta(D_2).$$

Αυτό έπεται από το ότι $\chi_{D_1 \cup D_2} \le \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$. Και γενικότερα

$$\mathcal{E}\mu\beta(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_N) \le \mathcal{E}\mu\beta(D_1) + \mathcal{E}\mu\beta(D_2) + \cdots + \mathcal{E}\mu\beta(D_N).$$

3. Για συνεχείς συναρτήσεις $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $\left|\iint_D f\right| \le \sup_D |f| \cdot \mathcal{E}\mu\beta(D)$. Και γενικότερα αν $m \le f \le M$ στα σημεία του D, τότε $m \cdot \mathcal{E}(D) \le \iint_D f \le M \cdot \mathcal{E}\mu\beta(D)$.

4. Αν $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, $f \ge 0$ και $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$ τότε $f \equiv 0$.

5. Σύνολα με μέτρο μηδέν είναι αμελητέα για την ολοκλήρωση.

Ορισμός. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο, του οποίου το σύνορο έχει μέτρο μηδέν, και $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε σύνολο E, με $D \subset E \subset \overline{D}$, ορίζουμε

$$\iint_E f \overset{op}{=} \iint_D f.$$

Πρακτικά, η σημασία του ανωτέρω ορισμού είναι η εξής: Όταν γράφουμε ένα ολοκλήρωμα $\iint_E f$ δεν χρειάζεται να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί για το εάν το σύνολο E είναι ένα ανοικτό σύνολο D ή το D μαζί με κάποια σημεία του ∂D. Εκείνο όμως που έχει οπωσδήποτε ιδιαίτερη σημασία είναι η συνάρτηση να είναι ορισμένη και φραγμένη πάνω στο $\overline{D}$, μάλιστα δε εμείς την υποθέσαμε και συνεχή στο $\overline{D}$. Αλλιώς, ενδέχεται να υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης του ολοκληρώματος $\iint_E f$, στα οποία θα επανέλθουμε αργότερα.

12.10. Ολοκληρώματα και φυσικά μεγέθη. Έχουμε ήδη δει ότι το διπλό ολοκλήρωμα είναι $\iint_D f(x,y)dxdy$ είναι ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από την επιφάνεια $z = f(x,y)$. Εκτός αυτής της γεωμετρικής εφαρμογής, υπάρχουν πάμπολλες εφαρμογές του ολοκληρώματος κυρίως στον υπολογισμό φυσικών μεγεθών, και στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε κάποιες από αυτές.

Μέση τιμή συνάρτησης. Δοθείσης συνάρτησης $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ο αριθμός

$$\bar{f} = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)} \iint_D f(x,y)dxdy,$$

λέγεται μέση τιμή της συνάρτησης f πάνω στο σύνολο D.

Κέντρο μάζας μιας επίπεδης πλάκας. Δοθείσης ομογενούς επίπεδης πλάκας $D \subset \mathbb{R}^2$, στο $xy-$επίπεδο, το κέντρο μάζας αυτής έχει συντεταγμένες το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$, όπου

$$\bar{x} = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)} \iint_D x dxdy \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)} \iint_D y dxdy.$$

Ροπή αδρανείας μιας επίπεδης πλάκας. Δοθείσης επίπεδης πλάκας $D \subset \mathbb{R}^2$, στο $xy-$επίπεδο, με σταθερή πυκνότητα $\rho = 1$, η ροπή αδρανείας αυτής ως προς κάποιον άξονα περιστροφής α του $xyz-$χώρου, δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$I_\alpha = \iint_D (dist[(x,y),\alpha])^2 dxdy,$$

όπου $dist[(x,y),\alpha]$ είναι η απόσταση του σημείου (x,y) από τον άξονα α. Η σημασία της ποσότητας I_α είναι ότι όταν η πλάκα D περιστρέφεται γύρω από τον άξονα α με γωνιακή ταχύτητα ω, τότε η κινητική της ενέργεια που οφείλεται σε αυτή την περιστροφή είναι ίση με $I_\alpha \omega^2 / 2$.

12.11. Ασκήσεις. 1. Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{N,M\to\infty} \frac{M}{N^{1+\sqrt{2}}} \sum_{\substack{1\le k\le N \\ 1\le l\le M}} \frac{k^{\sqrt{2}}}{M^2 + l^2}, \quad \lim_{N,M\to\infty} \frac{1}{N^{1+\pi}} \sum_{\substack{1\le k\le N \\ 1\le l\le M}} \frac{k^{\pi}}{\sqrt{M^2 + l^2}}.$$

2. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν. Δείξτε ότι αν $f_k : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,3,...$, είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ τότε $\iint_D f_k \to \iint_D f$ του $k \to \infty$.

3. Κατασκευάστε ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, του οποίου το σύνορο να μην έχει περιεχόμενο (ή μέτρο) μηδέν.

4. Θεωρήστε μια συνεχή συνάρτηση $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ και δείξτε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\left(\iint_D |f|^k\right)^{1/k} = \max_D |f|.$$

5. Θεωρήστε τον γραμμικό χώρο $C([\alpha,\beta])$ των συνεχών συναρτήσεων της μορφής $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ και ορίστε την απεικόνιση $(f,g) \to \langle f,g\rangle$ με

$$\langle f,g\rangle = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt, \text{ για } f,g \in C([\alpha,\beta]).$$

Δείξτε ότι η σύζευξη $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $C([\alpha,\beta])$ με αντίστοιχη νόρμα

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_{t=\alpha}^{\beta} f^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Ιδιαιτέρως δείξτε την ανισότητα *Cauchy-Schwarz* $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\|g\|$ και την τριγωνική ανισότητα $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$. Πότε ισχύει η ισότητα $|\langle f,g\rangle| = \|f\|\|g\|$; Πότε ισχύει η ισότητα $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$;

Υπόδειξη: $\langle f-\lambda g, f-\lambda g\rangle \ge 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Διατυπώστε και αποδείξτε τα ανάλογα της προηγούμενης άσκησης με τον χώρο $C(\overline{D})$ των συνεχών συναρτήσεων της μορφής $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ και το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle = \iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy, \text{ για } f,g \in C(D).$$

7. Έστω p,q θετικοί αριθμοί με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Αποδείξτε την ανισότητα του *Hölder*:

$$\left|\int_{t=\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt\right| \le \left(\int_{t=\alpha}^{\beta} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{t=\alpha}^{\beta} |g(t)|^q dt\right)^{1/q},$$

καθώς και την ανάλογη ανισότητα για διπλά ολοκληρώματα.

8. Αποδείξτε την ανισότητα του *Minkowski*:

$$\left(\int_{t=\alpha}^{\beta} |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \le \left(\int_{t=\alpha}^{\beta} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_{t=\alpha}^{\beta} |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad (p \ge 1),$$

καθώς και την ανάλογη ανισότητα για διπλά ολοκληρώματα.

12.12. Θεώρημα του Fubini. *Έστω* $\Pi = [\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ *ένα ορθογώνιο στο* $xy-$*επίπεδο και* $f : \Pi \to \mathbb{R}$ *μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε ένα από τα* $x \in [\alpha,\beta]$*, θέτουμε* $g_x(y) = f(x,y)$*,* $y \in [\gamma,\delta]$*, και ορίζουμε τις συναρτήσεις* $g_x : [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$*. Επίσης θεωρούμε τις συναρτήσεις*

$$\mathcal{L}(x) \overset{op}{=} \mathcal{L}\int_{\gamma}^{\delta} g_x = \mathcal{L}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy \quad \textit{και} \quad \mathcal{U}(x) \overset{op}{=} \mathcal{U}\int_{\gamma}^{\delta} g_x = \mathcal{U}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy,$$

ορισμένες για $x \in [\alpha,\beta]$*. Τότε οι συναρτήσεις* $\mathcal{L}$ *και* $\mathcal{U}$ *είναι ολοκληρώσιμες πάνω στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$*, και μάλιστα*

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{U}(x)dx.$$

Πόρισμα. *Αν επιπλέον οι συναρτήσεις* $g_x:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$, $x\in[\alpha,\beta]$, *είναι όλες ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy\right)dx.$$

Και αν για τα $y\in[\gamma,\delta]$, *ορίσουμε και τις συναρτήσεις*

$$h_y:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R},\ \text{με}\ h_y(x)=f(x,y),\ \alpha\le x\le\beta,$$

και υποθέσουμε ότι και αυτές είναι όλες ολοκληρώσιμες πάνω στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, *τότε*

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy\right)dx=\int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx\right)dy.$$

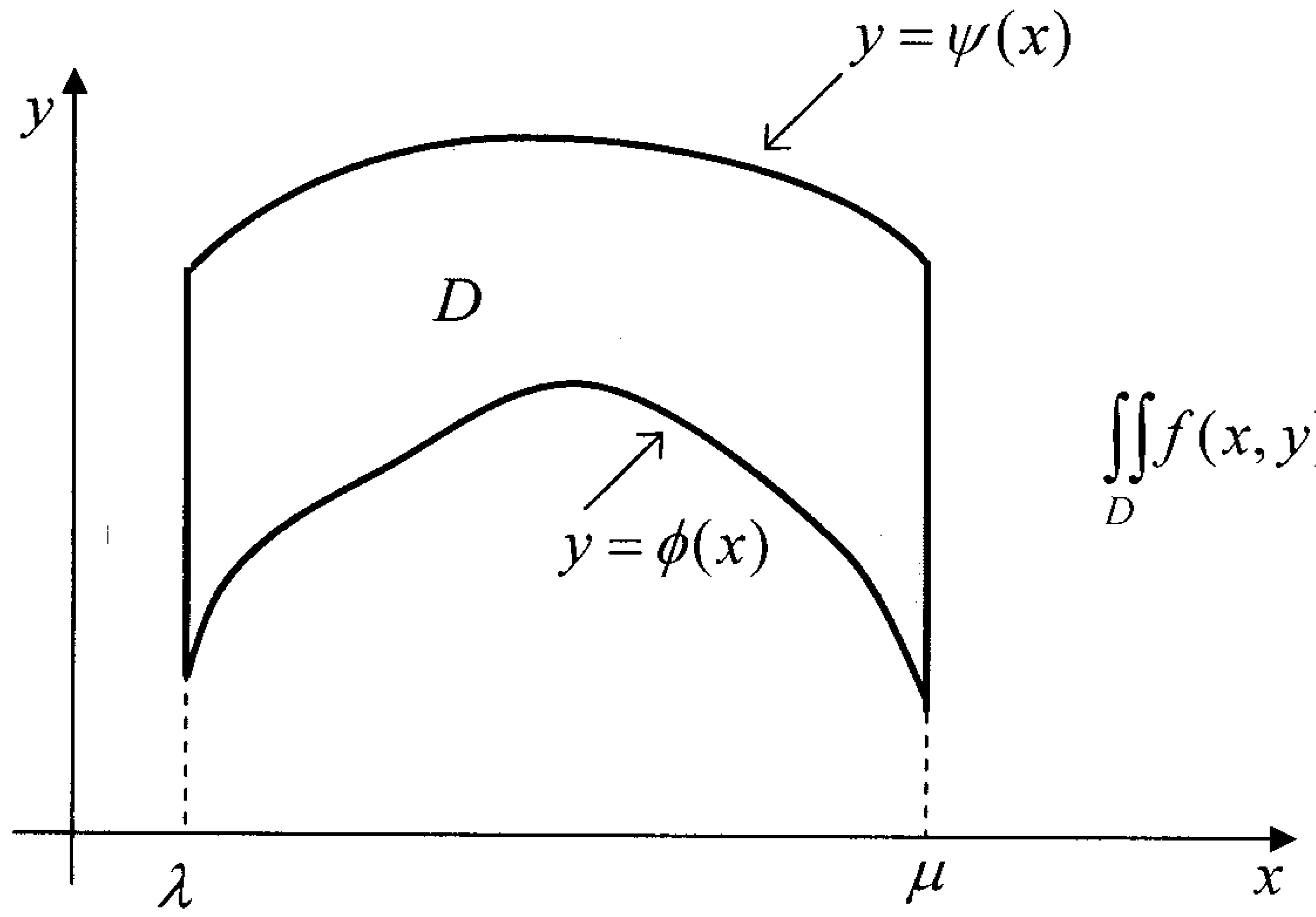
Στην πράξη το *Θεώρημα του Fubini* χρησιμοποιείται συνήθως υπό την μορφή του πορίσματος, και ακόμα ειδικότερα υπό την μορφή του ακόλουθου θεωρήματος.

12.13. Θεώρημα. *Ας θεωρήσουμε δυο συνεχείς συναρτήσεις* $\phi,\psi:[\lambda,\mu]\to\mathbb{R}$, *για τις οποίες να ισχύει* $\phi(x)<\psi(x)$ *για κάθε* $x\in[\lambda,\mu]$, *και ας ορίσουμε το ανοικτό σύνολο*

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[\lambda,\mu]\ \text{και}\ \phi(x)<y<\psi(x)\}.$$

Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$,

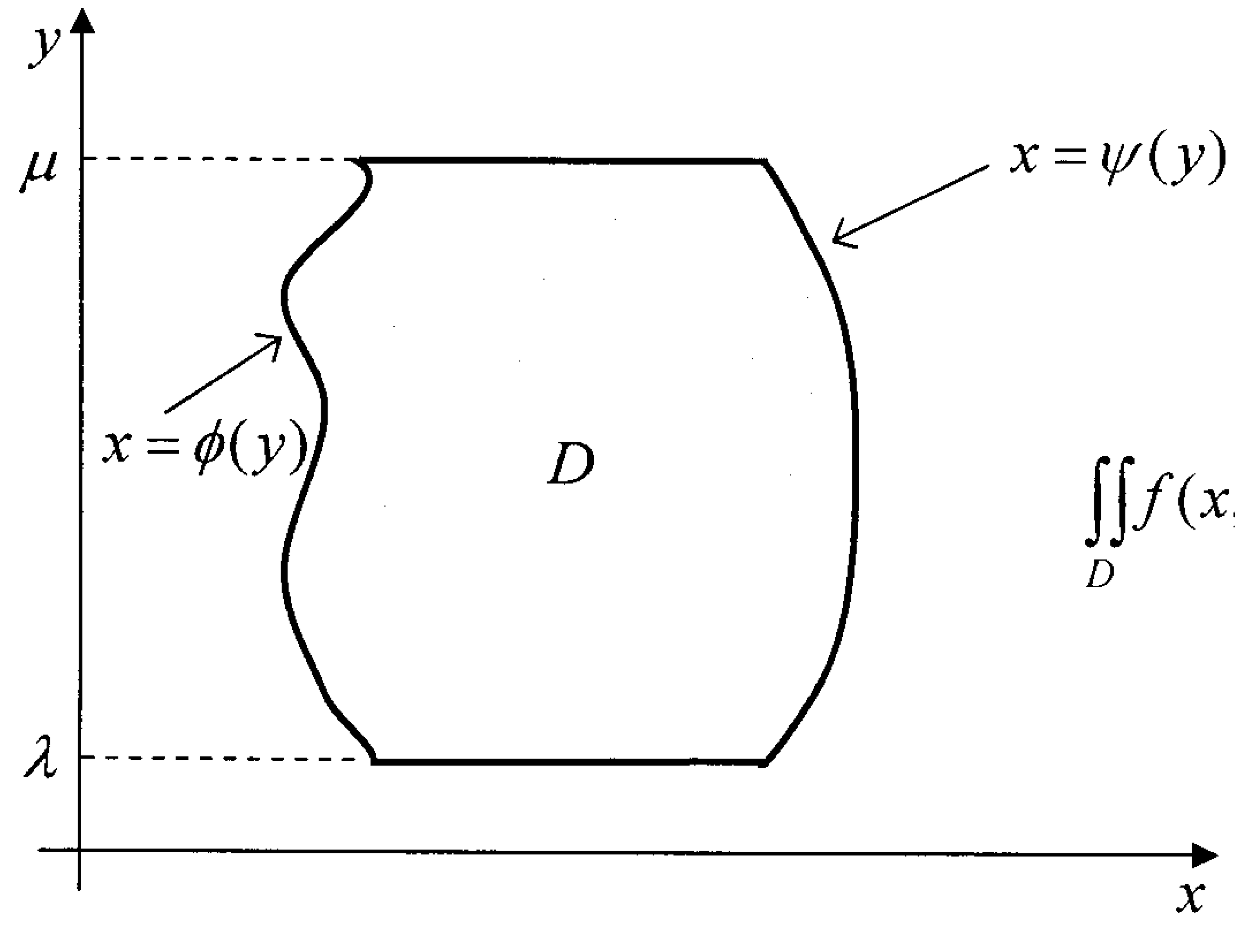
$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=\int_{x=\lambda}^{\mu}\left(\int_{y=\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$



$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=\int_{x=\lambda}^{\mu}\left(\int_{y=\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Παρατήρηση. Ένας παρόμοιος τύπος ισχύει και για σύνολα της μορφής

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[\lambda,\mu]\ \text{και}\ \phi(y)<x<\psi(y)\}:$$



$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=\int_{y=\lambda}^{\mu}\left(\int_{x=\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

12.14. Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το στερεό

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<y<1,\ y^2<x<3-2y,\ 0<z<x^2+2y^2\},$$

και ας υπολογίσουμε τον όγκο του. Ο όγκος του εν λόγω στερεού δίδεται από το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα:

$$\mathcal{O}\gamma\kappa(G)=\iint_D (x^2+2y^2)dxdy,$$

όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<1,\ y^2<x<3-2y\}$. Από το *Θεώρημα του Fubini*,

$$\iint_D (x^2+2y^2)dxdy=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y^2}^{x=3-2y}(x^2+2y^2)dx\right)dy,$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα εύκολα υπολογίζεται.

2. Ας θεωρήσουμε το διαδοχικό ολοκλήρωμα $\mathcal{I}=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y}^{1}\frac{dx}{(1+x^3)^5}\right)ydy$. Τότε αυτό είναι ίσο με το εξής διπλό ολοκλήρωμα: $\iint_D \frac{y}{(1+x^3)^5}dxdy$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<1,\ y<x<1\}$. Παρατηρώντας όμως ότι αυτό το D μπορεί να γραφεί και στη μορφή $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<x\}$,εναλλάσσουμε την διάταξη των ολοκληρώσεων στο ολοκλήρωμα και παίρνουμε ότι

$$\mathcal{I}=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{x}ydy\right)\frac{dx}{(1+x^3)^5}=\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{dx}{(1+x^3)^5}=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\frac{x^2dx}{(1+x^3)^5}=\frac{1}{6}\int_{x=0}^{1}\frac{d(1+x^3)}{(1+x^3)^5}=-\frac{1}{24}(1+x^3)^{-4}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{5}{128}.$$

3. Υπολογισμός του διαδοχικού ολοκληρώματος $\mathcal{I}=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=\sqrt{y}}^{1}\frac{dx}{(1+x^5)^7}\right)ydy$. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα $\mathcal{I}=\iint_D\frac{ydxdy}{(1+x^5)^7}$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<1,\ \sqrt{y}<x<1\}$. Γράφοντας το D στην μορφή $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<x^2\}$, βλέπουμε ότι

$$\mathcal{I}=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{x^2}ydy\right)\frac{dx}{(1+x^5)^7}=\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^4\right)\frac{dx}{(1+x^5)^7}=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\frac{x^4dx}{(1+x^5)^7}=\frac{1}{10}\int_{x=0}^{1}\frac{d(1+x^5)}{(1+x^5)^7}=-\frac{1}{60}(1+x^5)^{-6}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{21}{1280}.$$

12.15. Ασκήσεις. 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a,\ x,y\ge 0}(2x+3y)dxdy$.

2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy\right)dx$, $\int_{x=0}^{8}\left(\int_{y=\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy}{y^4+1}\right)dx$.

3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{x=1}^{2}\left((x-1)\int_{y=0}^{\log x}\sqrt{1+e^{2y}}dy\right)dx$, $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le 1,\ y\ge 0}\frac{x^3}{x^4+y^4+1}dxdy$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_{x^2+y^2\le 1,\ 1\le 2y\le 2}\frac{y^3dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

5. Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού $\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+z^2\le 1\}$ είναι $16/3$.

6. Σωστό ή λάθος; Το όριο $\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2}=\frac{1}{4}\log\frac{4}{3}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\iint_{[0,1]\times[0,1]}xydxdy/(x^2+y^2+1)^2$ και θυμηθείτε τους τύπους της §4.2.5.

7. Υπολογίστε το όριο $\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{N^{10}kl^3}{(N^4+N^2k^2+l^4)^4}$.

8. Για $\alpha > 0$, ορίστε την συνάρτηση $\mathcal{I}(\alpha) = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y^{1/\alpha}}^{1} \frac{dx}{(1+x^{2\alpha+1})^{2\alpha+3}} \right) y dy$. Είναι η συνάρτηση $\mathcal{I}(\alpha)$ συνεχής; Μελετήστε τα όρια $\lim_{\alpha \to 0} \mathcal{I}(\alpha)$ και $\lim_{\alpha \to \infty} \mathcal{I}(\alpha)$.

9. Δείξτε ότι $\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2}$ και $\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}$. Γιατί αυτό δεν αντιφάσκει το *Θεώρημα του Fubini*;

10. Δείξτε ότι $\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$ και $\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$.

12.16. Μέση τιμή συνάρτησης – Θεώρημα. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο να έχει περιεχόμενο μηδέν, και μια συνεχή συνάρτηση $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει σημείο $(\sigma, \tau) \in \overline{D}$ ούτως ώστε*

$$f(\sigma, \tau) = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)} \iint_D f(x,y) dx dy.$$

Άσκηση. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο να έχει περιεχόμενο μηδέν, και δυο συνεχείς συναρτήσεις $f, \varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\varphi(x,y) \geq 0$ για κάθε $(\sigma, \tau) \in \overline{D}$, τότε υπάρχει σημείο $(\sigma, \tau) \in \overline{D}$ ούτως ώστε

$$\iint_D f(x,y)\varphi(x,y) dx dy = f(\sigma, \tau) \iint_D \varphi(x,y) dx dy.$$

12.17. Θεώρημα. *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε μια περιοχή U του σημείου $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Τότε*

$$\lim_{\substack{V \ni (a,b) \\ diam(V) \to 0}} \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(V)} \iint_V f(x,y) dx dy = f(a,b),$$

υπό την έννοια ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε για κάθε ανοικτό σύνολο V, που περιέχει το σημείο (a,b), $diam(V) < \eta$ και του οποίου το σύνορο ∂V έχει περιεχόμενο μηδέν, να ισχύει:

$$\left| \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(V)} \iint_V f(x,y) dx dy - f(a,b) \right| < \varepsilon.$$

12.18. Θεώρημα. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο, του οποίου το σύνορο να έχει περιεχόμενο μηδέν, και $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, ούτως ώστε για κάθε «διαμέριση» $\{V_j : j = 1,2,\ldots,N\}$ του D σε ανοικτά υποσύνολα V_j, ξένα ανά δυο μεταξύ των, με $\overline{D} = \overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \cdots \cup \overline{V_N}$, των οποίων τα σύνορα να έχουν περιεχόμενο μηδέν, και με $diam(V_j) < \eta$, και για κάθε επιλογή σημείων $(\sigma_j, \tau_j) \in V_j$, να ισχύει:*

$$\left| \sum_{j=1}^{N} f(\sigma_j, \tau_j) \mathcal{E}\mu\beta(V_j) - \iint_D f \right| < \varepsilon.$$

13. Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών στα διπλά ολοκληρώματα

13.1. Θεώρημα. *Έστω D ένα φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο στο xy – επίπεδο και G ένα επίσης φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο στο uv – επίπεδο — και τα δυο σύνολα με κατά τμήματα ομαλό σύνορο. Έστω ακόμη $T = (\phi, \psi) : \overline{G} \to \overline{D}$, $(u,v) \to (x,y) = (\phi(u,v), \psi(u,v))$, ένας C^2 – μετασχηματισμός, δηλαδή οι συναρτήσεις $\phi : \overline{G} \to \mathbb{R}$ και $\psi : \overline{G} \to \mathbb{R}$ επεκτείνονται σε C^2 – συναρτήσεις σε περιοχή του $\overline{G}$. Ας υποθέσουμε* *ακόμη ότι ο μετασχηματισμός T είναι $1-1$ και επί του συνόλου $\overline{D}$, και ότι η Jacobian αυτού* $\mathcal{J}T=\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ *σε κάθε σημείο του $\overline{G}$. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$,*

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_G f(\phi(u,v),\psi(u,v))\left|\det\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

Επιπλέον αν $\det\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}>0$, *ο μετασχηματισμός T διατηρεί τον προσανατολισμό των συνόρων, και αν* $\det\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}<0$ *τότε ο μετασχηματισμός αντιστρέφει τον εν λόγω προσανατολισμό.*

Γεωμετρική σημασία της Jacobian. Όπως έπεται από το ανωτέρω θεώρημα, ο αριθμός $|\mathcal{J}T(\sigma)|$, για κάποιο $\sigma\in\mathbb{R}^2$, είναι ο παράγοντας που πολλαπλασιάζει σε «απειροστικό επίπεδο» το εμβαδόν. Αν δηλαδή G είναι ένα «μικρό» σύνολο που περιέχει το σημείο σ τότε $\mathcal{E}\mu\beta(T(G))\approx|\mathcal{J}T(\sigma)|\mathcal{E}\mu\beta(G)$. Ακριβέστερα

$$|\mathcal{J}T(\sigma)|=\lim_{\substack{\sigma\in V\\ diam(V)\to 0}}\frac{\mathcal{E}\mu\beta(T(V))}{\mathcal{E}\mu\beta(V)}.$$

Αυτή είναι η γεωμετρική σημασία της απολύτου τιμής της Jacobian. Αλλά και το πρόσημο της Jacobian έχει γεωμετρική σημασία: Αν $\mathcal{J}T(\sigma)>0$ τότε ο μετασχηματισμός T διατηρεί τον προσανατολισμό στο σημείο σ, δηλαδή αν G είναι ένα «μικρό» σύνολο γύρω από το σ, ανοικτό με ομαλό σύνορο, και το σημείο $(u,v)\in\partial G$ διαγράφει το ∂G κατά την θετική φορά τότε και το $T(u,v)$ διαγράφει το $\partial[T(G)]$ κατά την θετική φορά.

13.2. Γραμμικοί μετασχηματισμοί. Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ του επιπέδου:

$$(u,v)\to(x,y)=T(u,v)=(a_1u+b_1v,a_2u+b_2v),\ (u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

και για να είναι ο μετασχηματισμός αυτός $1-1$ *και επί*, ας υποθέσουμε ότι η ορίζουσά του

$$\det T=\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

Έστω $G\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο στο $uv-$επίπεδο και D η εικόνα του, μέσω του μετασχηματισμού T, στο $xy-$επίπεδο, δηλαδή

$$D=T(G)=\{(x,y):\ \text{όπου}\ (x,y)=T(u,v)=(a_1u+b_1v,a_2u+b_2v)\}.$$

Τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy=|\det T|\cdot\iint_G f(a_1u+b_1v,a_2u+b_2v)dudv.$$

Ιδιαιτέρως $\mathcal{E}\mu\beta(D)=|\det T|\cdot\mathcal{E}\mu\beta(G)$.

Αν $G=[0,1]\times[0,1]$, το σύνολο $D=T(G)$ θα είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία

$$T(0,0)=(0,0),\ T(1,0)=(a_1,a_2),\ T(1,1)=(a_1+b_1,a_2+b_2)\ \text{και}\ T(0,1)=(b_1,b_2).$$

Συνεπώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου D είναι $\mathcal{E}(D)=|a_1b_2-a_2b_1|=|\det T|$, όπως ήδη γνωρίζουμε.

Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D\sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}dxdy,$$

όπου D είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(2,-1)$, $(5/2,-1/2)$, $(3,-1)$ και $(5/2,-3/2)$. Θέτοντας $u=x+y$ και $v=x-y$, και λύνοντας ως προς x,y, βρίσκουμε

$$x=\frac{u+v}{2}\ \text{και}\ y=\frac{u-v}{2}.$$

Με μετασχηματισμό $(x,y)=T(u,v)=((u+v)/2,(u-v)/2)$, το ανωτέρω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iint_D\sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}dxdy=|\det T|\cdot\iint_G\sqrt{u}\sqrt[3]{v}dudv,$$

όπου G είναι το ορθογώνιο $G=[1,2]\times[3,4]$. Αλλά αυτό το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα αφού, από το *Θεώρημα του Fubini*,

$$\iint_G \sqrt{u}\sqrt[3]{v}\,dudv = \left(\int_{u=1}^{2}\sqrt{u}\,du\right)\left(\int_{v=3}^{4}\sqrt[3]{v}\,dv\right),$$

2. Υπολογισμός του διαδοχικού ολοκληρώματος

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)}dy\right)dx .$$

Σύμφωνα με το *Θεώρημα του Fubini*, το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy,$$

όπου D είναι το τρίγωνο $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$. Μετά, θέτοντας $u=x+y$ και $v=x-y$, βρίσκουμε ότι

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy = |\det T|\cdot \iint_G e^{-v/u}dudv,$$

όπου $(x,y)=T(u,v)=((u+v)/2,(u-v)/2)$ και $G=T^{-1}(D)=\{(u,v):\ 0\le u\le 1,\ -u\le v\le u\}$. Αλλά από το *Θεώρημα του Fubini* πάλι,

$$\iint_G e^{-v/u}dudv = \int_{u=0}^{1}\left(\int_{v=-u}^{u} e^{-v/u}dv\right)du = \int_{u=0}^{1}(e-e^{-1})udu = (e-e^{-1})/2 .$$

Και αφού $\det T=-1/2$, $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy=(e-e^{-1})/4$.

13.3. Ασκήσεις. 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy$, όπου D είναι το τετράγωνο $-1\le x+y\le 1$, $1\le x-y\le 3$.

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}dxdy$ όπου D είναι το σύνολο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, και $x-y=1$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+2y)^3dxdy}{(2x^2+5y^2+2xy)^{3/2}}$, όπου

$D=\{(x,y):\ 2x^2+5y^2+2xy\le 1,\ 1\le 2x+4y\le 2\}$. *Υπόδειξη*. Θέστε $u=x+2y$, $v=x-y$.

13.4. Διπλά ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες. Καθώς το (r,θ) διατρέχει το σύνολο

$$0<r<\infty \quad \text{και} \quad 0\le\theta<2\pi,$$

το ζεύγος (x,y) με

$$x=r\cos\theta \quad \text{και} \quad y=r\sin\theta,$$

διατρέχει ακριβώς μια φορά το σύνολο $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Η απεικόνιση

$$(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

ονομάζεται **πολικός μετασχηματισμός**, και οι αριθμοί r,θ, που περιγράφουν έπ' ακριβώς τα σημεία στο $xy-$επίπεδο, ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες**. Για να εκφράσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες x,y σε σχέση με τις πολικές συντεταγμένες r,θ, απλώς λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$. Το αποτέλεσμα είναι

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \theta=\arctan(y/x),$$

με κάποια ιδιαίτερη προσοχή βέβαια όσον αφορά την συνάρτηση arctan.
Τέλος υπολογίζουμε την Jacobian του πολικού μετασχηματισμού και βρίσκουμε ότι

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{bmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}=r .$$

Έτσι αν D είναι ένα σύνολο στο $xy-$ επίπεδο, της μορφής

$$D=\{(x,y):\ x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta\ \ \textit{με}\ \alpha\le\theta\le\beta\ \ \textit{και}\ \ \sigma\le r\le\tau\},$$

όπου $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$ και $0\le\sigma<\tau$, και $G=[\alpha,\beta]\times[\sigma,\tau]$ το αντίστοιχο σύνολο στο $(\theta,r)-$ επίπεδο, τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta dr,$$ για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R}$.

Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}(x^2+y^2)^5dxdy$. Θέτοντας $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$, το σύνολο πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε, δηλαδή το $\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2}\le a\}$, περιγράφεται με πολικές συντεταγμένες ως εξής: $\{(r,\theta):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}$. Συνεπώς

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}(x^2+y^2)^5dxdy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}(r^2)^5rdr\right)d\theta=2\pi\left(\frac{1}{12}a^{12}\right)=\frac{\pi a^{12}}{6}.$$

2. Για να βρούμε το κέντρο μάζας του ημικυκλίου $D=\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2}\le a,\ \ y\ge 0\}$, πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό

$$\bar{y}=\frac{1}{\mathcal{E}(D)}\iint_D ydxdy=\iint_D ydxdy\Big/\iint_D dxdy.$$

Ο παρονομαστής $\iint_D dxdy=\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{a}rdr\right)d\theta=\frac{\pi a^2}{2}$, όπως αναμέναμε βέβαια. Ο αριθμητής

$$\iint_D ydxdy=\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{a}(r\sin\theta)rdr\right)d\theta=\left(\int_{r=0}^{a}r^2dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta\right)=\frac{2a^3}{3}.$$

Συνεπώς $\bar{y}=\frac{2a^3}{3}\Big/\frac{\pi a^2}{2}=\frac{4}{3\pi}$. Άρα το κέντρο μάζας του ημικυκλίου αυτού είναι το σημείο $(0,4/3\pi)$.

3. Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$). Με πολικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{(1+r^2)^\lambda}\right)d\theta=\pi\int_{r=0}^{a}\frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^\lambda}=\begin{cases}\frac{\pi}{1-\lambda}[(1+a^2)^{1-\lambda}-1] & \alpha\nu\ \ \lambda\ne 1\\ \pi\log(1+a^2) & \alpha\nu\ \ \lambda=1.\end{cases}$$

4. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_{a\le\sqrt{x^2+y^2}\le b}\frac{(x^2+y^2)^\lambda}{(1+x^2+y^2)^\mu}dxdy$ ($\lambda,\mu\in\mathbb{R}$). Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=a}^{b}\frac{(r^2)^\lambda}{(1+r^2)^\mu}rdr\right)d\theta=\pi\int_{r=a}^{b}\frac{(r^2)^\lambda}{(1+r^2)^\mu}d(r^2)=\pi\int_{u=a^2}^{b^2}u^\lambda(1+u)^{-\mu}du.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται – με στοιχειώδεις συναρτήσεις – στη περίπτωση που το λ είναι θετικός ακέραιος ή το μ αρνητικός ακέραιος.

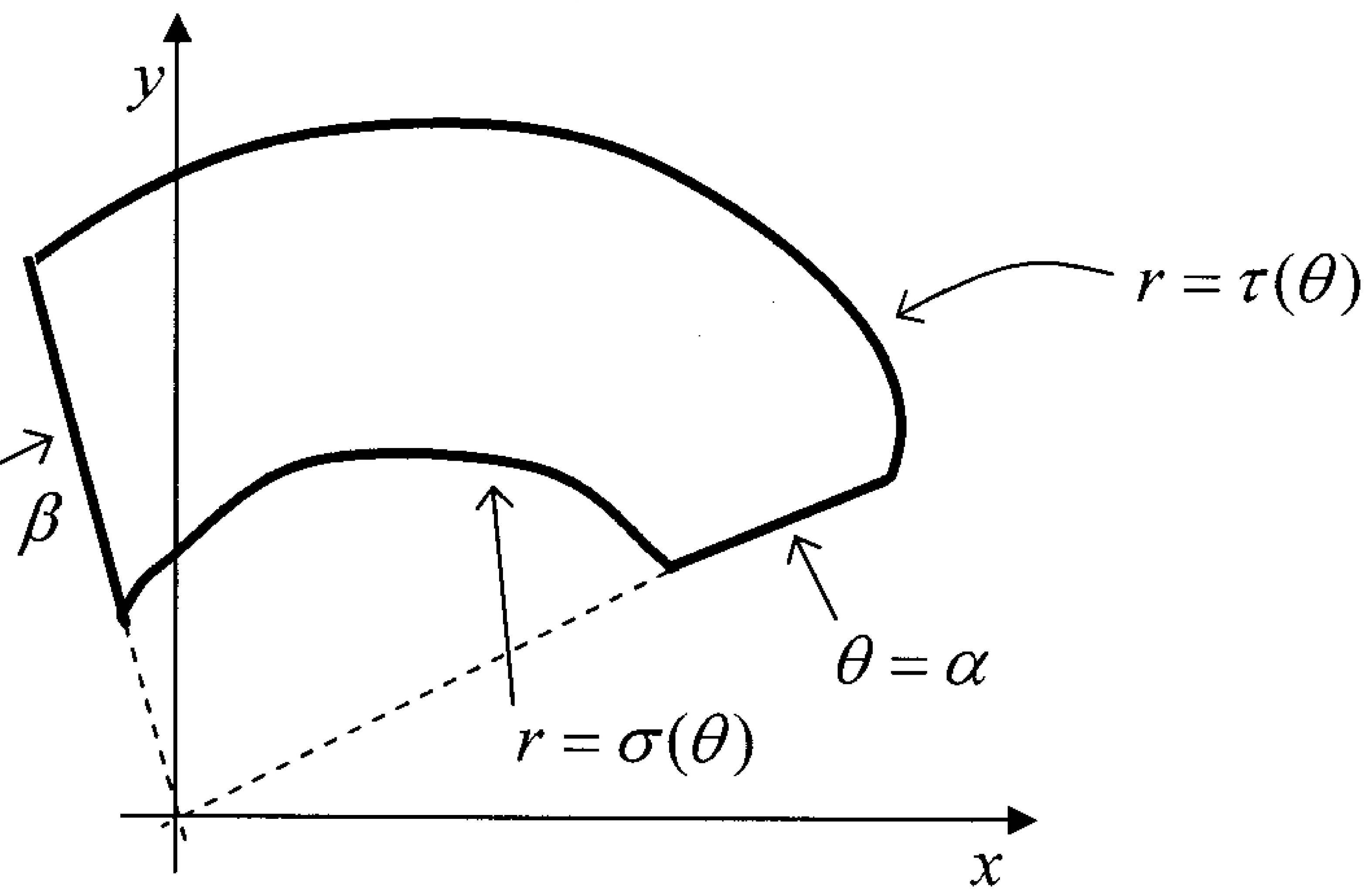
5. Ο όγκος του στερεού $\Omega=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le a^2,\ \ x^2+y^2-a^2\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$ δίδεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$O\gamma\kappa(\Omega)=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}[\sqrt{4a^2-x^2-y^2}-(x^2+y^2-a^2)]dxdy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}[\sqrt{4a^2-r^2}-(r^2-a^2)]rdr\right)d\theta$$

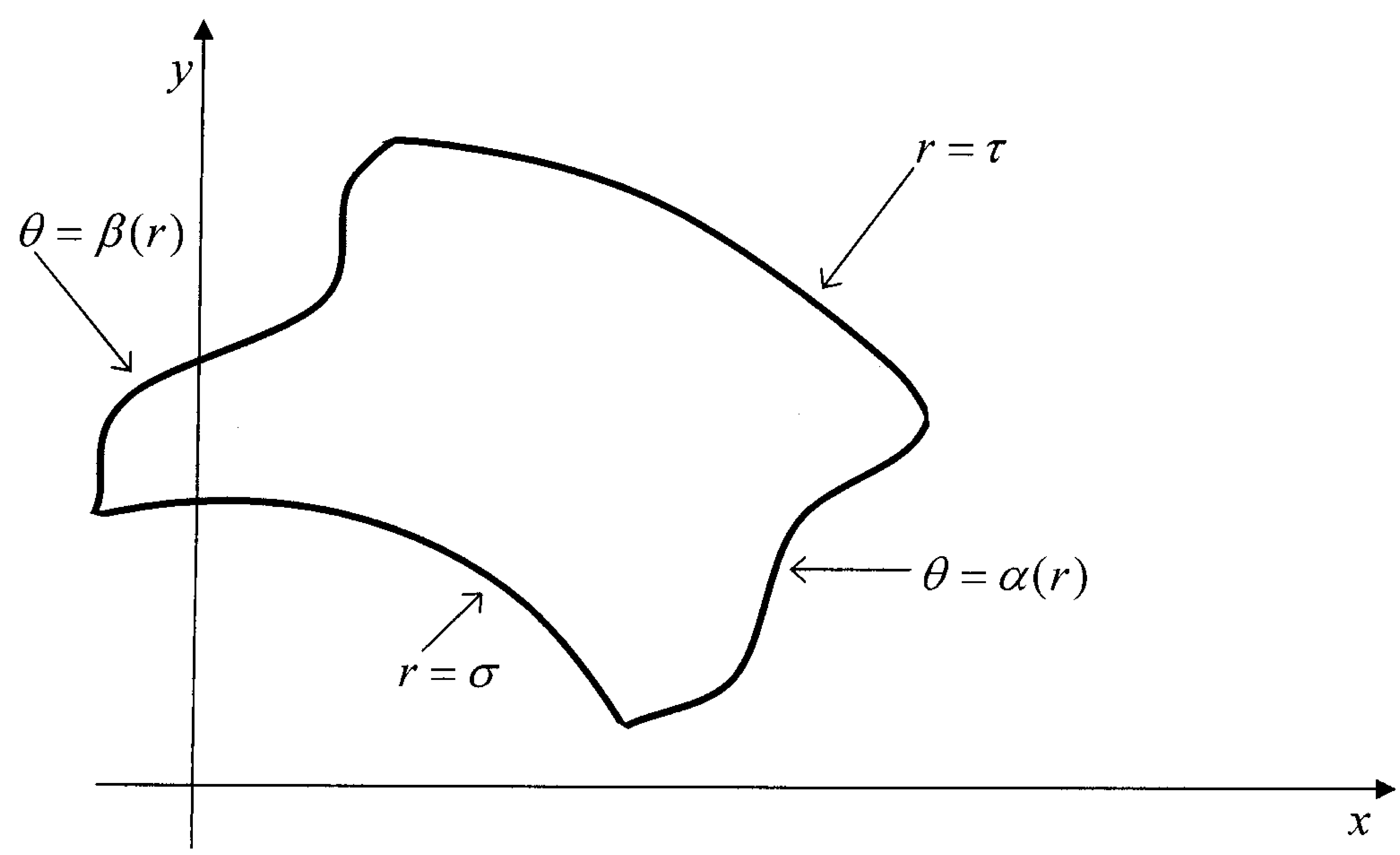
$$=2\pi\int_{r=0}^{a}[\sqrt{4a^2-r^2}-(r^2-a^2)]rdr=-\pi\int_{r=0}^{a}\sqrt{4a^2-r^2}d(4a^2-r^2)-2\pi\int_{r=0}^{a}(r^2-a^2)dr=2\pi(10-\sqrt{27})a^3/3.$$

13.5. Πολικές συντεταγμένες – Γενικότεροι τύποι.

A. $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\theta=\alpha}^{\beta}\left(\int_{r=\sigma(\theta)}^{\tau(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr\right)d\theta$, στην περίπτωση συνόλων D της μορφής:



B. $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{r=\sigma}^{\tau}\left(\int_{\theta=\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta\right)rdr$, στην περίπτωση συνόλων D της μορφής:



Παραδείγματα. 1. Ο όγκος του στερεού $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \le 2ax, \; 0 \le z \le \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$, δίδεται από τον τύπο $\mathcal{O}\gamma\kappa(\Omega) = \iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}$, όπου $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \le 2ax\}$. Παρατηρώντας ότι η εξίσωση $x^2+y^2 = 2ax$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $(x-a)^2+y^2 = a^2$, βλέπουμε ότι πρόκειται για τον κύκλο με κέντρο το σημείο $(a,0)$ και ακτίνα a. Επίσης η εξίσωση $z = \sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ περιγράφει το άνω ημισφαίριο με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα $2a$. Για να υπολογίσουμε το ανωτέρω διπλό ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και το γράφουμε ως εξής: $\mathcal{O}\gamma\kappa(\Omega) = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-r^2}rdr\right)d\theta$, το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

2. Ας θεωρήσουμε το στερεό Ω που η βάση του είναι το *καρδιοειδές* $r \le a(1+\cos\theta)$, και το οποίο φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. Ο όγκος του δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$Ογκ(G) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r^2 r dr\right)d\theta,$$

το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

3. Θεωρήστε το σύνολο στο επίπεδο που περιβάλλεται από τον *λημνίσκο* $r^2 = a^2\cos(2\theta)$. Το εμβαδόν του συνόλου αυτού δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$4\int_{\theta=0}^{\pi/4}\left(\int_{r=0}^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} r dr\right)d\theta,$$

το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

4. Θεωρήστε το σύνολο D στο $xy-$επίπεδο το οποίο ευρίσκεται μέσα στο καρδιοειδές $r = a(1+\cos\theta)$ και έξω από τον κύκλο $r = a$. Το κέντρο βάρος του D ευρίσκεται στο σημείο $(\bar{x}, 0)$ όπου

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{\iint\limits_D dx dy} = \frac{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=a}^{a(1+\cos\theta)} (r\cos\theta) r dr\right)d\theta}{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=a}^{a(1+\cos\theta)} r dr\right)d\theta}.$$

13.6. Ασκήσεις. 1. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που ευρίσκεται ανάμεσα στους κυλίνδρους $x^2 + y^2 = a^2$ και $x^2 + y^2 = b^2$ $(a < b)$, και φράσσεται από πάνω από τον κώνο $z = \lambda\sqrt{x^2+y^2}$ $(\lambda > 0)$ και από κάτω από το παραβολοειδές $z = -\mu(x^2 + y^2 + 1)$ $(\mu > 0)$.

2. Πού ευρίσκεται το κέντρο βάρους των επιπέδων σχημάτων

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\} \text{ και } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

3. Ένας ομογενής δίσκος μάζας m και ακτίνας a περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα ω. Πόση είναι η κινητική του ενέργεια που οφείλεται σε αυτήν την περιστροφή;

4. Υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}.$$

5. Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη

$$r = \begin{cases} \theta & \text{για } 0 \le \theta \le 3\pi/2 \\ -(3\pi/2)\sin\theta & \text{για } 3\pi/2 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

6. Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από κάθε μια από τις καμπύλες:

$$r = \cos(3\theta),\ r = \sin(4\theta),\ r^2 = \cos(5\theta).$$

7. Θεωρήστε το σύνολο $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a(\sqrt{x^2+y^2}+x),\ y\ge 0\}$. Πού ευρίσκεται το κέντρο βάρους του D; Ομοίως για το σύνολο

$$G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a(\sqrt{x^2+y^2}+x),\ y\ge 0,\ x\ge 0\}.$$

8. Πόσο είναι το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη με εξίσωση $r^2 = a^2\cos(4\theta)$;

9. Βρείτε το κέντρο βάρους του συνόλου $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a^2,\ y \ge b\}$ $(0 < b < a)$.

10. Γράψτε ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα για τον όγκο του στερεού

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x^2+y^2)^2 \ge 2a^2(x^2-y^2),\ 0 \le z \le \sqrt{2a^2-x^2-y^2}\}.$$

13.7. Παραδείγματα. 1. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (x^2-y^2)^5 x^6 y^6 (x^2+y^2)dxdy$, όπου D είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές:

$$x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=2,\ xy=3/2 \ \text{ και } \ xy=2.$$

Για τον υπολογισμό αυτού θεωρούμε τον μετασχηματισμό $u=x^2-y^2$ και $v=2xy$, υπολογίζουμε τις Jacobians και βρίσκουμε ότι

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=4(x^2+y^2) \quad \text{και} \quad \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{4(x^2+y^2)}=\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}.$$

(Παρατηρήστε ότι $u^2+v^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=(x^2+y^2)^2$.) Επίσης το σύνολο $G=S(D)$, όπου $S(x,y)=(u,v)=(x^2-y^2,2xy)$, είναι το ορθογώνιο $[1,2]\times[3,4]$. Εν συνεχεία ελέγχουμε ότι ο μετασχηματισμός $S:\overline{D}\to\overline{G}$, είναι C^∞ σε περιοχή του $\overline{D}$ και $1-1$ *και επί*. Άρα

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2-y^2)^5x^6y^6(x^2+y^2)dxdy &= \iint_G u^5(v/2)^6\sqrt{u^2+v^2}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv\\ &= \iint_G u^5(v/2)^6\sqrt{u^2+v^2}\,\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\,dudv=\frac{1}{4\cdot 2^6}\iint_G u^5v^6dudv,\end{aligned}$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα, από το *Θεώρημα του Fubini*, αφού $G=[1,2]\times[3,4]$.

2. Θα δείξουμε ότι για κατάλληλους αριθμούς α,β και συνάρτηση f,

$$\iint_{\substack{x>0,y>0\\x+y<1}} x^\alpha y^\beta f(x+y)dxdy=\left(\int_{u=0}^{1}u^{\alpha+\beta+1}f(u)du\right)\left(\int_{v=0}^{1}v^\alpha(1-v)^\beta dv\right).$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $x=uv$, $y=u(1-v)$, με αντίστροφο τον $u=x+y$, $v=x/(x+y)$. Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$ ευρίσκεται σε αντιστοιχία με το σύνολο $\{0<u<1,\ 0<v<1\}$. Αν τώρα υπολογίσουμε την Jacobian βρίσκουμε $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$, και η αποδεικτέα σχέση έπεται.

13.8. Ασκήσεις. 1. Θεωρήστε το σύνολο D στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τον άξονα των x και τις παραβολές

$$x=1-\tfrac{1}{4}y^2,\ x=\tfrac{1}{4}y^2-1,\ x=4-\tfrac{1}{16}y^2,$$

και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D xydxdy$.

2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\iint_D \frac{x^4-y^4}{x^2y^2}dxdy,\quad \iint_D\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)^2\frac{dxdy}{x^2+y^2}\quad \text{και}\quad \iint_D\frac{x^8+y^8}{x^4y^4(x^2+y^2)}dxdy$$

όπου D είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές: $x^2-y^2=2$, $x^2-y^2=4$, $xy=5$ και $xy=6$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x^2-y^2)xy(x^2+y^2)^\lambda dxdy\ \ (\lambda\in\mathbb{R}),$$

όπου D είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές: $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$, $xy=3$ και $xy=4$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x^3-3xy^2)^5(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)^2dxdy,$$

όπου D είναι το σύνολο στο μέρος του xy – επιπέδου όπου $-\pi/3<\theta<\pi/3$, και το οποίο φράσσεται από τις καμπύλες: $x^3-3xy^2=1$, $x^3-3xy^2=2$, $3x^2y-y^3=3$ και $3x^2y-y^3=4$. (θ συμβολίζει την γωνία των πολικών συντεταγμένων του σημείου (x,y).)

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{3x}\sin y\, e^{e^{2x}\cos y\sin y}dxdy,$$

όπου D είναι το σύνολο στο μέρος του $xy-$επιπέδου όπου $|y|<\pi$ και το οποίο φράσσεται από τις καμπύλες:

$$e^x\cos y=1,\ e^x\cos y=2,\ e^x\sin y=3 \ \text{ και } \ e^x\sin y=4.$$

14. Ολοκλήρωση μη φραγμένων συναρτήσεων και ολοκληρώματα σε μη φραγμένα σύνολα

14.1. Ολοκλήρωση μη φραγμένων συναρτήσεων – Παραδείγματα. 1. Υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\mathcal{I}=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \text{ όπου } D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\}.$$

Το «πρόβλημα» με αυτό το ολοκλήρωμα έγκειται στο γεγονός ότι ο παρονομαστής $\sqrt{x^2+y^2}$ μηδενίζεται στο σημείο $(0,0)$ του συνόλου ολοκλήρωσης και έτσι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

δεν είναι φραγμένη στο σύνολο $D-\{(0,0)\}$. Βέβαια το πρόβλημα δεν είναι το σημείο $(0,0)$ αυτό καθ' εαυτό, αλλά κυρίως η συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x,y)$, για σημεία (x,y) τα οποία είναι κοντά στο $(0,0)$. Και ακριβέστερα το ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\infty.$$

Ο ορισμός του ολοκληρώματος $\mathcal{I}$ είναι :

$$\mathcal{I}=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{όπου } D_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \varepsilon^2<x^2+y^2<1\},\ \varepsilon>0.$$

Βέβαια αμέσως συναντάμε το πρόβλημα κατά πόσο το ανωτέρω όριο υπάρχει. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Με πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι

$$\iint_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{rdr}{r}\right)d\theta=2\pi(1-\varepsilon).$$

Συνεπώς

$$\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}[2\pi(1-\varepsilon)]=2\pi.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα $\mathcal{I}$ **συγκλίνει** και μάλιστα η τιμή του είναι 2π .

2. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο ολοκλήρωμα, το εξής:

$$\mathcal{J}=\iint_D\frac{dxdy}{x^2+y^2},\ \text{ όπου } D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\}.$$

Ορίζοντάς το σαν το όριο

$$\iint_D\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{x^2+y^2},$$

υπολογίζουμε και βρίσκουμε, όπως προηγουμένως,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{rdr}{r^2}\right)d\theta=\lim_{\varepsilon\to0}[2\pi\log(1/\varepsilon)]=\infty.$$

Γι' αυτό στην περίπτωση αυτή λέγουμε ότι το ολοκλήρωμα $\mathcal{J}$ δεν συγκλίνει — ότι αποκλίνει, και ότι $\mathcal{J}=\infty$.

3. Ας μελετήσουμε τώρα την γενική περίπτωση του ολοκληρώματος

(*) $$\iint_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Βέβαια όταν το λ είναι θετικός αριθμός, η συνάρτηση $1/(x^2+y^2)^{\lambda}$ δεν είναι φραγμένη κοντά στο σημείο $(0,0)$. Δηλαδή για $\lambda\le 0$, δεν τίθεται θέμα σύγκλισης του ολοκληρώματος (*). Σε κάθε περίπτωση όμως

$$\iint_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}}.$$

Υπολογίζοντας σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\iint_{\varepsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=\varepsilon}^{1}\frac{rdr}{r^{2\lambda}}\right)d\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\lambda}\left(1-\varepsilon^{2-2\lambda}\right) & \alpha\nu\ \ \lambda\neq 1\\ 2\pi\log\dfrac{1}{\varepsilon} & \alpha\nu\ \ \lambda=1.\end{cases}$$

Έτσι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}}=\begin{cases}\pi/(1-\lambda) & \alpha\nu\ \ \lambda<1\\ \infty & \alpha\nu\ \ \lambda>1\\ \infty & \alpha\nu\ \ \lambda=1.\end{cases}$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\iint_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}}=\begin{cases}\pi/(1-\lambda) & \alpha\nu\ \ \lambda<1\\ \infty & \alpha\nu\ \ \lambda>1\\ \infty & \alpha\nu\ \ \lambda=1.\end{cases}$$

Ιδιαιτέρως έχουμε ότι

(*)′ Το ολοκλήρωμα (*) συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda<1$.

Το ανωτέρω αποτέλεσμα είναι σημαντικό διότι βασιζόμενοι σε αυτό μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση ή μη πολλών άλλων ολοκληρωμάτων. Και για πολλά θέματα της *Ανάλυσης* αυτό είναι αρκετό.

4. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

Παρατηρούμε ότι πάνω στο σύνολο που ολοκληρώνουμε, όταν δηλαδή $x^2+y^2<1$, η ποσότητα $x^2+|y|\ge x^2+y^2$, οπότε

(1) $$\frac{1}{\sqrt{x^2+|y|}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Αλλά από την (*)′, το ολοκλήρωμα $\iint_{x^2+y^2<1}dxdy/\sqrt{x^2+y^2}$ συγκλίνει και κατά συνέπεια $\iint_{x^2+y^2<1}dxdy/\sqrt{x^2+|y|}<\infty$.

5. Θεωρήστε τώρα την εξής παραλλαγή του ανωτέρω παραδείγματος:

(2) $$\iint_{x^2+y^2<2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

Πάνω στο σύνολο $x^2+y^2<2$, δεν είναι πλέον σωστό ότι ισχύει η (1). Αλλά

$$\iint_{x^2+y^2<2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}=\iint_{x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}+\iint_{1<x^2+y^2<2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

Όσον αφορά όμως το δεύτερο ολοκλήρωμα, δεν υπάρχει απολύτως κανένα πρόβλημα σύγκλισης: η συνάρτηση $1/\sqrt{x^2+|y|}$ είναι συνεχής στο σύνολο $1 \le x^2+y^2 \le 2$. Συνεπώς το ολοκλήρωμα (2) συγκλίνει.

6. Και το ίδιο ισχύει για κάθε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}},$$

όπου G είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο στο επίπεδο (αρκεί το σύνορό του να έχει περιεχόμενο μηδέν). Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που $(0,0) \in G$,

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}} = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<\delta} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}} + \iint_{G-\{\sqrt{x^2+y^2}<\delta\}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}},$$

για $\delta > 0$ και μικρό. (Όταν $(0,0) \notin \overline{G}$ δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα σύγκλισης. Πώς θα χειρισθείτε την περίπτωση $(0,0) \in \partial G$;)

7. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^4+y^6)^{5/2}}. \tag{3}$$

Πάνω στο σύνολο $x^2+y^2<1$, η ποσότητα $x^4+y^6 \le x^2+y^2$, οπότε

$$\frac{1}{(x^4+y^6)^{5/2}} \ge \frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

Αλλά, λόγω της (*)′, το ολοκλήρωμα

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \infty,$$

και συνεπώς το ολοκλήρωμα (3) αποκλίνει.

8. Το ίδιο ισχύει για κάθε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\iint_G \frac{dxdy}{(x^4+y^6)^{5/2}},$$

όπου G είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο.

9. Ας θεωρήσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\iint_G \frac{\left(\sqrt{|x|}+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}\right)^{15}}{(x^4+y^6)^{3/2}}\,dxdy, \tag{4}$$

όπου G είναι ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν. Το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε αν συγκλίνει ή όχι το ολοκλήρωμα αυτό. Όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα, η σύγκλιση του ολοκληρώματος αυτού ανάγεται στη σύγκλιση του ολοκληρώματος

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{\left(\sqrt{|x|}+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}\right)^{15}}{(x^4+y^6)^{3/2}}\,dxdy. \tag{5}$$

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι όταν $x^2+y^2<1$ τότε

$$x^4+y^6 \le x^4+y^4 \le (x^2+y^2)^2 \quad \text{και} \quad \sqrt{|x|}+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|} \ge \sqrt[4]{|x|}+\sqrt[4]{|y|} \ge (x^2+y^2)^{1/8}.$$

Συνεπώς (για $x^2+y^2<1$)

$$\frac{\left(\sqrt{|x|}+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}\right)^{15}}{(x^4+y^6)^{3/2}} \ge \frac{(x^2+y^2)^{15/8}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{9/8}}.$$

Αλλά

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{9/8}} = \infty.$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα (5) αποκλίνει, και το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμα (4).

14.2. Ολοκλήρωση μη φραγμένων συναρτήσεων — συνέχεια. 1. Στις περιπτώσεις που μελετήσαμε έως τώρα το πρόβλημα της σύγκλισης του ολοκληρώματος οφειλόταν σε ένα σημείο. Αλλά πολύ περισσότερα σημεία ενδέχεται να δημιουργούν προβλήματα του τύπου αυτού. Π.χ., θεωρήστε το ολοκλήρωμα

$$(1)\qquad \iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Στο ολοκλήρωμα αυτό η ποσότητα $\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}$, η οποία ευρίσκεται στον παρανομαστή, τείνει στο 0 καθώς το (x,y) πλησιάζει κάποιο σημείο του κύκλου $x^2+y^2=1$. Ο ορισμός του ολοκληρώματος αυτού είναι ο εξής:

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Και πάλι αν το ανωτέρω όριο είναι πεπερασμένο, το ολοκλήρωμα (1) θα συγκλίνει, ενώ αν είναι ∞, θα αποκλίνει. Για να δούμε λοιπόν ποιά από τις δυο περιπτώσεις συμβαίνει, προχωρούμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} dxdy/\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}$$

με πολικές συντεταγμένες. Έχουμε λοιπόν (για $a<1$)

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{\sqrt{1-r}}\right)d\theta = 2\pi\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{\sqrt{1-r}} = 4\pi\left(\frac{2}{3}-\sqrt{1-a}+\frac{1}{3}\sqrt{(1-a)^3}\right)$$

και κατά συνέπεια

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{8\pi}{3}.$$

Άρα το ολοκλήρωμα (1) συγκλίνει.

2. Γενικότερα τώρα ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$(2)\qquad \mathcal{I}_\lambda = \iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda}.$$

[Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $1-\sqrt{x^2+y^2}$ που ευρίσκεται στον παρονομαστή — στην δύναμη λ — είναι η απόσταση του σημείου (x,y) από το σύνορο του συνόλου ολοκλήρωσης, δηλαδή το σύνορο του δίσκου $\{x^2+y^2<1\}$.] Υπολογίζοντας όπως και προηγουμένως σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda} = 2\pi\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{(1-r)^\lambda} = 2\pi\int_{u=1-a}^{1}\frac{du}{u^\lambda} - 2\pi\int_{u=1-a}^{1}\frac{du}{u^{\lambda-1}}$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{1-\lambda}\left(1-(1-a)^{1-\lambda}\right)-\frac{1}{2-\lambda}\left(1-(1-a)^{2-\lambda}\right)\right].$$

Αυτή η τελευταία ισότητα ισχύει όταν $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq 2$. Αφήνοντας το $a\to 1$, παίρνουμε

$$\mathcal{I}_\lambda = 2\pi\left[\frac{1}{1-\lambda}-\frac{1}{2-\lambda}\right] \quad \text{όταν } \lambda<1 \quad \text{και} \quad \mathcal{I}_\lambda=\infty \quad \text{όταν } \lambda\geq 1.$$

14.3. Ολοκληρώματα σε μη φραγμένα σύνολα. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$(*)\qquad \iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda},\quad \text{όπου } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Το πρόβλημα με το ολοκλήρωμα αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σύνολο ολοκλήρωσης, το $\mathbb{R}^2$, <u>δεν είναι φραγμένο</u> σύνολο. Με την συνάρτηση που ολοκληρώνεται δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, μάλιστα για $\lambda>0$ — που είναι και η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση — η συνάρτηση αυτή είναι φραγμένη αφού τότε

$$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^\lambda}\leq 1.$$

Ο ορισμός του ολοκληρώματος (*) είναι ο εξής:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \lim_{R\to\infty} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}.$$

Και αν το ανωτέρω όριο είναι πεπερασμένο, λέγουμε ότι το ολοκλήρωμα (*) συγκλίνει, ενώ όταν είναι άπειρο, λέγουμε ότι το ολοκλήρωμα (*) αποκλίνει. Στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αυτό ως εξής: Με πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{R} \frac{rdr}{(1+r^2)^\lambda}\right)d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{rdr}{(1+r^2)^\lambda} = \pi \int_{r=0}^{R} \frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^\lambda} = \frac{\pi}{1-\lambda}\left[1 - \frac{1}{(1+R^2)^{1-\lambda}}\right],$$

για $\lambda \neq 1$. Και για $\lambda = 1$,

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \pi \log(1+R^2). \quad \text{Άρα} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \begin{cases} \pi/(1-\lambda) & \alpha\nu \quad \lambda > 1 \\ \infty & \alpha\nu \quad \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Ιδιαιτέρως,

(*)′ Το ολοκλήρωμα (*) συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda > 1$.

Παρόμοια με το ανωτέρω ολοκλήρωμα είναι και η συμπεριφορά του ακόλουθου ολοκληρώματος:

(**)
$$\iint_{x^2+y^2>1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}.$$

Έτσι με έναν παρόμοιο με τον προηγούμενο υπολογισμό καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

(**)′ Το ολοκλήρωμα (**) συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda > 1$.

Τα συμπεράσματα (*)′ και (**)′ είναι σημαντικά αφού πολλά άλλα ολοκληρώματα ανάγονται σε αυτά, όσον αφορά το πρόβλημα της σύγκλισης ή μη αυτών. Και καθορίζουν τρόπον τινά την συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων — με άλλα λόγια την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων — στο άπειρο.

Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

(1)
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^7} dxdy.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι

$$|x|+|y| \leq \sqrt{2}(x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad 1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \geq (1+x^2+y^2)^{1/4},$$

και συνεπώς

$$\frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^7} \leq \frac{\sqrt{2}(x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^{7/4}} \leq \frac{\sqrt{2}(1+x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^{7/4}} = \frac{\sqrt{2}}{(1+x^2+y^2)^{5/4}}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το συμπέρασμα (*)′, το ολοκλήρωμα (1) συγκλίνει.

2. Ας θεωρήσουμε τώρα το ολοκλήρωμα

(2)
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^5} dxdy.$$

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τις εξής ανισότητες

$$|x|+|y| \geq (x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad 1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \leq 3(1+x^2+y^2)^{1/4},$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$\frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^5} \geq \frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{3^5(1+x^2+y^2)^{5/4}} \geq \frac{(1+x^2+y^2)^{1/2}/\sqrt{2}}{3^5(1+x^2+y^2)^{5/4}} = \frac{1}{3^5\sqrt{2}}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/4}},$$

όταν $x^2+y^2 \geq 1$. Αλλά

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/4}} = \infty,$$

οπότε το ολοκλήρωμα (2) αποκλίνει.

3. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(|x|+|y|)^{\lambda}}{\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}} dxdy, \ \lambda, \mu > 0 .$$

Έχοντας υπ' όψιν τις ανισότητες των προηγουμένων παραδειγμάτων, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$|x|+|y| \approx (x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad 1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \approx (1+x^2+y^2)^{1/4} .$$

Άρα ο αριθμητής $(|x|+|y|)^{\lambda}$ συμπεριφέρεται σαν την ποσότητα $(x^2+y^2)^{\lambda/2}$, και ο παρονομαστής $\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}$ συμπεριφέρεται σαν την ποσότητα $(1+x^2+y^2)^{\mu/4}$. Έτσι

$$\frac{(|x|+|y|)^{\lambda}}{\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}} \approx \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{(\mu-2\lambda)/4}}, \ \text{όταν} \ x^2+y^2 \geq 1 .$$

Συνεπώς

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(|x|+|y|)^{\lambda}}{\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}} dxdy < \infty \ \text{ αν και μόνο αν } \ \mu-2\lambda > 4 .$$

14.4. Τα ολοκληρώματα $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ και $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$. Με πολικές συντεταγμένες υπολογίζουμε

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} rdr\right)d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} rdr = -\pi \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} d(-r^2) = -\pi\left(e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty}\right) = \pi .$$

Αλλά

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 .$$

Άρα $\left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$, και συνεπώς $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

14.5. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}(1+x^2+y^2)^{\mu}}$.

2. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα $\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\mu}}$.

3. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\iint_G \left(\sqrt{|x|}+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}\right)^{17}(x^4+y^6)^{-3/2}dxdy ,$$

όταν G είναι ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν.

4. Μελετήστε τα ολοκληρώματα

$$\iint_{1<\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\lambda}} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \iint_{a<\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\lambda}},$$

για τις διάφορες τιμές του λ.

5. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση, τα ολοκληρώματα $\iint_G \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\lambda}}$, στις περιπτώσεις: $G \subset \{x^2+y^2<1\}$ και $G \subset \{1<\sqrt{x^2+y^2}<R\}$.

6. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τα ολοκληρώματα της μορφής $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{p(x,y)dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}(1+x^2+y^2)^{\mu}}$, για τα διάφορα πολυώνυμα $p(x,y)$, και δώστε παραδείγματα.

7. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση ολοκληρώματα της μορφής $\iint_G \frac{dxdy}{\left(dist[(x,y),\partial G]\right)^{\lambda}}$. (Ξεκινήστε με απλές περιπτώσεις όπως π.χ. όταν το G είναι ένα ορθογώνιο ή τρίγωνο.)

15. Τριπλά ολοκληρώματα

15.1. Άσκηση. Αναπτύξτε την θεωρία των **τριπλών** ολοκληρωμάτων – κατ' αναλογία με την θεωρία των διπλών ολοκληρωμάτων. Ιδιαιτέρως διατυπώστε θεωρήματα τύπου Fubini και τον τύπο αλλαγής μεταβλητών στην περίπτωση των τριπλών ολοκληρωμάτων.

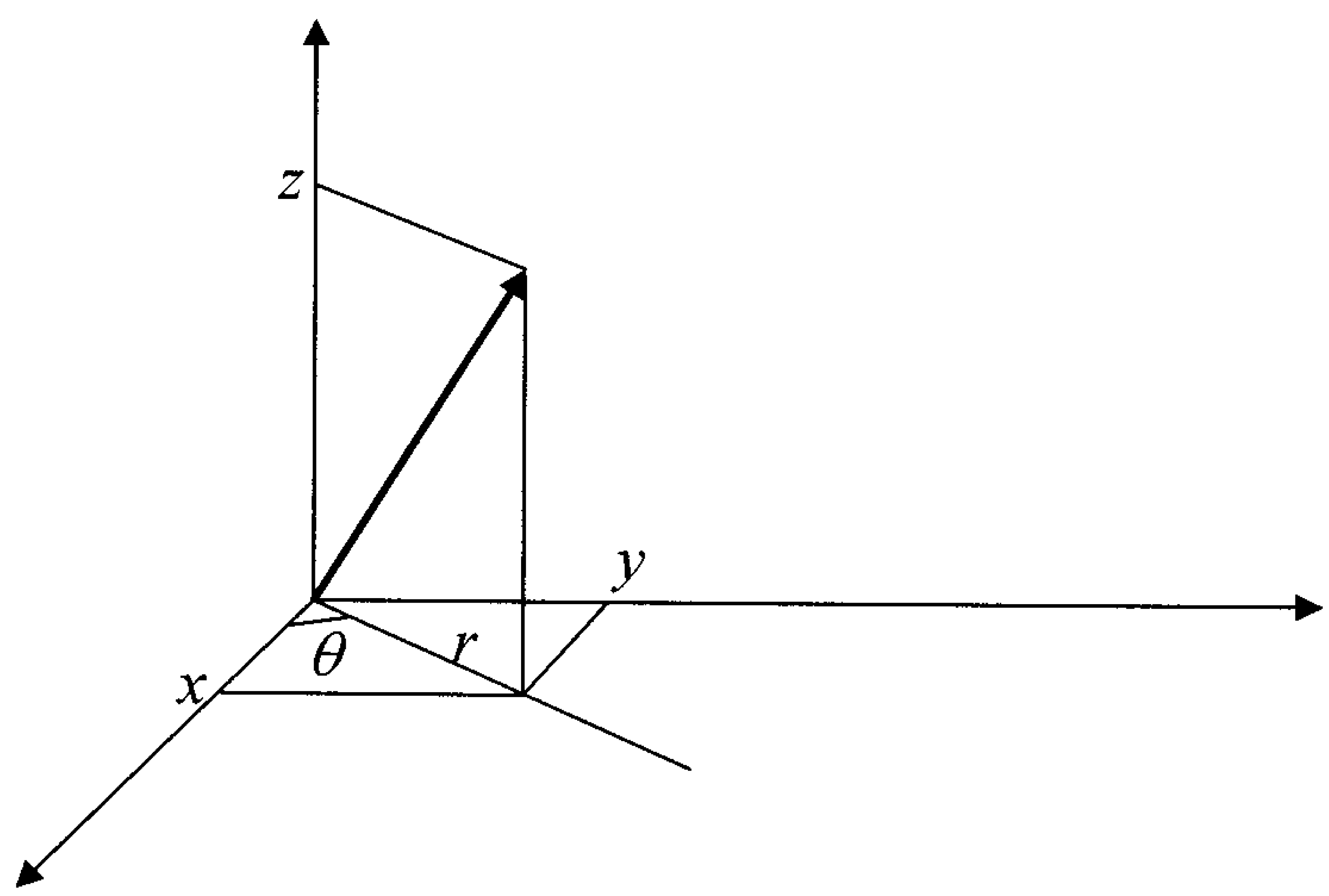
15.2. Κυλινδρικές συντεταγμένες. Ένα σημείο (x,y,z) στο χώρο καθορίζεται από την απόσταση $r=\sqrt{x^2+y^2}$ του σημείου $(x,y,0)$ από το $(0,0,0)$, την γωνία θ με $\tan\theta=\frac{y}{x}$ και το z. Πράγματι

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \text{ και } z=z.$$

Οι συντεταγμένες (r,θ,z) ονομάζονται **κυλινδρικές** συντεταγμένες. Έτσι καθώς $0<r<\infty$, $0\le\theta<2\pi$ και $-\infty<z<\infty$, τα σημεία (x,y,z) με $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ και $z=z$ διαγράφουν το σύνολο $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ ακριβώς μια φορά. Ένας εύκολος υπολογισμός μας δίνει ότι η *Jacobian* του μετασχηματισμού $T:(r,\theta,z)\to(x,y,z)$ είναι

$$\mathcal{J}T=\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r.$$

Δηλαδή η σχέση των στοιχείων όγκου είναι $dxdydz=rdrd\theta dz$.



Οι κυλινδρικές συντεταγμένες r,θ,z.

Εφαρμογές. 1. Ας θεωρήσουμε το στερεό

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2<a^2 \ \textit{και}\ b<z<c\} \quad (a,b,c\in\mathbb{R} \text{ με } a>0 \text{ και } b<c).$$

Τότε $G=T^{-1}(D)=\{(r,\theta,z): 0\le r<a,\ -\pi<\theta\le\pi,\ b<z<c\}$. Επομένως

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το *Θεώρημα του Fubini* γράφουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdr\right)d\theta\right]dz.$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\iiint_{x^2+y^2<a^2,\,x>0,\,b<z<c} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{a} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdr\right)d\theta\right]dz,$$

$$\iiint_{x^2+y^2<a^2,\,x>0,\,y>0,\,b<z<c} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{a} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdr\right)d\theta\right]dz,$$

και $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{\pi/4}\left(\int_{r=a_1}^{a_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdr\right)d\theta\right]dz$$

όπου Ω είναι το στερεό στον $xyz-$χώρο που φράσσεται από τους κυλίνδρους $x^2+y^2=a_1^2$, $x^2+y^2=a_2^2$ ($0<a_1<a_2$) και τα επίπεδα $y=0$, $y=x$, $z=b$ και $z=c$.

2. Θεωρήστε το στερεό D στον $xyz-$χώρο που ευρίσκεται ανάμεσα στον κώνο $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ και την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$. Το κέντρο βάρους του D είναι το σημείο $(0,0,\bar{z})$ όπου

$$\bar{z}=\frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} zdz\right)rdr\right)d\theta}{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} dz\right)rdr\right)d\theta}.$$

Η ροπή αδρανείας του D γύρω από τον άξονα των x είναι

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} z^2dz\right)rdr\right)d\theta.$$

Η ροπή αδρανείας του D γύρω από την ευθεία $\{x=-1,\ y=0\}$ είναι

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} [(r\cos\theta+1)^2+(r\sin\theta)^2]dz\right)rdr\right)d\theta.$$

3. Θεωρήστε το στερεό D στον $xyz-$χώρο που ευρίσκεται ανάμεσα στο ημισφαίριο $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, το επίπεδο $z=0$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=2x$. Το κέντρο βάρους του D είναι το σημείο $(\bar{x},0,\bar{z})$ όπου

$$\bar{x}=\frac{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r\cos\theta dz\right)rdr\right)d\theta}{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} dz\right)rdr\right)d\theta},\quad \bar{z}=\frac{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} zdz\right)rdr\right)d\theta}{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} dz\right)rdr\right)d\theta}.$$

4. Θεωρήστε το στερεό D στον $xyz-$χώρο που ευρίσκεται ανάμεσα στον κώνο $z=3\sqrt{x^2+y^2}$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=4x$. Η ροπή αδρανείας του D γύρω από τον άξονα των z είναι

$$\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{4\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{3r} dz\right)r^3dr\right)d\theta.$$

15.3. Σφαιρικές συντεταγμένες. Ένα σημείο (x,y,z) στον χώρο $\mathbb{R}^3$ μπορεί να περιγραφεί πλήρως από την απόστασή του $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ από το σημείο $(0,0,0)$, την γωνία $\phi=\arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z)$ με $0\le\phi<\pi$, και την γωνία $\theta=\arctan(y/x)$ με $0\le\theta<2\pi$. Εκφράζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες x,y,z συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων ρ,ϕ,θ βρίσκουμε

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \text{ και } z=\rho\cos\phi.$$

Οι εξισώσεις αυτές ορίζουν τον μετασχηματισμό: $T:\{(\rho,\phi,\theta):0<\rho<\infty, 0<\phi<\pi, 0\le\theta<2\pi\}\to(x,y,z)$. Ένας υπολογισμός μας δίνει ότι η *Jacobian* $\mathfrak{J}T$ είναι

$$\mathfrak{J}T=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}=\rho^2\sin\phi.$$

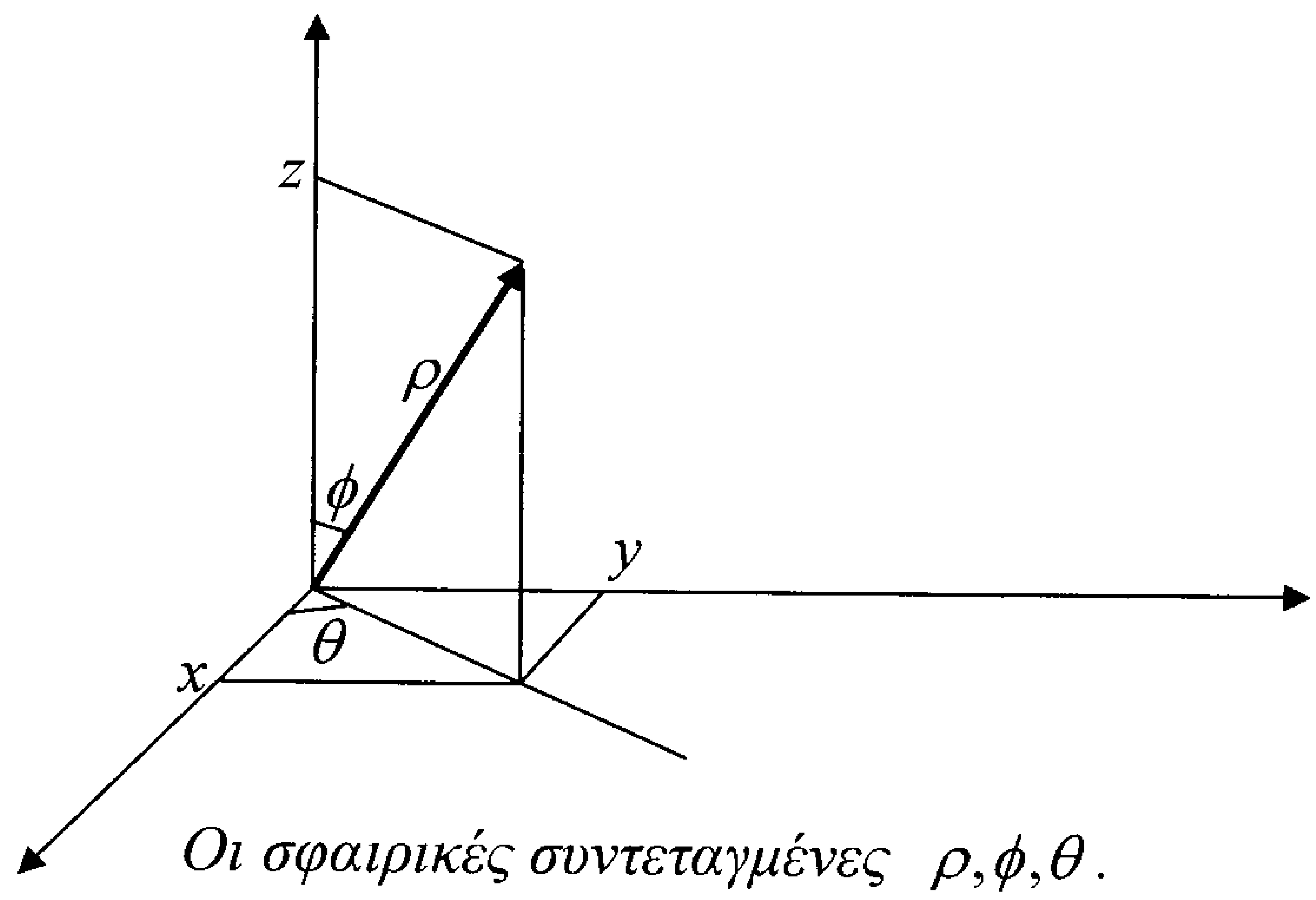
Άρα η σχέση των στοιχείων όγκου είναι $dxdydz=\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta$,

και για κατάλληλα σύνολα $D\subset\mathbb{R}^3$,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_G f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta$$

όπου $G = T^{-1}(D)$. Π.χ., για κατάλληλες συναρτήσεις $f(x,y,z)$, έχουμε

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<r^2} f(x,y,z)dxdydz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{r} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta .$$



Οι σφαιρικές συντεταγμένες ρ,ϕ,θ.

Εφαρμογές. 1. Ο όγκος της μπάλας $B(0,r) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2<r^2\}$ δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\mathit{O\gamma\kappa}(B(0,r)) = \iiint\limits_{B(0,r)} dxdydz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{r}\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

2. Γενικότερα, το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{r^2<x^2+y^2+z^2<R^2}(x^2+y^2+z^2)^{\lambda}dxdydz \ \ (\lambda\in\mathbb{R}),$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=r}^{R}\rho^{2\lambda}\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta = \begin{cases}\dfrac{4\pi}{2\lambda+3}\left(R^{2\lambda+3}-r^{2\lambda+3}\right) & \alpha\nu\ \ 2\lambda+3\neq 0\\ 4\pi(\log R-\log r) & \alpha\nu\ \ \lambda=-3/2.\end{cases}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon\to 0^+$, βρίσκουμε ότι

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}(x^2+y^2+z^2)^{\lambda}dxdydz<\infty \text{ αν κα μόνο αν } 2\lambda+3>0 .$$

Ομοίως, αφήνοντας το $r\to\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}(x^2+y^2+z^2)^{\lambda}dxdydz<\infty \text{ αν και μόνο αν } 2\lambda+3<0 .$$

3. Το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_{x=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\right)dy\right]dx$$

ισούται – από το *Θεώρημα του Fubini* – με το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2<a^2\\ x,y,z>0}}\frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$$

το οποίο – από τον τύπο σε σφαιρικές συντεταγμένες – γίνεται

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\frac{\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{\pi}{2}\int_{\rho=0}^{a}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} .$$

4. Το κέντρο βάρους του ημισφαιρίου

είναι το σημείο $(0,0,\bar{z})$ όπου

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 < 1, \ z > 0\}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z dxdydz}{\iiint_D dxdydz} = \frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\left(\int_{\rho=0}^{1} \rho\cos\phi \ \rho^2 \sin\phi d\rho\right) rdr\right) d\theta}{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\left(\int_{\rho=0}^{1} \rho^2 \sin\phi d\rho\right) rdr\right) d\theta}.$$

15.4. Εφαρμογές του τύπου αλλαγής μεταβλητών στα τριπλά ολοκληρώματα. 1. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{r^2 < \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} < R^2} \left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)^{\lambda} dxdydz \quad (\alpha,\beta,\gamma > 0, \ \lambda \in \mathbb{R})$$

θέτουμε

$$u = \frac{x}{\alpha}, \ v = \frac{y}{\beta}, \ w = \frac{z}{\gamma}, \ \text{οπότε } dxdydz = \alpha\beta\gamma dudvdw,$$

και το δοθέν ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iiint\limits_{r^2 < u^2+v^2+w^2 < R^2} (u^2+v^2+w^2)^{\lambda} dudvdw.$$

2. Η περίπτωση $\lambda = 0$ του προηγουμένου ολοκληρώματος δίνει τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

δηλαδή $\iiint_{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}<1} dxdydz = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$.

3. Θα δείξουμε ότι για κατάλληλους αριθμούς α,β,γ και συνάρτηση f,

$$\iiint\limits_{\substack{x>0,y>0,z>0\\ x+y+z<1}} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} f(x+y+z) dxdy = \left(\int\limits_{u=0}^{1} u^{\alpha+\beta+\gamma+2} f(u) du\right)\left(\int\limits_{v=0}^{1} v^{\alpha+\beta+1}(1-v)^{\gamma} dv\right)\left(\int\limits_{w=0}^{1} w^{\alpha}(1-w)^{\beta} dw\right).$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $x = uvw$, $y = uv(1-w)$, $y = u(1-v)$, με αντίστροφο τον

$$u = x+y+z, \ v = (x+y)/(x+y+z), \ v = x/(x+y).$$

Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}$ ευρίσκεται σε αντιστοιχία με το σύνολο $\{0<u<1, 0<v<1, 0<w<1\}$. Αν τώρα υπολογίσουμε την *Jacobian* βρίσκουμε

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = u^2 v,$$

και η αποδεικτέα σχέση έπεται.

4. Για ένα σχετικά απλό σύνολο $G \subset \mathbb{R}^2$, θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{(tx, ty, a(1-t)) : (x,y) \in G, \ 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (a > 0).$$

Τότε για κατάλληλες συναρτήσεις $f(x,y,z)$,

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z) dxdydz = a \iint\limits_{(u,v)\in G}\left(\int\limits_{t=0}^{1} f(tu, tv, (1-t)a) t^2 dt\right) dudv.$$

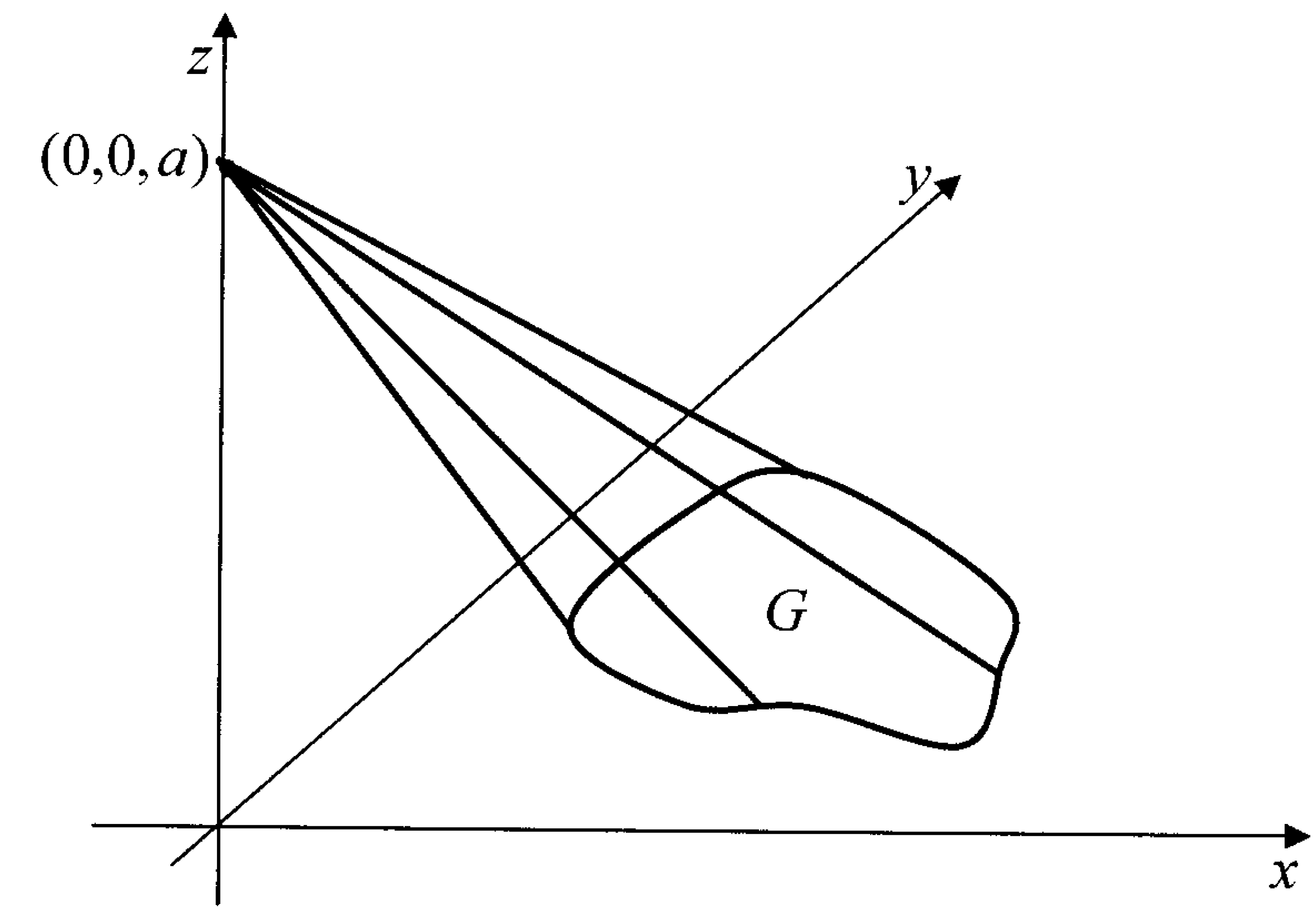
Για να το δούμε αυτό αρκεί να θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό

$$x = tu, \ y = tv, \ z = (1-t)a, \ (u,v) \in G, \ 0 \le t \le 1,$$

και να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο $G \times [0.1]$ ευρίσκεται σε αντιστοιχία με το σύνολο D. Επίσης

$$\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}\right| = at^2,$$

και η ζητούμενη σχέση έπεται.



Το σύνολο D παράγεται αν συνδέσουμε (με ευθύγραμμα τμήματα) το σημείο $(0,0,a)$ με τα σημεία $(x,y,0)$ του συνόλου G.

Π.χ., ο όγκος του D είναι

$$\mathcal{O}\gamma\kappa(D) = \iiint_D dxdydz = a \iint_{(u,v)\in G} \left(\int_{t=0}^{1} t^2 dt \right) dudv = \frac{1}{3} a \cdot \mathcal{E}\mu\beta(G),$$

και η ροπή αδρανείας του D με άξονα περιστροφής τον άξονα περιστροφής την ευθεία των x είναι

$$\iiint_D y^2 dxdydz = a \iint_{(u,v)\in G} \left(\int_{t=0}^{1} (tv)^2 t^2 dt \right) dudv = \frac{1}{5} a \iint_{(u,v)\in G} v^2 dudv .$$

5. Θεωρήστε το ημισφαίριο $\mathrm{H} = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z>0\}$ και το σημείο $P=(\alpha,\beta,\gamma)$ ($\gamma<0$). Φέροντας τα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο P προς τα σημεία (x,y,z) του ημισφαιρίου σχηματίζουμε το στερεό $D=\{(1-t)P+t(x,y,z):\ (x,y,z)\in \mathrm{H}\}$. Για κατάλληλες συναρτήσεις $f(x,y,z)$,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{t=0}^{1} g(t,\phi,\theta)\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\phi,\theta)}\right| dtd\phi d\theta,$$

όπου $g(t,\phi,\theta) = f\big((1-t)\alpha + tR\sin\phi\cos\theta, (1-t)\beta + tR\sin\phi\sin\theta, (1-t)\gamma + tR\cos\phi\big)$ και

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\phi,\theta)} = \begin{pmatrix} -\alpha + R\sin\phi\cos\theta & -\beta + R\sin\phi\sin\theta & -\gamma + R\cos\phi \\ (1-t)\alpha + Rt\cos\phi\cos\theta & (1-t)\beta + Rt\cos\phi\sin\theta & (1-t)\gamma - R\sin\phi \\ (1-t)\alpha - Rt\sin\phi\cos\theta & (1-t)\beta + Rt\sin\phi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

[Εκείνο που κάναμε ήταν να παραμετρήσουμε το ημισφαίριο Η χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες ϕ,θ και να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό

$$x=(1-t)\alpha + tR\sin\phi\cos\theta,\ y=(1-t)\beta + tR\sin\phi\sin\theta,\ z=(1-t)\gamma + tR\cos\phi .]$$

15.5. Ασκήσεις. 1. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό $x=u^2$, $y=v^2$, $z=w^2$, για να μετασχηματίστε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο στερεό $\{(x,y,z):\ x+y+z<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$ σε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο πρώτο ογδοημόριο της μπάλας $u^2+v^2+w^2<1$. Εν συνεχεία γράψτε το τελευταίο ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες.

2. Έστω $\alpha,\beta,\gamma>0$. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό $u=x^\alpha$, $v=y^\beta$, $w=z^\gamma$, για να μετασχηματίστε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο στερεό

$$\{(x,y,z):\ x^{2\alpha}+y^{2\beta}+z^{2\gamma}<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$$

σε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο πρώτο ογδοημόριο της μπάλας $u^2+v^2+w^2<1$. Εν συνεχεία γράψτε το τελευταίο ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες.

3. Δείξτε ότι $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ x>0,y>0,z>0}} xyz\,dxdydz = \frac{R^6}{48}$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2<1\\ x>0,y>0,z>0}} xyz\,dxdydz$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$.

5. Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1,\ z>\alpha\}$ $(-1<\alpha<1)$.

6. Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1,\ z>\lambda\sqrt{x^2+y^2}\}$ $(\lambda>0)$.

7. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια μιας ομογενούς μπάλας ακτίνας R, όταν αυτή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

8. Για $\lambda\in\mathbb{R}$, μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{5}\right)^{\lambda}dxdydz$.

9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2+z^2)^{\lambda}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

10. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{dxdydz}{(\alpha|x|+\beta|y|+\gamma|z|)^{\lambda}} \quad \text{και} \quad \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{dxdydz}{(\alpha|x|+\beta|y|+\gamma|z|)^{\lambda}},$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, όταν $\alpha,\beta,\gamma>0$.

11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\mu}}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\lambda}}dxdydz$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbb{R})$.

12. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{\sqrt{\sqrt{|x|}+y^2+z^4}}{(x^2+y^2+z^2)^{31/20}}dxdydz.$$

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz$ όπου D είναι το στερεό

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<r^2 \ \text{και}\ x^2+y^2<\alpha z^2\} \quad (r>0,\alpha>0).$$

14. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda}}dxdydz, \quad \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{(x^2+y^6+z^8)^{\lambda+1}\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda}}dxdydz,$$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{(|x|+|y|+|z|)^{5/2}\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda}}dxdydz,$$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{(|x|+|y|+|z|)^{5/2}\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda+(1/2)}}dxdydz, \text{ όταν } \tfrac{1}{2}<\lambda<1.$$

15. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int\limits_{x=0}^{a}\left[\int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}}\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}dz\right)dy\right]dx$.

16. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση, τα ολοκληρώματα $\displaystyle\iiint\limits_{G}\frac{dxdydz}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\lambda}}$, στις περιπτώσεις: $G\subset\{x^2+y^2+z^2<1\}$ και $G\subset\{1<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R\}$ (G είναι σε κάθε περίπτωση ένα ανοικτό σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν).

16. Επικαμπύλια ολοκληρώματα

16.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα στο xy – επίπεδο – Επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_\gamma pdx + qdy$.

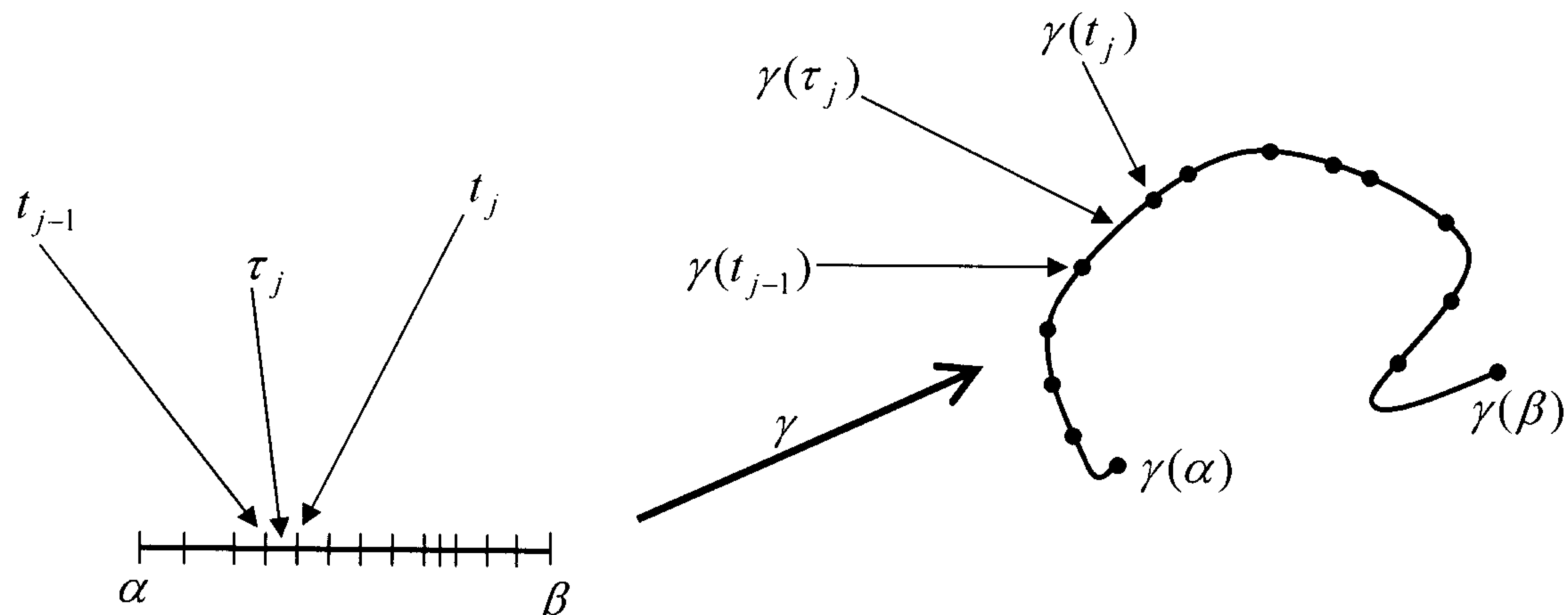
Ας θεωρήσουμε μια C^1 – καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ και δυο συνεχείς συναρτήσεις $p,q:[\gamma]\to\mathbb{R}$, όπου $[\gamma]\overset{op}{=}\gamma([\alpha,\beta])$ είναι το σύνολο των σημείων της καμπύλης. Γράφοντας αναλυτικά την καμπύλη γ, έχουμε δυο C^1 – συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ ορισμένες για $t\in[\alpha,\beta]$, ούτως ώστε $\gamma(t)=(x(t),y(t))$. Με άλλα λόγια οι εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, για $t\in[\alpha,\beta]$, είναι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης γ.

Η διαδικασία προσέγγισης στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma pdx+qdy$ είναι η εξής: Για κάθε διαμέριση $P=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta\}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και για κάθε επιλογή σημείων $\{\tau_j\}$ ως προς την διαμέριση αυτή (δηλαδή $t_{j-1}\le\tau_j\le t_j$), σχηματίζουμε τα αθροίσματα *Riemann*

$$\sum_{j=1}^{N}\left[p(\xi_j,\eta_j)(x_j-x_{j-1})+q(\xi_j,\eta_j)(y_j-y_{j-1})\right],$$

όπου $x_j=x(t_j)$, $y_j=y(t_j)$ και $(\xi_j,\eta_j)=\gamma(\tau_j)=(x(\tau_j),y(\tau_j))$. Το όριο αυτών των αθροισμάτων, καθώς η λεπτότητα $\|P\|=\max\limits_{1\le j\le N}(t_j-t_{j-1})\to 0$, υπάρχει και μάλιστα

$$(*)\qquad \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{j=1}^{N}\left[p(\xi_j,\eta_j)(x_j-x_{j-1})+q(\xi_j,\eta_j)(y_j-y_{j-1})\right]=\int_\alpha^\beta\left[p(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)+q(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}(t)\right]dt.$$



Σε κάθε διαμέριση του διαστήματος $[\alpha,\beta]$,
η απεικόνιση γ αντιστοιχεί μια διαμέριση
του συνόλου $[\gamma]$ των σημείων της καμπύλης.

Αυτό που σημαίνει η (*) είναι το εξής: Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ με $\|P\|<\delta$ και για κάθε επιλογή σημείων $\{\tau_j\}$ σχετικά με την διαμέριση P, να ισχύει

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\left[p(\xi_j,\eta_j)(x_j-x_{j-1})+q(\xi_j,\eta_j)(y_j-y_{j-1})\right]-\int_\alpha^\beta\left[p(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)+q(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}(t)\right]dt\right|<\varepsilon.$$

Ορισμός. Η κοινή τιμή του ορίου και του ολοκληρώματος στην (*) ονομάζεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διαφορικής μορφής** $pdx+qdy$ πάνω στην καμπύλη γ και συμβολίζεται με

$$\int_\gamma p(x,y)dx+q(x,y)dy \text{ ή } \int_\gamma pdx+qdy.$$

16.2. Το ανεξάρτητο του επικαμπυλίου ολοκληρώματος από την παραμέτρηση της καμπύλης. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma pdx+qdy$ είναι ανεξάρτητη από την παραμέτρηση της καμπύλης γ. Κατ' αρχάς ας εξηγήσουμε τί είναι αναπαραμέτρηση της καμπύλης γ. Ας θεωρήσουμε μια C^1 – απεικόνιση $\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to[\alpha,\beta]$, από το διάστημα $[\alpha_1,\beta_1]$ επί του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, η οποία να είναι γνησίως αύξουσα, οπότε βέβαια $\phi(\alpha_1)=\alpha$ και $\phi(\beta_1)=\beta$. Αν $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι μια C^1 – καμπύλη, τότε ορίζεται μια «άλλη» καμπύλη, η εξής:

$$\gamma\circ\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to\mathbb{R}^2 \text{ δηλαδή } \gamma\circ\phi(s)=\gamma(\phi(s)) \text{ για } \alpha_1\le s\le\beta_1 .$$

Λέγουμε τότε ότι η $\gamma\circ\phi$ είναι μια **αναπαραμέτρηση** της καμπύλης γ. Έτσι αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$, τότε $x=x(\phi(s))$, $y=y(\phi(s))$, $s\in[\alpha_1,\beta_1]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\gamma\circ\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to\mathbb{R}^2$. Το ανεξάρτητο του ολοκληρώματος $\int_\gamma pdx+qdy$ από την παραμέτρηση της καμπύλης σημαίνει ότι

(**) $$\int_{\gamma\circ\phi} pdx+qdy=\int_\gamma pdx+qdy .$$

16.3. Παραδείγματα. 1. Ας υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma(-ydx+xdy)$, όταν η καμπύλη γ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα a. Στο παράδειγμα αυτό η καμπύλη περιγράφεται γεωμετρικά, οπότε θα πρέπει να βρούμε μια παραμέτρηση της καμπύλης. Και μια τέτοια παραμέτρηση του κύκλου αυτού είναι η εξής: $x(t)=a\cos t$, $y(t)=a\sin t$ με $0\le t\le 2\pi$. Επομένως

$$\int_C(-ydx+xdy)=\int_{t=0}^{2\pi}\left[-y(t)\frac{dx}{dt}(t)+x(t)\frac{dy}{dt}(t)\right]dt=\int_{t=0}^{2\pi}[(-a\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(a\cos t)]dt=\int_{t=0}^{2\pi}a^2dt=2\pi a^2 .$$

2. Υπολογισμός του επικαμπυλίου ολοκληρώματος $\int_{[A,B]}pdx+qdy$, όταν A και B είναι δυο σημεία του επιπέδου. Ας πούμε ότι $A=(a_1,a_2)$ και $B=(b_1,b_2)$. Τότε μια παραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος $[A,B]$ είναι

$$x(t)=a_1(1-t)+b_1t,\ y(t)=a_2(1-t)+b_2t \text{ με } 0\le t\le 1 .$$

Επομένως

$$\int_{[A,B]}pdx+qdy=\int_{[A,B]}p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{t=0}^{1}[p(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2))(b_1-a_1)$$
$$+q(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2))(b_2-a_2)]dt .$$

Και στην περίπτωση που τα σημεία A και B ευρίσκονται πάνω στον άξονα των x, $A=(a_1,0)$ και $B=(b_1,0)$, έχουμε $\int_{[A,B]}pdx+qdy=\int_{[A,B]}p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{x=a_1}^{b_1}p(x,0)dx$.

3. Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_\gamma\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, όπου γ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα ρ. Παίρνοντας την παραμέτρηση $x(t)=\rho\cos t$, $y(t)=\rho\sin t$, $0\le t\le 2\pi$, του κύκλου αυτού, υπολογίζουμε

$$\int_\gamma\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_{t=0}^{2\pi}\frac{-y(t)\frac{dx}{dt}(t)+x(t)\frac{dy}{dt}(t)}{[x(t)]^2+[y(t)]^2}dt=\int_{t=0}^{2\pi}\frac{(-\rho\sin t)(-\rho\sin t)+(\rho\cos t)(\rho\cos t)}{\rho^2}dt=\int_{t=0}^{2\pi}dt=2\pi .$$

Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ανεξάρτητο του ρ.

4. Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_\Gamma\frac{(x-\alpha)dy-(y-\beta)dx}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$, όπου Γ είναι η καμπύλη Γ: $x=\alpha+\rho\cos t$, $y=\beta+\rho\sin t$, $0\le t\le 2\pi N$ (όπου $N\in\mathbb{N}$). Η εν λόγω καμπύλη είναι «κύκλος» (με κέντρο το σημείο (α,β)), ο οποίος <u>όμως</u> διαγράφεται N φορές. Οπότε η τιμή του ολοκληρώματος αυτού είναι $2\pi N$.

5. Έστω $\varphi,\theta\in\mathbb{R}$, $\varphi<\theta$, και $C:[\varphi,\theta]\to\mathbb{R}^2$ η καμπύλη C: $x=\alpha+\rho\cos t$, $y=\beta+\rho\sin t$, $\varphi\le t\le\theta$. Τότε

$$\int_C \frac{(x-\alpha)dy-(y-\beta)dx}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\theta-\varphi .$$

16.4. ***Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε κατά τμήματα*** C^1 ***–καμπύλες.*** Μέχρι τώρα οι καμπύλες που χρησιμοποιούσαμε ήταν C^1. Μια καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ λέγεται ότι είναι **κατά τμήματα** C^1, αν υπάρχουν σημεία $\alpha=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_N=\beta$, ούτως ώστε οι καμπύλες $\gamma_j \overset{op}{=} \gamma\big|_{[\tau_{j-1},\tau_j]}:[\tau_{j-1},\tau_j]\to\mathbb{R}^2$, $j=1,2,...,N$, να είναι όλες C^1. [Συνήθως υποθέτουμε ότι η καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι συνεχής.] Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη ορίζεται ως εξής:

$$\int_C pdx+qdy \overset{op}{=} \sum_{j=1}^{N}\int_{C_j} pdx+qdy=\sum_{j=1}^{N}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}\left[p(x(t),y(t))x'(t)+q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt .$$

Συνήθως τα σημεία $\gamma(\tau_j)$, $j=1,2,...,N$, όπου η καμπύλη ενδέχεται να μην είναι ομαλή, δεν δημιουργούν προβλήματα.

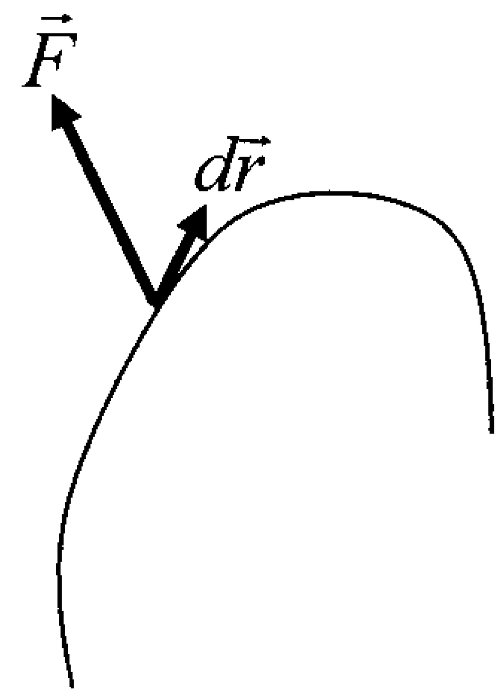
16.5. ***Φυσική σημασία του επικαμπυλίου ολοκληρώματος.*** Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma pdx+qdy$ ενίοτε γράφεται στην μορφή

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

όπου $\vec{F}$ παριστά το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=p\vec{i}+q\vec{j}$, οριζόμενο πάνω στην καμπύλη γ — ή κατά μήκος της καμπύλης όπως λέγουμε — και $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ είναι το διάνυσμα θέσεως, που περιγράφει την καμπύλη. Με άλλα λόγια το διαφορικό $pdx+qdy$ γράφεται στην μορφή

$$pdx+qdy=\vec{F}\cdot d\vec{r}=(p\vec{i}+q\vec{j})\cdot[(dx)\vec{i}+(dy)\vec{j}\,].$$

Αν δε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ θεωρηθεί σαν πεδίο δυνάμεων, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι το **έργο** που παράγει το εν λόγω πεδίο δυνάμεων κατά μήκος της καμπύλης γ.



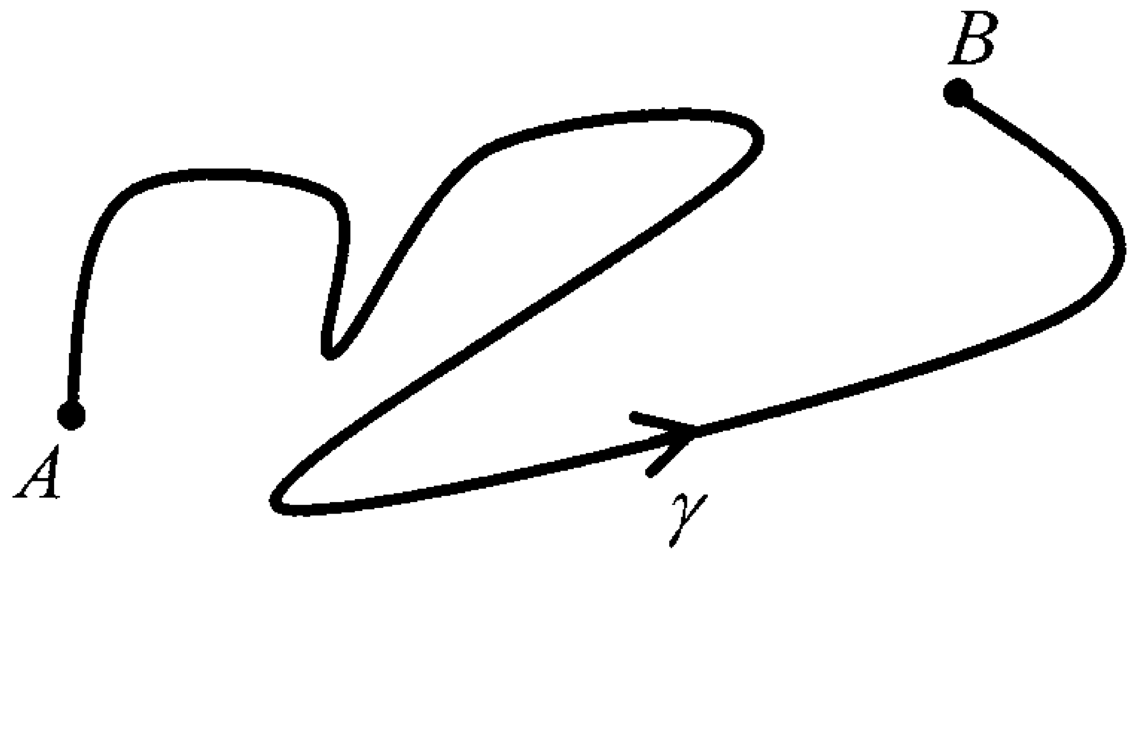
Το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{F}$ *με το στοιχειώδες διάνυσμα* $d\vec{r}$ *είναι το* ***στοιχείο έργου*** *– το στοιχειώδες έργο.*

16.6. Θεώρημα. *Έστω* $D\subset\mathbb{R}^2$ *ένα ανοικτό σύνολο,* $f:D\to\mathbb{R}$ *μια* C^1 *–συνάρτηση και* $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ *μια κατά τμήματα* C^1 *–καμπύλη στο* D*. Τότε*

$$\int_\gamma df=\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=f(B)-f(A)$$

όπου $A=\gamma(\alpha)$ *και* $B=\gamma(\beta)$*. Ισοδύναμα,*

$$\int_\gamma \nabla f\cdot d\vec{r}=f(B)-f(A).$$



Αν η καμπύλη γ *ξεκινά από το σημείο* A *και καταλήγει στο σημείο* B*, και η συνάρτηση* f *είναι* C^1 *σε περιοχή της καμπύλης, τότε* $\int_\gamma df=f(B)-f(A)$.

Πόρισμα. *Αν η καμπύλη* $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ *είναι κλειστή, αν δηλαδή* $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$, *τότε*

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = 0.$$

16.7. Παραδείγματα. 1. Θεωρήστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma x^y\left(\frac{y\cos x}{x}-\sin x\right)dx + x^y\log x\cos x dy$$

όπου γ είναι η καμπύλη: $x=e^t\cos t$, $y=\cos t-\sin t$, $0\le t\le \pi/3$. Παρατηρώντας ότι (για $x>0$)

$$x^y\left(\frac{y\cos x}{x}-\sin x\right)dx + x^y\log x\cos x dy = df \quad \text{όπου} \quad f(x,y)=x^y\cos x,$$

και ότι $\gamma(0)=(1,1)$ και $\gamma(\pi/3)=(\frac{1}{2}e^{\pi/3},\frac{1-\sqrt{3}}{2})$, βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με $f(\frac{1}{2}e^{\pi/3},\frac{1-\sqrt{3}}{2})-f(1,1)$.

2. Θεωρήστε δυο τυχούσες C^1 συναρτήσεις $g(x,y)$ και $h(x,y)$, και ορίστε την καμπύλη

$$\Gamma:\ x=e^{g(\cos t,\sin t)},\ y=h(\cos t,\sin t),\ 0\le t\le 2\pi.$$

Τότε η καμπύλη Γ είναι κλειστή και ευρίσκεται στο ημιεπίπεδο $\{(x,y): x>0\}$. Επομένως

$$\int_\Gamma x^y\left(\frac{y\cos x}{x}-\sin x\right)dx + x^y\log x\cos x dy = 0.$$

3. Θεωρήστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, όπου $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι μια καμπύλη η οποία δεν περνά από το σημείο $(0,0)$. Παρατηρώντας ότι

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = d\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \text{στο σύνολο } \mathbb{R}^2-\{(0,0)\},$$

βρίσκουμε ότι

$$\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \log|B|-\log|A|,$$

όπου $A=\gamma(\alpha)$ και $B=\gamma(\beta)$.

16.8. Ασκήσεις. 1. Θεωρήστε την καμπύλη $\gamma=[(-1,-2),(3,0)]+[(3,0),(-3,4)]$ και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

Επίσης θεωρήστε το ημικύκλιο $\mathcal{K}$ με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $[(-1,-2),(-3,4)]$, το οποίο το ξεκινά από το σημείο $(-1,-2)$, περνά από το σημείο $(1,0)$, και καταλήγει στο σημείο $(-3,4)$, και υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{[A,B]} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

όταν τα σημεία A και B ευρίσκονται πάνω στην ίδια ημιευθεία που ξεκινά από το σημείο $(0,0)$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{C_{A,B}} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

όταν $C_{A,B}$ είναι το τόξο του κύκλου, κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας a, από το σημείο A μέχρι το σημείο B.

4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_C -ydx$ και $\int_C xdy$ όταν C είναι η έλλειψη $\frac{(x-\alpha)^2}{\lambda^2}+\frac{(y-\beta)^2}{\mu^2}=1$.

5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_C -ydx$ και $\int_C xdy$ όταν C είναι το τρίγωνο (εννοείται η τριγωνική γραμμή) με κορυφές τα σημεία A, B, C.

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_C -ydx$ και $\int_C xdy$ όταν C είναι η καμπύλη $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$ ($\alpha>0$).

7. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{[x+(x^2+y^2)f_x]dx+[y+(x^2+y^2)f_y]dy}{x^2+y^2},$$

όπου $f\in C^1(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$ και $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι μια καμπύλη η οποία δεν περνά από το σημείο $(0,0)$.

8. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{[(x^2+y^2)f_x-y]dx+[(x^2+y^2)f_y+x]dy}{x^2+y^2},$$

όπου $f\in C^1(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$ και γ είναι ένας κύκλος με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

9. Σωστό ή λάθος; Αν οι συναρτήσεις f και g είναι C^1 σε περιοχή της κλειστής καμπύλης γ τότε

$$\int_\gamma fg_x dx+fg_y dy=-\int_\gamma gf_x dx+gf_y dy.$$

10. Δείξτε ότι

$$\int_\Gamma \frac{(x-\alpha)dy-(y-\beta)dx}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm 2\pi,$$

όπου Γ είναι η έλλειψη $x=\alpha+\lambda\cos t$, $y=\beta+\mu\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

16.9. Μήκος καμπυλών. Ας θεωρήσουμε μια καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ στο $xy-$επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Για κάθε διαμέριση $P=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta\}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, θεωρούμε τα αντίστοιχα σημεία $\gamma(\alpha)=\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_N)=\gamma(\beta)$, πάνω στην καμπύλη $[\gamma]$. Οι συντεταγμένες των σημείων αυτών είναι $(x(t_j), y(t_j))$, $j=0,1,2,\dots,N$. Εν συνεχεία ας σχηματίσουμε το άθροισμα

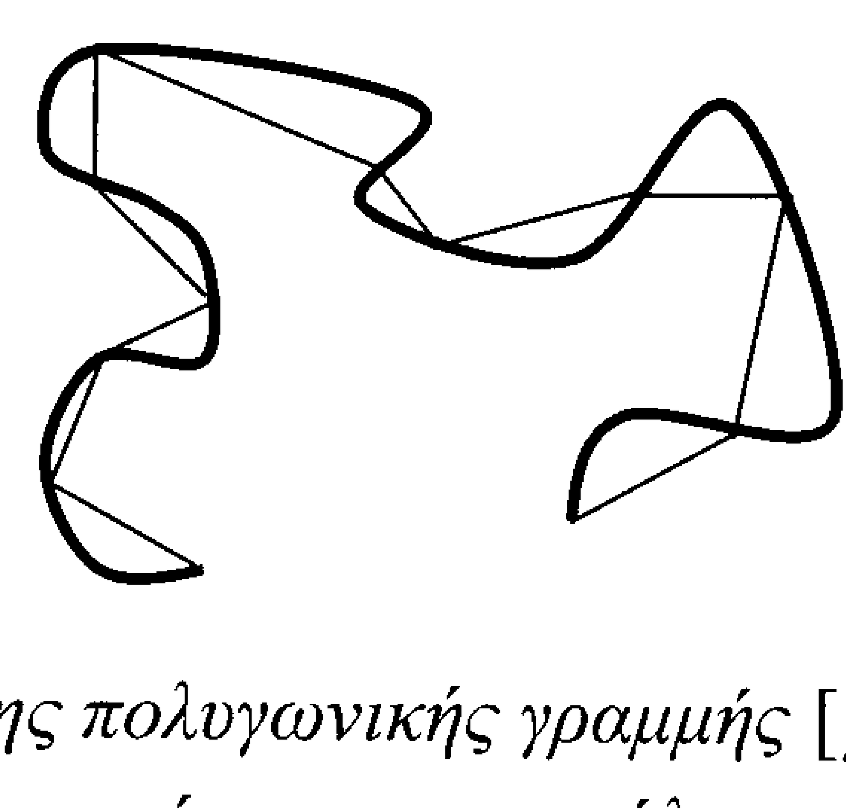
$$\mu(\gamma,P)=\sum_{j=1}^N|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|=\sum_{j=1}^N\sqrt{[x(t_j)-x(t_{j-1})]^2+[y(t_j)-y(t_{j-1})]^2},$$

το οποίο είναι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής

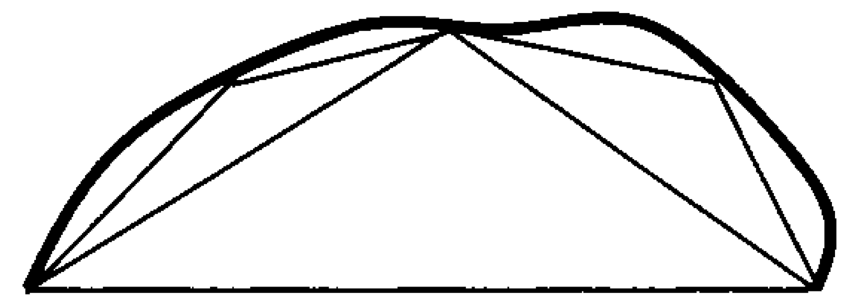
$$[\gamma(t_0),\gamma(t_1),\gamma(t_2),\dots,\gamma(t_N)],$$

Τώρα, πρέπει να είναι διαισθητικά αποδεκτό, ότι αν η λεπτότητα $\|P\|=\max_{1\le j\le N}(t_j-t_{j-1})$ της διαμέρισης P είναι «μικρή», τότε ο αριθμός $\mu(\gamma,P)$ προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης γ. Από την ανωτέρω συζήτηση φαίνεται ότι είναι φυσικό ότι το μήκος της καμπύλης γ είναι ο αριθμός

$$\mu\eta\kappa(\gamma)\overset{o\rho}{=}\sup\{\mu(\gamma,P): \textit{καθώς το } P \textit{ διατρέχει το σύνολο των διαμερίσεων του } [\alpha,\beta]\}.$$



Το μήκος της πολυγωνικής γραμμής $[\gamma(t_0),\gamma(t_1),\gamma(t_2),\dots,\gamma(t_N)]$ *προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης.*



Λεπτότερες διαμερίσεις δίνουν καλύτερες προσεγγίσεις.

16.10. Θεώρημα. *Αν η καμπύλη* γ *είναι κλάσεως* C^1, *το supremum που ορίζει το μήκος της καμπύλης είναι πεπερασμένο και μάλιστα*

$$\mu\eta\kappa(\gamma)=\int_{t=\alpha}^{\beta}\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|dt=\int_{t=\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

16.11. Το ανεξάρτητο του μήκους καμπύλης από την παραμέτρηση. Ας θεωρήσουμε μια αναπαραμέτρηση $\gamma\circ\phi$ της καμπύλης $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$. Δηλαδή αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης γ τότε $x=x(\phi(s))$, $y=y(\phi(s))$, $s\in[\alpha_1,\beta_1]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\gamma\circ\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to\mathbb{R}^2$, όπου $\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to[\alpha,\beta]$ είναι μια C^1−απεικόνιση, από το διάστημα $[\alpha_1,\beta_1]$ επί του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, η οποία να είναι γνησίως αύξουσα, οπότε βέβαια $\phi(\alpha_1)=\alpha$ και $\phi(\beta_1)=\beta$. Τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\int_{t=\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t=\alpha_1}^{\beta_1}\sqrt{\left(\frac{dx(\phi(s))}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy(\phi(s))}{ds}\right)^2}\,ds.$$

16.12. Στοιχείο μήκους καμπύλης. Ας θεωρήσουμε πάλι μια C^1−καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ στο xy−επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, και έστω $\ell=\mu\eta\kappa(\gamma)$ το μήκος αυτής. Το διαφορικό $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|dt$ λέγεται **στοιχείο μήκους** της καμπύλης $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ και συμβολίζεται με ds. Δηλαδή,

$$ds=\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|dt=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Είναι αυτό που όταν ολοκληρωθεί πάνω στην καμπύλη, δίνει το μήκος της καμπύλης. Ακριβέστερα, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $s:[\alpha,\beta]\to[0,\ell]$, με τον τύπο

$$s(t)=\int_{\gamma_t}ds=\int_{\tau=\alpha}^{t}\left|\frac{d\gamma}{d\tau}\right|d\tau=\int_{\tau=\alpha}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\,d\tau.$$

(γ_t είναι το μέρος της καμπύλης γ από το σημείο $\gamma(\alpha)$ μέχρι το σημείο $\gamma(t)$.) Τότε η συνάρτηση αυτή είναι C^1, και η παράγωγός της ως προς την παράμετρο t, είναι

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

γεγονός που δικαιολογεί και τον συμβολισμό « ds » του στοιχείου μήκους.

16.13. Επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_\gamma fds$. Έστω $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ μια C^1−καμπύλη στο xy−επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, και $f:[\gamma]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής καμπύλη ορισμένη πάνω στην καμπύλη αυτή. Τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma fds$, της συνάρτησης f πάνω στην καμπύλη γ, γνωστό και σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα **πρώτου είδους**, ως εξής:

$$\int_\gamma fds=\int_{t=\alpha}^{\beta}f(x(t),y(t))\frac{ds}{dt}dt=\int_{t=\alpha}^{\beta}f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Και δεν είναι τίποτα άλλο από το όριο των αθροισμάτων Riemann που σχηματίζονται ως εξής: Θεωρούμε διαμερίσεις $P=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta\}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, καθώς και ενδιάμεσα σημεία $\tau_j\in[t_{j-1},t_j]$, και σχηματίζουμε τα αθροίσματα

$$\mathcal{S}(P,\{\tau_j\})=\sum_{j=1}^{N}f(\gamma(\tau_j))\left|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right|=\sum_{j=1}^{N}f(x(\tau_j),y(\tau_j))\sqrt{[x(t_j)-x(t_{j-1})]^2+[y(t_j)-y(t_{j-1})]^2}\,.$$

Τότε

$$\lim_{\|P\|\to 0}\mathcal{S}(P,\{\tau_j\})=\int_\gamma fds\,,$$

υπό την έννοια ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και για κάθε επιλογή σημείων $\{\tau_j\}$, ως προς την διαμέριση P, να ισχύει:

$$\left|\mathcal{S}(P,\{\tau_j\})-\int_\gamma fds\right|<\varepsilon\,.$$

Σημείωση. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_\gamma pdx+qdy$ λέγονται επικαμπύλια ολοκληρώματα **δευτέρου είδους**.

16.14. Εφαρμογές των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_\gamma fds$.

1. Η **μέση τιμή** της συνάρτησης f πάνω στην καμπύλη γ είναι

$$\bar{f}=\frac{\int_\gamma fds}{\int_\gamma ds}=\frac{1}{\mu\eta\kappa(\gamma)}\int_\gamma fds\,.$$

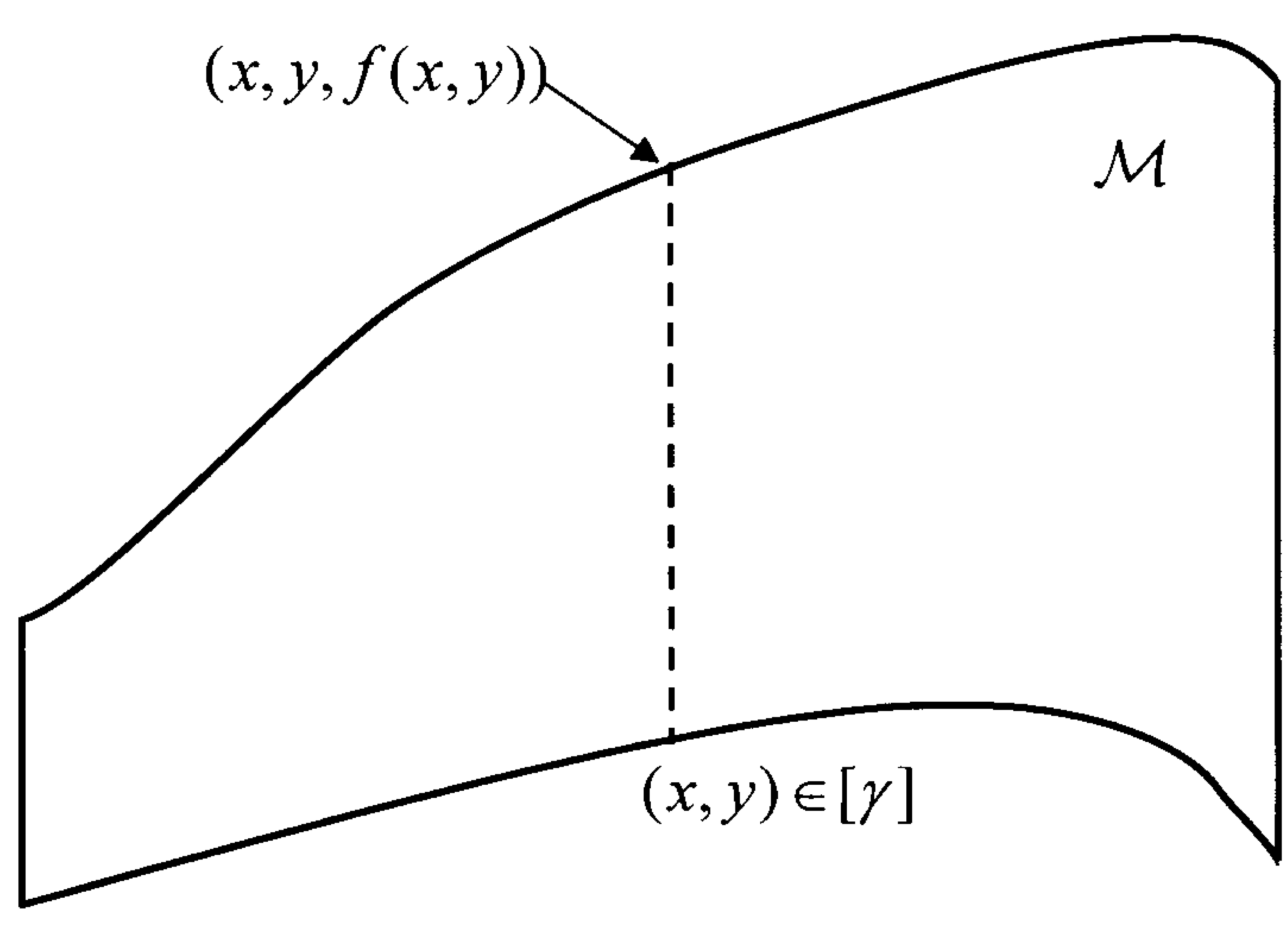
Π.χ. το **κέντρο βάρους** της ομογενούς καμπύλης γ είναι το σημείο

$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{\mu\eta\kappa(\gamma)}\left(\int_\gamma xds,\int_\gamma yds\right).$$

2. Αν η συνάρτηση $f\geq 0$ τότε η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma fds$ είναι το **εμβαδόν** της επιφάνειας

$$\mathcal{M}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in[\gamma],\ 0\leq z\leq f(x,y)\}\,.$$

(Βέβαια για να ισχύει αυτό θα πρέπει η καμπύλη να είναι σχετικά «απλή» – αλλιώς το ολοκλήρωμα «μετρά και τις τυχόν επικαλύψεις» που κάνει η καμπύλη με τον εαυτόν της.)



3. Η **ροπή αδρανείας** σώματος στο σχήμα της καμπύλης γ, με πυκνότητα 1 και με άξονα περιστροφής τον άξονα των z, είναι

$$\int_\gamma (x^2+y^2)ds .$$

4. Το **έργο** μιας δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος της καμπύλης γ είναι

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{\tau}\, ds ,$$

όπου $\vec{\tau}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο (στην καμπύλη) διανυσματικό πεδίο.

5. Η **ροή** της δύναμης $\vec{F}$ διαμέσω της καμπύλης γ είναι

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}\, ds$$

όπου $\vec{v}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο (στην καμπύλη) διανυσματικό πεδίο. (Εφαρμόζεται για επίπεδες καμπύλες.)

16.15. Ασκήσεις. 1. Γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει το μήκος της έλλειψης

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\ (a>b>0).$$

Μπορείτε να το «υπολογίσετε»; Εν συνεχεία δείξτε ότι το μήκος της εν λόγω έλλειψης είναι $4aE(\sqrt{a^2-b^2}/a)$ όπου $E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt\ \ (0<k<1)$.

2. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$.

3. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το μήκος της καμπύλης $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

4. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

5. Εντοπίστε το κέντρο βάρους ενός ομογενούς σύρματος σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας a.

6. Θεωρήστε την επιφάνεια $\mathcal{M}$ που παράγεται όταν στα σημεία (x,y) της καμπύλης $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ υψώσουμε ευθύγραμμα τμήματα, κάθετα στο $xy-$επίπεδο, μήκους e^x+y^2. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα που να δίνει το εμβαδόν της $\mathcal{M}$.

7. Πόση είναι η ροπή αδρανείας του κύκλου $x^2+y^2=2ax$ γύρω από τον $z-$άξονα;

8. Πόση είναι η ροπή αδρανείας του κύκλου $x^2+y^2=2ax$ γύρω από την ευθεία

$$x=2t+3,\ y=3t-2,\ z=5t-1\ (t\in\mathbb{R});$$

9. Θεωρήστε μια καμπύλη γ στο $xy-$επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Εν συνεχεία πάρτε ένα σημείο (a,b,c) στον χώρο και συνδέστε το με τα σημεία της καμπύλης. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα που να δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται κατ' αυτόν τον τρόπο. (Η επιφάνεια μοιάζει με «κώνο».)

10. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το εμβαδόν της επιφάνειας που αποτελείται από τα σημεία $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ με

$$u=(1-\lambda)x,\ v=(1-\lambda)y,\ w=\lambda,\ x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x),\ \lambda\in[0,1].$$

11. Αναπτύξτε την θεωρία των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στον $\mathbb{R}^n$: $2^{ου}$ είδους: $\int_\gamma\sum_{j=1}^n f_j dx_j$ και $1^{ου}$ είδους: $\int_\gamma f ds$. Ιδιαιτέρως αποδείξτε το θεώρημα: *Έστω $D\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $F:D\to\mathbb{R}$ μια C^1-συνάρτηση και $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ μια κατά τμήματα C^1-καμπύλη στο D. Τότε*

$$\int_\gamma dF=\int_\gamma\sum_{j=1}^n\frac{\partial F}{\partial x_j}dx_j=F(B)-F(A)\ \ \text{όπου } A=\gamma(\alpha) \text{ και } B=\gamma(\beta).$$

Ισοδύναμα, $\int_\gamma \vec{\nabla}F\cdot d\vec{r}=F(B)-F(A)$.

Το θεώρημα του Stokes και θεώρημα Gauss

1. Επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$ και επιφανειακά ολοκληρώματα. Ας θεωρήσουμε μια C^1 επιφάνεια $\mathcal{S}: G \to \mathbb{R}^3$ στον $xyz-$χώρο ορισμένη σε ένα κατάλληλο ανοικτό σύνολο $G \subset \mathbb{R}^2$. Αναλυτικά αυτή η επιφάνεια περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\mathcal{S} : x = x(t,s),\ y = y(t,s),\ z = z(t,s),\ (t,s) \in G,$$

όπου $\mathcal{S}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$. Το **στοιχείο εμβαδού** $d\sigma$ της επιφάνειας $\mathcal{S}$ ορίζεται ως εξής:

$$d\sigma = \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds.$$

Έτσι το εμβαδόν της επιφάνειας $\mathcal{S}$ δίδεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$\mathcal{E}\mu\beta(\mathcal{S}) = \iint_G d\sigma = \iint_G \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds$$

Γενικότερα ορίζεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathcal{S}} f\, d\sigma$ ως εξής:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\, d\sigma$$

$$= \iint_G f(x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds.$$

Το διάνυσμα $\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\vec{i} + \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\vec{j} + \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\vec{k}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $\mathcal{S}$ στο σημείο $\mathcal{S}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{v} = \frac{\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\vec{i} + \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\vec{j} + \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\vec{k}}{\sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}}$$

λέγεται μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο.

Αν $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε περιοχή της $\mathcal{S}$, το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{v}\, d\sigma$$

ονομάζεται **ροή** του διανυσματικού πεδίο $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας $\mathcal{S}$.

Παραδείγματα. **(1)** Το στοιχείο εμβαδού του ημισφαιρίου $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\le a^2$, είναι $d\sigma=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$.

(2) Ας θεωρήσουμε την σφαίρα S: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Χρησιμοποιώντας για παραμέτρους τις σφαιρικές συντεταγμένες ϕ και θ, περιγράφουμε την σφαίρα S με τις παραμετρικές εξισώσεις $x=a\sin\phi\cos\theta$, $y=a\sin\phi\sin\theta$, $z=a\cos\phi$, $(\phi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$. Τότε το στοιχείο εμβαδού είναι $d\sigma=a^2\sin\phi d\phi d\theta$.

(3) Δοθέντων αριθμών $a>b>0$, οι παραμετρικές εξισώσεις $x=(a+b\cos\phi)\cos\theta$, $y=(a+b\cos\phi)\sin\theta$, $z=b\sin\phi$, καθώς τα ϕ και θ κινούνται με $0\le\theta\le2\pi$, $0\le\phi\le2\pi$, περιγράφουν την επιφάνεια Τ του *torus*, δηλαδή της επιφάνειας που παράγεται από τον κύκλο ακτίνας b, ο οποίος ευρίσκεται στο xz − επίπεδο και το κέντρου του οποίου είναι το σημείο $(a,0,0)$, όταν ο κύκλος αυτός περιστραφεί γύρω από τον άξονα των z. Υπολογίζοντας το στοιχείο εμβαδού βρίσκουμε $d\sigma=b(a+b\cos\phi)d\theta d\phi$.

Εφαρμογές των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της μορφής $\iint\limits_{S} f\,d\sigma$.

(1) Η **μέση τιμή** της συνάρτησης f πάνω στην επιφάνεια S είναι

$$\bar{f}=\frac{\iint\limits_{S} f\,d\sigma}{\iint\limits_{S} d\sigma}=\frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(S)}\iint\limits_{S} f\,d\sigma .$$

(2) Οι συντεταγμένες του **κέντρου βάρους** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ της επιφάνειας S δίδονται από τους τύπους

$$\bar{x}=\frac{\iint_S x\,d\sigma}{\iint_S d\sigma},\ \bar{y}=\frac{\iint_S y\,d\sigma}{\iint_S d\sigma},\ z=\frac{\iint_S z\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}.$$

(3) Η **ροπή αδρανείας** της επιφάνειας S γύρω από τον άξονα των z δίδεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)d\sigma$. Γενικότερα η ροπή αδρανείας της επιφάνειας S γύρω από μια δεδομένη ευθεία Ε δίδεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S}(dist[(x,y,z),\mathrm{E}])^2\,d\sigma$ όπου $dist[(x,y,z),\mathrm{E}]$ είναι η απόσταση των σημείων (x,y,z) της S από την ευθεία Ε.

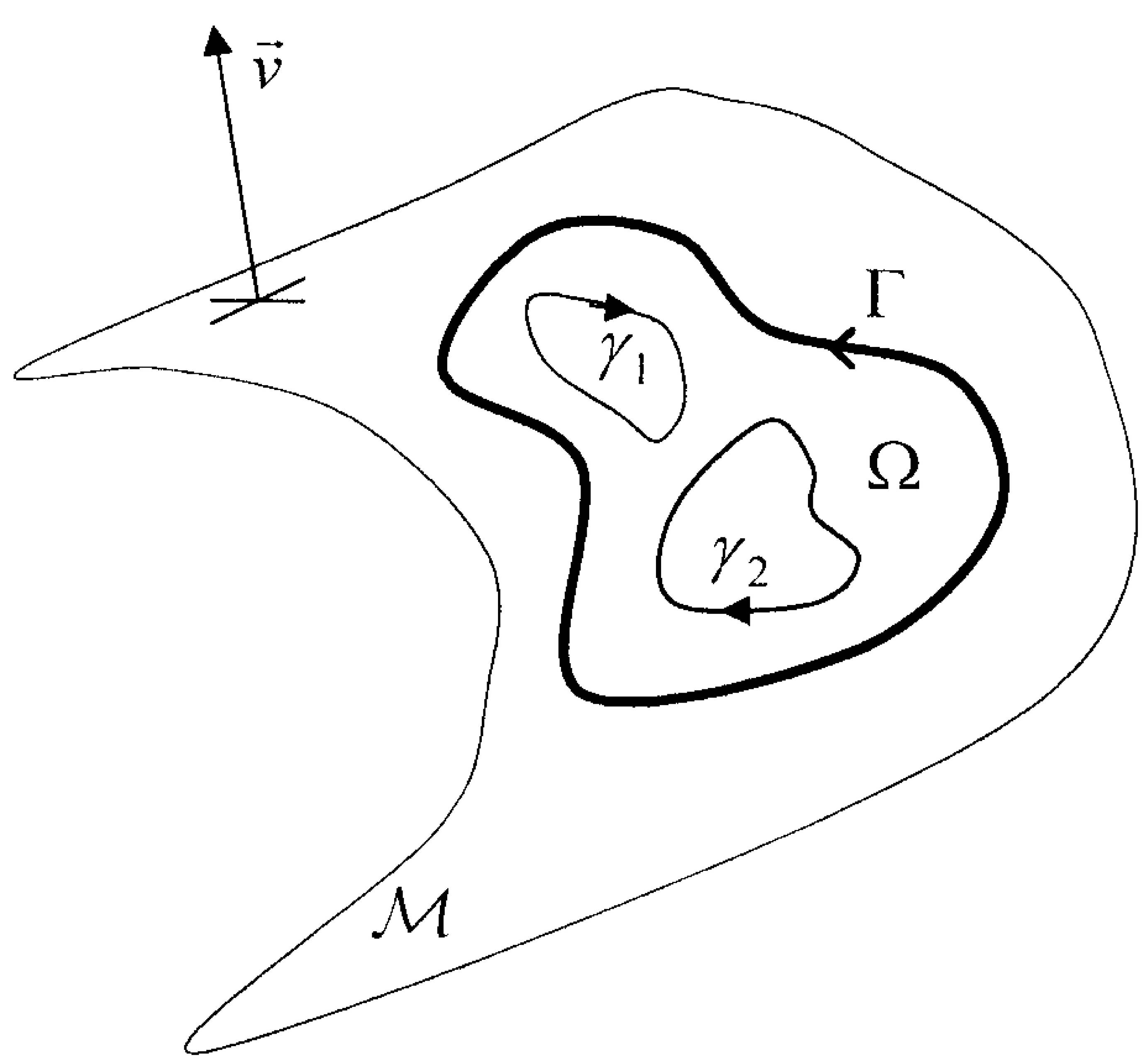
2. Θεώρημα του Stokes. *Έστω $\mathcal{M}$ μια ομαλή δισδιάστατη προσανατολισμένη επιφάνεια στον xyz −χώρο και ένα σύνολο $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ με κατά τμήματα ομαλό σύνορο. Τότε για ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$, C^1 σε περιοχή του $\overline{\Omega}$,*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} curl\vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma .$$

Ορολογία. Με $\vec{r}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσεως δηλαδή $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ και $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ (αν $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$). Επίσης ο **στροβιλισμός** $curl\vec{F}$ του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ ορίζεται από τον τύπο

$$curl\vec{F} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} .$$

Τέλος $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\mathcal{M}$, συμβατό με τον προσανατολισμό της – όσον αφορά την κατεύθυνση του – και $d\sigma$ είναι το στοιχείο εμβαδού της $\mathcal{M}$.



Όταν προσανατολίσουμε την επιφάνεια $\mathcal{M}$ όπως δείχνει το διάνυσμα $\vec{\nu}$ και το σύνορο του συνόλου $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ αποτελείται από την εξωτερική καμπύλη Γ και τις εσωτερικές καμπύλες γ_1 και γ_2, και τις προσανατολίσουμε όπως δείχνουν τα βέλη, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega}$ στο Θεώρημα του Stokes είναι

$$\int_{\partial\Omega} = \int_{\Gamma} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} .$$

Θεώρημα. *Για κάθε* C^2 *διανυσματικό πεδίο* $\vec{F}$,
$$div(curl\vec{F}) = 0.$$
Το αντίστροφο αυτού δεν ισχύει υπό την έννοια ότι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου ενδέχεται να είναι μηδέν και το πεδίο να μην είναι ο στροβιλισμός κανενός πεδίου. Π.χ. το διανυσματικό πεδίο
$$\vec{\mathrm{N}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},\ \textit{ορισμένο για } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\},$$
έχει απόκλιση $div\vec{\mathrm{N}} = 0$ *αλλά δεν υπάρχει* C^1 *διανυσματικό πεδίο* $\vec{F}$ *στο σύνολο* $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ *ώστε* $curl\vec{F} = \vec{\mathrm{N}}$.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma [\sqrt{x^2+1}\,\vec{i} + x\vec{j} + 2y\vec{k}]\cdot d\vec{r}$ όπου γ είναι τομή της επιφάνειας $z = xy$ και του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$.

2. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_\Omega curl\vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma$ όπου
$$\vec{F}(x,y,z) = [e^{xz} + e^{x+2y}]\vec{i} + [\log(2+y+z) + 2e^{x+2y}]\vec{j} + 3xyz\vec{k}$$
και Ω είναι το μέρος της επιφάνειας $z = 1 - x^2 - y^2$ που ευρίσκεται πάνω από το $xy-$επίπεδο.

3. Αν Π είναι ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα των x και δεν είναι κάθετο στο $xy-$επίπεδο, και γ είναι η τομή του Π με τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = a^2$, δείξτε ότι
$$\int_\gamma [(yz - y)dx + (xz + x)dy] = 2\pi a^2.$$

4. Έστω $\vec{F}(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$ και S το κάτω μισό του ελλειψοειδούς $(x^2/4) + (y^2/9) + (z^2/27) = 1$. Υπολογίστε την ροή του $curl\vec{F}$ διαμέσω του S.

5. Εξηγήστε τον τύπο
$$curl\vec{F}\cdot\vec{v} = \lim_{\substack{p\in V\subset\Omega \\ diam(V)\to 0}} \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(V)}\int_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

3. Θεώρημα απόκλισης του Gauss. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον* $xyz-$*χώρο, του οποίου το σύνορο* $\partial\Omega$ *να είναι κατά τμήματα ομαλό. Τότε για ένα διανυσματικό πεδίο* $\vec{F}$ *το οποίο είναι* C^1 *σε περιοχή του* $\overline{\Omega}$, *ισχύει ο τύπος:*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{F}\,dxdydz$$

όπου $\vec{v}$ *είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια* $\partial\Omega$ *διανυσματικό πεδίο με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του* Ω, $d\sigma$ *είναι το στοιχείο εμβαδού του* $\partial\Omega$ *και* $div\vec{F}$ *είναι η απόκλιση του πεδίου* $\vec{F}$ *δηλαδή*

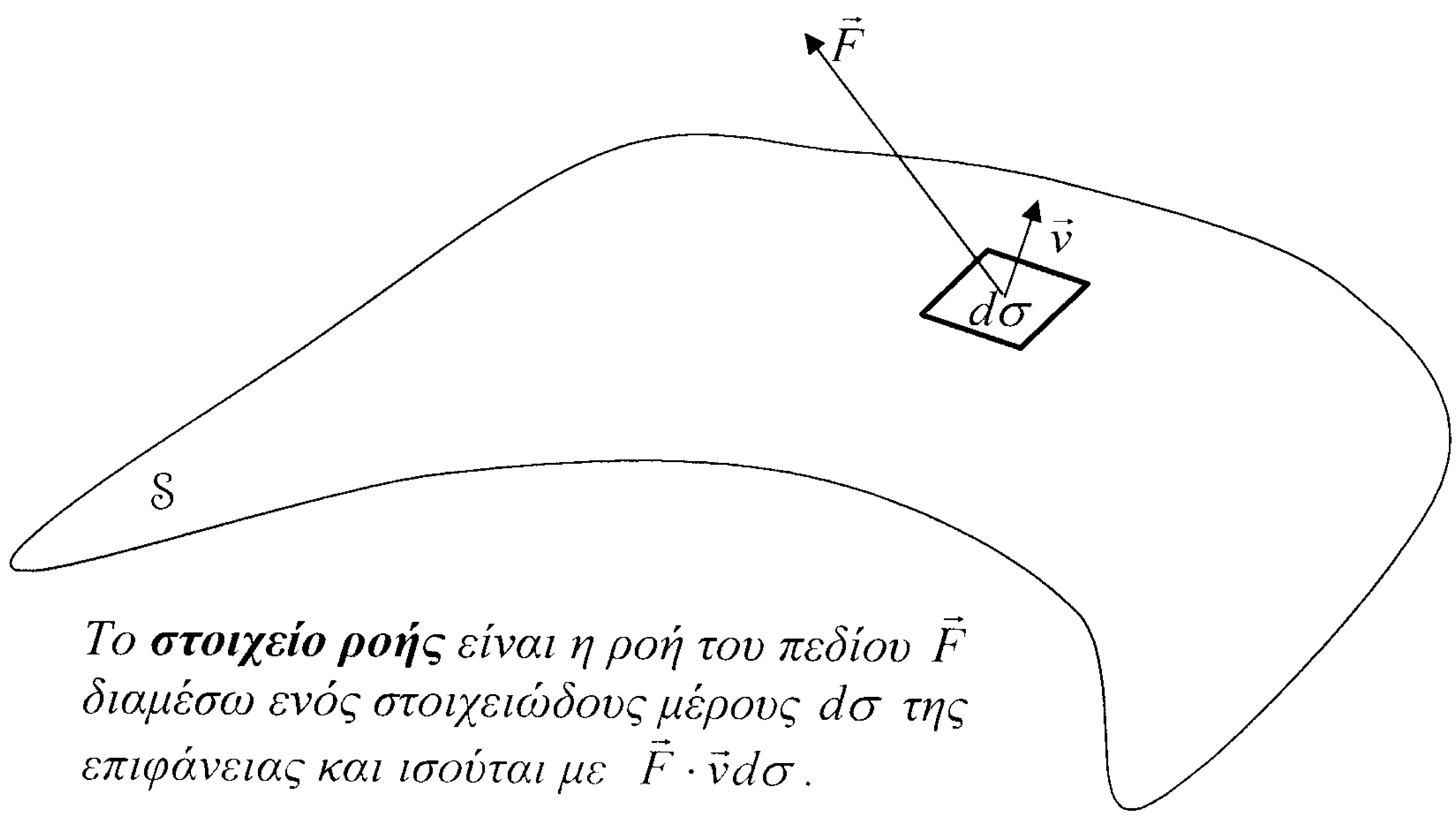
$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{όταν } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

Ροή διανυσματικού πεδίου. Το ολοκλήρωμα $\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma$ ονομάζεται **ροή** του διανυσματικού πεδίο $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας $\partial\Omega$. Γενικότερα αν S είναι μια επιφάνεια – όχι απαραίτητα κλειστή όπως είναι η $\partial\Omega$ – και $\vec{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε περιοχή της S τότε η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{S} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma$. Επειδή

$$\lim_{\substack{V\ni(a,b,c)\\ diam(V)\to 0}} \frac{1}{Ογκ(V)} \iiint_V div\vec{F}dxdydz = div\vec{F}(a,b,c),$$

έπεται από το *Θεώρημα Απόκλισης του Gauss* ότι

$$div\vec{F}(a,b,c) = \lim_{\substack{V\ni(a,b,c)\\ diam(V)\to 0}} \frac{1}{Ογκ(V)} \iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{v}d\sigma.$$



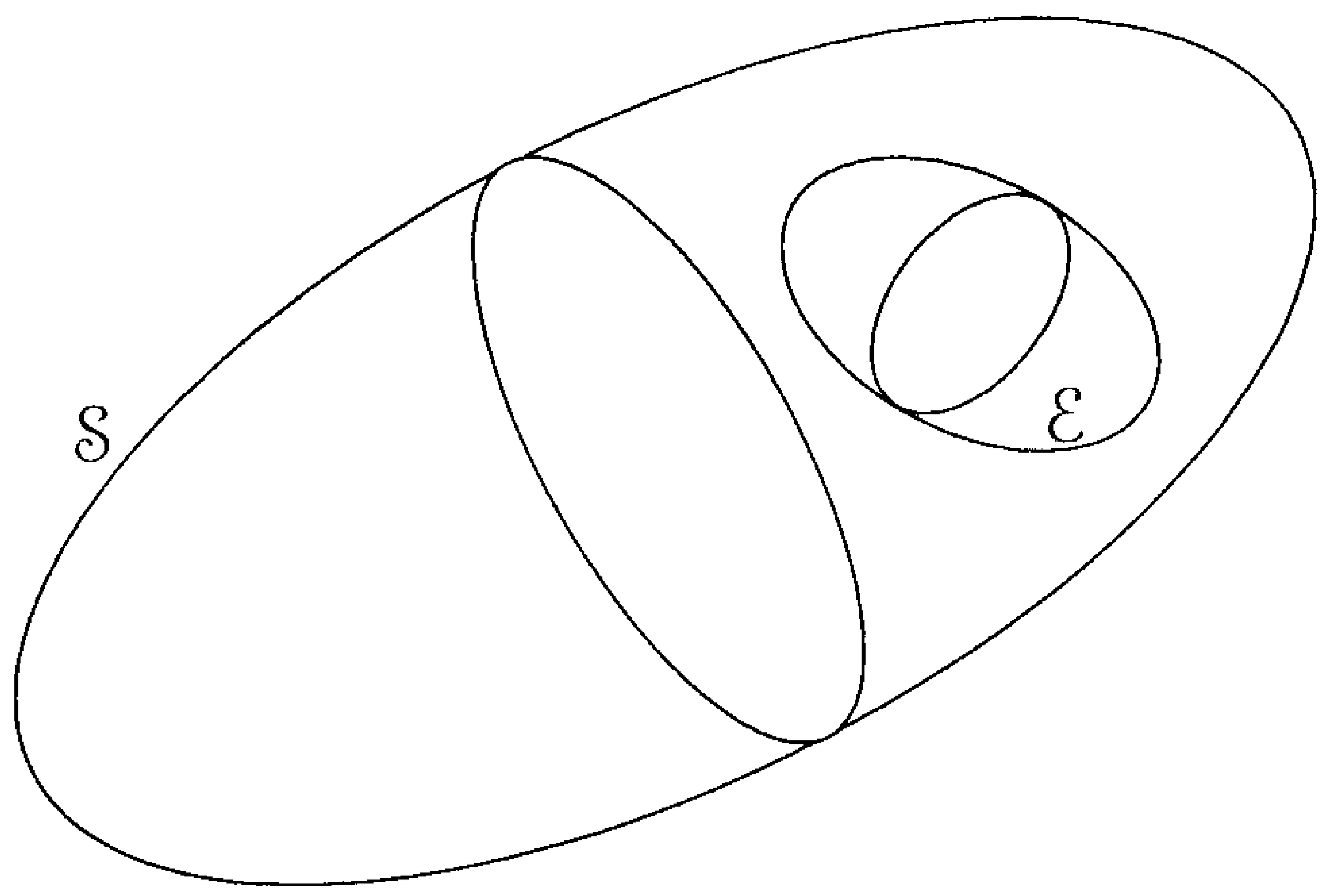
Το ***στοιχείο ροής*** *είναι η ροή του πεδίου* $\vec{F}$ *διαμέσω ενός στοιχειώδους μέρους* $d\sigma$ *της επιφάνειας και ισούται με* $\vec{F}\cdot\vec{v}d\sigma$.

4. Νόμος της ροής του Gauss. Ας θεωρήσουμε δυο «απλές» κλειστές επιφάνειες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{E}$ με την $\mathcal{E}$ μέσα στην $\mathcal{S}$. Αν Ω είναι το σύνολο ανάμεσα στις δυο αυτές επιφάνειες και $\vec{F}$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε περιοχή του $\overline{\Omega}$ τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma - \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{F}dxdydz .$$

(Σκεφθείτε προσεκτικά την κατεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{v}$ στα ανωτέρω επιφανειακά ολοκληρώματα.) Ιδιαιτέρως αν $div\vec{F}=0$ στα σημεία του Ω τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma \quad \textit{(Αρχή της ομοτοπίας)}.$$



Αν $div\vec{F}=0$ ανάμεσα στις επιφάνειες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{E}$ τότε
$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma .$$

Ένα παράδειγμα διανυσματικού $\vec{F}$ με $div\vec{F}=0$ είναι το

$$\vec{\mathrm{N}} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} .$$

Το εν λόγω διανυσματικό πεδίο ορίζεται στο $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ και $div\vec{\mathrm{N}}=0$. Έτσι αν οι επιφάνειες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{E}$ περικλείουν το σημείο $(0,0,0)$ τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma .$$

Αλλά αν η επιφάνεια $\mathcal{E}$ είναι μια μικρή σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$ τότε υπολογίζουμε

$$\iint_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = 4\pi .$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = 4\pi \quad \textit{(Νόμος της ροής του Gauss)}$$

για <u>κάθε απλή κλειστή επιφάνεια</u> $\mathbb{S}$ που περιέχει το σημείο $(0,0,0)$ στο εσωτερικό της.

5. Τύποι του Green. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον $xyz-$χώρο, του οποίου το σύνορο $\partial\Omega$ να είναι κατά τμήματα ομαλό. Τότε για συναρτήσεις $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\iint_{\partial\Omega} f\vec{\nabla}g \cdot \vec{v}d\sigma = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\Delta g)dxdydz$$

και

$$\iint_{\partial\Omega} (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f) \cdot \vec{v}d\sigma = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)dxdydz,$$

όπου $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ και $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Οι τύποι αυτοί έπονται αμέσως από το *Θεώρημα του Gauss*. (Κάντε τους υπολογισμούς.) Επίσης την κατευθυνόμενη παράγωγο $\vec{\nabla}f \cdot \vec{v}$ την ονομάζουμε **κάθετη παράγωγο** (το «κάθετο» αναφέρεται βέβαια σε σχέση με την επιφάνεια $\partial\Omega$) και την συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial v}$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial v} = \vec{\nabla}f \cdot \vec{v}$. Με αυτόν τον συμβολισμό οι τύποι του *Green* γράφονται ως εξής:

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial v}d\sigma = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\Delta g)dxdydz$$

και

$$\iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial f}{\partial v}\right)d\sigma = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)dxdydz.$$

Ιδιαιτέρως αν οι συναρτήσεις f, g είναι αρμονικές στο Ω (αν δηλαδή $\Delta f = \Delta g = 0$) τότε

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial v}d\sigma = \iint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial v}d\sigma.$$

[Εννοείται βέβαια ότι εξακολουθούμε να υποθέτουμε $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$.]

Παραδείγματα. **1.** Έστω $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{S}^2} x^2 d\sigma = \iint_{\partial B} \vec{F} \cdot \vec{v}d\sigma$$

όπου $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ και $\vec{F} = x\vec{i}$. Επομένως – από το *Θεώρημα του Gauss* – το δοθέν ολοκλήρωμα ισούται με

$$\iiint_{B} div\vec{F}dxdydz = \iiint_{B} dxdydz = \frac{4\pi}{3}.$$

2. Από τον νόμο της ροής του *Gauss*,

$$\iint_{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1} \frac{d\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)^{1/2}} = 4\pi \ (\alpha,\beta,\gamma>0).$$

Ασκήσεις.

1. Κάντε αναλυτικά τον υπολογισμό $div\vec{\mathrm{N}}=0$.

2. Κάντε αναλυτικά τον υπολογισμό $\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = 4\pi$ (για $r>0$).

3. Αν το σημείο (0,0,0) ευρίσκεται στο εξωτερικό της επιφάνειας $\mathcal{S}$, ποιά είναι η τιμή του ολοκληρώματος $\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma$;

4. Μελετήστε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma$ όπου

$$\vec{F} = \frac{(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}+(z-c)\vec{k}}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}$$

και το σημείο $(a,b,c)\notin[\mathcal{S}]$. (Η $\mathcal{S}$ υποτίθεται ότι είναι μια απλή κλειστή επιφάνεια.)

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=1} \sqrt{\alpha^4x^2+\beta^4y^2+\gamma^4z^2}\, d\sigma .$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=\alpha^2x\vec{i}+\beta^2y\vec{j}+\gamma^2z\vec{k}$.

Το θεώρημα του Stokes και θεώρημα Gauss

1. Επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$ και επιφανειακά ολοκληρώματα. Ας θεωρήσουμε μια C^1 επιφάνεια $\mathcal{S}: G \to \mathbb{R}^3$ στον $xyz-$χώρο ορισμένη σε ένα κατάλληλο ανοικτό σύνολο $G \subset \mathbb{R}^2$. Αναλυτικά αυτή η επιφάνεια περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\mathcal{S} : x = x(t,s),\ y = y(t,s),\ z = z(t,s),\ (t,s) \in G,$$

όπου $\mathcal{S}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$. Το **στοιχείο εμβαδού** $d\sigma$ της επιφάνειας $\mathcal{S}$ ορίζεται ως εξής:

$$d\sigma = \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds.$$

Έτσι το εμβαδόν της επιφάνειας $\mathcal{S}$ δίδεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$\mathcal{E}\mu\beta(\mathcal{S}) = \iint_G d\sigma = \iint_G \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds$$

Γενικότερα ορίζεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathcal{S}} f\, d\sigma$ ως εξής:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\, d\sigma$$

$$= \iint_G f(x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds.$$

Το διάνυσμα $\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\vec{i} + \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\vec{j} + \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\vec{k}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $\mathcal{S}$ στο σημείο $\mathcal{S}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{v} = \frac{\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\vec{i} + \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\vec{j} + \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\vec{k}}{\sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}}$$

λέγεται μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο.

Αν $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε περιοχή της $\mathcal{S}$, το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\, d\sigma$$

ονομάζεται **ροή** του διανυσματικού πεδίο $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας $\mathcal{S}$.

Παραδείγματα. **(1)** Το στοιχείο εμβαδού του ημισφαιρίου $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\le a^2$, είναι $d\sigma=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$.

(2) Ας θεωρήσουμε την σφαίρα S: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Χρησιμοποιώντας για παραμέτρους τις σφαιρικές συντεταγμένες ϕ και θ, περιγράφουμε την σφαίρα S με τις παραμετρικές εξισώσεις $x=a\sin\phi\cos\theta$, $y=a\sin\phi\sin\theta$, $z=a\cos\phi$, $(\phi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$. Τότε το στοιχείο εμβαδού είναι $d\sigma=a^2\sin\phi d\phi d\theta$.

(3) Δοθέντων αριθμών $a>b>0$, οι παραμετρικές εξισώσεις $x=(a+b\cos\phi)\cos\theta$, $y=(a+b\cos\phi)\sin\theta$, $z=b\sin\phi$, καθώς τα ϕ και θ κινούνται με $0\le\theta\le2\pi$, $0\le\phi\le2\pi$, περιγράφουν την επιφάνεια T του *torus*, δηλαδή της επιφάνειας που παράγεται από τον κύκλο ακτίνας b, ο οποίος ευρίσκεται στο $xz-$επίπεδο και το κέντρου του οποίου είναι το σημείο $(a,0,0)$, όταν ο κύκλος αυτός περιστραφεί γύρω από τον άξονα των z. Υπολογίζοντας το στοιχείο εμβαδού βρίσκουμε $d\sigma=b(a+b\cos\phi)d\theta d\phi$.

Εφαρμογές των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της μορφής $\iint\limits_{S} f\,d\sigma$.

(1) Η **μέση τιμή** της συνάρτησης f πάνω στην επιφάνεια S είναι

$$\bar{f}=\frac{\iint\limits_{S} f\,d\sigma}{\iint\limits_{S} d\sigma}=\frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(S)}\iint\limits_{S} f\,d\sigma.$$

(2) Οι συντεταγμένες του **κέντρου βάρους** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ της επιφάνειας S δίδονται από τους τύπους

$$\bar{x}=\frac{\iint_S x\,d\sigma}{\iint_S d\sigma},\ \bar{y}=\frac{\iint_S y\,d\sigma}{\iint_S d\sigma},\ z=\frac{\iint_S z\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}.$$

(3) Η **ροπή αδρανείας** της επιφάνειας S γύρω από τον άξονα των z δίδεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)d\sigma$. Γενικότερα η ροπή αδρανείας της επιφάνειας S γύρω από μια δεδομένη ευθεία E δίδεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S}(dist[(x,y,z),\mathrm{E}])^2\,d\sigma$ όπου $dist[(x,y,z),\mathrm{E}]$ είναι η απόσταση των σημείων (x,y,z) της S από την ευθεία E.

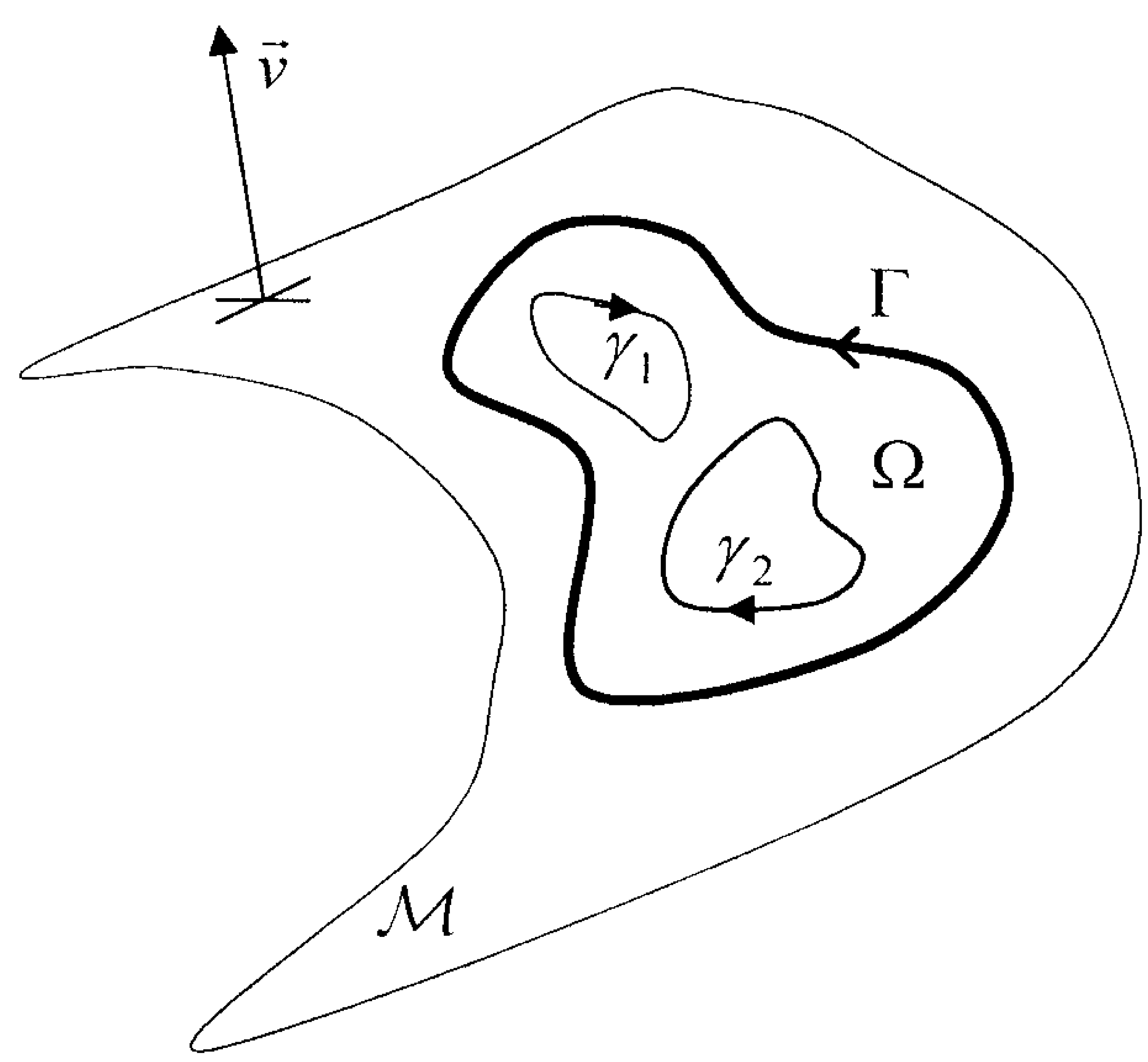
2. Θεώρημα του Stokes. *Έστω $\mathcal{M}$ μια ομαλή δισδιάστατη προσανατολισμένη επιφάνεια στον xyz − χώρο και ένα σύνολο $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ με κατά τμήματα ομαλό σύνορο. Τότε για ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$, C^1 σε περιοχή του $\overline{\Omega}$,*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} curl\vec{F} \cdot \vec{v} d\sigma .$$

Ορολογία. Με $\vec{r}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσεως δηλαδή $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ και $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ (αν $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$). Επίσης ο **στροβιλισμός** $curl\vec{F}$ του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ ορίζεται από τον τύπο

$$curl\vec{F} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} .$$

Τέλος $\vec{v}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\mathcal{M}$, συμβατό με τον προσανατολισμό της – όσον αφορά την κατεύθυνση του – και $d\sigma$ είναι το στοιχείο εμβαδού της $\mathcal{M}$.



Όταν προσανατολίσουμε την επιφάνεια $\mathcal{M}$ όπως δείχνει το διάνυσμα $\vec{v}$ και το σύνορο του συνόλου $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ αποτελείται από την εξωτερική καμπύλη Γ και τις εσωτερικές καμπύλες γ_1 και γ_2, και τις προσανατολίσουμε όπως δείχνουν τα βέλη, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega}$ στο Θεώρημα του Stokes είναι

$$\int_{\partial\Omega} = \int_{\Gamma} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} .$$

Θεώρημα. *Για κάθε C^2 διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$,*

$$div(curl\vec{F}) = 0.$$

Το αντίστροφο αυτού δεν ισχύει υπό την έννοια ότι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου ενδέχεται να είναι μηδέν και το πεδίο να μην είναι ο στροβιλισμός κανενός πεδίου. Π.χ. το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{\mathrm{N}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},\ \textit{ορισμένο για}\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\},$$

έχει απόκλιση $div\vec{\mathrm{N}} = 0$ αλλά δεν υπάρχει C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ στο σύνολο $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ώστε $curl\vec{F} = \vec{\mathrm{N}}$.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma [\sqrt{x^2 + 1}\vec{i} + x\vec{j} + 2y\vec{k}] \cdot d\vec{r}$ όπου γ είναι τομή της επιφάνειας $z = xy$ και του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$.

2. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_\Omega curl\vec{F} \cdot \vec{v} d\sigma$ όπου

$$\vec{F}(x, y, z) = [e^{xz} + e^{x+2y}]\vec{i} + [\log(2 + y + z) + 2e^{x+2y}]\vec{j} + 3xyz\vec{k}$$

και Ω είναι το μέρος της επιφάνειας $z = 1 - x^2 - y^2$ που ευρίσκεται πάνω από το $xy-$επίπεδο.

3. Αν Π είναι ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα των x και δεν είναι κάθετο στο $xy-$επίπεδο, και γ είναι η τομή του Π με τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = a^2$, δείξτε ότι

$$\int_\gamma [(yz - y)dx + (xz + x)dy] = 2\pi a^2.$$

4. Έστω $\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$ και S το κάτω μισό του ελλειψοειδούς $(x^2/4) + (y^2/9) + (z^2/27) = 1$. Υπολογίστε την ροή του $curl\vec{F}$ διαμέσω του S.

5. Εξηγήστε τον τύπο

$$curl\vec{F} \cdot \vec{v} = \lim_{\substack{p \in V \subset \Omega \\ diam(V) \to 0}} \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(V)} \int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

3. Θεώρημα απόκλισης του Gauss. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον* $xyz-$*χώρο, του οποίου το σύνορο* $\partial\Omega$ *να είναι κατά τμήματα ομαλό. Τότε για ένα διανυσματικό πεδίο* $\vec{F}$ *το οποίο είναι* C^1 *σε περιοχή του* $\overline{\Omega}$, *ισχύει ο τύπος:*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{F}\,dxdydz$$

όπου $\vec{v}$ *είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια* $\partial\Omega$ *διανυσματικό πεδίο με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του* Ω, $d\sigma$ *είναι το στοιχείο εμβαδού του* $\partial\Omega$ *και* $div\vec{F}$ *είναι η απόκλιση του πεδίου* $\vec{F}$ *δηλαδή*

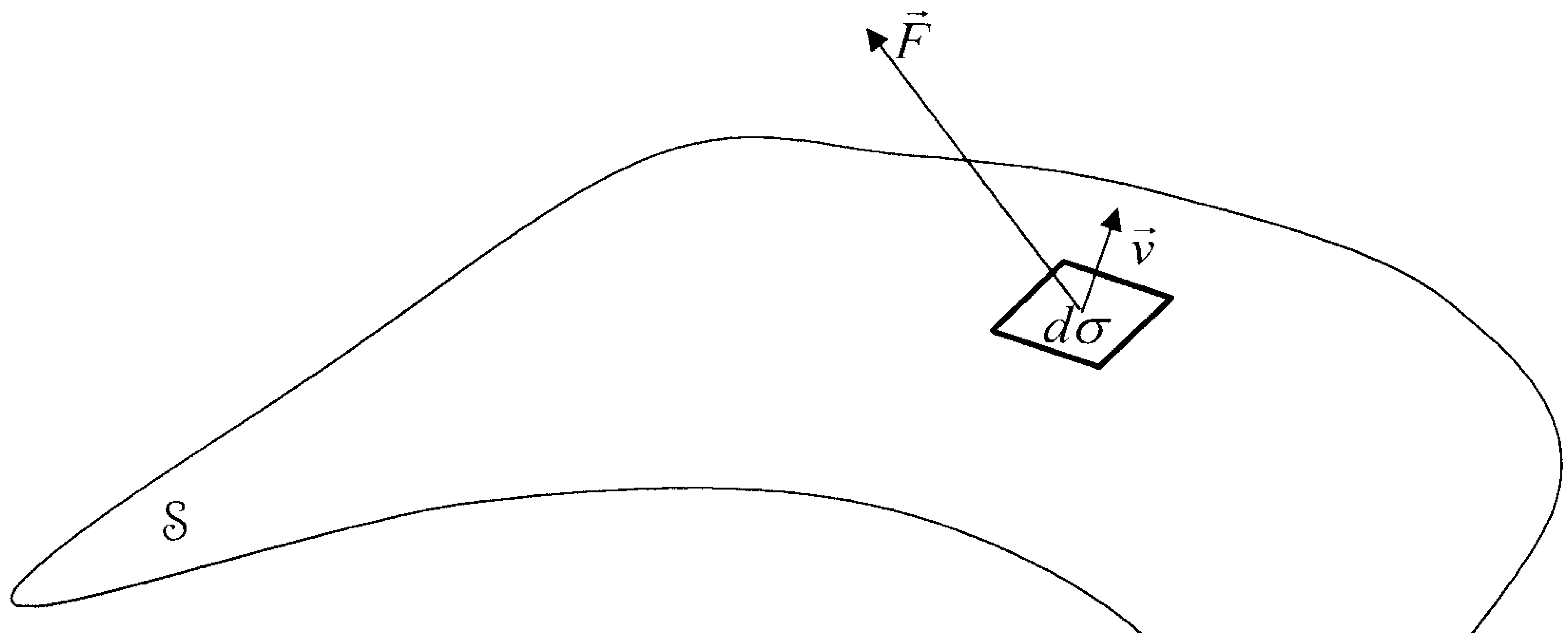
$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{όταν } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

Ροή διανυσματικού πεδίου. Το ολοκλήρωμα $\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma$ ονομάζεται **ροή** του διανυσματικού πεδίο $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας $\partial\Omega$. Γενικότερα αν S είναι μια επιφάνεια – όχι απαραίτητα κλειστή όπως είναι η $\partial\Omega$ – και $\vec{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε περιοχή της S τότε η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{S} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma$. Επειδή

$$\lim_{\substack{V\ni(a,b,c)\\ diam(V)\to 0}} \frac{1}{Όγκ(V)} \iiint_{V} div\vec{F}dxdydz = div\vec{F}(a,b,c),$$

έπεται από το *Θεώρημα Απόκλισης του Gauss* ότι

$$div\vec{F}(a,b,c) = \lim_{\substack{V\ni(a,b,c)\\ diam(V)\to 0}} \frac{1}{Όγκ(V)} \iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{v}d\sigma.$$



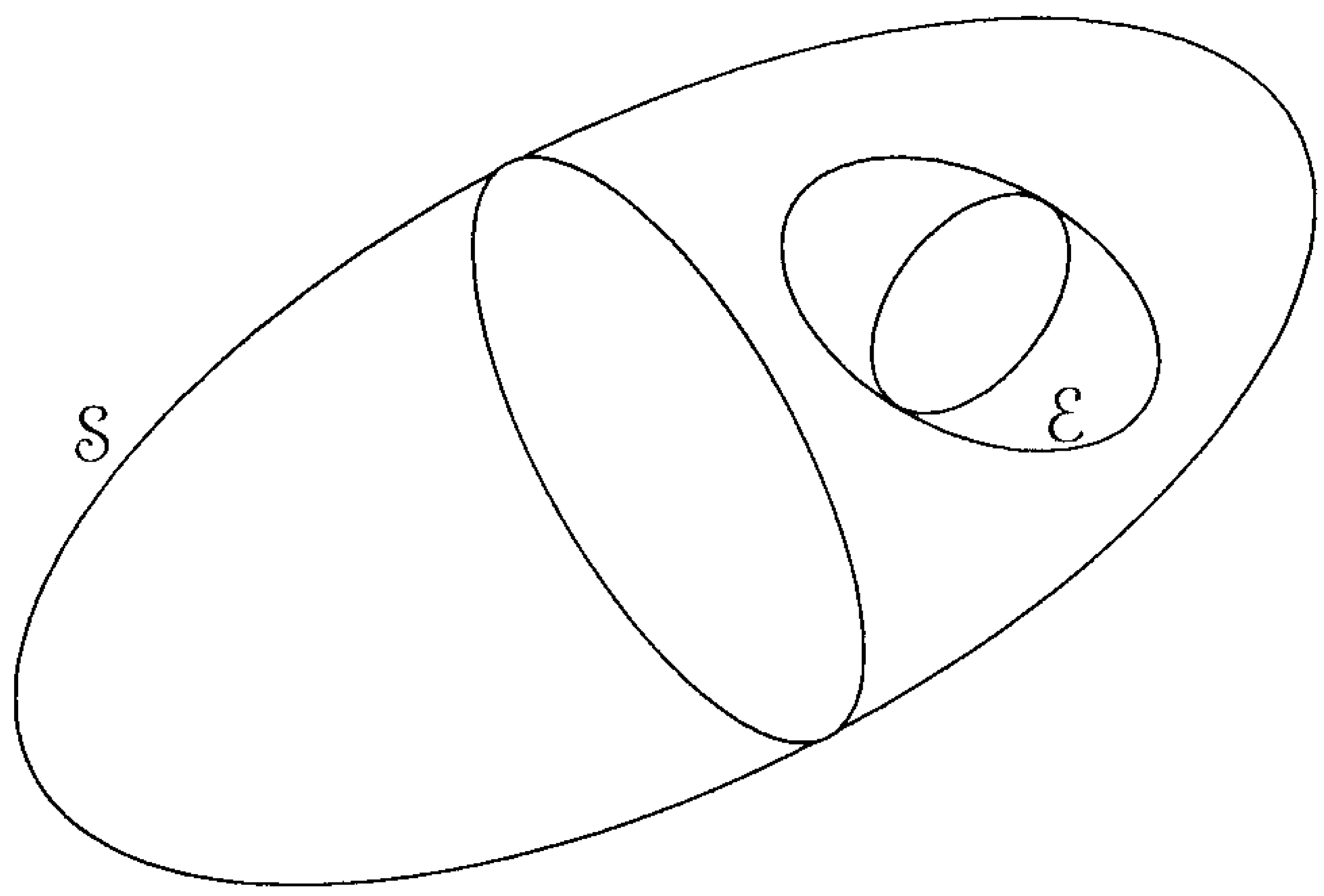
*Το **στοιχείο ροής** είναι η ροή του πεδίου* $\vec{F}$ *διαμέσω ενός στοιχειώδους μέρους* $d\sigma$ *της επιφάνειας και ισούται με* $\vec{F}\cdot\vec{v}d\sigma$.

4. Νόμος της ροής του Gauss. Ας θεωρήσουμε δυο «απλές» κλειστές επιφάνειες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{E}$ με την $\mathcal{E}$ μέσα στην $\mathcal{S}$. Αν Ω είναι το σύνολο ανάμεσα στις δυο αυτές επιφάνειες και $\vec{F}$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε περιοχή του $\overline{\Omega}$ τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma - \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{F}dxdydz .$$

(Σκεφθείτε προσεκτικά την κατεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{v}$ στα ανωτέρω επιφανειακά ολοκληρώματα.) Ιδιαιτέρως αν $div\vec{F}=0$ στα σημεία του Ω τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma \quad (\textit{Αρχή της ομοτοπίας}).$$



Αν $div\vec{F}=0$ *ανάμεσα στις επιφάνειες* $\mathcal{S}$ *και* $\mathcal{E}$ *τότε*

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma .$$

Ένα παράδειγμα διανυσματικού $\vec{F}$ με $div\vec{F}=0$ είναι το

$$\vec{\mathrm{N}} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} .$$

Το εν λόγω διανυσματικό πεδίο ορίζεται στο $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ και $div\vec{\mathrm{N}}=0$. Έτσι αν οι επιφάνειες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{E}$ περικλείουν το σημείο $(0,0,0)$ τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma .$$

Αλλά αν η επιφάνεια $\mathcal{E}$ είναι μια μικρή σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$ τότε υπολογίζουμε

$$\iint_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = 4\pi .$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = 4\pi \quad (\textit{Νόμος της ροής του Gauss})$$

για <u>κάθε απλή κλειστή επιφάνεια</u> $\mathbb{S}$ που περιέχει το σημείο $(0,0,0)$ στο εσωτερικό της.

5. Τύποι του Green. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον $xyz-$χώρο, του οποίου το σύνορο $\partial\Omega$ να είναι κατά τμήματα ομαλό. Τότε για συναρτήσεις $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\iint_{\partial\Omega} f\vec{\nabla}g \cdot \vec{v}d\sigma = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\Delta g)dxdydz$$

και

$$\iint_{\partial\Omega} (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f) \cdot \vec{v}d\sigma = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)dxdydz,$$

όπου $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ και $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Οι τύποι αυτοί έπονται αμέσως από το *Θεώρημα του Gauss*. (Κάντε τους υπολογισμούς.) Επίσης την κατευθυνόμενη παράγωγο $\vec{\nabla}f \cdot \vec{v}$ την ονομάζουμε **κάθετη παράγωγο** (το «κάθετο» αναφέρεται βέβαια σε σχέση με την επιφάνεια $\partial\Omega$) και την συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial v}$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial v} = \vec{\nabla}f \cdot \vec{v}$. Με αυτόν τον συμβολισμό οι τύποι του *Green* γράφονται ως εξής:

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial v}d\sigma = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\Delta g)dxdydz$$

και

$$\iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial f}{\partial v} \right) d\sigma = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)dxdydz.$$

Ιδιαιτέρως αν οι συναρτήσεις f, g είναι αρμονικές στο Ω (αν δηλαδή $\Delta f = \Delta g = 0$) τότε

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial v}d\sigma = \iint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial v}d\sigma.$$

[Εννοείται βέβαια ότι εξακολουθούμε να υποθέτουμε $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$.]

Παραδείγματα. **1.** Έστω $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{S}^2} x^2 d\sigma = \iint_{\partial \mathrm{B}} \vec{F} \cdot \vec{v}d\sigma$$

όπου $\mathrm{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ και $\vec{F} = x\vec{i}$. Επομένως – από το *Θεώρημα του Gauss* – το δοθέν ολοκλήρωμα ισούται με

$$\iiint_{\mathrm{B}} div\vec{F}dxdydz = \iiint_{\mathrm{B}} dxdydz = \frac{4\pi}{3}.$$

2. Από τον νόμο της ροής του *Gauss*,

$$\iint_{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1} \frac{d\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)^{1/2}} = 4\pi \ (\alpha,\beta,\gamma>0).$$

Ασκήσεις.

1. Κάντε αναλυτικά τον υπολογισμό $div\vec{\mathrm{N}}=0$.

2. Κάντε αναλυτικά τον υπολογισμό $\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 4\pi$ (για $r>0$).

3. Αν το σημείο (0,0,0) ευρίσκεται στο εξωτερικό της επιφάνειας $\mathcal{S}$, ποιά είναι η τιμή του ολοκληρώματος $\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$;

4. Μελετήστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$ όπου

$$\vec{F} = \frac{(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}+(z-c)\vec{k}}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}$$

και το σημείο $(a,b,c)\notin[\mathcal{S}]$. (Η $\mathcal{S}$ υποτίθεται ότι είναι μια απλή κλειστή επιφάνεια.)

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=1} \sqrt{\alpha^4x^2+\beta^4y^2+\gamma^4z^2}\,d\sigma.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=\alpha^2x\vec{i}+\beta^2y\vec{j}+\gamma^2z\vec{k}$.