Σημειώσεις στο μάθημα ‘Αναλυτική Γεωμετρία’

Διδάσκων: Λάππας Δ.

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Α′ ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή Συντεταγμένων

- Η περίπτωση του επιπέδου ($\mathcal{E}$)
  $\mathcal{E}$ $\rightarrow$ επίπεδο της Ευκλείδιας Γεωμέτριας με την ευρεία έννοια (τα σημεία μιάς ευθείας και οι μεταξύ τους σχέσεις οδηγούν σε σχήματα των μελετάμε τις ιδιότητες),
  $$\mathcal{E} \xleftrightarrow[\text{επί}]{\text{“1–1”}} \mathbb{R}^2 \text{ δηλαδή } M \in \mathcal{E} \rightarrow (x,\, \psi) \in \mathbb{R}^2.$$
  Ο $\mathbb{R}^2$ έχει δομή διανυσματικού χώρου με διάσταση $dim\mathbb{R}^2 = 2$. Στο επίπεδο $\mathcal{E}$ δεν ορίζεται πρόσθεση σημείων με προφανή τρόπο. Αυτό που συνδέει τον $\mathbb{R}^2$ με τον $\mathcal{E}$ είναι η *έννοια του διανύσματος*.

Η έννοια εφαρμοστό διάνυσμα
σχήμα $\implies$ διατεταγμένο ζεύγος (A, B),όπου $A,\, B \in \mathcal{E}$.
Θεωρούμε μία σχέση μεταξύ των ζευγών

$$(A,\, B) \sim (\Gamma,\, \Delta) \Leftrightarrow$$

τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι

- ίσου μήκους
- παράλληλα και
- ομόρροπα με άκρα στο ίδιο ημιεπίπεδο(σχήμα)

► Ισχυρισμός. Η παραπάνω σχέση μεταξύ των ζευγών $(A,\, B) \sim (\Gamma,\, \Delta)$ είναι *σχέση ισοδυναμίας*, δηλαδή είναι

• αναkλαστική $\quad (A,\, B) \sim (A,\, B)$

• συμμετρική $\quad (A,\, B) \sim (\Gamma,\, \Delta) \Rightarrow (\Gamma,\, \Delta) \sim (AB)$

• μεταβατική $\quad \left.\begin{matrix} (A,\, B) \sim & (\Gamma,\, \Delta) \\ (\Gamma,\, \Delta) \sim & (A,\, B) \end{matrix}\right\}$

Άσκηση: Να αποδειχθεί ο ισχυρισμός.

► Ελεύθερο Διάνυσμα.

$$[(A,\, B)] = \{(\Gamma,\, \Delta) | (A,\, B) \sim (\Gamma,\, \Delta)\}$$

για όλα τα $(\Gamma,\, \Delta)$ που είναι ίδιου μέτρου, παράλληλα, ομόρροπα με το $(A,\, B)$.

► $\boxed{[(A,\, B)] \bigcap [(K,\, \Lambda)] \;\neq\; \varnothing \;\Rightarrow\; [(A,\, B)] \;=\; [(K,\, \Lambda)]}$

Έστω $\omega \in [(A,\, B)]$ και $\omega = (P,\, \Sigma)$ τότε

$$\begin{tikzcd} \omega = (P,\, \Sigma) \arrow[r] \arrow[dr] & (P,\, \Sigma) \sim (A,\, B) \\ & (P,\, \Sigma) \sim (K,\, \Lambda) \end{tikzcd}$$

Από την οποία συνεπάγεται,

$$(K,\, \Lambda) \sim (A,\, B) \Rightarrow\ [(K,\, \Lambda)] = [(A,\, B)]$$

Στοιχεία ίδιας κλάσης
$\vec{\omega}$ σχήμα
Συμβολίζουμε όλα τα στοιχεία ίδιας κλάσης με ένα διάνυσμα.

► Σύνολο κλάσεων: $\mathcal{D} \rightsquigarrow$ σύνολο πηλίκου
Τα ελεύθερα διανύσματα δεν έχουν σημείο εφαρμογής σε αντίθεση με τα εφαρμοστά διανύσματα που έχουν σημείο εφαρμογής. Από κάθε σημείο ξεκινάει ένα μόνο ελεύθερο διάνυσμα που ανήκει σε μιά συγκεκριμένη κλάση. Δηλαδή,
αν δοθεί σημείο O του επιπέδου τότε: $\forall \vec{\omega} \in \mathcal{D} \exists !$(ακριβώς ένα) σημείο $M \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $[(O,\, M)] = \vec{\omega}$.

σχήμα

παίρνω αντιπροσώπους με κοινή αρχή και ορίζουμε,
$\mathcal{D}_0$: όλα τα διανύσμα-
τα της κλάσης $\vec{\omega}$ που
ξεκινούν από το O.

► $\mathcal{D}_0$

► Απεικόνιση $\varphi_0\ :\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}_0$ όπου φ_0 : "$1-1$" και "επί" $\varphi_0(M) = \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \in \mathcal{D}_0$.
$\mathbb{R}^2$: έχει δομή διανυσματικού χώρου διάστασης 2, $dim\mathbb{R}^2 = 2$

► Σύνδεση $\mathcal{D}_0$ με τον $\mathbb{R}^2$
Στο $\mathcal{D}_0$ ορίζονται οι πράξεις:

$$(+)\ :\ \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0 \text{ πρόσθεση},$$

$$(\cdot)\ :\ \mathbb{R} \times \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0 \text{ σημειακός πολλαπλασιασμός}.$$

Πρόσθεση

σχήμα
Κανόνας Παραλληλογράμμου

$$[(O,\, K)] = \bar{z} \in \mathcal{D}_0$$

$$\vec{\omega} + \vec{\sigma} = \vec{z}$$

πράξη πρόσθεσης στο $\mathcal{D}$

Πολλαπλασιασμός

σχήμα
(πράξη πολ/σμου στο $\mathcal{D}$)

$$(O\Lambda) = \lambda(OM)$$

$$\lambda > 0,\ \text{ομόρροπο}$$

$$\lambda < 0,\ \text{αντίρροπο}$$

► Πρόταση: Το $\mathcal{D}_0$ είναι διανυσματικός χώρος
Απόδειξη: (δείχνουμε ότι οι πράξεις της πρόσθεσης $(+)$ και του πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ έχουν όλες τις ιδιότητες του διανυσματικού χώρου)

π.χ. $\vec{a}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{a}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ σχήμα κατασκευαστικά με κανόνα παραλληλογράμμου.

Έχουμε τους διανυσματικούς χώρους: $\mathcal{D}_0$, $\mathbb{R}^2$ και θέλουμε να τους συσχετίσουμε, δηλαδή να βρούμε μία *απεικόνιση* μεταξύ των συνόλων
$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ πραγματικοί αριθμοί, και
$\mathcal{D}_0 \rightsquigarrow$ γεωμετρία. Η επιτυχής σύνδεση θα εισαγάγει αριθμούς στην Γεωμετρία.

Υπενθύμιση από Γεωμετρία
Η γεωμετρική ευθεία είναι σε "$1-1$" αντιστοιχία με το $\mathbb{R}$. Οι ευθείες είναι *άξονες* με προσανατολισμό.
σχήμα

$$\forall\, M\, \exists\lambda:\ (OM)=\lambda(OA),\ \lambda\in\mathbb{R}\,\text{έχει πρόσημο},$$

$$\forall\lambda^*,\ \exists N:\ \lambda^*(OA).$$

Έχουμε τα $\mathcal{E}$, O, $\mathcal{D}_0$. Επιλέγουμε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το O και τις τις καθιστώ ΆΞΟΝΕΣ στους οποίους ορίζω τις μονάδες i, j.
σχήμα $\{O,\, i,\, j\}$
Αυτό μου επιτρέπει να κατασκευάσω απεικόνιση $\Psi:\mathcal{D}_0\to\mathbb{R}^2$.
σχήμα
Έστω $\vec{\omega}\in\mathcal{D}_0$ και $M:\ [(OM)]=\vec{\omega}$ ή $\overrightarrow{OM}=\vec{\omega}$. Αναλύω το OM με βάση τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Βρίσκω $\Gamma\in\epsilon_1$ και $\Delta\in\epsilon_2$ έτσι ώστε:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}\\ \overrightarrow{O\Gamma}=x\cdot\vec{i}\ \ \text{με}\, x,\psi\in\mathbb{R}\\ \overrightarrow{O\Delta}=\psi\vec{j}\end{array}\right\}\ \text{πράξεις στο}\,\mathcal{D}_0$$

Δηλαδή $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+\psi\vec{j}$ $\boxed{\mathcal{D}_0\ \ni\vec{\omega}\ \xrightarrow{\psi}\ (x,\,\psi)\in\mathbb{R}^2}$

Η διαδικασία Ψ είναι "$1-1$" και "επί". Η επιλογή της αρχής και η επιλογή των αξόνων είναι απαραίτητες για την εισαγωγή συντεταγμένων (όταν αλλάζουν οι άξονες αλλάζουν και οι συντεταγμένες).
$\mathcal{D}_0$: Διανυσματικός χώρος (πράξεις διανυσμάτων)
$\mathbb{R}^2$: Διανυσματικός χώρος (πράξεις ζευγαριών)

$$\boxed{\psi(0,\,\vec{i},\,\vec{j})\ =\ \psi\ :\ \mathcal{D}_0\ \to\ \mathbb{R}^2}$$

► Η απεικόνιση είναι γραμμικός ισομορφισμός

Είναι "$1-1$" και "επί" και ΓΡΑΜΜΙΚΗ.

► <u>Πρόταση</u>

ΓΡΑΜΜΙΚΗ $\leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{Οι συντεταγμένες του αθροίσματος (διανυσμάτων)} \\ \text{είναι το άθροισμα των συντεταγμένων (ζευγαριών)} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0 & \xrightarrow{\psi\times\psi} & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ \oplus \big\downarrow & & \big\downarrow + \\ \mathcal{D}_0 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

όπου $\oplus$ εκφράζει άθροισμα διανυσμάτων και $+$ εκφράζει άθροισμα συντεταγμένων.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ: $\psi(\vec{u} \oplus \vec{w}) = \psi(\vec{u}) + \psi(\vec{w})$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: με κανόνα παραλληλογράμμου.

Αφού $\mathcal{D}_0 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{D}_0 \leftrightarrow \mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{E}$ τότε προκύπτει

$$\mathcal{E} \leftrightarrow \mathbb{R}^2.$$

- $\to$ $\mathcal{E}$: ΕΠΙΠΕΔΟ
- $\to$ ΕΝΝΟΙΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ - ΚΛΑΣΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
- $\to$ ΣΥΝΟΛΟ $\mathcal{D}$ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
- $\to$ ΣΥΝΟΛΟ $\mathcal{D}_0$ ΚΛΑΣΕΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΚΟΙΝΗ ΑΡΧΗ
- $\to$ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ $\varphi_0 : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_0$ με φ_0 : "$1-1$" και "επί"
- $\to$ Το $\mathcal{D}_0$ είναι ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ
- $\to$ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ $\psi : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}^2$ με ψ : ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ

$$\mathcal{E} \xleftrightarrow[\text{έννοια διανύσματος}]{} \mathcal{D} \xleftrightarrow[\varphi_0]{} \mathcal{D}_0 \xleftrightarrow[\psi]{} \mathbb{R}^2$$

► Αποδείξαμε ότι $\mathcal{D}_0 \cong \mathbb{R}^2$ από όπου προκύπτει $dim\mathcal{D}_0 = 2$

► ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

(Ορισμός Γραμμικών Ανεξαρτήτων Διανυσμάτων)

• Έστω $\vec{u} \neq 0$ τότε $\vec{u}$ γραμμικό ανέξάρτητο.

Πρόταση

Έστω $\vec{u}$, $\vec{v}$ γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, τότε τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι συνευθειακά.

Απόδειξη:

σχήμα

Υπάρχουν λ, $\mu \in \mathbb{R}$ όχι και τα δύο μηδέν τέτοια ώστε $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$.
Έστω $\lambda \neq 0$ τότε
$\vec{u} = (\frac{\mu}{\lambda})\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \rho\vec{v}$, $\rho \in \mathbb{R}$.

Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ έχουν *κοινό φορέα*. Αφού έχουν *κοινό φορέα* και *κοινή αρχή* είναι στην *ίδια ευθεία*.

Πρόταση: Τρία διανύσματα στο επίπεδο είναι πάντοτε γραμμικά εξαρτημένα

Απόδειξη. (Ερμηνεία-Δικαιολόγηση)

Έστω τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathcal{D}_0$ ή $\mathcal{D}$.

1. Αν κάποιο από αυτά είναι μηδέν, π.χ. το $\vec{u}$ τότε $1\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = 0$ και επειδή $1 \neq 0$ έπεται ότι τα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι εξαρτημένα.

2. Αν κανένα από αυτά δεν είναι μηδέν, τότε:

   σχήμα

   $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, $\vec{w}_1 = \lambda\vec{u}$, $\vec{w}_2 = \mu\vec{v}$.
   Άρα τα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

► Περιγραφή Γεωμετρικών Αντικειμένων μέσω της ταύτισης

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_0 \arrow[rr, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, leftrightarrow] & & \mathbb{R}^2 \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{διανυσματική μορφή} & & \text{αναλυτική μορφή (συντεταγμένες)}
\end{tikzcd}$$

► Περιγραφή των Γεωμετρικών Αντικειμένων σημείου και ευθείας στα $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}$.

Επιλογή της ΚΟΙΝΗΣ ΑΡΧΗΣ

• Το σημείο M περιγράφεται μέσω του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$

$\boxed{M \in \mathcal{E} \Rightarrow \overrightarrow{OM}}$

- Το ευθύγραμμο τμήμα των σημείων M, $N \in \mathcal{E}$ περιγράφεται $\overrightarrow{MN}$: προσανατολισμένο τμήμα (ευθύγραμμο)

$$\boxed{\mathcal{D} \leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \leftrightarrow \mathcal{D}_0}$$

► Περιγραφή στο $\mathbb{R}^2$

- Το σημείο M : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i}\, x_M + \overrightarrow{j}\, \psi_M$ όπου x_M,ψ_M μοναδικά $\boxed{M \to (x_M,\, \psi_M)}$
- Το ευθύγραμμο τμήμα $\overrightarrow{MN}$: $\boxed{\overrightarrow{MN} \ \leftrightarrow\ (x_N - x_M,\, \psi_N - \psi_M)}$

► Άσκηση: Εύρεση μέσου (Περιγραφή του μέσου γεωμετρικά και αναλυτικά).
Έστω τα σημεία M, N και το $\vec{MN}$ ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία, και έστω K το μέσον

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_M + x_N}{2}, & \psi_K = \dfrac{\psi_M + \psi_N}{2} \\ \overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{2}, & \vec{u}_K = \vec{u}_M + \vec{u}_N \end{cases}$$

Απόδειξη: Από την ιδιότητα του μέσου, σχήμα,

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KN} \text{ τότε } \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{ON} \Rightarrow$$

$$2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2}$$

► Ευθεία στο Επίπεδο
Οι ευθείες δεν είναι πάντα ΥΠΟΧΩΡΟΙ.

σχήμα

Γεωμετρικά η ευθεία καθορίζεται είτε από δύο σημεία της είτε από ένα σημείο και άλλη μία ευθεία παράλληλη προς αυτήν
(δηλαδή την $(\star)$ κλάση παραλληλίας).

$(\star)$: Κλάση παραλληλίας: Διεύθυνση
σχήμα

σχήμα

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$
ευθεία $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ ή $t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$.
Δίνονται $A \rightsquigarrow \overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ διάνυσμα θέσης,
$M \rightsquigarrow \overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$

$\boxed{\vec{r}_M \ =\ \vec{r}_A + t\vec{u}}$, $t \in \mathbb{R}$
Διανυσματική εξίσωση της ευθείας.

- Αναλυτική εξίσωση της ευθείας

0, i, j

$A \leftrightarrow (x_A,\, \psi_A)$
$\vec{u} = (\alpha,\, \beta)$
$\vec{M} = (x,\, \psi)$
$(x,\, \psi) = (x_A,\, \psi_A) + t(\alpha,\, \beta) \Rightarrow (x,\, \psi) = (x_A + t\alpha,\, \psi_A + t\beta)$

Άρα $\boxed{\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ \psi = \psi_A + t\beta \end{cases} \text{με } t \in \mathbb{R}}$ Σύστημα εξισώσεων της ευθείας με ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ t (Παραμετρικές εξισώσεις)

<u>ΑΠΑΛΟΙΦΗ της ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ</u>

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot (x_A - x) + t\alpha = 0 \\ 1 \cdot (\psi_A - \psi) + t\beta = 0 \end{array}\right\}$$ ομογενές γραμμικό σύστημα με $(1,\, t) \neq (0,\, 0)$ έχει άπειρες λύσεις και ορίζουσα μηδέν.

Άγνωστος είναι το t, $\begin{vmatrix} x_A - x & \alpha \\ \psi_A - \psi & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)\beta - (\psi - \psi_A)\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha\psi - (\beta x_A - \alpha\psi_A) = 0$

Μορφή: $Ax + B\psi + \Gamma = 0,\ |A| + |B| \neq 0.$

► <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>: <u>ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ</u>
(ε_1), (ε_2), (ε_3) συνθήκη ώστε να διέρχονται από το ΙΔΙΟ ΣΗΜΕΙΟ

$$(\varepsilon_1) : A_1 x + B_1\psi + \Gamma_1 = 0$$
$$(\varepsilon_2) : A_2 x + B_2\psi + \Gamma_2 = 0$$
$$(\varepsilon_3) : A_3 x + B_3\psi + \Gamma_3 = 0$$

Αν διέρχονται από το πρέπει να είναι λύση των δύο πρώτων και να ικανοποιεί το τρίτο. Πότε λέμε ότι το ΣΥΣΤΗΜΑ είναι ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟ;

$$\text{ΣΥΝΘΗΚΗ: } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

► <u>Άσκηση</u>: <u>Να αποδειχθεί ότι οι Διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο</u>
(ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ)
ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ: στο $\mathbb{R}^2$
ΛΥΣΗ:

σχήμα

Συμβολίζουμε με μ_α, μ_β, μ_γ τις διαμέσους από τις κορυφές $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Έχουμε,

$$\overrightarrow{\mu_\alpha} \to \vec{r}_A + t\overrightarrow{AM}_1 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AM}_1 = \left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2} - x_A,\, \frac{\psi_B + \psi_\Gamma}{2} - \psi_A\right) = \left(\frac{x_B + x_\Gamma - 2x_A}{2},\, \frac{\psi_B + \psi_\Gamma - 2\psi_A}{2}\right)$$

$$\vec{r} = (x_A,\, \psi_A) + t\left(\frac{x_B + x_\Gamma - 2x_A}{2},\, \frac{x_B + x_\Gamma - 2x_A}{2}\right)$$

Μορφή Ορίζουσας:

$$\overrightarrow{\mu}_\alpha \to \begin{vmatrix} x_A - x & \psi_A - \psi \\ \dfrac{x_B + x_\Gamma - 2x_A}{2} & \dfrac{\psi_B + \psi_\Gamma - 2\psi_A}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Ομοίως βρίσκουμε τις ορίζουσες για $\overrightarrow{\mu}_\beta$, $\overrightarrow{\mu}_\gamma$.

ή ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ: μαντεύουμε το σημείο τομής των δύο διαμέσων και δείχνουμε ότι από εκεί περνάει και η τρίτη διάμεσος.

► <u>ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>

→ <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

→ <u>ΤΟ ΜΟΝΗΡΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{u}$ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ</u>

→ <u>ΠΡΟΤΑΣΗ 1</u>: <u>ΑΝ $\vec{u}$, $\vec{w}$ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ ΤΟΤΕ $\vec{u}$, $\vec{w}$ ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ</u>

→ <u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2</u>: <u>ΤΡΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ</u>

► <u>ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ</u>

→ <u>ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>

→ <u>ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ</u>

→ <u>ΜΕΣΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ</u>

→ <u>ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ</u>

→ <u>ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΕΥΕΘΕΙΕΣ</u>

→ <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: <u>ΟΙ ΔΙΑΜΕΣΟΙ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΙΔΙΟ ΣΗΜΕΙΟ</u>

Πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων

σχήμα $\psi\{0,\, i,\, j\}$

► ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Πως σχετίζονται δύο συστήματα

$$\{0,\, i,\, j\} \quad \{0,\, \vec{i}',\, \vec{j}'\} \quad \text{ΕΧΟΥΝ ΙΔΙΑ ΑΡΧΗ}$$

$$\{0,\, i,\, j\} \quad \{0',\, \vec{i}',\, \vec{j}'\} \quad \text{ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΟΙ ΑΡΧΕΣ}$$

► ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΙΔΙΑ ΑΡΧΗ

Εκφράζω τα $\vec{i}',\, \vec{j}'$ ως προς $i,\, j$

$$\vec{i}' = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$$

σχήμα

$$\vec{j}' = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$$

$$\text{με } \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \in \mathbb{R} \text{ και } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

Αν $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ και $\alpha \neq 0$ τότε $\delta = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$.
Άρα $\vec{j}' = \gamma\vec{i} + \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\vec{j} \Rightarrow \vec{j}' = \dfrac{\gamma}{\alpha}(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) = \lambda\vec{i}'$, δηλαδή τα $\vec{j}'$ και $\vec{i}'$ θα ήταν γραμμικά συγγραμικά

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix}$$

$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ΑΛΛΑΖΕΙ ΤΗ ΒΑΣΗ.

► Πώς αλλάζουν οι συντεταγμένες

Έστω $A(x_A,\, \psi_A)$ ως προς $\{\vec{i},\, \vec{j}\}$ και $A(x'_A,\, \psi'_A)$ ως προς $\{\vec{i}',\, \vec{j}'\}$, τότε

$$\overrightarrow{OA} = x'\vec{i}' + \psi'\vec{j}' = x\vec{i} + \psi\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OA} = x'(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) + \psi'(\gamma\vec{i} + \delta\vec{j}) \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{OA} = (x'\alpha + \psi'\gamma)\vec{i} + (x'\beta + \psi'\delta)\vec{j} = x\vec{i} + \psi\vec{j}$$

Προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x &= x'\alpha + \psi'\gamma \\ \psi &= x'\beta + \psi'\delta \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = M^t \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$

$\begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = (M^{-1})^t \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$ γιατί $detM \neq 0$ άρα $\exists\ M^{-1}$.

► Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας ορίζει μία αλλαγή (πλαγιογώνιων) συντεταγμένων.

► <u>ΠΩΣ ΣΥΝΔΕΟΝΤΑΙ ΔΥΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ με ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ</u>
σχήμα

$$\begin{array}{l} \vec{i}' = \overrightarrow{OO'} + \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \\ \vec{j}' = \overrightarrow{OO'} + \gamma\vec{i} + \delta\vec{j} \end{array} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + \alpha x' + \gamma\psi' \\ \psi = \psi_0 + \beta x' + \delta\psi' \end{array}$$

► <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>: Να αναγνωρισθεί η "γραμμή" που περιγράφεται από την εξίσωση $\kappa x + \lambda\psi + \mu = 0,\ |\kappa| + |\lambda| \neq 0$. (Τα x, ψ είναι συντεταγμένες ως προς ένα σύστημα). Πρόκειται για ευθεία παράλληλη στο διάνυσμα $(-\lambda,\ \kappa)$ στο σύστημα $(O,\ x,\ \psi)$. Αν αλλάξουμε σύστημα η ΜΟΡΦΗ εξίσωσης δεν αλλάζει, αλλάζουν όμως οι συντελεστές. Αλλάζουμε σύστημα, τότε: $(\kappa,\ \lambda) \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} + \mu = 0$ όπου $\begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix}$ με T πίνακα 2×2. Άρα $(\kappa,\ \lambda)T \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{[(\kappa,\ \lambda)T] \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} + \mu = 0} \tag{1}$$

Για να είναι η (1) ευθεία πρέπει $(\kappa,\ \lambda)T \neq (0,\ 0)$. Αφού T ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ είναι διάφορος του $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και επειδή $|\kappa| + |\lambda| \neq 0$ έπεται ότι και $(\kappa,\ \lambda) \neq (0,\ 0)$. Άρα $(\kappa,\ \lambda)T \neq (0,\ 0)$. Αν είχαμε και ΑΛΛΑΓΗ ΑΡΧΗΣ τότε

$$\begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix}$$

οπότε

$$[(\kappa,\ \lambda)T] \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} + [\begin{bmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} (\kappa,\ \lambda) + \mu]$$

όπου θέτοντας $(\kappa',\ \lambda') = (\kappa,\ \lambda)T$ και $\mu' = [\begin{bmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} (\kappa,\ \lambda) + \mu]$ παίρνουμε $\boxed{(\kappa',\ \lambda') \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} + \mu'}$.

► <u>Οι ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ από το ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ</u>

π.χ. <u>ΜΕΣΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ</u>

σχήμα

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \ M : \text{μέσον } AB$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \ \ \psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2}$$

$$\begin{tikzcd}
(x_A, \psi_A) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & (x'_A, \psi'_A) \arrow[d] \\
(x_M, \psi_M) \arrow[r, leftrightarrow] & (x'_M, \psi'_M)
\end{tikzcd}$$

π.χ. <u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ</u>

Το ακόλουθο σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ

$$\begin{cases} \kappa x + \lambda\psi + \mu = 0 \\ \kappa' x + \lambda'\psi + \mu' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \kappa' & \lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu' \end{pmatrix}$$

Πρέπει $det \begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \kappa' & \lambda' \end{vmatrix} = 0$

$detA' = 0$

$AX = B$

$A \to A'$

$A' \to TA$

▶ <u>Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟ</u>

σχήμα

A, B, Γ μη συνευθειακά σημεία

$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\}$ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

$\{0, i, j\}$, $A(x_A, \psi_A)$, $B(x_B, \psi_B)$, $\Gamma(x_\Gamma, \psi_\Gamma)$

$$\overrightarrow{AB} \ (x_B - x_A, \psi_B - \psi_A)$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} \ (x_\Gamma - x_A, \psi_\Gamma - \psi_A)$$

$$\{\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_B - x_A & \psi_B - \psi_A \\ x_\Gamma - x_A & \psi_\Gamma - \psi_A \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_A & \psi_A & 1 \\ x_B & \psi_B & 1 \\ x_\Gamma & \psi_\Gamma & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ οδηγεί στο $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\} \to \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\}^\star$

* Σε αυτό το σύστημα το $\overrightarrow{AB}$ είναι το $(1, 0)$ και το $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι το $(0, 1)$

$\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\}$

$\{0, i, j\}$

▶ <u>ΑΣΚΗΣΗ: ΟΙ ΔΙΑΜΕΣΟΙ ενός ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΝ</u>

ΛΥΣΗ: χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να θέσω $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $\Gamma(0, 1)$

σχήμα

$$K(x_K,\,\psi_K),\Lambda(x_\Lambda,\,\psi_\Lambda)$$
$$\begin{vmatrix} x-x_K & x_\Lambda - x_K \\ \\ \psi-\psi_K & \psi_\Lambda-\psi_K \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\mu_\alpha \\ \mu_\beta \\ \mu_\gamma\end{pmatrix} \quad \mu_\alpha \to \begin{vmatrix} x-0 & \frac{1}{2}-0 \\ \psi-0 & \frac{1}{2}-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-\psi=0$$

$$\mu_\beta \to \begin{vmatrix} x-1 & 0-1 \\ \psi-0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \psi = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$\mu_\gamma \to \begin{vmatrix} x-0 & \frac{1}{2}-0 \\ \psi-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cdots$$

ΛΥΣΗ του ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ: $x=\psi$.

► <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

σχήμα

Αρχίζω με ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρω παράλληλη προς τη βάση την ευθεία ε. Θεωρώ M_ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ που προκύπτει. Ζητείται ο Γεωμετρικός Τόπος του σημείου M_ε.

σχήμα

Έστω $AB\Gamma$ ορθωγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι <u>ύψος</u>, <u>διάμεσος</u>, <u>διχοτόμος</u>.

Αλλάζω σύστημα αποΟΡΘΟΓΩΝΙΟ σε ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΟ.

$$\{A,\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{A\Gamma}\} \to \{0,\,\vec{i},\,\vec{j}\}$$

πλαγιογώνιο

διατηρούνται όλες οι έννοιες: ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑ, ΜΕΣΟΝ, ΤΡΙΓΩΝΟ. Άρα ο Γ.Τ. είναι ΕΥΘΕΙΑ. Θα είναι ή το ύψος ή η διάμεσος ή η διχοτόμος. Υποχρεωτικά είναι η ΔΙΑΜΕΣΟΣ.

► <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: στο πλαγιογώνιο σύστημα δεν έχουμε ΜΗΚΗ και ΓΩΝΙΕΣ</u>

Οδηγούμαστε σε έιδικά συστήματα συντεταγμένων: τα ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΑ.

► <u>ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ</u>

σχήμα

$$z^2 = x^2+\psi^2 \Rightarrow z=\sqrt{x^2+\psi^2}$$
$$(AB)=\sqrt{(OA)^2+(OB)^2}$$

Θεωρώ τα συστήματα $\{0,\,\vec{i},\,\vec{j}\}$ όπου $\vec{i}\perp\vec{j}$ με $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$.

$M \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \psi\vec{j},\ |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + \psi^2}$

$A(x_A,\, \psi_A)$ και $B(x_B,\, \psi_B),\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (\psi_B - \psi_A)^2}$.

► <u>ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΑΡΧΗ</u>

Ανάλυση προβλήματος $\{0,\, \vec{i},\, \vec{j}\},\ \ \{0,\, \vec{i}',\, \vec{j}'\}$ τότε $\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{Bmatrix}$, $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $det(T) \neq 0$.

Αφού τα συστήματα είναι ειδικού τύπου το T ΔΕΣΜΕΥΕΤΑΙ και δεν μπορεί να είναι τυχαί-ο.

σχήμα

Τα πάντα καθορίζονται από τη γωνία φ.

▶ <u>ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ στα ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u>

→ <u>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ με ΚΟΙΝΗ ΑΡΧΗ</u>
π.χ. $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ και $\{0, \vec{i}', \vec{j}'\}$

→ <u>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ με ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ</u>
π.χ. $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ και $\{0, \vec{i}', \vec{j}'\}$

▶ <u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> ΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ του ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

→ <u>ΕΥΘΕΙΑ</u>

→ <u>ΜΕΣΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ</u>

→ <u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ</u>

→ <u>ΤΡΙΓΩΝΟ</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΟΙ ΔΙΑΜΕΣΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΝ
▶ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
▶ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ
▶ ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΝΤΕΤΣΓΜΕΝΩΝ στο ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

▶ Στο ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ η ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΔΕΝ ΕΠΗΕΡΑΖΕΙ τη ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ
ΤΑ ΜΗΚΗ και ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΟΜΩΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ.

► <u>ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>

$\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ με $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$

σχήμα $\qquad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \psi\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + \psi^2}$

► <u>Πως σχετίζονται δύο ορθοκανονικά συστήματα με την ΙΔΙΑ ΑΡΧΗ</u>

$$\begin{array}{cc} \{0, \vec{i}, \vec{j}\} & \{0, \vec{i}', \vec{j}'\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \psi\vec{j} & \overrightarrow{OM} = x'\vec{i}' + \psi'\vec{j}' \end{array}$$

$\begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$ όπου $P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΣ $detP \neq 0$

<u>ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ P</u>

$|\overrightarrow{OM}| =$ είναι κοινό και στα δύο διανύσματα, $|\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + \psi^2 = (x')^2 + (\psi')^2$

<u>1ος τρόπος:</u>

$$x^2 + \psi^2 = (x, \psi)\begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$(x')^2 + (\psi')^2 = \begin{pmatrix} x' \\ \psi' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x' \\ \psi' \end{pmatrix}$$

Όμως

$$\begin{pmatrix} x' \\ \psi' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ \psi' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x' \\ \psi' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}^t$$

Προκύπτει: $\begin{pmatrix} x' \\ \psi' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x' \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}^t P^t P \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}^t P^t P \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix}$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει $P^t P = I$. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>2ος τρόπος</u> $\left.\begin{array}{l} x' = \alpha x + \beta\psi \\ \psi' = \gamma x + \delta\psi \end{array}\right\} \Rightarrow (x')^2 + (\psi')^2 = (\alpha x + \beta\psi)^2 + (\gamma x + \delta\psi)^2 = x^2 + \psi^2$

Πρέπει $\begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = 1 \\ \beta^2 + \delta^2 = 1 \\ \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \end{cases}$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ P</u>

$P^tP = I \quad det(P^tP) = 1$ και $det(P^t) = det(P)$

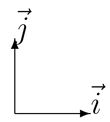
Άρα $(det(P))^2 = 1 \;\Rightarrow\; det(P) = \pm 1$

$$P^t = P, \quad \boxed{P^{-1} \cdot P = I, \quad P \cdot P^{-1} = I}$$

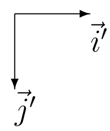
<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u> $\{\vec{i}, \vec{j}\}, \{\vec{i}' = \vec{i}, \vec{j}' = \vec{j}\}$

$$\vec{i}' = 1\vec{i} + 0\vec{j}$$
$$\vec{j}' = 0\vec{i} + 1\vec{j}$$

Τότε $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $P^2 = I, \; detP = -1$



....



<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

σχήμα

$$\vec{i}' = (\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi)\vec{j}$$
$$\vec{j}' = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})\vec{j}$$
$$= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

$detP = 1$ με $P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

Άρα $PP^t = I$.

$\begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$ όπου P είναι ο *πίνακας στροφή* $P = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

ΤΥΠΟΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ως προς την ΣΤΡΟΦΗ:

$$x = \cos\theta x' + \sin\theta\psi'$$
$$\psi = -\sin\theta x' + \cos\theta\psi'$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Αν $T = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ τότε $T^t = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, $T \cdot T^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Άρα ο ΠΙΝΑΚΑΣ T είναι ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ ($AA^t = I$). Όμως έχει μία βασική ΔΙΑΦΟΡΑ με τον P: $det(T) = -1$. Άρα ΔΕΝ είναι ΣΤΡΟΦΗ (όλοι οι ορθογώνιοι πίνακες δεν είναι ΣΤΡΟΦΕΣ).

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = T$$

$\uparrow$ στροφή σχήμα,κατοπτρισμός σχήμα

$det(T) = -1$, $T^{-1} = T$.

<u>ΑΛΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u> $\rightarrow$ <u>ΑΛΛΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ</u>

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: $P(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$\{P(\theta):\ \theta \in \mathbb{R}\}$ = ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΡΟΦΗΣ

<u>ΑΦΗΡΗΜΕΝΗ ΜΕΛΕΤΗ</u>

$$P(0) = I$$
$$P(-\theta) = \big(P(\theta)\big)^t = \big(P(\theta)\big)^{-1} \Leftrightarrow P(-\theta) = P(\theta)^{-1}$$
$$P(\theta_1)\cdot P(\theta_2) = P(\theta_1 + \theta_2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\cdots\cdots$

$\{\{P(\theta):\ \theta \in \mathbb{R}\}$, πολλαπλασιασμός πινάκων$\}$

Αποτελεί μία $\underbrace{\text{ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΔΟΜΗ “ΟΜΑΔΑ”}}$.

<u>ΤΕΛΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ</u>: Ποιοί είναι ΟΛΟΙ οι πίνακες

$$\Theta : \Theta \cdot \Theta^t = I$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$(\Sigma)\begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = 1 \\ \beta^2 + \delta^2 = 1 \\ \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \\ \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Ξεκινάμε από την 3^{η} και λύνουμε με άγνωστο το β. Παίρνουμε περιπτώσεις για τον συντελεστή α ($\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$) και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha \neq 0$ οπότε $\beta = -\dfrac{\gamma}{\alpha}\delta$.

Θέτουμε στην 2^{η} όπου β το ίσον του.

$$\beta^2 + \delta^2 = 1 \Leftrightarrow (-\frac{\gamma}{\alpha}\delta)^2 + \delta^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \delta^2$$

► <u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

Στο $\mathbb{R}^2$ και ως προς ένα ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $Ox\psi$ δίνεται το υποσύνολο

$$C = \{(x,\, \psi) \in \mathbb{R}^2 | x\psi = \frac{1}{2}\}\ \ E = \frac{1}{2}$$

Να βρεθεί η μορφή του C ως προς το ορθοκανονικό σύστημα που προκύπτει από το $Ox\psi$ με στροφή $\frac{\pi}{4}$.
Ζητάμε $C' = \{(x',\, \psi') \in \mathbb{R}^2 |\ ?\}$

$$\begin{cases} x = \cos\frac{\pi}{4}x' - \sin\frac{\pi}{4}\psi' = \dfrac{x'-\psi'}{\sqrt{2}} \\ \psi = \sin\frac{\pi}{4}x' + \cos\frac{\pi}{4}\psi' = \dfrac{x'+\psi'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Οπότε

$$\frac{1}{2} = x\psi \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{(x'-\psi')(x'+\psi')}{(\sqrt{2})^2} = \frac{(x')^2-(\psi')^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$(E') : \boxed{(x')^2 - (\psi')^2 = 1} \text{ ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ}$$

σχήμα

$$C' = \{(x',\, \psi') \in \mathbb{R}^2 | (x')^2 - (\psi')^2 = 1\}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: οι (E) και (E') είναι $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΓΩΝΙΑΣ στα ΔΙΑΦΟΡΑ ΟΡΘΟΚΑΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

► <u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

$$\begin{pmatrix} \psi = \lambda_1 x + \mu \\ \psi = \lambda_2 x + \mu \end{pmatrix} \quad Ox\psi \qquad \text{σχήμα με λεζάντα } \Pi = \tan\omega$$

$\boxed{\Pi = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}}$ όπου $\lambda_1\lambda_2 \neq -1$.
Ν.δ.ο. η <u>Π ΔΕΝ ΑΛΛΖΕΙ στα διάφορα ορθοκανονικά συστήματα.</u>

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>

1. Αναφέρεται σε ορθοκανονικά συστήματα
2. Μελετάει ιδιότητες που ισχύουν σε <u>ΟΛΑ</u> τα ορθοκανονικά συστήματα

ΛΥΚΕΙΟ/ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ→μελετάει μήκη, γωνίες
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ των ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ στο ΧΩΡΟ</u>
χώρος↔(σημεία, ευθείες, επίπεδα), (<u>Στερεομετρία</u>: Βιβλίο B' ΛΥΚΕΙΟΥ)

ΒΑΣΙΚΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

- Όλα τα Αξιώματα του Επιπέδου ισχύουν
- Κάθε τρία σημεία ΜΗ ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ορίζουν ένα επίπεδο
- Δύο επίπεδα που έχουν ένα κοινό σημείο έχουν και μια κοινή ευθεία
- Αν μια ΕΥΘΕΙΑ έχει δύο κοινά σημεία με ένα επίπεδο όλα της τα σημεία είναι το επίπεδο
- Στο χώρο υπάρχουν 4 ΣΗΜΕΙΑ ΜΗ ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ στο ΧΩΡΟ

ΣΗΜΕΙΟ-ΕΥΘΕΙΑ-ΕΠΙΠΕΔΟ και οι ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

υπάρχουν τουλάχιστον 4 μη συνεπίπεδα σημεία

• Τρία ΜΗ ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ σημεία ορίζουν ακριβώς ένα επίπεδο

ΠΟΡΙΣΜΑ

Μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής ορίζουν ένα επίπεδο

Δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα επιπεδο

Δύο επίπεδα με τρία κοινά σημεία ταυτίζονται.

► ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

1. Να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.
2. Να έχουν ένα κοινό σημείο οπότε έχουν μία κοινή ευθεία (σχήμα)
3. Να συμπίπτουν

► ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

1. Να είναι παράλληλες, οπότε βρίσκονται στο ΙΔΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
2. Να έχουν ένα κοινό σημείο οπότε ορίζουν ένα επίπεδο (σχήμα)
3. Ασύμβατες ευθείες (ούτε παράλληλες, ούτε τεμνόμενες, δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ της ΥΠΑΡΞΗΣ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Έστω τρία σημεία A, B, $\Gamma \in \Pi$ και $\Delta \notin \Pi$

(Τα A, B, Γ είναι ΜΗ ΣΥΝΕΘΕΙΑΚΑ)

σχήμα

Τα B, Γ ορίζουν μία (ε_1)

Τα Δ, A ορίζουν μία (ε_2).

Οι (ε_1) και (ε_2) είναι ΑΣΥΜΒΑΤΕΣ γιατί τα A, B, Γ, Δ είναι ΜΗ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΑ.

► ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΥΘΕΙΑΣ και ΕΠΙΠΕΔΟΥ $(\varepsilon) \perp (\Pi)$

σχήμα

A: ίχνος της (ε) στο (Π) (ή ο πους της (ε) στο (Π))

Από το A διέρχονται Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \cdots$ ευθείες του (Π)

ΟΡΙΣΜΟΣ

$\boxed{\text{Λέμε τότε ότι } (\varepsilon) \perp (\Pi) \Leftrightarrow (\varepsilon) \perp (\delta) \forall (\delta) \text{ ευθεία του } (\Pi) \text{ που διέρχεται από το ίχνος } A}$

(Η (ε) με την Δ_1 δημιουργούν ένα νέο επίπεδο (Π_1)).

Αρκεί να ελεγχθούν μόνο δύο ευθείες του (Π) που περνάνε από το ίχνος της (ε), δηλαδή το σημείο A.

► <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν $(\Pi)\bigcap(\varepsilon) = A$ και $\delta_1, \delta_2 \in (\Pi)$ με $\delta_1 \neq \delta_2$. $A \in (\delta_1)\bigcap(\delta_2)$ και $\delta_1, \delta_2 \perp (\varepsilon) \Rightarrow (\varepsilon) \perp (\Pi)$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> σχήμα

<u>Υπόδειξη</u> (δ) τυχαία ευθεία του (Π)
$AB = A\Gamma$
$(\overset{\triangle}{AB\Gamma}) \Rightarrow$ ορίζεται σημείο $\Delta \in (\delta)$.

Θεωρώ σημείο $M \in (\varepsilon)$ και $M' \in (\varepsilon)$: $AM = AM'$

$M\Gamma M'$ ισοσκελές
MBM' ισοσκελές

Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο $M\Delta M'$ είναι ισοσκελές.

Εφαρμόζουμε (σχήμα) ευθέως και αντιστρόφως (η διάμεσος είναι διχοτόμος και ύψος)

<u>ΤΡΙΣΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ</u> σχήμα.

► <u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ</u>

σχήμα

(Π), (ε) $(\Pi)\bigcap(\varepsilon) = A$
$(\delta) \in (\Pi)$
$AB \perp (\delta)$, $AB \in (\Pi)$
$M \in (\varepsilon)$ και φέρω τη MB.

1. Αν $(\varepsilon) \perp (\Pi) \Rightarrow MB \perp (\delta)$

2. Αν $(\varepsilon) \perp (\Pi)$ και $MB \perp (\delta) \Rightarrow AB \perp (\delta)$

3. Αν $MB \perp (\delta)$ και $AB \perp (\delta) \Rightarrow (\varepsilon) \perp (\Pi)$

σχήμα

$N \in (\delta)$ και φέρω την AN. $(\varepsilon) \perp (\Pi)$. Τα τρίγωνα (MAN), (MAB) είναι ορθογώνια. Το τρίγωνο (ABN) είναι ορθογώνιο. Πρέπει να δείξουμε ότι το τρίγωνο (MBN) είναι ορθογώνιο στη $\hat{B}$. Εφαρμόζουμε ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ.

► <u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ</u>

σχήμα

(Π), $(\varepsilon) \perp (\Pi)$
$(\delta) \in (\Pi)$

$$\begin{pmatrix} \delta' \parallel \delta \\ A \in \delta' \end{pmatrix} \Rightarrow (\varepsilon) \perp (\delta)$$

(ε), (δ) (εν γένη) <u>ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ</u>

<u>ΑΣΥΜΒΑΤΩΣ ΚΑΘΕΤΕΣ</u>

σχήμα

σχήμα

(ε_1), (ε_2) ορθογώνιες

$$\left.\begin{array}{l} (\varepsilon_1)' \parallel (\varepsilon_1) \\ (\varepsilon_2)' \parallel (\varepsilon_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon_1)' \perp (\varepsilon_2)'$$

<u>ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ</u> Αν $(\varepsilon) \perp (\Pi)$ τότε η (ε) είναι <u>ορθογώνια</u> με κάθε ευθεία του επιπέδου.

Αν η (ε) είναι ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ με δύο ευθείες ενός επιπέδου $(\Pi) \Rightarrow (\varepsilon) \perp (\Pi)$.

► <u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: <u>Δίνεται επίπεδο (Π) και σημείο $A \notin \perp (\Pi)$. Να αχθεί από το A ευθεία $(\varepsilon) \perp (\Pi)$</u>

σχήμα

Εφαρμόζουμε το ΘΕΩΡΗΜΑ των ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ
$(\delta) \in (\Pi)$
Η (δ) και το A ορίζουν επίπεδο

Φέρνω $AB \perp (\delta)$. Πάνω στο (Π) φέρω $(x) \perp (\delta)$ οπότε η (x) και η AB ορίζουν ένα επίπεδο. Στο επίπεδο που ορίζουν οι $(x)|AB$ φέρω $AO \perp (x)$.

<u>ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ</u> Το σημείο $A \in (\Pi)$

σχήμα

$(\mu) \perp (\Pi)$
μ, A ορίζουν επίπεδο
φέρω στο (ε) $(\mu)' \parallel \mu$ από το A.

► <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>: Υπάρχουν ΤΡΙΣΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Κατασκευή:

σχήμα

Αρχίζω με ένα επίπεδο (Π) και $0 \in (\Pi)$.
Φέρω $(\varepsilon_3) \perp (\Pi)$ με $0 \in (\varepsilon_3$. Θεωρώ $(\varepsilon_1) \in (\Pi)$ και να διέρχεται από το O.
Φέρω $(\varepsilon_2) \perp (\varepsilon_1)$ με $(\varepsilon_2 \in (\Pi)$.

σχήμα

<u>ΤΡΙΣΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ</u>

► <u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

ΑΣΚΗΣΗ1

σχήμα

$\begin{cases} \text{Όλες οι ευθείες του χώρου που διέρχονται από το } O \\ \text{και είναι κάθετες στην ευθεία } (\varepsilon) \\ \text{βρίσκονται σε ένα επίπεδο } (\Pi) \text{ που ονομάζεται} \\ \text{και είναι ΚΑΘΕΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ στην } (\varepsilon) \end{cases}$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>: <u>Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία</u>

σχήμα

Έστω ότι έχουν κοινό σημείο K. θεωρώ την KO και KO'.
Το $K\overset{\triangle}{O}O'$ θα είναι τρίγωνο με 2 ορθές γωνίες. ΑΤΟΠΟ!

► <u>ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ δυο ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ</u>

σχήμα

π.χ. ο κύβος έχει ανά δύο ασύμβατες με μία κοινή κάθετο

σχήμα

Έστω $x \in (\varepsilon_2)$ και φέρω $(\varepsilon_1)' \parallel (\varepsilon_1)$.
Θεωρώ $O \in (\varepsilon_1)$ και φέρω $OO' \perp (\Pi)$.
Φέρω $(\varepsilon_1)'' \parallel (\varepsilon_1)'$ όπου $(\varepsilon_1)''$ ανήκει στο επίπεδο που περιέχει την (ε_1) και είναι κάθετο στην (ε_2).

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ στο ΧΩΡΟ</u>

$\mathcal{T} \to$ συνήθης χώρος (περιέχει σημεία, ευθείες, επίπεδα, τις μεταξύ τους σχέσεις)
$\mathcal{T} \cong \mathbb{R}^3$

► <u>Η ΤΑΥΤΙΣΗ γίνεται μέσω του ΤΡΙΣΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ</u>

– Επιλέγουμε "αρχή" O $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{\kappa}\}$

– Επιλέγουμε ΑΞΟΝΕΣ

Τότε το τυχαίο $M \in \mathcal{T} \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + \psi_M\vec{j} + z_M\vec{\kappa}$ όπου $M(x_M, \psi_M, z_M)$.

► <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Οι συντεταγμένες του αθροίσματος είναι το άθροισμα των συντεταγμένων.

σχήμα $\qquad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{\kappa}| = 1$

► <u>Στο $\mathbb{R}^3$ θα βάλουμε 2 ΔΟΜΕΣ</u>

1. <u>Εσωτερικό γινόμενο</u>

2. <u>Εξωτερικό γινόμενο</u>

<u>Εφόσον $\mathbb{R}^3 \cong \mathcal{T}$</u> θα προκύψει εσωτερικό ή εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

► $\boxed{\text{ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ}}$ πράξη μεταξύ διανυσμάτων όπου το αποτέλεσμα είναι πραγματικός αριθμός.
Είναι μια ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ: $<,>$: $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}$
ΤΥΠΟΣ της $<,>$

$$<(x_1, x_2, x_3), (\psi_1, \psi_2, \psi_3)>= (x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3)$$

Ονομάζεται και ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ
• <u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ(ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ) της ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ</u>

<u>ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>
$<\vec{\alpha}, \vec{\beta}>\in \mathbb{R}$

1. $<\vec{\alpha}, \vec{\beta}>=<\vec{\beta}, \vec{\alpha}>$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΤΗΤΑ

$$\left.\begin{array}{ll} 2. & <\vec{\alpha}+\vec{\gamma}, \vec{\beta}>=<\vec{\alpha}, \vec{\beta}>+<\vec{\gamma}, \vec{\beta}> \\ 3. & <\lambda\vec{\alpha}, \vec{\beta}>=\lambda<\vec{\alpha}, \vec{\beta}> \ \ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ}$$

4. $<\vec{\alpha}, \vec{\alpha}>\geqslant 0$ και $<\vec{\alpha}, \vec{\alpha}>=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\vec{0}$ ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΟ

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>:

$$\vec{\alpha}(x, \psi, z) = x^2 + \psi^2 + z^2 \geqslant 0 \text{ και } x^2 + \psi^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$$

► $\boxed{\text{ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ} \quad \text{ΝΟΡΜΑ}}$

Με τη βοήθεια του ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ, ορίζω μια ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ $\| \,\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{<\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}>}^{\star}$$

Την ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ αυτή την ονομάζω "ΝΟΡΜΑ".

* αφού το $<\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}> \geqslant 0\ \forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ μπορώ να βάλω ρίζα.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

1. $\|\vec{\alpha}\| \geqslant 0,\ \|\vec{\alpha}\| = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

2. $\|\lambda\vec{\alpha}\| = |\lambda|\|\vec{\alpha}\|,\ \lambda \in \mathbb{R}$
   <u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: $\|\lambda\vec{\alpha}\|^2 =<\lambda\vec{\alpha},\, \lambda\vec{\alpha}>= \lambda \cdot \lambda <\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}>= \lambda^2 <\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}>= \lambda^2\|\vec{\alpha}\|^2$

3. $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\} \leqslant \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$ (τριγωνική ανισότητα)
   $\left.\begin{array}{l} \to \\ \to \\ \to \end{array}\right\}$ μετράει μήκη διανυσμάτων
   <u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(\lambda) = \|\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\|^2$ Ισχύει $\varphi(\lambda) \geqslant 0 \,\forall \in \mathbb{R}$
   Αναπτύσσουμε: $\varphi(\lambda) =<\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta},\, \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}>=<\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}> +2\lambda <\vec{\alpha},\, \vec{\beta}> +\lambda^2 <\vec{\beta},\, \vec{\beta}>\Rightarrow$
   $\varphi(\lambda) = (\|\vec{\beta}\|^2)\lambda^2 + (2 <\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>)\lambda + \|\vec{\alpha}\|^2.$

<u>Διακρίνουμε περιπτώσεις:</u>

(i) $\|\vec{\beta}\| = 0 \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{0}$ άρα η ΙΔΙΟΤΗΤΑ (3) ισχύει

(ii) $\|\vec{\beta}\| \neq 0 \Rightarrow \varphi(\lambda)$ τριώνυμο και γίνεται πάντα ομόσημο του $(\|\vec{\beta}\|)^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta}{4} \leq 0$ δηλ.
$\dfrac{4(<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>)^2 - 4\|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2}{4} \leq 0 \Rightarrow$
$\boxed{|<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>| \leq \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|} \rightsquigarrow$ μαθηματικά συμπίπτει με την ΙΔΙΟΤΗΤΑ (3)
ΙΔΙΟΤ.(3): $\Leftrightarrow \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 \leq (\|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|)^2 \Leftrightarrow <\vec{\alpha} + \vec{\beta},\, \vec{\alpha} + \vec{\beta}> \leq \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2 + 2\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\| \Leftrightarrow$
$\cancel{<\vec{\alpha},\vec{\alpha}>} + 2 <\vec{\alpha},\, \vec{\beta}> + \cancel{<\vec{\beta},\vec{\beta}>} \leq \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2 + 2\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\| \Leftrightarrow 2 <\vec{\alpha},\, \vec{\beta}> \leq 2\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|$

$$<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}> \leq |<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>| \leq \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|$$

$$|<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>| \leq \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|$$

Αν $\vec{\alpha},\, \vec{\beta} \neq 0$ τότε $\dfrac{|<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>|}{\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|} \leq 1$

Συμπεραίνουμε : ΝΟΡΜΑ $\longleftrightarrow$ ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

► $\boxed{\text{ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ στον } \mathbb{R}^3 \cong \mathcal{T}}$

Έστω $M,\, N \in \mathcal{T}$ τότε αναζητούμε $d(M,\, N)$
Επιλέγουμε το σύστημα $\{0,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{\kappa}\}$
$M \rightsquigarrow \overrightarrow{OM} = \vec{\alpha}(x_1,\, \psi_1,\, z_1)$
$N \rightsquigarrow \overrightarrow{ON} = \vec{\beta}(x_2,\, \psi_2,\, z_2)$
$\overrightarrow{MN} \rightsquigarrow \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x_1,\, \psi_2 - \psi_1,\, z_2 - z_1)$
$d(M,\, N) = \|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

► Η $d(M,\, N)$ είναι ΜΕΤΡΙΚΗ

1. $d(M,\, N) \geq 0$, $d(M,\, N) = 0 \Leftrightarrow M \equiv N$
2. $d(M,\, N) = d(N,\, M)$
3. $d(M,\, N) \leq d(M,\, K) + d(K,\, N)$ ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
   $d(M,\, N) = \|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\|$ και έστω $\overrightarrow{OK} = (x_3,\, \psi_3,\, z_3) = \vec{\gamma}$
   $d(M,\, N) = \|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\| = \|\vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\gamma} - \vec{\alpha}\| \leq \|\vec{\beta} - \vec{\gamma}\| + \|\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\| = d(M,\, K) + d(K,\, N)$
   Άρα $d(M,\, N) \leq d(M,\, K) + d(K,\, N)$.

► ΑΣΚΗΣΗ

1. $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 + \|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|^2 = 2[\|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2]$
2. $< \vec{\alpha},\, \vec{\beta} >= \dfrac{1}{4}\left[\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 - \|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|^2\right]$

   ΛΥΣΗ 1
   σχήμα ΝΟΜΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

   - $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 =< \vec{\alpha} + \vec{\beta},\, \vec{\alpha} + \vec{\beta} >=$
     $< \vec{\alpha},\, \vec{\alpha} > +2 < \vec{\alpha},\, \vec{\beta} > + < \vec{\beta},\, \vec{\beta} >= \|\vec{\alpha}\|^2 + 2 < \vec{\alpha},\, \vec{\beta} > + \|\vec{\beta}\|^2$
   - $\|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2 - 2 < \vec{\alpha},\, \vec{\beta} > + \|\vec{\beta}\|^2$

ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ $< \vec{\alpha},\, \vec{\beta} >= 0$

$$< \vec{\alpha},\, \vec{\beta} >= 0 \Leftrightarrow \overbrace{\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2}^{\text{ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2$ από την προηγούμενη άσκηση. Άρα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ.

► ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

<u>Χρειαζόμαστε την έννοια γωνία</u>

σχήμα

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ

$$\boxed{(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos\varphi}$$

όπου $(AB)^2$ ΑΠΟΣΤΑΣΗ $(AB)^2$

$$(d(A,\,B))^2 = (d(O,\,A))^2 + (d(O,\,B))^2 - 2(d(O,\,A))(d(O,\,B))\cos\varphi$$

Όμως $(d(A,\,B))^2 = \|AB\|^2 = \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\|$
$(d(O,\,A))^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2$
$(d(O,\,B))^2 = \|\overrightarrow{OB}\|^2$
Προκύπτει:

$$\underbrace{\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\|^2} = \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2 < \overrightarrow{OA},\, \overrightarrow{OB} >= \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$\boxed{< \overrightarrow{OA},\, \overrightarrow{OB} >= \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\cos\varphi}$ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

$$\overrightarrow{OA},\, \overrightarrow{OB} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{< \overrightarrow{OA},\, \overrightarrow{OB} >}{\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|}}$$

<u>Σχόλιο</u>:

$$| < \vec{\alpha},\, \vec{\beta} > | \leq \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\| \Rightarrow \frac{| < \vec{\alpha},\, \vec{\beta} > |}{\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|} \leq 1$$

$$\exists\theta \in (0,\,\pi) : \boxed{\cos\theta \;=\; \frac{| < \vec{\alpha},\, \vec{\beta} > |}{\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|} \;\; \underline{\text{όπου } \theta \text{ η γωνία των διανύσματων}} \;\; \vec{\alpha},\;\; \vec{\beta}}$$

Η σειρά των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν παίζει ρόλο γιατί $\cos\theta = \cos(-\theta)$.

$(\mathbb{R}^3, <>)$
$\vec{\alpha}(x_1, \psi_1, z_1)$, $\vec{\beta}(x_2, \psi_2, z_2)$
$< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >= (x_1x_2 + \psi_1\psi_2 + z_1z_2)$

► $\boxed{\text{ΟΡΘΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ σε ΑΞΟΝΑ}}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Δίνεται ένα $\vec{\alpha} \neq \mathbb{R}^3$ και $\vec{\beta} \neq \mathbb{R}^3$. Ζητείται να γραφεί το $\vec{\beta}$ στη μορφή $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ όπου $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}_2$ είναι ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ με το $\vec{\alpha}$.

Ανάλυση:

(I) σχήμα

Για την κατασκευή του σχήματος χρησιμοποίησα το επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

(II) Για $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

$$\left|\left.\begin{array}{c} \vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \\ \vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha} \\ < \vec{\beta}_2, \vec{\alpha} >= 0 \end{array}\right\}\right. \text{Γλώσσα της αναλυτικής γεωμετρίας}$$

σχήμα

(I) $\dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|} = \vec{\alpha}_0$ διανυσματική μονάδα που ορίζει το $\vec{\alpha}$

$\left\|\dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}\right\| = \dfrac{1}{\vec{\alpha}} \cdot \|\vec{\alpha}\| = 1$, ΝΟΡΜΑ≡ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ (ή ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ)

$\|\vec{\beta}_1\| = \|\vec{\beta}\| \cdot |\cos\varphi| \Rightarrow \boxed{\|\vec{\beta}_1\| = \|\vec{\beta}\| \dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|} \cos\varphi}$ (1), όπου $\|\vec{\alpha}\|$ διανυσματική μονάδα που ορίζει το $\vec{\alpha}$.
Γνωρίζουμε ότι:
$< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >= \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\cos\varphi$. Άρα η σχέση (1) γράφεται

$$\boxed{\|\vec{\beta}_1\| = \frac{< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >}{\|\vec{\alpha}\|^2}\vec{\alpha}}$$

(II) είναι ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ στη ΔΟΜΗ $(\mathbb{R}^3, <, >)$.

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{\alpha}, \vec{\beta}\,\vec{\alpha} \neq \vec{0} \\ \vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \\ \vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha}, \lambda \in \mathbb{R} \\ < \vec{\beta}_2, \vec{\alpha} >= 0 \end{array}\right.$$

$\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \lambda\vec{\alpha}}$
οπότε
$< \vec{\beta}_2, \vec{\alpha} >=< \vec{\beta} - \lambda\vec{\alpha}, \vec{\alpha} >= 0 \Rightarrow$
$< \vec{\alpha}, \vec{\beta} > - < \vec{\alpha}, \lambda\vec{\alpha} >= 0 \Rightarrow$
$< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >= \lambda < \vec{\alpha}, \vec{\alpha} >$

Επειδή $\vec{\alpha} \neq 0 \Rightarrow < \vec{\alpha}, \vec{\alpha} > \neq 0$. Άρα $\lambda = \dfrac{< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >}{< \vec{\alpha}, \vec{\alpha} >} \Rightarrow$

$$\boxed{\lambda = \frac{< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >}{\|\vec{\alpha}\|^2}}$$

Τότε $\boxed{\vec{\beta}_1 \;=\; \frac{<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>}{<\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}>}\,\vec{\alpha}}$ και $\boxed{\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \frac{<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>}{<\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}>}\,\vec{\alpha}}$

<u>Εξετάζουμε αν υπάρχουν άλλες λύσεις</u>

Αν $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ και $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1' + \vec{\beta}_2'$ όπου $\begin{cases} \vec{\beta}_1,\, \vec{\beta}_1' \parallel \vec{\alpha} \\ \vec{\beta}_2,\, \vec{\beta}_2' \perp \vec{\alpha} \end{cases}$

Τότε $\underbrace{\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_1'}_{\vec{w}_1 \parallel \vec{\alpha}} = \underbrace{\vec{\beta}_2 - \vec{\beta}_2'}_{\vec{w}_2 \perp \vec{\alpha}}$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο: $<\vec{w}_1,\, \vec{w}_2>$

$<\vec{w}_1,\, \vec{w}_2> = <\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_1',\, \vec{\beta}_2 - \vec{\beta}_2'> = 0 \to \|\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_1'\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_1'$

► $\boxed{\text{ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ στο ΧΩΡΟ } \mathbb{R}^3}$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>: Δίνονται $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά στοιχεία του $\mathbb{R}^3$. Ζητείται $\vec{c}$, $\vec{c} \neq 0$ και να είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

► <u>ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΥΝ δυο ΜΗ ΣΥΓΓΡΑΜΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u>

$(\Pi) = \mathfrak{L}(\{\vec{\alpha},\, \vec{\beta}\}) = \{\rho\vec{\alpha} + \sigma\vec{\beta},\, \rho,\, \sigma \in \mathbb{R}\}$

σχήμα

είναι ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ μη ΣΥΓΓΡΑΜΙΚΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

► <u>ΔΙΑΝΥΣΜΑ ⊥ σε ΕΠΙΠΕΔΟ (Π)</u>

αν $<\vec{c},\, \vec{\alpha}> = <\vec{c},\, \vec{\beta}> = 0 \Rightarrow \vec{c} \perp (\Pi)$.

Πράγματι τότε $<\vec{c},\, \rho\vec{\alpha} + \sigma\vec{\beta}> = \rho <\vec{c},\, \vec{\alpha}> + \sigma <\vec{c},\, \vec{\beta}> = 0$.

Αρκεί λοιπόν να είναι ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ στα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Επιλύουμε το ΣΥΣΤΗΜΑ $<\vec{c},\, \vec{\alpha}> = <\vec{c},\, \vec{\beta}> = 0$.

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1,\, \psi_1,\, z_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,\, \psi_2,\, z_2)$ και $\vec{c} = (x,\, \psi,\, z)$.

$$\left.\begin{array}{l} <\vec{c},\, \vec{\alpha}> = 0 \\ <\vec{c},\, \vec{\beta}> = 0 \end{array} \vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 x + \psi_1 \psi + z_1 z = 0 \\ x_2 x + \psi_2 \psi + z_2 z = 0 \end{cases} x,\, \psi,\, z = ?$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & \psi_1 & z_1 \\ x_2 & \psi_2 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

$rankA = 2$ γιατί $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γραμμικά ανεξάρτητα.

$\Downarrow$

$\exists\, 2 \times 2$ ΥΠΟΟΡΙΖΟΥΣΑ $D_2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_1 & \psi_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Τότε δημιουργούμε σύστημα με 2 αγνώστους.

$$\begin{pmatrix} x_1x+\psi_1\psi=-z_1z \\ x_2x+\psi_2\psi=-z_2z \end{pmatrix} \Rightarrow \ x=\frac{D_x}{D},\ \psi=\frac{D_\psi}{D}$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -z_1z & \psi_1 \\ -z_2z & \psi_2 \end{vmatrix} \quad D_\psi=\begin{vmatrix} x_1 & -z_1z \\ x_2 & -z_2z \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$D_x=-z\begin{vmatrix} z_1 & \psi_1 \\ z_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \quad D_\psi=-z\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \psi_1 & z_1 \\ \psi_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}}z \ \ \psi=-\frac{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}}z,\ z\in\mathbb{R}$$

Προκύπτει το διάνυσμα $\vec{c}$

$$\vec{c}=(x,\,\psi,\,z)\Rightarrow\vec{c}=\big(\frac{D_x}{D},\,\frac{D_\psi}{D},\,z\big)\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{c}=\kappa\Big(\begin{vmatrix} \psi_1 & z_1 \\ \psi_2 & z_2 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}\Big)}$$

<u>Συμπέρασμα:</u> το διάνυσμα $\vec{c}\perp\vec{\alpha},\,\vec{\beta}$ είναι το πολλαπλάσιο του $(D_x,\,-D_\psi,\,D)$

► <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Στο $\mathbb{R}^3$ ορίζεται <u>μια ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΡΑΞΗ $X:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$</u> ως εξής <u>$(\vec{\alpha},\,\vec{\beta})\to(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})$</u> που ονομάζεται <u>εξωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha},\,\vec{\beta}$</u> και αν θεωρήσω ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ $\{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{\kappa}\}$ όπου

$$\vec{\alpha}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{\kappa}$$
$$\vec{\beta}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{\kappa}$$

τότε το $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\gamma_1\vec{i}+\gamma_2\vec{j}+\gamma_3\vec{\kappa}$ όπου τα $\gamma_1,\,\gamma_2,\,\gamma_3$ προκύπτουν από το ανάπτυγμα της ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \text{ ως προς την πρώτη γραμμή}$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\underset{\substack{\uparrow \\ \gamma_1}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}\vec{i}-\underset{\substack{\uparrow \\ \gamma_2}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}}\vec{j}+\underset{\substack{\uparrow \\ \gamma_3}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}}\vec{\kappa}$$

$\vec{i}\times\vec{j}$ όπου $\vec{i}(1,\,0,\,0)$ $\vec{j}=(0,\,1,\,0)$. Άρα $\begin{cases}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{\kappa}\\ \vec{j}\times\vec{\kappa}=\vec{i}\\ \vec{\kappa}\times\vec{i}=\vec{j}\end{cases}$

Άρα $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{c}$ και στη θέση πολλαπλασίου η μονάδα.

<u>ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ</u>

$\mathbb{R}^3$ $\{0,\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{\kappa}\}$ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ

$\begin{array}{l}\vec{\alpha}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\vec{\alpha}\vec{\kappa}\\ \vec{\beta}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{\kappa}\end{array}$ τότε $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{\kappa}\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\big((\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3)\vec{i}-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\vec{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{\kappa}\big)\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_2&\beta_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_3\\ \beta_1&\beta_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\ \beta_1&\beta_2\end{vmatrix}\vec{\kappa}$$

σχήμα

► $\boxed{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ}}$

• <u>1η ΛΙΣΤΑ</u>: <u>ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

1. $\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}=0,\,\vec{\alpha}\times\vec{0}=\vec{0}\ \forall\vec{\alpha}\in\mathbb{R}$
2. $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=-\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$ (ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)
3. $\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}+\vec{c})=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})+(\vec{\alpha}\times\vec{c})$
4. $\lambda(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=(\lambda\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=\vec{\alpha}\times(\lambda\vec{\beta})$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ:

$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{\kappa}\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}$

1. όπου β το $\alpha\rightsquigarrow$ ορίζουσα με ίδιες γραμμές=μηδενική
2. αντιμετάθεση 2 γραμμών στις ορίζουσες
3. και 4. άμμεσα από την γραμμικότητα της ορίζουσας

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=-(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})$ η σειρά του γινομένου παίζει ρόλο.
σχήμα..........θα συνδεθεί με τη φορά διαγραφής.

• <u>2η ΛΙΣΤΑ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ</u>:

1. $<\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\,\vec{c}>=\det\{\vec{\alpha},\,\vec{\beta},\,\vec{c}\}$
2. $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{c}=<\vec{\alpha},\,\vec{c}>\vec{\beta}-<\vec{\beta},\,\vec{c}>\vec{\alpha}$

3. $\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2 - (\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>)^2$

$$1)\ \vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \overset{D_1}{\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}}\vec{i} - \overset{D_2}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}}\vec{j} + \overset{D_3}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}}\vec{\kappa},\ \vec{c} = \gamma_1\vec{i} + \gamma_2\vec{j} + \gamma_3\vec{\kappa}$$

$$<\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\, \vec{c}> = \gamma_1 D_1\vec{i} - \gamma_2 D_2\vec{j} + \gamma_3 D_3\vec{\kappa} \Rightarrow$$

$$<\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\, \vec{c}> = \begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix} = \det\{\vec{\alpha},\, \vec{\beta},\, \vec{c}\}\ \text{ή}\ -\det\{\vec{\alpha},\, \vec{\beta},\, \vec{c}\}$$

$$<\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\, \vec{c}> = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix},\ \text{οπότε}\ <\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\, \vec{c}> = -<\vec{\beta}\times\vec{\alpha},\, \vec{c}>$$

π.χ. $<\vec{\beta}\times\vec{c},\, \vec{\alpha}> = \det\{\vec{\beta},\, \vec{c},\, \vec{\alpha}\} = -\det\{\vec{\beta},\, \vec{\alpha},\, \vec{c}\} = \det\{\vec{\alpha},\, \vec{\beta},\, \vec{c}\}$

2) $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{c} = <\vec{\alpha},\, \vec{c}>\vec{\beta} - <\vec{\beta},\, \vec{c}>\vec{\alpha}$

όπου $\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{\kappa}\\ \vec{\beta} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{\kappa}\\ \vec{\alpha} = \gamma_1\vec{i} + \gamma_2\vec{j} + \gamma_3\vec{\kappa}\end{array}\right\}$ κάνουμε πράξεις....και πιστοποίηση.

Πρέπει να βρούμε σε ποιο επίπεδο βρίσκεται το $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{c}$ το οποίο θα είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ και στο $\vec{c}$.

3) $\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|^2 = <\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\, \vec{\alpha}\times\vec{\beta}> = <\vec{\alpha},\, \vec{\beta}\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})> = -<\vec{\alpha},\, (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\beta}> =$
$-<\vec{\alpha},\, <\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>\vec{\beta} - <\vec{\beta},\, \vec{\beta}>\vec{\alpha}> = -<\vec{\alpha},\, <\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>\vec{\beta}> + <\vec{\alpha},\, <\vec{\beta},\, \vec{\beta}>\vec{\alpha}> =$
$-<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}><\vec{\alpha},\, \vec{\beta}> + <\vec{\alpha},\, \vec{\alpha}><\vec{\beta},\, \vec{\beta}>$
αφού $<\vec{u}\times\vec{v},\, \vec{w}> = <\vec{u},\, \vec{v}\times\vec{w}>$.
Άρα $\underline{\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2 - (<\vec{\alpha},\, \vec{\beta}>)^2}$

$$\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2 - \|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2\cos^2\varphi = (1-\cos^2\varphi)\|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2 = -\sin^2\varphi\|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2,$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha},\, \vec{\beta}$. Άρα,

$$\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\sin\varphi\ (\text{γιατί}\ \varphi\in[0,\, \pi])$$

► <u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ</u>

$\vec{\alpha},\, \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$:

1. $\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\sin\varphi$ (ΜΕΤΡΟ)

2. $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp$ στο επίπεδο των $\vec{\alpha},\, \vec{\beta}$ (ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ)

3. ΦΟΡΑ: θεωρούμς τα συστήματα $\{\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{\kappa}\}$ 1^{η} ΒΑΣΗ και $\{\vec{\alpha},\, \vec{\beta},\, \vec{\alpha}\times\vec{\beta}\}$ 2^{η} ΒΑΣΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΗΣ

$$\det\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix} > 0$$

$$=< \vec{\alpha}\times\vec{\beta},\, \vec{\alpha}\times\vec{\beta} >$$

Ορίζει τον ίδιο προσανατολισμό με το $\{\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{\kappa}\}$.

► $\boxed{\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2 - (< \vec{\alpha},\, \vec{\beta} >)^2}$

Αν $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{\kappa}$, $\vec{\beta} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{\kappa}$ τότε

$$\|\vec{\alpha}\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2$$

$$\|\vec{\beta}\|^2 = \sum_{i=1}^{3}\beta_i^2$$

$$< \vec{\alpha},\, \vec{\beta} >= \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i$$

οπότε

$$\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|^2 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\sum_{i=1}^{3}\beta_i^2 - (\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i)^2$$

Επίσης

$$\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|^2 = \begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2 = \sum_{i<j}D_{ij}^2$$

Επίσης

$$\boxed{\textstyle\sum_{i<j}D_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\sum_{i=1}^{3}\beta_i^2 - (\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i)^2 \geq 0}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Lagrange

Προκύπτει

$$(\sum\alpha_i^2)(\sum\beta_i^2) \geq (\sum\alpha_i\beta_i)^2$$

ή

$$\boxed{\sqrt{\textstyle\sum\alpha_i^2}\sqrt{\textstyle\sum\beta_i^2} \geq |\textstyle\sum\alpha_i\beta_i|}$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY $\rightsquigarrow |< x,\, \psi >| \leq \|x\|\|\psi\|$ για εσωτερικό γινόμενο

► ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΕΤΡΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ,

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

σχήμα

$E =$ βάση $\times$ ύψος
όπου βάση$= \|\vec{\alpha}\|$ και
ύψος$= \|\vec{b}\| \sin\varphi$
Τότε $E = \|\vec{\alpha}\|\|\vec{b}\| \sin\varphi$,
$\varphi \in [0,\, \pi]$
Δηλαδή $\boxed{E \;=\; \|\vec{\alpha} \times \vec{b}\|}$

▶ <u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2</u>: <u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ</u>
$< \vec{\alpha} \times \vec{b},\, \vec{c} >= \det\{\vec{\alpha},\, \vec{b},\, \vec{c}\}$ ΟΓΚΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ
ΜΙΚΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

- <u>ΕΝΝΟΙΑ της ΠΡΟΒΟΛΗΣ</u>

σχήμα

$$\left.\begin{array}{c} prob_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{< \vec{u},\, \vec{v} >}{< \vec{u},\, \vec{u} >}\vec{u} \\ \vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \vec{u}_1 \parallel \vec{u},\, \vec{u}_2 \parallel \vec{u} \end{array}\right\} \text{ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ}$$

- <u>ΕΝΝΟΙΑ ΟΓΚΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ</u>
  Παραλληλεπίπεδο: $\{\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\}$ όπου $\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}$ μη συγγραμικά
  $V(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}) =$ (εμβαδόν βάσης) $\times$ (ύψος)
  όγκος του Π.

  σχήμα

  ύψος $=$ μήκος $(prob_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c})$
  εμβαδόν βάσης $= \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

Αναζητούμε

$$\|prob_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\| \underset{\text{ορ.}}{=} \left\| \frac{< \vec{c},\, \vec{a} \times \vec{b} >}{< \vec{a} \times \vec{b},\, \vec{a} \times \vec{b} >}(\vec{a} \times \vec{b}) \right\|$$

$$\frac{|< \vec{c},\, \vec{a} \times \vec{b} >|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^{\cancel{2}}} \cancel{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{|< \vec{c},\, \vec{a} \times \vec{b} >|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

Άρα ύψος $= \dfrac{|< \vec{c},\, \vec{a} \times \vec{b} >|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$
Άρα

$$V(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}) = \text{εμβαδόν βάσης} \cdot \text{ύψος} = \cancel{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \cdot \frac{|< \vec{c},\, \vec{a} \times \vec{b} >|}{\cancel{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}} \Rightarrow$$

Άρα

$$V(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}) = \underset{\text{ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΜΙΚΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ}}{|< \vec{c},\, \vec{a} \times \vec{b} >|}$$

▶ <u>ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>

• <u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>
3 διανύσματα είναι συνεπίπεδα όταν το μικτό γινόμενο είναι μηδέν

$$< \vec{a} \times \vec{b},\, \vec{c} >= 0 \Rightarrow \det\{\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\} = 0$$

Τι δείχνει η ορίζουσα αν είναι μηδέν: τα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ είναι συνεπίπεδα
Τι δείχνει η ορίζουσα αν δεν είναι μηδέν: τον όγκο $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
Η ορίζουσα συνδέεται με τον όγκο.

► ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (από το ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ)

Έστω τα σημεία $A(x_A, \psi_A, z_A)$, $B(x_B, \psi_B, z_B)$, $\Gamma(x_\Gamma, \psi_\Gamma, z_\Gamma)$
εμβ$(AB\Gamma)$ σχήμα $\text{EMB}(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}\|$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ x_B - x_A & \psi_B - \psi_A & z_B - z_A \\ x_\Gamma - x_A & \psi_B - \psi_\Gamma & z_\Gamma - z_A \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{EMB}(AB\Gamma) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{(D_{\psi z})^2 + (D_{xz})^2 + (D_{x\psi})^2}}$$