► ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ στον $\mathbb{R}^3$ - ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

► ΕΥΘΕΙΕΣ στον ΧΩΡΟ

Μια ευθεία καθορίζεται:

1. από δύο σημεία
2. από 1 σημείο και τη διεύθυνση
3. ως ΤΟΜΗ δύο ΕΠΙΠΕΔΩΝ (στο χώρο)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ (1) και (2)

σχήμα

Επιλέγουμε μια ΑΡΧΗ Ο στο χώρο και ορίζουμε ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{\kappa}\}$
$A \equiv \overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ διάνυσμα θέσης
$\overrightarrow{OA}(x_A, \psi_A, z_A)$

σχήμα

M τυχαίο σημείο τότε $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$
όπου $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ όπου $t\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$

Άρα $\boxed{\vec{r}_M = \vec{r}_A + t\vec{u}}$ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
$\vec{r}_M = \vec{r}_A + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A,\ \psi_B - \psi_A,\ z_B - z_A) \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$(x, \psi, z) = (x_A, \psi_A, z_A) + t(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$(\Sigma)\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ \psi = \psi_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αν υποθέσουμε ότι τα α, β, $\gamma \neq 0$ λύνουμε ως προς t

$$\boxed{\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{\psi - \psi_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma}}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ στο ΧΩΡΟ (ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)

Η ευθεία διέρχεται από το (x_A, ψ_A, z_A) και είναι παράλληλη προς το $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(1, 1, 1)$ και είναι παράλληλη στο $\vec{u}(1, 1, 1)$.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{\psi - 1}{1} = \frac{z-1}{1} \Leftrightarrow (x = \psi = z)$$

Παριστάνει ευθεία στο χώρο $(\varepsilon)\begin{cases} \text{διέρχεται από το } B(0, 0, 0) \\ \parallel \text{ στο } \vec{u}(1, 1, 1) \end{cases}$

► <u>ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ</u>

(ε_1) $(A, \vec{u})$

(ε_2) $(B, \vec{w})$

• $\boxed{(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{w}\,\text{ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}}$

• $\boxed{(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow < \vec{u}, \vec{w} >= 0}$

► <u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών

$$(\varepsilon_1)\ x = \psi = z$$
$$(\varepsilon_2)\ \frac{x-1}{1} = \frac{\psi-2}{3} = \frac{z-3}{3}$$

<u>Σχετική θέση 2 ευθειών:</u>

$$\begin{array}{ll} \text{παράλληλες} & (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \\ \text{τεμνόμενες} & (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) \neq \varnothing \\ \text{ασύμβατες} & \end{array}$$

• <u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ</u>

$$\left.\begin{array}{l} (\varepsilon_1) \parallel (1,\,1,\,1) \\ (\varepsilon_2) \parallel (1,\,3,\,4) \end{array}\right\} \text{γραμμικά ανεξάρτητα} \Rightarrow (\varepsilon_1) \nparallel (\varepsilon_2)$$

• <u>ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΜΗΣ</u> Έστω $M \in (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)$

$$\text{Ψάχνω} \left\{\begin{array}{c} t = x = \psi = z \\ s = \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{\psi-2}{3} = \dfrac{z-3}{4} \end{array}\right.$$

Προκύπτει σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους.

$$\left.\begin{array}{lcl} x = t & \text{τότε} & s = \frac{t-1}{1} \\ \psi = t & & s = \frac{t-2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{t-1}{1} = \frac{t-2}{3} \Rightarrow 3t-3 = t-2 \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{1}{2}}$$

για $t = \dfrac{1}{2}$ προκύπτει $\boxed{s = -\dfrac{1}{2}}$

$s = \dfrac{z-3}{4}$ ΑΤΟΠΟ $(z = t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{1}{2})$.

Άρα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι ΑΣΥΜΒΑΤΕΣ.

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>: <u>ΤΥΠΟΣ που δίνει την ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ</u>

► <u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

$(\Sigma) \left\{\begin{array}{c} x + \psi + z = 1 \\ 2x + 3\psi + 4z = 0 \end{array}\right.$ Να δείξετε ότι (Σ) παριστάνει ευθεία και να βρεθεί η κανονική μορφή.

$$\left\{\begin{array}{c} x + \psi = 1 - z \\ 2x + 3\psi = -4z \end{array}\right. \overset{(-2)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} -2x - 2\psi = -2 + 2z \\ 2x + 3\psi = -4z \end{array}\right. \overset{(+)}{\Rightarrow} -\psi = 2z + 2$$

$\boxed{\psi = -2(z+1)}$, $x = z+3$, $z \in \mathbb{R}$

Άρα $\begin{cases} \psi = -2(z+1) \\ x = z+3 \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} \dfrac{\psi}{-2} = z+1 \\ x-2 = z+1 \end{cases}$ Άρα $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{\psi}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$

Άρα η (ε) διέρχεται από το $A(-2,\, 0,\, 1)$ και είναι παράλληλη στο $\vec{u}(1,\, -2,\, 1)$.

► ΑΣΚΗΣΗ 2

$\dfrac{2x+3}{5} = \dfrac{2\psi}{1} = \dfrac{4z-1}{8}$ Να τεθεί σε κανονική μορφή

$\dfrac{x+\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{\psi}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z-\frac{1}{4}}{2}$

Άρα διέρχεται από το σημείο $B(\frac{3}{2},\, 0,\, -\frac{1}{4})$ και είναι $\parallel \vec{u}(\frac{5}{2},\, \frac{1}{2},\, 2)$

► ΕΠΙΠΕΔΑ στο ΧΩΡΟ

σχήμα

$(\varepsilon) \perp (\Pi)$
Η (ε) είναι $\parallel$ στη διεύθυνση $\vec{\ell}$: $(\varepsilon) \parallel \vec{\ell}$.
Οπότε $\vec{\ell} \perp (\Pi)$. Θεωρούμε A σταθερό σημείο του επιπέδου και M τυχαίο σημείο του επιπέδου.
$\overrightarrow{AM} \in$ στο επίπεδο (Π) και ισχύει $\overrightarrow{AM} \perp \vec{\ell}$

$\boxed{\overrightarrow{AM} \perp \vec{\ell}}$

ισχύει $< \overrightarrow{AM}, \vec{\ell} >= 0 \Leftrightarrow < \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \vec{\ell} >= 0$ ή $< \overrightarrow{OM}, \vec{\ell} >=< \overrightarrow{OA}, \vec{\ell} >= p$, όπου M τυχαίο σημείο και A γνωστό και σταθερό σημείο.

$\boxed{< \overrightarrow{OM}, \vec{\ell} >= p}$ παριστάνει επίπεδο στο χώρο

όπου $\vec{\ell}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$, $\overrightarrow{OM}(x,\, \psi,\, z)$, $p =$ σταθερά

$$< (x,\, \psi,\, z),\, (\alpha,\, \beta,\, \gamma) >= p \Leftrightarrow \alpha x + \beta\psi + \gamma z + \delta = 0 \ (\delta = -p)$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ $\boxed{\alpha x + \beta\psi + \gamma z + \delta = 0}$ με $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0$

Παριστάνει επίπεδο $\perp$ στο $\vec{\ell}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$.

► ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ζητείται το (επίπεδο) p που διέρχεται από το σημείο $A(1,\, 1,\, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\ell}(1,\, 1,\, 1)$.

Από την εξίσωση : $1 \cdot x + 1 \cdot \psi + 1 \cdot z + \delta = 0$

Βρίσκουμε το δ: $1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+\delta=0 \Rightarrow \delta=-3$
<u>Οπότε ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>: $x+\psi+z=-3$

▶ <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> 2

$x+2\psi+3z+4=0$ παριστάνει επίπεδο $p \perp \vec{\ell}(1,\,2,\,3)$ και αναζητούμε το σημείο από το οποίο διέρχεται δηλ. τριάδα $(x,\,\psi,\,z)$ που να ικανοποιεί την εξίσωση. Για $x=\psi=0$ προκύπτει $z=-\dfrac{4}{3}$

Άρα διέρχεται από το $A(0,\,0,\,\frac{-4}{3})$.
σχήμα

▶ $\boxed{\text{ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΥΝ 3 ΜΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ}}$

Ζητάμε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν τα

σχήμα

$$\left.\begin{array}{r} A(x_A,\,\psi_A,\,z_A) \\ B(x_B,\,\psi_B,\,z_B) \\ \Gamma(x_\Gamma,\,\psi_\Gamma,\,z_\Gamma) \end{array}\right\} A(x_A,\,\psi_A,\,z_A)\vec{\ell}=?(\perp(\Pi))$$

Βρίσκουμε $\vec{\ell}\perp(\Pi):\ \vec{\ell}=(\overrightarrow{AB})\times(\overleftarrow{A\Gamma})$

$\boxed{<\vec{\ell},\,\overrightarrow{AM}>=0}$ όπου <u>M τυχαίο σημείο του επιπέδου</u>, $M(x,\,\psi,\,z)$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$A(1,\,0,\,0)$
$B(0,\,1,\,0)$
$\Gamma(0,\,0,\,1)$

$\overrightarrow{AB}(-1,\,1,\,0)$
$\overrightarrow{A\Gamma}(-1,\,0,\,1)$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{A\Gamma}=(1,\,1,\,1)}\star=\vec{\ell}$

$\star$ προκύπτει από την ορίζουσα αναπτυσσόμενη ως προς την 1^{η} γραμμή $\begin{vmatrix} i & j & \kappa \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$<\vec{\ell},\,\overrightarrow{AM}>=<(1,\,1,\,1),\,(x-1,\,\psi-0,\,z-0)>=0 \Rightarrow \boxed{x+\psi+z\;=\;1}$ <u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>

▶ <u>ΕΚΦΡΑΖΟΥΜΕ ΚΑΛΥΤΕΡΑ τον τύπο $<\vec{\ell},\,\overrightarrow{AM}>=0$</u>

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,\,\psi_B-\psi_A,\,z_B-z_A)$
$\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-x_A,\,\psi_\Gamma-\psi_A,\,z_\Gamma-z_A)$
$\vec{\ell}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{A\Gamma}=\big(D_{\psi z},\,-D_{xz},\,D_{x\psi}\big)$
$\overrightarrow{AM}(x-x_A,\,\psi-\psi_A,\,z-z_A)$
$<\vec{\ell},\,\overrightarrow{AM}>=(x-x_A)D_{\psi z}-(\psi-\psi_A)D_{xz}+(z-z_A)D_{x\psi}=0$

$$< \vec{\ell}, \overrightarrow{AM} >= \begin{vmatrix} x - x_A & \psi - \psi_A & z - z_A \\ x_B - x_A & \psi_B - \psi_A & z_B - z_A \\ x_\Gamma - x_A & \psi_\Gamma - \psi_A & z_\Gamma - z_A \end{vmatrix} = 0$$

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ στο ΧΩΡΟ</u>

$$\begin{vmatrix} x & \psi & z & 1 \\ x_A & \psi_A & z_A & 1 \\ x_B & \psi_B & z_B & 1 \\ x_\Gamma & \psi_\Gamma & z_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

► $\boxed{\text{ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ 2 ΕΥΘΕΙΩΝ στο ΧΩΡΟ}}$

$(\Pi_1) \longleftrightarrow (A, \vec{\ell}_1)$
$(\Pi_2) \longleftrightarrow (B, \vec{\ell}_2)$

- $\vec{\ell}_1 \parallel \vec{\ell}_2 \Rightarrow (\Pi_1) \parallel (\Pi_2)$ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ή ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ
- $\vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 \neq 0 \Rightarrow (\Pi_1) \cap (\Pi_2) \neq 0$ σχήμα

$$(\varepsilon) = (\Pi_1) \cap (\Pi_2) \parallel (\vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\Pi_1) \longleftrightarrow < \overrightarrow{AM}, \vec{\ell}_1 >= 0 \\ (\Pi_2) \longleftrightarrow < \overrightarrow{BM}, \vec{\ell}_2 >= 0 \end{array}\right\} \text{ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΕΙ τα σημεία τομής.}$$

► ΕΠΙΠΕΔΑ στο ΧΩΡΟ

$$(\Pi): \left.\begin{array}{c} \alpha x+\beta\psi+\gamma z+\delta=0 \\ \vec{\ell}=(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\neq 0 \end{array}\right\}\ \underline{\text{ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΕΠΙΠΕΔΟ}}\perp\vec{\ell}$$

“ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟ” $\left\{\begin{array}{c}\text{Γνωρίζω ένα σημείο του επιπέδου} \\ \text{και ένα διάνυσμα στο οποίο το} \\ \text{επίπεδο είναι ΚΑΘΕΤΟ}\end{array}\right.$

► ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΤΟΜΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Να βρεθεί η εξίσωση της τομής των επιπέδων
(Π_1) $x+\psi+z=1$
σχήμα
(Π_2) $2x+3\psi+z=4$
Δηλαδή ζητείται η εξίσωση της ευθείας (ε).
$1^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ
Η τομή είναι ευθεία της μορφής $\dfrac{x-x_0}{\kappa}=\dfrac{\psi-\psi_0}{\lambda}=\dfrac{z-z_0}{\mu}$ όπου $(\kappa,\,\lambda,\,\kappa)\parallel(\varepsilon)$ και $(x_0,\,\psi_0,\,z_0)\in(\varepsilon)$.

Έστω

$$\begin{array}{c}\vec{\ell}_1\perp(\Pi_1) \\ \vec{\ell}_2\perp(\Pi_2)\end{array}\Rightarrow\underbrace{(\vec{\ell}_1\times\vec{\ell}_2)}_{(\kappa,\,\lambda,\,\mu)}\parallel(\Pi_1)\cap(\Pi_2)$$

$$\left.\begin{array}{c}\vec{\ell}_1=(1,\,1,\,1) \\ \vec{\ell}_2=(2,\,3,\,1)\end{array}\right\}\vec{\ell}_1\times\vec{\ell}_2=(-2,\,1,\,1)=(\kappa,\,\lambda,\,\mu)$$

Βρίσκουμε σημείο τομής της (ε)

$\psi_0=0$
$x_0+z_0=1$
$2x_0+z_0=4$

$x_0=3$
$z_0=-2$

Άρα το σημείο $(x_0,\,\psi_0,\,z_0)$ είναι το $(3,\,0,\,-2)$.
Άρα η ευθεία (ε) είναι $((\varepsilon)=(\Pi_1)\cap(\Pi_2))$:

$$\boxed{\frac{x-3}{-2}=\frac{\psi}{1}=\frac{z+2}{1}}$$

$2^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ

Βρίσκουμε 2 σημεία της τομής, έστω τα $(x_0,\,\psi_0,\,z_0)=(3,\,0,\,-2)$

για $x_1=0$ τότε $(x_1,\,\psi_1,\,z_1)=(0,\,\frac{3}{2},\,\frac{-1}{-2})$.

Τότε $(\kappa,\,\lambda,\,\mu)\parallel(x_0-x_1,\,\psi_0-\psi_1,\,z_0-z_1)=(3,\,-\frac{3}{2},\,-\frac{-3}{2})=-\dfrac{3}{2}(-2,\,1,\,1)$
$(\kappa,\,\lambda,\,\mu)\parallel-\dfrac{3}{2}(-2,\,1,\,1)$

► ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το (1, 1, 1) και είναι $\perp$ στα (Π_1), (Π_2)

$$\left\{ (\Pi): \begin{array}{c} x+\psi+z=1 \\ 2x+3\psi+z=4 \end{array} \right\}$$

Αφού $(\Pi) \perp (\Pi_1), (\Pi_2) \Rightarrow (\Pi) \perp (\varepsilon) = (\Pi_1) \cap (\Pi_2)$ όπου $(\varepsilon) \parallel (\kappa, \lambda, \mu) \Rightarrow (\Pi) \perp (\kappa, \lambda, \mu)$
$(\Pi): \kappa x + \lambda\psi + \mu z + \nu = 0$ και επειδή $(1, 1, 1) \in (\Pi)$ προκύπτει ότι $\nu = \kappa + \lambda + \mu$
Οπότε $(\Pi): \kappa x + \lambda\psi + \mu z + (\kappa + \lambda + \mu) = 0$

► ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το επίπεδο (Π): $2x + 3\psi + z = 4$ και η ευθεία (ε): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{\psi-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$

Να βρεθεί μία ευθεία του (Π) $\perp$ στην (ε) και να την τέμνει. Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν

1ος ΤΡΟΠΟΣ

$\dfrac{x-x_0}{\kappa} = \dfrac{\psi-\psi_0}{\lambda} = \dfrac{z-z_0}{\mu}$ όπου $(x_0, \psi_0, z_0) \in (\varepsilon)$, $(\kappa, \lambda, \mu) \parallel (\varepsilon)$

$(x_0, \psi_0, z_0) = (\Pi) \cap (\varepsilon)$. Θέτουμε τους ίσους λόγους t

$$t = \frac{x-1}{1} = \frac{\psi-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

σχήμα

$$\left. \begin{array}{r} x = t+1 \\ \psi = 2t+2 \\ z = 3t+3 \end{array} \right\} 2(t+1) + 3(2t+2) + 3t + 3 = 4 \Rightarrow \cdots t = -\frac{7}{11}$$

$$\text{Άρα} \quad \left. \begin{array}{r} x_0 = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11} \\ \psi_0 = 2(-\frac{7}{11}) + 2 = \frac{8}{11} \\ z_0 = 3(-\frac{7}{11}) + 3 = \frac{12}{11} \end{array} \right\} (x_0, \psi_0, z_0) = (\frac{4}{11}, \frac{8}{11}, \frac{12}{11}).$$

Οι ευθείες που είναι κάθετες στην (ε) και διέρχονται από το A. Βρίσκονται σε ένα επίπεδο (Π_1). Το (Π_1) είναι $\perp$ στην (ε) (όπου $(\varepsilon) \parallel \vec{\ell_1} = (1, 2, 3)$). Η ζητούμενη ευθεία (ε') είναι η τομή των (Π) και (Π_1). $(\varepsilon') = (\Pi) \cap (\Pi_1)$. Όμως $(\Pi) \perp \vec{\ell_2} = (2, 3, 1)$. Άρα $(\varepsilon') \parallel (\vec{\ell_1} \times \vec{\ell_2}) = (\kappa, \lambda, mu)$. Άρα $(\kappa, \lambda, \mu) = (\vec{\ell_1} \times \vec{\ell_2}$ όπου $\vec{\ell_1} = (2, 3, 1) \perp (\Pi)$, $\vec{\ell_2} = (1, 2, 3) \parallel (\varepsilon)$.

► $\boxed{\text{ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ απο ΕΠΙΠΕΔΟ}}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δίνεται επίπεδο (Π): $\alpha x + \beta\psi + \gamma z + \delta = 0$ και ένα σημείο $P(x_0, \psi_0, z_0)$ εκτός επιπέδου. Ζητείται η απόσταση του P από το (Π) δηλ. $d(P, (\Pi))$

σχήμα

ΑΠΟΣΤΑΣΗ: υπάρχει ευθεία (ε)
που διέρχεται από το (P)
και είναι κάθετη στο (Π)
το οποίο τέμνει στο σημείο P'.
P' =προβολή του P στο (Π).

Έστω A τυχαίο σημείο του (Π).
$A \in (\Pi)$
$(PP') \perp (\Pi)$
$(PP') \parallel \vec{\ell}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ γιατί $\vec{\ell} \perp (\Pi)$.
Στο ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ $AP'P$

$$\|\overrightarrow{PP'}\| = \|prob_{\vec{\ell}}\overrightarrow{AP}\| = \|\frac{<\overrightarrow{AP},\, \vec{\ell}>}{<\vec{\ell},\, \vec{\ell}>}\vec{\ell}\| = \|\frac{<\overrightarrow{AP},\, \vec{\ell}>}{\|\vec{\ell}\|^2}\vec{\ell}\|$$

$$= |<\overrightarrow{AP},\, \vec{\ell}>|\frac{\|\vec{\ell}\|}{\|\vec{\ell}\|^2} = \frac{|<\overrightarrow{AP},\, \vec{\ell}>|}{\|\vec{\ell}\|}$$

Δηλαδή

$$\|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{|<\overrightarrow{AP},\, \vec{\ell}>|}{\|\vec{\ell}\|} \tag{2}$$

Εκφράζουμε το A με παραμέτρους. Έστω $A(x_1,\, \psi_1,\, z_1) \in (\Pi)$.

$$\begin{cases} A(x_1,\, \psi_1,\, z_1) \\ P(x_0,\, \psi_0,\, z_0) & \text{Από την σχέση (2) προκύπτει:} \\ \ell(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \end{cases}$$

$$\|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{<(x_0 - x_1,\, \psi_0 - \psi_1,\, z_0 - z_1),\, (\alpha,\, \beta,\, \gamma)>}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

$$= |\frac{\alpha x_0 + \beta\psi_0 + \gamma z_0 - \overbrace{(\alpha x_1 + \beta\psi_1 + \gamma z_1)}^{\in(\Pi)\text{ άρα ισούται με}-\delta}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}|$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{|\alpha x_0 + \beta\psi_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}}$$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ απο ΕΠΙΠΕΔΟ

$\boxed{\text{ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ στο ΧΩΡΟ } \mathbb{R}^2}$

► ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ απο ΕΥΘΕΙΑ στον $\mathbb{R}^2$

Ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ $(\alpha x + \beta\psi + \gamma = 0,\ |\alpha| + |\beta| \neq 0)$ $(\varepsilon) \perp \vec{u}$ όπου $\vec{u}(\alpha,\ \beta)$

σχήμα

$$\boxed{d(P,\ (\varepsilon)) = \frac{\alpha x_0 + \beta\psi_0 + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}$$

► ΠΟΡΙΣΜΑ: ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ στο $\mathbb{R}^2$

$A(x_1,\ \psi_1)$
$B(x_2,\ \psi_2)$ $\qquad E(AB\Gamma) = ?$
$\Gamma(x_3,\ \psi_3)$

1ος ΤΡΟΠΟΣ: ΕΠΙΠΕΔΟ $\subset \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,\ \psi_1) \equiv (x_1,\ \psi_1,\ 0)\\ (x_2,\ \psi_2) \equiv (x_2,\ \psi_2,\ 0)\\ (x_3,\ \psi_3) \equiv (x_3,\ \psi_3,\ 0)\end{array}\right\} \text{ οπότε } E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}\|$$

2ος ΤΡΟΠΟΣ:

σχήμα

$$\begin{cases}\overrightarrow{B\Gamma}(x_3 - x_2,\ \psi_3 - \psi_2)\\ \vec{u}(-(\psi_3 - \psi_2),\ (x_3 - x_2))\end{cases}$$

$\vec{u} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$ = έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν.

Βρίσκουμε την (ε) $\begin{vmatrix} x - x_3 & \psi - \psi_3 \\ x_2 - x_3 & \psi_2 - \psi_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\psi_2 - \psi_3)x + (x_2 - x_3)\psi - x_3(\psi_2 - \psi_3) + \psi_3(x_2 - x_3) = 0$

Ισχύει ο τύπος: $E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\|\text{ΒΑΣΗ}\| \cdot \|\text{ΥΨΟΣ}\|$

ΒΑΣΗ$=\|\overrightarrow{B\Gamma}\|$

ΒΑΣΗ$=\|d(A,\ B\Gamma)\|$

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{B\Gamma}\|\|d(A,\ B\Gamma)\| =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (\psi_3 - \psi_2)^2}}\frac{|(\psi_2 - \psi_3)x_1 - (x_2 - x_3)\psi_1 + \psi_3(x_2 - x_3) - x_3(\psi_2 - \psi_3)|}{\cancel{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (\psi_3 - \psi_2)^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & \psi_1 - \psi_3 \\ x_2 - x_3 & \psi_2 - \psi_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Άρα $E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix}$

► ΠΟΡΙΣΜΑ: Τρία σημεία είναι ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ στο ΕΠΙΠΕΔΟ

αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 & 1 \\ x_2 & \psi_2 & 1 \\ x_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Δηλαδή $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$

Στο επίπεδο δίνεται μία ευθεία (ε) η οποία χωρίζει το επίπεδο σε δύο τμήματα (ημιεπίπεδα)

σχήμα

$\vec{u}_0 \perp (\Pi) \cap (\varepsilon)$
$-\vec{u}_0 \perp (\Pi) \cap (\varepsilon)$

$f(x,\, \psi) = \alpha x + \beta \psi + \gamma$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,\, \psi) = 0 \Leftrightarrow A(x,\, \psi) \in (\varepsilon)$

Θεωρούμε

$$H_1 = \{(x,\, \psi) | f(x,\, \psi) > 0\}$$

$$H_2 = \{(x,\, \psi) | f(x,\, \psi) > 0\}$$

$\boxed{\text{ΕΠΙΠΕΔΟ-ΣΗΜΕΙΟ-ΕΥΘΕΙΑ στον } \mathbb{R}^3}$

► <u>ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ</u>

σχήμα

$d((\varepsilon_1),\,(\varepsilon_2)) =$<u>μήκος κοινού κάθετου τμήματος</u>
Έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει το κοινό κάθετο τμήμα

<u>ΔΕΔΟΜΕΝΑ</u>

$(\varepsilon_1):\ \vec{r}_1 = \vec{r}_{A_1} + t\vec{u}_1$ σχήμα

$(\varepsilon_2):\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{A_2} + t\vec{u}_2$

$(\overrightarrow{M_1M_2}) \perp (\varepsilon_1),\,(\varepsilon_2)$ όμως $\begin{array}{l}(\varepsilon_1) \parallel \vec{u}_1\\ (\varepsilon_2) \parallel \vec{u}_2\end{array}$

Άρα $(\overrightarrow{M_1M_2}) \parallel (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$

$$d(M_1,\,M_2) = \|prob_{\vec{u}_1\times\vec{u}_2}\overrightarrow{A_1A_2}\| = \Big\|\frac{<\overrightarrow{A_1A_2},\,\vec{u}_1\times\vec{u}_2>}{<\vec{u}_1\times\vec{u}_2,\,\vec{u}_1\times\vec{u}_2>}\vec{u}_1\times\vec{u}_2\Big\|$$

$$= \frac{|<\overrightarrow{A_1A_2},\,\vec{u}_1\times\vec{u}_2>|}{\|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\|^{\cancel{2}}}\cancel{\|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\|} = \frac{|<\overrightarrow{A_1A_2},\,\vec{u}_1\times\vec{u}_2>|}{\|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\|}$$

όπου $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{A_2} - \vec{r}_{A_1}$

► <u>ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ απο ΕΥΘΕΙΑ στο ΧΩΡΟ</u>

σχήμα

(i) <u>ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ</u>
Δίνονται τα A και (ε).
Φέρω από το A ένα επίπεδο κάθετο στην (ε)
Οπότε ορίζεται το σημείο A'.
Ζητάμε το $d(AA') = \|\overrightarrow{AA'}\|$

σχήμα

(ii) <u>Β′ ΤΡΟΠΟΣ</u>
Έστω P τυχαίο σημείο της (ε) τότε $\|PA'\| = \|prob_{AA'}\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AP}\|\cos\varphi = \|\overrightarrow{AP}\|\sin\theta$

Η ευθεία $(\varepsilon) \parallel \vec{u}$ τότε:

$$\|\overrightarrow{AP}\|\sin\theta = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|\|\vec{u}\|\sin\theta}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|(\vec{r}_P - \vec{r}_A)\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Άρα $\boxed{\|\overrightarrow{PA'} \;=\; \dfrac{\|(\vec{r}_P - \vec{r}_A)\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}}$

$\boxed{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ σε } \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 - \text{ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ}}$

<u>Εξίσωση ευθείας σστο χώρο:</u> $\dfrac{x-x_0}{\kappa} = \dfrac{\psi-\psi_0}{\lambda} = \dfrac{z-z_0}{\mu}$

Είναι ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

<u>Εξίσωση επιπέδου στο χώρο</u> $Ax + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0$

ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (με τρεις μεταβλητές)

<u>ΕΥΕΘΕΙΑ και ΕΠΙΠΕΔΟ</u>: <u>ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ</u>

▶ $\boxed{\text{ΚΥΚΛΟΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ}}$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>:
Τα σημεία των οποίων η απόσταση από το δοθέν σημείο είναι γνωστή και σταθερή

σχήμα

A: γνωστό σημείο
M: τυχαίο σημείο. Θέλουμε $d(A, M) = R$ (γνωστό και σταθερό).
$\|\overrightarrow{AM}\| = R$
$\boxed{\|\vec{r}_M - \vec{r}_A\| = R}$ <u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ</u>

Επιλέγω ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
$\{Ox\psi z\}$ $\vec{r}_A(x_A, \psi_A, z_A)$, $\vec{r}_M(x, \psi, z)$
$\|\vec{r}_M - \vec{r}_A\| = R^2$
$\boxed{(x-x_A)^2 + (\psi-\psi_A)^2 + (z-z_A)^2 = R^2}$ <u>ΣΦΑΙΡΑ</u>

Στο επίπεδο $z = 0 \rightsquigarrow \{Ox\psi\}$ τότε $\boxed{(x - x_A)^2 + (\psi - \psi_A)^2 = R^2}$ ΚΥΚΛΟΣ

▶ Για ΣΥΣΤΗΜΑ με αρχή το A:
$\{A, \psi, z\}$ $(x_A, \psi_A, z_A) \to (0, 0, 0)$ τότε
$\boxed{x^2 + \psi^2 + z^2 = R^2}$ <u>ΣΦΑΙΡΑ</u>
πολυωνυμική $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ στο χώρο (3 μεταβλητών)

▶ $\boxed{\text{ΜΕΛΕΤΗ του ΚΥΚΛΟΥ στο ΕΠΙΠΕΔΟ}}$
• <u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ</u>: $\|\vec{r}_A - \vec{r}_M\| = R$ όπου A κέντρο του κύκλου και M σημείο του κύκλου $\boxed{< \vec{r}_A - \vec{r}_M, \vec{r}_A - \vec{r}_M >= R^2}$
• <u>ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ</u>
$(x-x_A)^2 + (\psi-\psi_A)^2 = R^2$
$X^2 + \Psi^2 = R^2$

σχήμα $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA}$

Τα συστήματα $\{O,\, x,\, \psi\}$ και $\{A,\, X,\, \Psi\}$ διαφέρουν κατά μία μεταφορά ως προς το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ του $Ox\psi$.

Οπότε $\begin{matrix} X = x - x_A \\ \Psi = \psi - \psi_A \end{matrix}$ ή $\begin{matrix} x = X + x_A \\ \psi = \Psi + \psi_A \end{matrix}$

Αναλυτική εξίσωση κύκλου
σε ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
με ΑΡΧΗ το ΚΕΝΤΡΟ του ΚΥΚΛΟΥ $\boxed{X^2 + \Psi^2 = R^2}$

• ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ του ΚΥΚΛΟΥ

Περιγραφή του κύκλου χρησιμοποιώντας μία παράμετρο π.χ. κύκλος ως τροχιά κινητού στο χρόνο

$\begin{matrix} x = x(t) \\ \psi = \psi(t) \end{matrix}$ τότε $M(x(t),\, \psi(t))$

σχήμα

σχήμα

$x = R\cos\varphi$
$\psi = R\sin\varphi$
όπου $\varphi = \omega t$, ω η γωνιακή συχνότητα.

$\begin{matrix} X(t) = R\cos\omega t \\ \Psi(t) = R\sin\omega t \end{matrix}$ Παράμετρος είναι το t, για $\omega = 1$ είναι

$\left\{ \begin{matrix} x = R\cos t \\ \psi = R\sin t \end{matrix} \right\}$ περιγράφει τα σημεία του κύκλου με μία παράμετρο t. Ο κύκλος συνδέεται με μία περιοδικότητα.

• Υπάρχει μία διαδικασία, η ΑΠΑΛΟΙΦΗ, που από τις παραμετρικές εξισώσεις οδηγεί στην αναλυτική εξίσωση (μία σχέση χωρίς την παράμετρο)

$$\left. \begin{matrix} \cos t = \frac{x}{R} \\ \sin t = \frac{\psi}{R} \\ \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \end{matrix} \right\} \frac{X^2}{R} + \frac{\Psi^2}{R} = 1 \Leftrightarrow \boxed{X^2 + \Psi^2 = R^2}$$

► ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΚΥΚΛΟΥ και ΕΥΘΕΙΑΣ στο ΕΠΙΠΕΔΟ

$$(C) \cap (\varepsilon) \left\{ \begin{matrix} \varnothing \\ 1\,\text{σημείο} \\ 2\,\text{σημεία} \end{matrix} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} (C):\; x^2 + \psi^2 = R^2 \\ (\varepsilon):\; \alpha x + \beta\psi + \gamma = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0 \end{matrix} \right.$$

Από τη λύση του συστήματος θα προκύψουν τα "κοινά σημεία" (αν υπάρχουν). Επειδή $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ τότε ένα από τα δύο είναι μη μηδενικό. Έστω ότι είναι το B τότε: $\psi = \kappa x + \lambda$ και αναγόμαστε στο σύστημα

$$\left\{ \begin{matrix} x^2 + \psi^2 = R^2 \\ \psi = \kappa x + \lambda \end{matrix} \right. \Rightarrow \quad \begin{matrix} \psi^2 = \kappa^2 x^2 + 2\kappa\lambda x + \lambda^2 \\ x^2 + \psi^2 = \underbrace{(1 + \kappa^2)x^2 + (2\kappa\lambda)x + \lambda^2}_{\text{τριώνυμο}} = R^2 \end{matrix}$$

• Αν $\Delta = 0$ τότε υπάρχει μία λύση: ΕΝΑ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ

$$\underline{\Delta = 4\kappa\lambda^2 - 4(1+\kappa^2)(\lambda^2 - R^2) = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{d(O(0,\,0),\,\psi\ =\ \kappa x + \lambda)\ =\ R} \Leftrightarrow \frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\kappa^2}} = R \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{1+\kappa^2} = R^2$$

$d(0,\,(\varepsilon)) = R$: ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ του ΚΥΚΛΟΥ απο την ΕΥΘΕΙΑ ίση με ΑΚΤΙΝΑ.
Επομένως η λύση είναι <u>η απόσταση του ΚΕΝΤΡΟΥ του ΚΥΚΛΟΥ από την ΕΥΘΕΙΑ</u>.
σχήμα

- Αν $\Delta > 0$ τότε 2 κοινά σημεία
- Αν $\Delta < 0$ τότε κανένα κοινό σημείο

► <u>ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ</u>

Υπάρχει ένα μόνο κοινό σημείο μεταξύ (C) και (ε) δηλαδή $d(0,\,(\varepsilon)) = R$.
Είναι ΟΡΙΑΚΗ ΘΕΣΗ της ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ.

σχήμα $\qquad xx_0 + \psi\psi_0 = R^2 \qquad$ εξίσωση που ικανοποιείται αν η (ε) εφάπτεται στον (C).

$\underline{x^2+\psi^2=R^2}$ εξίσωση κύκλου στο επίπεδο (ΚΕΝΤΡΟ κύκλου η ΑΡΧΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ)

$\underline{(x-x_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=R^2}$ (ΚΕΝΤΡΟ το σημείο $(x_0,\,\psi_0)$)

<u>ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ</u>: <u>ευθεία</u>→<u>ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον κύκλο</u>

► <u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ</u>

σχήμα

<u>Η ακτίνα που αντιστοιχεί στο</u> $(x^\star,\,\psi^\star)$
<u>πρέπει να είναι κάθετη στη ζητούμενη ευθεία</u>
<u>ακτίνα</u>→<u>διάνυσμα</u>
$\vec{\ell}=(x^\star,\,\psi^\star)\perp(\varepsilon)$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ ή $\overrightarrow{AM}\perp\vec{\ell}$ δηλαδή $\boxed{<\overrightarrow{AM},\,\vec{\ell}>=0}$ $(\bigstar)$
$\overrightarrow{AM}(x-x^\star,\,\psi-\psi^\star)$
$\vec{\ell}(x^\star,\,\psi^\star)$
$(\bigstar)\Rightarrow<(x-x^\star,\,\psi-\psi^\star),\,(x^\star,\,\psi^\star)>=0\Leftrightarrow$

$x^\star(x-x^\star)+\psi^\star(\psi-\psi^\star)=0\Rightarrow x^\star x+\psi^\star\psi=(x^\star)^2+(\psi^\star)^2=R^2$(σημείο του κύκλου ισούται μεR^2)

$(\varepsilon)\Rightarrow\boxed{x^\star x+\psi^\star\psi=R^2}$

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ στον ΚΥΚΛΟ που διέρχεται από το σημείο $A(x^\star,\,\psi^\star)$ του κύκλου</u>

► <u>ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ</u>

σχήμα

$$\left.\begin{array}{ll}(C_1): & x^2+\psi^2=R_1^2\\ (C_2): & (x-\alpha)^2+\psi^2=R_2^2\end{array}\right\}(\Sigma)$$

$\alpha\longrightarrow$ ΔΙΑΚΕΝΤΡΟΣ
Επιλύουμε το σύστημα

► <u>ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ</u> $\longrightarrow$ γωνία εφαπτομένων στο σημείο τομής

σχήμα

<u>γωνία</u> $(\overrightarrow{O_1A},\,\overrightarrow{O_2A})=\varphi$

$$\cos\varphi=\frac{<\overrightarrow{O_1A},\,\overrightarrow{O_2A}>}{\|\overrightarrow{O_1A}\|\,\|\overrightarrow{O_2A}\|}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: <u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ 2 ΚΥΚΛΩΝ</u>

$$\boxed{R^1+R^2=\delta^2}\text{ ή }\boxed{<\overrightarrow{O_1A},\,\overrightarrow{O_2A}>=0}$$

► <u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Να βρεθεί ο Γ. Τ. των μέσων παράλληλων χορδών.
σχήμα } οικόγενεια παράλληλων χορδών

Γ.Τ.: ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ ΚΑΘΕΤΗ στην ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΧΟΡΔΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ που ταιριάζει στο πρόβλημα. Η αρχή των αξόνων $O(0,\, 0)$ είναι το κέντρο του κύκλου.
Οπότε εξίσωση κύκλου: $(C) : \underline{x^2 + \psi^2 = R^2}$

Οικογένεια παράλληλων χορδών $\quad (\varepsilon)^\star\ \underline{\alpha x + \beta\psi + \mu = 0}, \ \mu \in \mathbb{R},\ |\alpha| + |\beta| \neq 0$
$\star$ ευθείες κέθετες στο διάνυσμα $(\alpha,\, \beta)$ (άρα μεταξύ τους παράλληλες)
ή $\psi = \lambda x + \mu^\star,\ \lambda =$ σταθερό, $\mu^\star \in \mathbb{R}$ (και κάθετες στον xx')

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + \psi^2 = R^2 \\ \psi = \lambda x + \mu^\star \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} M_1(x_1,\, \psi_1) \\ M_2(x_2,\, \psi_2) \end{array} \Rightarrow M = \text{μέσον}(M_1,\, M_2)\ M(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{\psi_1 + \psi_2}{2})$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ του M $\ M(x_M,\, \psi_M)$ όπου $\psi_M = f(x_M)$ χωρίς $\mu^\star$
Προκύπτει $\boxed{\psi_M\ =\ Ox_M}$ ΕΥΘΕΙΑ από την ΑΡΧΗ $O(0,\, 0)$. Άρα ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ.

► ΑΣΚΗΣΗ: Θεωρούμε χορδές ίσου μήκους (σταθερού). Ζητείται ο Γ.Τ. των μέσων των χορδών.
σχήμα

► ΣΦΑΙΡΑ

$$\left. \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \\ K \text{σήμειο του χώρου} \\ R > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Ζητείται ο Γ.Τ. των σημείων } M: \\ d(K,\, M) = R \\ \text{ΣΦΑΙΡΑ} \end{array}$$

Στο σύστημα $\{K,\, x\psi z\}$ $\|\overrightarrow{OM}\| = R$

$\boxed{x^2\ +\ \psi^2\ +\ z^2\ =\ R^2}$ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΦΑΙΡΑΣ με ΚΕΝΤΡΟ την ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.

$\boxed{(x - x_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}$ ΚΕΝΤΡΟ το $(x_0,\, \psi_0,\, z_0)$

σχήμα

$$d(K,\, (\Pi)) \left\{ \begin{array}{ll} > R & \nexists\,\text{κοινά σημεία} \\ = R & \exists\,\text{ένα κοινό σημείο} \\ < R & \text{η τομή είναι κύκλος} \end{array} \right.$$

Για να δείξουμε ότι η ΤΟΜΗ είναι ΚΥΚΛΟΣ: Πρέπει να βρω το ΚΕΝΤΡΟ και την ΑΚΤΙΝΑ του.

σχήμα

Φέρω KK' κάθετη στο επίπεδο και έστω M σημείο της τομής. Στο ορθογώνιο $KK'M$

$$\left. \begin{array}{c} KK' = d < R \\ KM = R \end{array} \right\} \Rightarrow (K'M)^2 = R^2 - d^2 > 0$$

Άρα τα σημεία της ΤΟΜΗΣ απέχουν από σταθερό σημείο σταθερή απόσταση. Άρα η ΤΟΜΗ είναι ΚΥΚΛΟΣ.

▶ <u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>

$(S)\ x^2+\psi^2+z^2=R^2$ Ζητείται το (Π) που εφάπτεται
$(x_0,\,\psi_0,\,z_0)$ στην S στο σημείο A.

$<\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{AM}>=0\ \forall M$ σημείο του ζητούμενου (Π)
$x_0x+\psi_0\psi+z_0z=R^2$
$\vec{\ell}(x_0,\,\psi_0,\,z_0)\perp(\Pi)$

▶ <u>ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ κ′ ΣΦΑΙΡΑΣ</u>

<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u> $\begin{cases} \underline{\text{ευθεία}} & \underline{\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}},\ t\in\mathbb{R} \\ & \\ \underline{\text{Κύκλος}} & \begin{matrix} x(t)=R\cos\varphi \\ \psi(t)=R\sin\varphi,\ \varphi\in\mathbb{R}\end{matrix}\end{cases}$ $\left\{\begin{matrix} x=x_0+t\alpha \\ \psi=\psi_0+t\beta \\ z=z_0+t\gamma\end{matrix}\right\} t\in\mathbb{R}$

• <u>Επίπεδο</u>

σχήμα

$\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{AM}$
$\overrightarrow{AM}=t\vec{u}+s\vec{w}$, γραμμικοί συνδυασμοί
$\vec{u},\,\vec{w},\,t,\,s\in\mathbb{R}$
$\underline{\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}+s\vec{w}},\ t,\,s\in\mathbb{R}$

$$(x,\,\psi,\,z)=(x_0,\,\psi_0,\,z_0)+t(\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3)+s(\beta_1,\,\beta_2,\,\beta_3)$$

$$\begin{cases}(x-x_0)-\alpha_1t-s\beta_1=0\\(\psi-\psi_0)-\alpha_2t-s\beta_2=0\\(z-z_0)-\alpha_3t-s\beta_3=0\end{cases}\quad \text{Απαλοιφή των } t,\,s.$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \psi-\psi_0 & z-z_0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow \alpha x+\beta\psi+\gamma z+\delta=0$$

$(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\parallel\vec{u}\times\vec{w}$

<u>ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ στο ΧΩΡΟ</u>
<u>ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ στο ΧΩΡΟ</u> $\{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{\kappa}\}$

σχήμα

$|\overrightarrow{OM}|=\vec{r}$
$|\overrightarrow{O\Gamma}|=|\overrightarrow{OM}|\,|\cos\theta|=r|\cos\theta|$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{O\Gamma}=(r\cdot\cos\theta)\vec{\kappa}\\ \overrightarrow{O\Gamma}=z\end{matrix}\right\}\underline{z=r\cdot\cos\theta\ \ \theta\in(0,\,\pi)}\ \text{ή}\ (-\tfrac{\pi}{2},\,\tfrac{\pi}{2})$$

$$|\overrightarrow{OM'}| = |\overrightarrow{\Gamma M}| = r \cdot \sin\theta$$

σχήμα

$$x = (OM')\cdot = r \cdot \cos\varphi \sin\theta$$
$$\varphi = (OM') \cdot \sin\varphi = r \sin\varphi \sin\theta$$

$$\varphi \in (0,\, 2\pi)$$
$$(\varphi,\, \theta) \longrightarrow (r\cos\varphi\sin\theta,\, r\sin\varphi\cos\theta,\, r\cos\theta)$$
$$x, \qquad \psi, \qquad z$$

$x^2 + \psi^2 + z^2 = r^2$
$\varphi =$ γεωγραφικό πλάτος $\varphi \in (0,\, 2\pi)$
$\theta =$ γεωγραφικό μήκος $\theta \in (0,\, \pi)$

► $\boxed{\text{Η ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ στο ΕΠΙΠΕΔΟ}}$

E: $\alpha x^2 + \beta x\psi + \gamma\psi^2 + \delta x + \varepsilon\psi + z = 0$

$\{O,\, x\psi\}$: ΕΠΙΠΕΔΟ,

$\{(x,\, \psi)|(E)\} = C$: ζεύγη που ικανοποίουν την (E) και C: ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

$\boxed{\text{ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ}}$

• $\underline{\delta x + \varepsilon\psi + z = 0}$. Αν $|\delta| + |\varepsilon| \neq 0$ τότε παριστάνει ευθεία. Αν $\delta = \varepsilon = 0$ και $z \neq 0$ τότε η εξίσωση δεν παριστάνει κάτι. Τέλος αν $\delta = \varepsilon = z = 0$ παριστάνει όλο το επίπεδο.

• $\underline{\alpha x^2 + \gamma\psi^2 + z = 0}$

ΚΥΚΛΟΣ (εξαρτάται από τους συντελεστές)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \gamma = 1 = z & \\ x^2 + \psi^2 + 1 = 0 & \text{αδύνατο γιατί δεν υπάρχει κύκλος φανταστικής ακτίνας} \end{array} \right\}$$

► <u>ΜΕΛΕΤΗ της (E)</u>

Μέσω της μελέτης ειδικών δευτεροβάθμιων καμπυλών που προκύπτουν από γεωμετρικά προβλήματα.

► <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>: Στο επίπεδο δίνεται μια ευθεία (δ) και ένα σημείο (E). Ζητείται ο Γ.Τ. των σημείων M του επιπέδου για τα οποία $\dfrac{d(M,\, E)}{d(M,\, \delta)}$ = σταθερό > 0. Συμβολίζουμε την εκκεντρότητα με e.

σχήμα

<u>ΙΣΤΟΡΙΑ του ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</u>:
συνδέεται με τομές επιπέδου και κώνου.
σχήμα.
Οι καμπύλες που προκύπτουν από την τομή του επιπέδου και κώνου είναι ο Γ.Τ. του προβλήματος.

► <u>ΜΕΛΕΤΗ του ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</u>

(i) Επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων.

(ii) “Μεταγραφή” του προβλήματος στο επιλεγμένο σύστημα.

σχήμα

(δεδομένα (δ) ευθεία, E σημείο).
Φέρω από το E την ΚΑΘΕΤΗ στο (δ).
$E \longrightarrow$ <u>ΕΣΤΙΑ</u>
$\delta \longrightarrow$ <u>διευθετούσα</u>
M: <u>τυχαίο σημείο</u>
$r = (ME)$: <u>ΕΣΤΙΑΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ</u>
<u>Το E παίζει το ρόλο του ΠΟΛΟΥ</u>
EB =<u>σταθερή απόσταση</u>= p

$(ME)^2 = r^2$

$(M\Gamma)^2 = (EB - r\cos\theta)^2$

$\dfrac{(ME)^2}{(M\Gamma)^2} = e^2$

$$\frac{(ME)^2}{(M\Gamma)^2} = e^2 \Rightarrow \boxed{r^2 = e^2(p - r\cos\theta)^2} \tag{3}$$

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ του Γ.Τ.</u> με χρήση <u>ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ</u>

σχήμα

ἀρχή μέτρησης των γωνιών, O: πόλος

$x = r\cos\theta$

$\psi = r\sin\theta$

$x^2 + \psi^2 = r^2$

$\arctan\frac{\psi}{x} = \theta$

• <u>1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $e = 1$</u>

Πρέπει $p > r\cos\theta$. Οπότε από την (3) προκύπτει $\frac{r}{p - r\cos\theta} = 1$

• <u>2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $e \neq 1$</u>

Από την (3) προκύπτει $\frac{r}{p - r\cos\theta} = \pm e \Rightarrow r = f(\theta)$

$\begin{cases} e > 1 & \text{υπάρχουν σημεία και δεξιά της } \delta \text{ που ικανοποιούν τη συνθήκη} \\ e < 1 & \text{όλα τα σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη είναι αριστερά της } \delta \end{cases}$

σχήμα (για $\varepsilon > 1$ σημείο δεξιά της δ)

<u>Παραβάλλουμε το e με τη μονάδα</u> και προκύπτει

$e = 1 \longrightarrow$ <u>ΠΑΡΑΒΟΛΗ</u>

$e < 1 \longrightarrow$ <u>ΕΛΛΕΙΨΗ</u>

$e > 1 \longrightarrow$ <u>ΥΠΕΡΒΟΛΗ</u>

$$\underline{r^2 = e^2(p - r\cos\theta)^2}$$

σχήμα

$x = r\cos\theta$

$\psi = r\sin\theta$

$(O,\, x\psi)$

$r^2 = x^2 + \psi^2$

$x^2 + \psi^2 =$

$e^2(p^2 - 2pr\cos\theta + \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{x^2}) \Rightarrow$

$x^2 + \psi^2 =$

$e^2p^2 - 2pe^2r\cos\theta + e^2x^2 \Rightarrow$

$$\boxed{(1 - e^2)x^2 + \psi^2 + 2pe^2x - e^2p^2 = 0}$$

$$(1 - e^2)x^2 + \psi^2 + 2pe^2x - e^2p^2 = 0$$

• <u>για $e = 1$</u>

$$\psi^2 = e^2p^2 - 2e^2x \Rightarrow \psi^2 = p^2 - 2px \Leftrightarrow$$

$$\psi^2 = 2p(\frac{p}{2} - x) \tag{4}$$

Θέτουμε

$$\left.\begin{array}{r} X = x - \frac{p}{2} \\ Y = \psi \end{array}\right\} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{c} \boxed{Y^2 = -2pX} \\ \underline{\text{ΠΑΡΑΒΟΛΗ στο ΣΥΣΤΗΜΑ}} \nearrow \end{array} \quad \text{σχήμα}$$

Στο ΣΥΣΤΗΜΑ $\left.\begin{array}{r} X^\star = -X \\ \Psi^\star = \Psi \end{array}\right\} \Rightarrow \Psi^\star = 2pX^\star$

• $\underline{e^1 \neq 1}$

$(1-e^2)[x^2 + \dfrac{2pe^2}{1-e^2}x] + \psi^2 = e^2p^2$ προσπαθούμε να το κάνουμε τέλειο τετράγωνο με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις $(1-e^2)(x + \dfrac{pe^2}{1-e^2}) + \psi^2 - \dfrac{p^2e^2}{1-e^2} = 0$

Θέτω $\begin{array}{l} X = (x + \dfrac{pe^2}{1-e^2}) \\ \Psi = \psi \end{array} \rightarrow$

$\boxed{(1-e^2)X^2 + Y^2 = \dfrac{e^2p^2}{1-e^2}} \Rightarrow$ διαιρούμε με $\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$

$$\frac{X^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}} + \frac{Y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}} = 1$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

(i) $1-e^2 > 0 \Leftrightarrow e < 1.$

Θέτουμε $\alpha^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$, $\beta^2 = \dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$

$$\boxed{\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1}$$

(ii) $1-e^2 < 0 \Leftrightarrow e > 1$

Θέτουμε $\alpha^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$, $\beta^2 = -\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$

$$\boxed{\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1}$$

<u>ΤΕΛΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>: το πρόβλημα του Γ.Τ. σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων είναι

$\psi^2 = 2px \quad (e=1)$ <u>ΠΑΡΑΒΟΛΗ</u>

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \quad (e<1)$ <u>ΕΛΛΕΙΨΗ</u>

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \quad (e>1)$ <u>ΥΠΕΡΒΟΛΗ</u>

<u>Για την ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ</u>

Θέτω $(1-e^2)\alpha^2 = \beta^2$

$1 - e^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ όπου $\alpha > \beta$ $P = d(E, \delta)$

$e^2 = 1 - \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = e^2$

► <u>ΣΧΟΛΙΑ</u>

– Η εξίσωση που προκύπτει είναι ειδική μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης δύο μεταβλητών

$$\alpha x^2 + 2\beta x\psi + \gamma\psi^2 + \delta x + \varepsilon\psi + z = 0. \ (E)$$

– Η (E) φαίνεται να είναι γενικότερη γιατί με κατάλληλους συντελεστές μπορεί να εκφράσει ευθείες και κύκλους

– Προκύπτει το ερώτημα τι παριστάνει η (E). Μελέτη γεωμετρική κάθε αντικειμένου που προκύπτει!

ΕΠΙΠΕΔΟ στο ΧΩΡΟ

Με απαλοιφή παραμέτρων της $Ax + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0$
$f(x,\,\psi,\,z) = 0$
$z = f(x,\,\psi)$ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ στην έκφραση Mouge

$$\left.\begin{array}{r} x = f_1(u,\,w) \\ \psi = f_2(u,\,w) \\ z = f_3(u,\,w) \end{array}\right\} \text{Gauss}$$

ΕΥΘΕΙΑ στο ΧΩΡΟ

σχήμα

$$\overrightarrow{Ax} = \lambda\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow$$
$$\underline{\overrightarrow{OX} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ στο ΧΩΡΟ

$$\left.\begin{array}{r} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ \psi = (1-\lambda)\psi_1 + \lambda\psi_2 \\ z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{array}\right\} \text{ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\psi - \psi_1}{\psi_2 - \psi_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΥΕΘΕΙΑΣ

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \quad \begin{array}{ll} \vec{u}\cdot\vec{i} = \cos\alpha & (\alpha : \text{γωνία που σχηματίζει το}\vec{u}\text{με τον}Ox) \\ \vec{u}\cdot\vec{j} = \cos\beta & (\beta : \text{γωνία που σχηματίζει το}\vec{u}\text{με τον}Ox) \\ \vec{u}\cdot\vec{\kappa} = \cos\gamma & (\gamma : \text{γωνία που σχηματίζει το}\vec{u}\text{με τον}Ox) \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ Επίπεδο που περνάει από το σημείο $A(4,\,-2,\,1)$ και $\perp$ στην ευθεία $\vec{u}(7,\,2,\,-3)$.

$(x-x_1)\alpha_1 + (\psi-\psi_1)\alpha_2 + (z-z_1)\alpha_3 = 0$
$7(x-4) + z(\psi+2) - 3(z-1) = 0$
$7x - 28 + 2\psi + 4 - 3z + 3 = 0$

σχήμα

$$\boxed{7x + 2\psi - 3z = 21} \qquad (5)$$

ΕΥΕΘΕΙΑ του $\vec{u}$ που διέρχεται από το $(1,\,1,\,1)$ και έχει διεύθυνση $\vec{u}$

$$\frac{x-1}{7} = \frac{\psi-1}{2} = \frac{z-1}{-3} = \lambda$$

ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΜΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ και ΕΠΙΠΕΔΟΥ

$$\left.\begin{array}{r} x = 7\lambda + 1 \\ \psi = 2\lambda + 1 \\ z = -3\lambda + 1 \end{array}\right\} \text{Θέτω στην (5) } x,\,\psi,\,z$$

► ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

σχήμα

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\vec{u}_1$$
$$\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = \lambda\vec{u}_1$$
$$\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1 = \alpha_1 + \lambda u_{11}$$
$$\psi_1 = \alpha_2 + \lambda u_{12}$$
$$z_1 = \alpha_3 + \lambda u_{13}$$

$\Delta(x_2,\, \psi_2,\, z_2)$
$\vec{u}_1(u_{11},\, u_{12},\, u_{13})$
$\overrightarrow{OA}(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3)$
$\overrightarrow{OB}(\beta_1,\, \beta_2,\, \beta_3)$
$\vec{u}_2(u_{21},\, u_{22},\, u_{23})$

$$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB} + \mu\vec{u}_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_2 = \beta_1 + \mu u_{21}$$
$$\psi_2 = \beta_2 + \mu u_{22}$$
$$z_1 = \beta_3 + \mu u_{23}$$

$$x_2 - x_1 = \beta_1 - \alpha_1 + \mu u_{21} - \lambda u_{11}$$
$$\psi_2 - \psi_1 = \beta_2 - \alpha_2 + \mu u_{22} - \lambda u_{12}$$
$$z_2 - z_1 = \beta_3 - \alpha_3 + \mu u_{23} - \lambda u_{13}$$

$$(x_2 - x_1)u_{11} + (\psi_2 - \psi_1)u_{12} + (z_2 - z_1)u_{13} = 0$$
$$(x_2 - x_1)u_{21} + (\psi_2 - \psi_1)u_{22} + (z_2 - z_1)u_{23} = 0$$

<u>ΣΤΡΟΦΗ ΑΞΟΝΩΝ</u>

<u>ΕΠΙΠΕΔΟ</u>

σχήμα

$$(OA_1) = \rho, (OA_2) = \rho$$
$$\rho\cos\varphi_2 = x_2$$
$$\rho\sin\varphi_2 = \psi_2$$
$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 = \theta + \varphi_1$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \big(X\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$
$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$x_2 = \rho\cos(\theta + \varphi_1) \tag{6}$$
$$\psi_2 = \rho\sin(\theta + \varphi_1) \tag{7}$$

(6)$\Rightarrow$ $x_2 = \rho\cos\theta\cos\varphi_1 - \rho\sin\theta\sin\varphi_1 = x_1\cos\theta - \psi_1\sin\theta$
(7)$\Rightarrow$ $\psi_2 = \rho\sin\theta\cos\varphi_1 - \rho\sin\theta\cos\varphi_1 = x_1\cos\theta + \psi_1\sin\theta$

$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

<u>ΧΩΡΟΣ</u>

σχήμα $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Στροφή στο $x\psi$ ΕΠΙΠΕΔΟ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ στροφή στο ψz ΕΠΙΠΕΔΟ

$\boxed{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ}}$

► ΕΝΙΑΙΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΟΡΙΣΜΟΥ

$$\{M| \frac{d(M,\, E)}{d(M,\, \delta)} = e\, \text{σταθερό}\}$$

σχήμα

Καταλήξαμε στις περιπτώσεις

$\psi^2 = 2px$

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1$

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1$

σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων

► $\boxed{\text{ΠΑΡΑΒΟΛΗ } \psi^2 = 2px}$

σχήμα

• Υπάρχει άξονας συμμετρίας, ο xx'

$(x_0,\, \psi_0) \in C \Rightarrow (x_0,\, -\psi_0) \in C$

(ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ)

• Εξίσωση εφαπτομένης

Οριακή θέση της τέμνουσας

(ένα κοινό σημείο, ΜΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ με τον άξονα συμμετρίας)

$\psi^2 = 2px \Rightarrow 2\psi d\psi = 2pdx \Rightarrow \dfrac{d\psi}{dx} = \dfrac{p}{\psi}$

• Εξίσωση Εφαπτομένης της Παραβολής

$\psi = f(x)$, Έστω $M(x_0,\, \psi_0)$ τότε:

$$\psi - \psi_0 = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{κλίση της εφαπτομένης}} (x - x_0)$$

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{2px}, & \psi \geq 0 \\ -\sqrt{2px}, & \psi < 0 \end{cases} \quad (\text{και}\; x \geq 0)$$

Τότε για $f(x) = \sqrt{2px} \Rightarrow\ f'(x) = \dfrac{2p}{2\sqrt{2px}} = \dfrac{p}{\sqrt{2px}} = \dfrac{p}{\psi},\ \psi \neq 0$

Ομοίως αν $f(x) = -\sqrt{2px}$ τότε $f'(x) = \dfrac{p}{\psi}$

Η κλίση της εφαπτομένης στο $(x_0,\, \psi_0)$ είναι $\dfrac{p}{\psi_0}$ για $x_0 \neq 0$

για $x_0 = 0 \Rightarrow$ ο άξονας $\psi\psi'$ είναι εφαπτομένη γιατί είναι οριακή θέση τέμνουσας

$$\psi - \psi_0 = \frac{p}{\psi}(x - x_0),\ (x_0,\, \psi_0) \in C$$

$$\psi\psi_0 - \psi_0^2 = px - px_0 \Rightarrow\ \psi\psi_0 = px + 2px_0 - px_0 \Rightarrow \boxed{\psi\psi_0 = p(x+x_0)}\ x_0 \neq 0$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ της ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ $\psi^2 = 2px$

$2^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ: $M(x_0,\, \psi_0)$ όλες οι ευθείες εκτός από τις παράλληλες στον xx' (άξονας συμμετρίας). Φτιάχνουμε το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} \psi - \psi_0 = \lambda(x - x_0) \\ \psi^2 = 2px \end{array} \right\}$ και απαιτούμε λύση.
Πρέπει $\Delta = 0$ οπότε προκύπτει $\lambda = \dfrac{p}{\psi_0}$.
Αν $M(0,\, 0)$ τότε εφαπτομένη: $\psi'\psi$.

• Βασική Ιδιότητα της Παραβολής

Κατοπτρική Ιδιότητα
− Μία φωτείνη ακτίνα παράλληλη με τον (κύριο) άξονα ανακλώμενη διέρχεται από την (κύρια) εστία.
− ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ: μία φωτεινή πηγή τοποθετημένη στην κύρια εστία προκαλεί φωτεινή δέσμη παράλληλων $\parallel x'x$ ακτίνων.

σχήμα

Πρέπει να δείξουμε ότι είναι
ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ
σχήμα

Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\frac{<\vec{u},\, \vec{w}>}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|} = \frac{<\vec{w},\, \vec{v}>}{\|\vec{w}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Άρα πρέπει να βρούμε ποια διανύσματα εμπλέκονται
σχήμα

• Βασική Ιδιότητα

Η διευθετούσα $(x = -\dfrac{p}{2})$ έχει την εξής ιδιότητα:
Είναι ο Γ.Τ. των σημείων από τα οποία άγονται ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ

$\boxed{\text{ΕΛΛΕΙΨΗ } \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1}$

Η εξίσωση ισχύει σε κατάλληλο σύστημα

σχήμα

$$\frac{d(M,\, E)}{d(M,\, \delta)} = e < 1$$

$$\alpha^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \quad \beta^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)}$$

Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \dfrac{1}{1-e^2}$ και ότι $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2e^2$.

<u>Εισάγουμε νέα μεταβλητή</u>:

$$c^2 = \alpha^2 - \beta^2$$
$$e^2 = \frac{c^2}{\alpha^2}$$
$$c = e\alpha$$
$$\frac{\alpha^2}{c} = \frac{\alpha}{e}$$

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \quad (C)$

• Υπάρχει κέντρο συμμετρίας $O(0,\,0)$ η αρχή των αξόνων. Αν $(x_0,\,\psi_0) \in (C) \Rightarrow (-x_0,\,-\psi_0) \in (C)$

• Υπάρχουν δύο άξονες συμμετρίας

Είναι το ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

σχήμα

$$\frac{d(M,\,E)}{d(M,\,\delta)} = e < 1$$
$$\frac{d(M,\,E')}{d(M,\,\delta')} = e$$

• Ισχύει ότι $\boxed{d(M,\,E) + d(M,\,E') = \text{ΣΤΑΘΕΡΟ}} = 2\alpha$

$d(M,\,E) = ed(M,\,\delta)$

$d(M,\,E') = ed(M,\,\delta')$ οπότε

$d(M,\,E) + d(M,\,E') = e[d(M,\,\delta) + d(M,\,\delta')] = \frac{2\alpha}{e}$

Άρα $\underline{d(M,\,E) + d(M,\,E') = 2\alpha}$

• <u>Εφαπτομένη της έλλειψης</u>

$\beta^2 x^2 + \alpha^2 \psi^2 = \alpha^2 \beta^2$

$2\beta^2 x dx + 2\alpha^2 \psi d\psi = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{x}{\psi}}$ (κλίση εφαπτομένης στο σημείο $M(x,\,\psi)$)

$x = \alpha$ ή $x = -\alpha$ εφαπτομένες για $\psi = 0$

• <u>Κατοπτρική Ιδιότητα Έλλειψης</u>

σχήμα

η εφαπτομένη διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν οι εστιακές ακτίνες.

ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ εφαπτομένης

• <u>ΙΔΙΟΤΗΤΑ</u>: <u>Τα μέσα των παράλληλων χορδών</u>

σχήμα

παράλληλες χορδές

$\psi = \lambda x + \mu$, $\lambda =$σταθερό, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \beta^2 x^2 + \alpha^2 \psi^2 = \alpha^2 \beta^2 \\ \psi = \lambda x + \mu \end{cases}$$

Από το σύστημα προκύπτουν δύο σημεία $(x_1,\, \psi_1), (x_2,\, \psi_2)$.

$x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\psi_M = \dfrac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ $\psi_M = f(x_M)$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$$\left.\begin{aligned} \beta^2 x_1^2 + \alpha^2 \psi_1^2 = \alpha^2 \beta^2 \\ \beta^2 x_2^2 + \alpha^2 \psi_2^2 = \alpha^2 \beta^2 \end{aligned}\right\} (-)$$

$\beta^2 (x_1^2 - x_2^2) \alpha^2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) = 0 \Leftrightarrow$ διαφορά τετραγώνων

$$\frac{\psi_1^2 - \psi_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\psi_1 - \psi_2}{x_1 - x_2} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2}}}_{\frac{\psi_M}{x_M}} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$\boxed{\lambda \dfrac{\psi_M}{x_M} = -\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}$ Ευθεία που περνάει από το κέντρο.

(Για την παραβολή προκύπτει ευθεία παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας).

► $\boxed{\text{ΜΕΛΕΤΗ της Β΄ ΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ στο ΕΠΙΠΕΔΟ}}$

$$(E):\ \underline{\alpha x^2 + 2\beta x\psi + \gamma\psi^2 + 2\delta x + 2\varepsilon\psi + z = 0}$$

– <u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ</u> (είναι η (E) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ;)
Επίπεδο $\to$ Γεωμετρία Επιπέδου $\equiv$ Ορθοκανονικά συστήματα. Δηλαδή η (E) αναφέρεται σε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{Ox\psi\}$. Σε μια αλλαγή συστήματος η $(E) \rightsquigarrow (E')$ όπου (E') πρέπει να είναι ίδιας μορφής με την (E).
– <u>ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ της (E) στις ΑΛΛΑΓΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</u>
– <u>ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΣΤΗΜΑ που ΑΠΛΟΠΟΙΕΙ την (E) ;</u>

<u>ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ στα ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u>

$$x = \cos\theta x' - \sin\theta\psi' + x_0$$
$$\psi = \sin\theta x' + \cos\theta\psi' + \psi_0$$

όπου $\left.\begin{array}{l}\cos\theta x' - \sin\theta\psi' \\ \sin\theta x' + \cos\theta\psi'\end{array}\right\}$ στροφή και $\left.\begin{array}{c}x_0 \\ \psi_0\end{array}\right\}$ μεταφορά.

$$\alpha x^2 + 2\beta x\psi + \gamma\psi^2\ (\text{β΄βάθμιο τμήμα της } (E))$$

$$2\delta x + 2\varepsilon\psi + z\ (\text{α΄βάθμιο τμήμα της } (E))$$

<u>Η μεταφορά επηρεάζει το α΄βάθμιο τμήμα της (E)</u>
$\left.\begin{array}{l}x = x' + x_0 \\ \psi = \psi' + \psi_0\end{array}\right\}$ <u>δεν αλλάζει το β΄βάθμιο $\alpha x^2 + 2\beta x\psi + \gamma\psi^2$</u>

Μελετάμε το β΄βάθμιο τμήμα σε σχέση με τη στροφή
$\left\{\begin{array}{l}x = \cos\theta x' - \sin\theta\psi' \\ \psi = \sin\theta x' + \cos\theta\psi'\end{array}\right.$

Υπάρχει γωνία θ ώστε στο $\{O'x'\psi'\}$ να μην παρουσιάζεται ο όρος $x'\psi'$.

$$x^2 = \cos^2\theta(x')^2 + \sin^2\theta(\psi')^2 - 2\sin\theta\cos\theta(x'\psi')$$

$$x^2 = \sin^2\theta(x')^2 + \cos^2\theta(\psi')^2 + 2\sin\theta\cos\theta(x'\psi')$$
$$x\psi = \sin\theta\cos\theta(x')^2 - \sin\theta\cos\theta(\psi')^2 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)x'\psi$$

Τότε

$$\alpha x^2 + \gamma\psi^2 = \big(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta + 2\beta\sin\theta\cos\theta)(x')^2 + \alpha\sin^2\theta + \gamma\cos^2\theta - 2\beta\sin\theta\cos\theta)(\psi')^2\big)$$

$$[-\alpha \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta} + \gamma \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\cos 2\theta} + 2\beta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]x'\psi'$$
$$= [-\alpha\sin 2\theta + \gamma\sin 2\theta + 2\beta\cos 2\theta]x'\psi'$$

$$= [\underbrace{(\gamma-\alpha)\sin 2\theta + 2\beta\cos 2\theta}_{\text{Αν είναι ίσο με μηδέν τότε στο } \{O'x'\psi'\} \text{ δεν υπάρχει } x'\psi'}]$$

$$\boxed{(\alpha-\gamma)\sin 2\theta \;=\; 2\beta\cos 2\theta}$$

$$\boxed{\frac{\alpha-\gamma}{2\beta} \;=\; \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \;=\; \cot 2\theta}$$

Αν $\beta \neq 0$ $\exists\theta :$ $(\cot 2\theta = \dfrac{\alpha-\gamma}{2\beta})$ ώστε στο σύστημα $\{O'x'\psi'\}$ να μην υπάρχει ο όρος $x'\psi'$.
Η (E) ανάγεται στην (E')
$(E') : \alpha'(x')^2 + (\gamma')(\psi')^2 + 2\delta'(x') + 2\varepsilon'(\psi') + z' = 0$

- <u>1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u> $\alpha', \gamma' \neq 0$
- <u>2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ</u> α' ή $\gamma' = 0$.

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τις μεταφορές.

1. Τότε $\alpha''(x'')^2 + (\gamma'')(\psi'')^2 + z'' = 0$ παριστάνει κωνική τομή
   κύκλος
   έλλειψη
   υπερβολή
   τεμνόμενες ευθείες π.χ. $x^2 - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \psi \\ x = -\psi \end{cases}$
   φανταστικός κύκλος $x^2 + \psi^2 + 1 = 0$
   φανταστική υπερβολή $x^2 - \psi^2 + 1 = 0$.

2. $\alpha' \neq 0, \;\; \gamma' = 0$
   $\alpha'(x')^2 + 2\delta'(x') + 2\varepsilon'\psi' + z' = 0$ μεταφορά
   $\alpha''(x'')^2 + \varepsilon''\psi'' = 0$
   παραβολή

Αν $\cot 2\theta = \kappa$ $\cos\theta, \sin\theta$?
$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}, \;\; 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \sin^2\theta$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>

$$(E) : \; \underline{\alpha x^2 + 2\beta x\psi + \gamma\psi^2 + 2\delta x + 2\varepsilon\psi + z = 0}$$

$$\left.\begin{array}{c} x\psi = 1 \\ x\psi - 1 = 0 \\ \alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0 \\ 2\beta = 1 \end{array}\right\} \cot 2\theta = \frac{\alpha-\gamma}{1} = 0 \Rightarrow 2\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Οπότε $\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - \psi'\sin\frac{\pi}{4} \\ \psi = x'\sin\frac{\pi}{4} + \psi'\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x = (x'-\psi')\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \psi = (x'+\psi')\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$

ή $\left\{\begin{array}{l} x = x'' \cos\frac{3\pi}{4} - \psi'' \sin\frac{3\pi}{4} \\ \psi = x'' \sin\frac{3\pi}{4} + \psi'' \cos\frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} x = (-x'' - \psi'')\sqrt{2} \\ \psi = (x'' + \psi'')\sqrt{2} \end{array}$

$$(E) \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} (E'): & \dfrac{(x')^2 - (\psi')^2}{2} = 1 \Rightarrow & (x')^2 - (\psi')^2 = 2 \\ (E''): & -\dfrac{(x'')^2 - (\psi'')^2}{2} = 1 \Rightarrow & (x'')^2 - (\psi'')^2 = 2 \end{array}\right.$$

σχήμα ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ

► ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ της (E) - ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ

$$(E):\ \underline{\alpha x^2 + 2\beta x\psi + \gamma\psi^2 + 2\delta x + 2\varepsilon\psi + z = 0}$$

► ΑΝΑΓΩΓΗ σε ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

$$(x,\,\psi)\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \beta & \gamma\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x \\ \psi\end{pmatrix}}_{X} + 2\underbrace{(\delta,\,\varepsilon)}_{B}\begin{pmatrix}x \\ \psi\end{pmatrix} + \underbrace{z}_{\Gamma} = 0$$

οπότε $\boxed{X^tAX\ +\ 2BX\ +\ \Gamma\ =\ 0}$ όπου X^tAX: β'βάθμιο και $2BX$ πρωτοβάθμιο.

$A =$ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ$= A^t$

► ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

$X \leftrightarrow X^\star$ όπου $X = PX^\star + X_0 \left\{\begin{array}{c} PP^t = I \\ \det P > 0 \end{array}\right\}$

$(E) \to (E^\star) \to \left\{\begin{array}{l} A^\star \\ B^\star \\ \Gamma^\star \end{array}\right.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $X = PX^\star$ τότε $X^t = X^{\star t}P^t = X^{\star t}P^{-1}$

$X^tAX = (X^\star)^tP^{-1}APX^\star \Rightarrow$

$A \to \underbrace{P^{-1}AP}_{\text{όμοιος με τον} A}$

Έμειναν αναλλοίωτα:

1. Η ΜΟΡΦΗ της ΕΞΙΣΩΣΗΣ

2. $\det(A) = \det(A^\star)$ δηλαδή $\det(A) = \alpha\gamma - \beta^2 = \det(P^{-1}AP)$
   $tr(A) = tr(P^{-1}AP) = \alpha + \gamma$
   αναλλοίωτα της (E): $\left\{\begin{array}{c} \alpha\gamma - \beta^2 \\ \alpha + \gamma \end{array}\right.$

3.

$$(E) : (x, \psi, 1) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & z \end{pmatrix}}_{\det(M) \text{αναλλοίωτο}} \begin{pmatrix} x \\ \psi \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ΤΡΙΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ της E

► Πρόταση Στις διάφορες αλλαγές συντεταγμένων υπάρχουν τρείς ποσότητες

$$j_1 = \alpha + \gamma$$
$$j_2 = \alpha\gamma - \beta^2$$
$$j_3 = \det(M)$$

που μένουν αναλλοίωτες.
Ανάλογα με τα πρόσημα των j_1, j_2, j_3 καθορίζεται το είδος της καμπύλης.

$$\begin{array}{lll} & x^2 + \psi^2 = 1 & j_1 = 2,\, j_2 = 1,\, j_3 = -1 < 0 \\ & x^2 - \psi^2 = 1 & j_1 = 0,\, j_2 = -1,\, j_3 = 1 > 0 \\ \text{π.χ.} & \psi^2 - 2x = 1 & j_1 = 1,\, j_2 = 0,\, j_3 = -1 < 0 \\ & x + \psi + 1 = 0 & j_1 = 0,\, j_2 = 0,\, j_3 = 0 \\ & x^2 + \psi^2 + 1 = 0 & j_1 = 2,\, j_2 = 1,\, j_3 = 1 \end{array}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

1. Όταν $j_3 = 0$ δεν υπάρχει Β΄ΒΑΘΜΙΑ ΚΑΜΠΥΛΗ (πραγματική ή φανταστική) εκφυλισμός σε ευθεία!!
2. $j_2 \begin{cases} \neq 0 \,\text{κέντρο συμμετρίας τότε} \begin{cases} \text{ΕΛΛΕΙΨΗ ή (ΚΥΚΛΟΣ)} \\ \text{ΥΠΕΡΒΟΛΗ (πραγματική/φανταστική)} \end{cases} \\ = 0 \,\text{δεν υπάρχει κέντρο συμμετρίας, υπάρχει άξονας συμμετρίας} \begin{cases} \text{ΠΑΡΑΒΟΛΗ} \end{cases} \end{cases}$
3. $j_2 \begin{cases} < 0 & \text{ΥΠΕΡΒΟΛΗ} \\ > 0 & \text{ΕΛΛΕΙΨΗ} \end{cases}$

► Μελέτη της β΄βάθμιας εξίσωσης στο επίπεδο

$$(E): \ \underline{\alpha x^2 + 2\beta x\psi + \gamma\psi^2 + 2\delta x + 2\varepsilon\psi + z = 0}$$

$$(E)\begin{cases} \text{ΕΛΛΕΙΨΗ (πραγματική/φανταστική)} \\ \text{ΥΠΕΡΒΟΛΗ (πραγματική/φανταστική)} \\ \text{ΠΑΡΑΒΟΛΗ} \\ \text{ΤΕΜΝΟΜΕΝΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ} \end{cases}$$

► Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων $\{O'x'\psi'\}$ ή $(E) \to (E^\star)$
$\{Ox\psi\} \to \{O'x'\psi'\}$ συνδέονται μέσω στροφών και μεταφορών.
Με τη ΣΤΡΟΦΗ εξαφανίζεται ο όρος $x\psi$.
Με τη ΜΕΤΑΦΟΡΑ ρυθμίζονται οι πρωτοβάθμιοι όροι.

$$\begin{matrix} \cot 2\theta = \dfrac{\alpha-\gamma}{2\theta} \\ \text{γωνία στροφής} \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} x = x'\cos\theta - \psi'\sin\theta \\ \psi = x'\sin\theta + \psi'\cos\theta \end{matrix} \right\}$$

Τι μένει ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ
Βρήκαμε τρείς ποσότητες $j_1\, j_2\, j_3$

Αν $j_2 \neq 0$ υπάρχει ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

$$(\Sigma)\begin{cases} 2\alpha x_0 + \beta\psi_0 + \delta = 0 \\ \beta x_0 + 2\gamma\psi_0 + \varepsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,\, \psi_0) \text{ ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
► $\underline{x^2 - 4x\psi + \psi^2 + 10x - 8\psi + 7 = 0}$

Τι παριστάνει και σε ποιο σύστημα παίρνει απλούστερη δυνατή μορφή

$$j_1 = 2,\ j_2 = -3,\ j_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -142$$

$j_3 \neq 0$ καμπύλη
$j_2 \neq 0$ υπάρχει κέντρο συμμετρίας
$j_2 < 0$ ΥΠΕΡΒΟΛΗ
υπάρχει σύστημα όπου η (E) έχει μορφή $\alpha' X^2 + \gamma'\Psi^2 + J' = 0$

$$x^2 - Sx + P \text{ όπου } S = x_1 + x_2,\ P = x_1 x_2$$

$$\left.\begin{matrix} j_1' = \alpha' + \gamma' = 2 \\ j_2' = \alpha'\gamma' = -3 \end{matrix}\right\} t^2 - 2t - 3 = 0 \text{ οπότε } \alpha',\ \gamma' = 3,\ -1$$

$$j_3' = \alpha'\gamma' z' = -142 \Rightarrow z' = \frac{j_3}{j_2} = \frac{-142}{-3} \Rightarrow z' = \frac{142}{3}$$

<u>1^η περίπτωση:</u>

$$3x^2 - 1\psi^2 + \frac{142}{3} = 0 \tag{8}$$

<u>2^η περίπτωση:</u>

$$-x^2 + 3\psi^2 + \frac{142}{3} = 0 \tag{9}$$

(8)$\Rightarrow \dfrac{3x^2}{-\frac{142}{3}} - \dfrac{\psi^2}{-\frac{142}{3}} = 1$

<u>ΕΥΡΕΣΗ του ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ</u>

$$\cot 2\theta = \frac{\alpha-\gamma}{2\beta}, \quad -\frac{x^2}{(\sqrt{\frac{142}{3}})^2} + \frac{\psi^2}{(\sqrt{\frac{142}{3}})^2} = 1$$

$\cot 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$

Αλλαγή συντεταγμένων

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos\frac{\pi}{4}x' - \sin\frac{\pi}{4}\psi' \\ \psi = \sin\frac{\pi}{4}x' + \cos\frac{\pi}{4}\psi' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{x'-\psi'}{\sqrt{2}} \\ \\ \psi = \dfrac{x'+\psi'}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$x^2 = \dfrac{x'^2 - 2x'\psi' + \psi'^2}{2}$

$x\psi = -4\dfrac{x'^2 - \psi'^2}{2} = -2x'^2 + 2\psi'^2$

$\psi^2 = \dfrac{x'^2 + 2x'\psi' + \psi'^2}{2}$

$x^2 + x\psi + \psi^2 = x'^2 + \psi'^2 - 2x'^2 + 2\psi'^2 = -x'^2 + 3\psi'^2$

<u>β'βάθμιο τμήμα</u>

<u>β'βάθμιο τμήμα</u> $\left\{\begin{array}{c} 10x = \dfrac{10x' - 10\psi'}{\sqrt{2}} \\ 8\psi = \dfrac{8x' - 8\psi'}{\sqrt{2}} \\ 7 \end{array}\right\} + 10x + 8\psi + 7 = \dfrac{2x' - 18\psi'}{\sqrt{2}} + 7$

οπότε $(E'): \; -x'^2 + 3\psi'^2 + \dfrac{2x' - 18\psi'}{\sqrt{2}} + 7 = 0 \Rightarrow$

$-2x'^2 + 6\psi'^2 + \dfrac{2}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{18}{\sqrt{2}}\psi' + 14 = 0$

$(-\sqrt{2}x')^2 + 2(\sqrt{2}x') - 1 + 1 + (\sqrt{2}\sqrt{3}\psi')^2 - 2\dfrac{9}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\sqrt{3}\psi') + (\dfrac{9}{\sqrt{3}})^2 - (\dfrac{9}{\sqrt{3}})^2 + 14 = 0$

$-(\sqrt{2}x' - 1)^2 + 1 + (\sqrt{2}\sqrt{3}\psi' - \dfrac{9}{\sqrt{3}})^2 + 1??(\dfrac{9}{\sqrt{3}})^2 = 0$

$-X^2 + \Psi^2 + K = 0$

$X = \sqrt{2}x' - 1 = \sqrt{2}\,\overbrace{(x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}})}^{x^\star}$

$$\Psi = \sqrt{6}\psi' - \frac{9}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}(\psi' - \frac{1}{\sqrt{6\cdot 3}} = \sqrt{6}\,\overbrace{(\psi' - \frac{3\sqrt{2}}{2})}^{\psi^\star}$$

$$-2x^{\star^2} + 5\psi^{\star^2} + (15 - \frac{81}{3}) = 0$$

► $\underline{2x^2 - x\psi - 15\psi^2 + 5x - 3}$

$j_1 = \alpha + \gamma = -13$

$$j_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -15 \end{vmatrix} = -30\frac{1}{4} = \frac{30}{4}$$

$$j_3 = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -15 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -12 & 0 \\ \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} + \frac{5}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -15 \\ \frac{5}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 90 + \frac{3}{4} + \frac{5}{2}(\frac{75}{2}) = \frac{360+3+375}{4} \neq 0$$

$j_3 \neq 0,\ j_2 < 0$ άρα ΥΠΕΕΡΒΟΛΗ

$$\cot 2\varphi = \frac{17}{-1}$$

► $\underline{(2x + 3\psi - 1)(x + 7\psi + 4) = 0}$ $\Rightarrow$ ΤΕΜΝΟΜΕΝΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

επιμεριστική$\cdots\cdots$προκύπτει

$\underline{2x^2 + 17x\psi + 21\psi^2 + 7x + 5\psi - 4 = 0}$

$j_1 = 23$

$j_2 = \dfrac{1-289}{4} < 0$

$j_3 = 0$

► $\underline{x^2 - 2\sqrt{3}x\psi + 3\psi^2 - 4(1 + 2\sqrt{3})x + 4(2 - \sqrt{3})\psi + 20 = 0}$

$j_1 = 4$

$$\left.\begin{array}{r} j_2 = 0 \to \text{ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΕΝΤΡΟ} \\ j_3 = -32 \to \quad \text{ΚΑΜΠΥΛΗ} \end{array}\right\}\text{ΠΑΡΑΒΟΛΗ}$$

<u>Ποια είναι η απλούστερη μορφή</u>

$\psi^2 = 2px$

$x^2 = 2p\psi$

$\psi^2 = \kappa x + \lambda \Rightarrow \psi^2 = \kappa(x + \frac{\lambda}{\kappa}) = 2\frac{\kappa}{2}(x^\star) = 2px^\star$

$\gamma'\psi'^2 - 2px' = 0$

$0x'^2 + 0x'\psi' + \gamma'\psi'^2 - 2px' + 0\psi' + 0 = 0$

$j_1 = \gamma'$

$j_2 = 0$

$j_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -p^2\gamma'$ πρέπει $\gamma' = 4$ και $p^2\gamma' = -32$

$\begin{cases} \gamma' = 4 \\ p^2\gamma' = -32 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 8 \Rightarrow p = \pm 2\sqrt{2}$

(i) περίπτωση $4\psi'^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}x' = 0 \Rightarrow \psi'^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}x'$ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

(ii) περίπτωση $4\psi'^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2}x' = 0 \Rightarrow \psi'^2 = -2\frac{\sqrt{2}}{2}x'$ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Πως συνδέονται οι δυο παραβολές

σχήμα

$\begin{pmatrix} x \to -x' \\ \psi \to \psi \end{pmatrix}$ κατοπτρισμός ως προς ψ

Πίνακας κατοπτρισμού ως προς ψ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x^2 + \psi^2 + 1 = 0$

$j_1 = 2$

$j_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$j_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$x^2 + \psi^2 = -1 \Rightarrow x^2 + \psi^2 = i^2$ Κύκλος
με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα i
Φανταστικός κύκλος: $x^2 + \psi^2 - i^2 = 0$

$j_1 \cdot j_3 > 0$ φανταστικός κύκλος ή έλλειψη

$j_1 \cdot j_3 < 0$ πραγματική έλλειψη.