

Ι. Γ. ΣΤΡΑΤΗΣ

**ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ
ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΤΩΝ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

(Μη Γραμμικές Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις)

Σημειώσεις Παραδόσεων

ΑΘΗΝΑ 1992

10. ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ

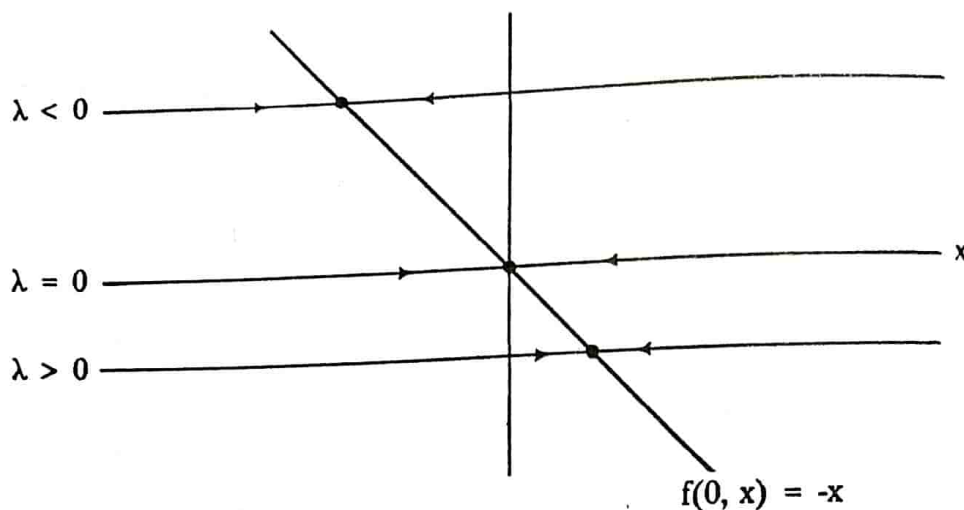
Κάθε εφαρμοσμένο πρόβλημα περιλαμβάνει αρκετές φυσικές παραμέτρους, που, ενδεχομένως, μεταβάλλονται μέσα σε κάποια προκαθορισμένα σύνολα. Είναι, συνεπώς, σημαντικό το να κατανοήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι. Ένα καλά κατασκευασμένο σύστημα, θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε η ποιοτική του συμπεριφορά να μένει αμετάβλητη όταν οι παράμετροι μεταβάλλονται λίγο γύρω από την τιμή για την οποία είχε γίνει ο αρχικός σχεδιασμός. Μια μεταβολή των ποιοτικών ιδιοτήτων θα μπορούσε να σημαίνει αλλαγή στην ευστάθεια του αρχικού συστήματος. Χωρίς απαιτήσεις αυστηρότητας, οι τιμές των παραμέτρων για τις οποίες συμβαίνει μια τέτοια μεταβολή λέγονται τιμές διακλάδωσης· η γνώση των τιμών διακλάδωσης είναι απολύτως αναγκαία για την πλήρη κατανόηση του συστήματος.

Σε αυτή τη, συντόμη, παράγραφο θα δώσουμε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα που θα μας διευκρινίσουν ορισμένες από τις βασικές ιδέες της Θεωρίας Διακλαδώσεων. Παρά την απλότητά τους, αυτά τα παραδείγματα περιγράφουν αυτά που συμβαίνουν στη γενική περίπτωση.

Η Θεωρία Διακλαδώσεων είναι μια σύγχρονη, πολύ σημαντική και ιδιαίτερα γόνιμη περιοχή έρευνας και αυτή η παράγραφος δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε καν ως μια εισαγωγή στη Θεωρία· ίσως, μόνο, ως ένα ερέθισμα για περαιτέρω μελέτη. Σε αυτή την κατεύθυνση μπορεί κανείς να ανατρέξει στα συγγράμματα [Ha-Ko] (που έχει χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά σε αυτήν την παράγραφο) και [C-Ha].

Παράδειγμα 10.1. Για τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda - x := f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10.1)$$



Σχήμα 10.1.

μπορούμε εύκολα (μεταθέτοντας κατακόρυφα τον x -άξονα κατά $-\lambda$) να προσδιορίσουμε τη ροή για κάθε τιμή του λ , από το γράφημα της $f(0,x)$. Όπως φαίνεται στο Σχ. 10.1, υπάρχει ένα μόνο (υπερβολικό) σημείο ισορροπίας, που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 10.2. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda - x^2 := f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (10.2)$$

Η ροή της (10.2) μπορεί να βρεθεί για κάθε τιμή της παραμέτρου λ , με το να σχεδιάσουμε την "αρχική" παραβολή $f(0,x) = x^2$ και να μεταθέσουμε κατακόρυφα τον x -άξονα κατά $-\lambda$.

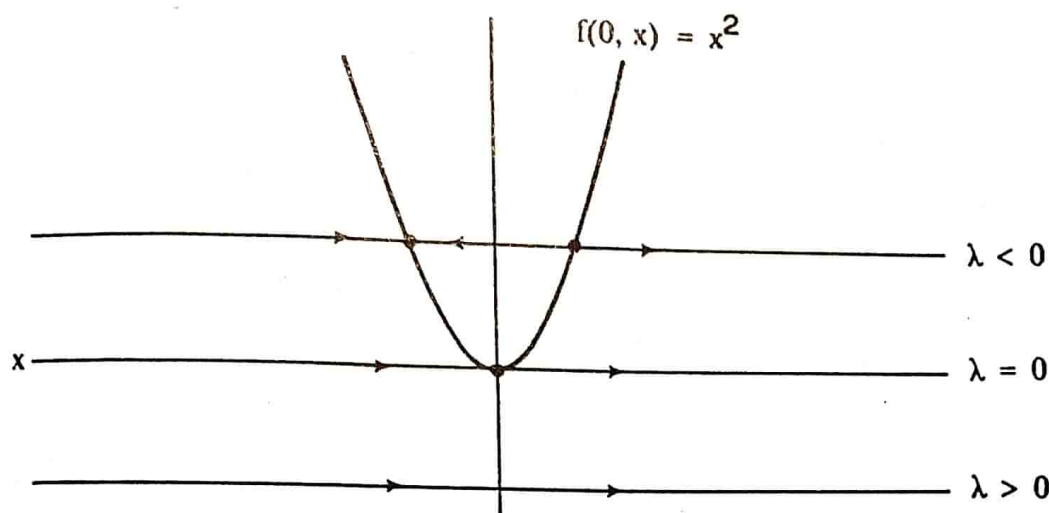
Για $\lambda < 0$, οι τροχιές δίνονται από τα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{-\lambda})$, $(-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda})$, $(\sqrt{-\lambda}, +\infty)$ και τα σημεία ισορροπίας $-\sqrt{-\lambda}$, $\sqrt{-\lambda}$. Για $\lambda = 0$, οι τροχιές είναι τα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ και το σημείο ισορροπίας 0. Για $\lambda > 0$, η μόνη τροχιά είναι το $(-\infty, +\infty)$ και δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας.

Καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος λ έχουμε την ακόλουθη συμπεριφορά:

(i) όσο το λ παραμένει αρνητικό, το πλήθος και οι διευθύνσεις των τροχιών διατηρούνται αμετάβλητα· το μόνο που αλλάζει είναι η θέση των σημείων ισορροπίας $\pm\sqrt{-\lambda}$,

(ii) όσο το λ παραμένει θετικό, υπάρχει μόνο μια τροχιά και η διεύθυνση της είναι προς τα δεξιά,

(iii) όταν, όμως, $\lambda = 0$, ανεξάρτητα από το κατά πόσο λίγο μεταβάλλεται το λ , το πλήθος των τροχιών αλλάζει: υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας για $\lambda > 0$ και κανένα για $\lambda < 0$.



Σχήμα 10.2.

Για μια βαθμωτή διαφορική εξίσωση $x' = f(x)$, τα σημεία ισορροπίας και το πρόσημο της $f(x)$ μεταξύ τους, προσδιορίζουν το πλήθος των τροχιών και τη διεύθυνση της ροής επί των τροχιών. Αυτό το πλήθος και η διεύθυνση συνιστούν την τροχιακή δομή της διαφορικής εξίσωσης ή ποιοτική δομή της ροής.

Η μελέτη των μεταβολών της ποιοτικής δομής της ροής μιας διαφορικής εξίσωσης καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι, λέγεται **Θεωρία Διακλάδωσης**.

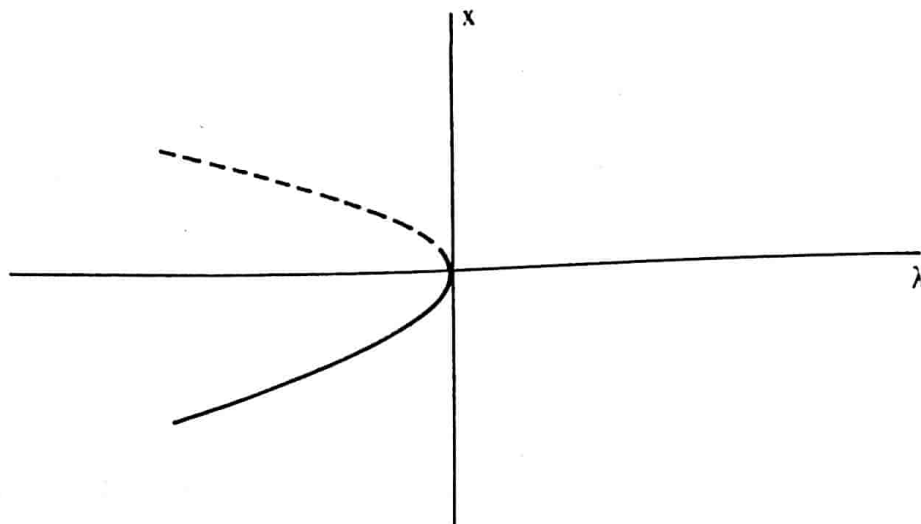
Αν για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, η ποιοτική δομή της ροής δεν αλλάζει καθώς οι παράμετροι υφίστανται "μικρές" μεταβολές, λέμε ότι η διαφορική εξίσωση έχει ευσταθή τροχιακή δομή.

Κάθε τιμή της παραμέτρου για την οποία η ροή δεν έχει ευσταθή τροχιακή δομή λέγεται **τιμή διακλάδωσης**, και για την εξίσωση λέμε ότι βρίσκεται σε **σημείο διακλάδωσης**.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση (10.1) έχει ευσταθή τροχιακή δομή για κάθε τιμή του λ , ενώ η (10.2) έχει ευσταθή δομή για κάθε $\lambda \neq 0$, αλλά βρίσκεται σε σημείο διακλάδωσης για $\lambda = 0$. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά διακλάδωσης της (10.2) λέγεται **διακλάδωση σάγματος-κόμβου**.

Υπάρχει μια άλλη, πολύ χρήσιμη, γραφική μέθοδος για τον προσδιορισμό ορισμένων από τα σημαντικά χαρακτηριστικά της δυναμικής συμπεριφοράς για εξισώσεις της μορφής $x' = f(\lambda, x)$, που εξαρτώνται από μια παράμετρο λ . Αυτή η μέθοδος συνίσταται στο σχεδιασμό καμπυλών στο (λ, x) -επίπεδο. Ένα σημείο (λ_0, x_0) βρίσκεται πάνω σε μια από αυτές τις καμπύλες, τότε και μόνον τότε αν $f(\lambda_0, x_0) = 0$.

Για την αναπαράσταση του είδους ευστάθειας, χρησιμοποιούμε διακεκομμένες γραμμές για τα ασταθή σημεία ισορροπίας, ενώ συνεχείς για τα ευσταθή. Η προκύπτουσα εικόνα λέγεται **διάγραμμα διακλάδωσης**.

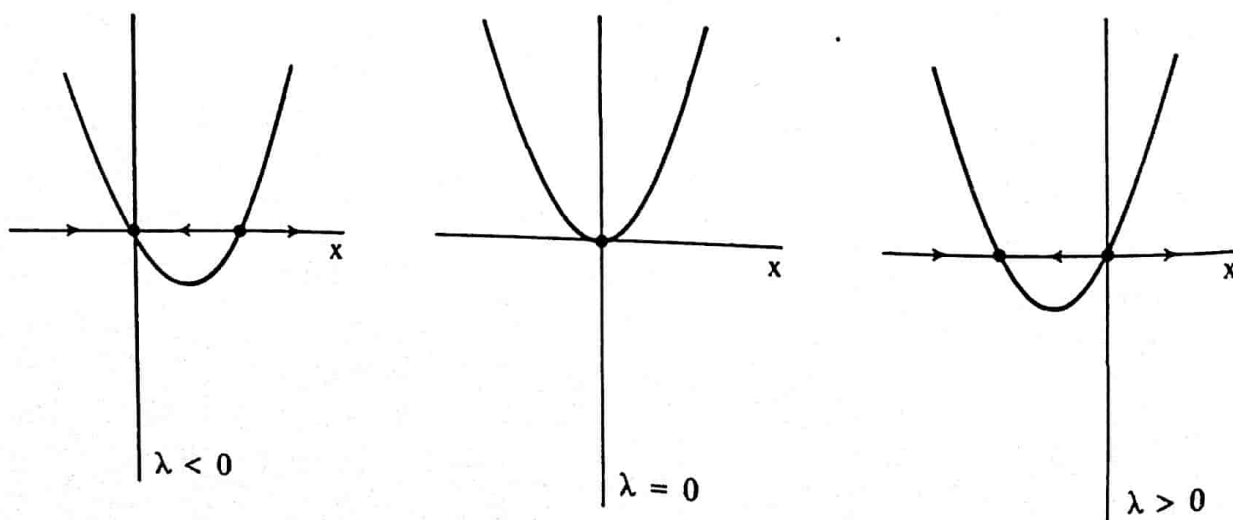


Σχήμα 10.3.

Παράδειγμα 10.3. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

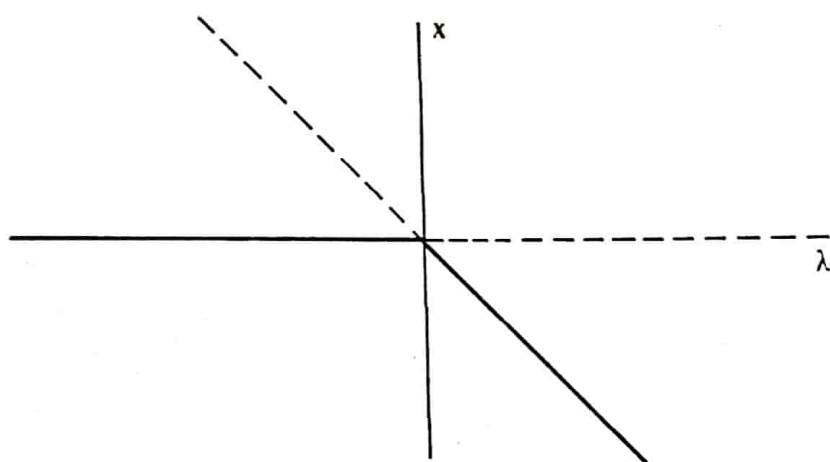
$$x' = \lambda x + x^2 := f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10.3)$$

Ο προσδιορισμός του διαγράμματος φάσεων της (10.3) μπορεί να γίνει εύκολα από το γράφημα της $f(\lambda, x) = \lambda x + x^2$.



Σχήμα 10.4.

Παρατηρούμε ότι το 0 είναι σημείο ισορροπίας για κάθε λ . Όταν $\lambda < 0$, το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και υπάρχει και ένα δεύτερο σημείο ισορροπίας, το $x = -\lambda$, που είναι ασταθές. Η τιμή $\lambda = 0$ είναι τιμή διακλάδωσης, για την οποία τα δύο σημεία ισορροπίας συμπίπτουν· το 0 είναι ένα (μη υπερβολικό) ασταθές σημείο ισορροπίας. Για $\lambda > 0$, το 0 γίνεται ασταθές, "προσφέροντας" την ευστάθεια του στο άλλο σημείο ισορροπίας $x = -\lambda$. Η διακλάδωση που υφίσταται η (10.3) λέγεται διακρίσιμη (transcritical). (Σχ. 10.5).



Σχήμα 10.5.

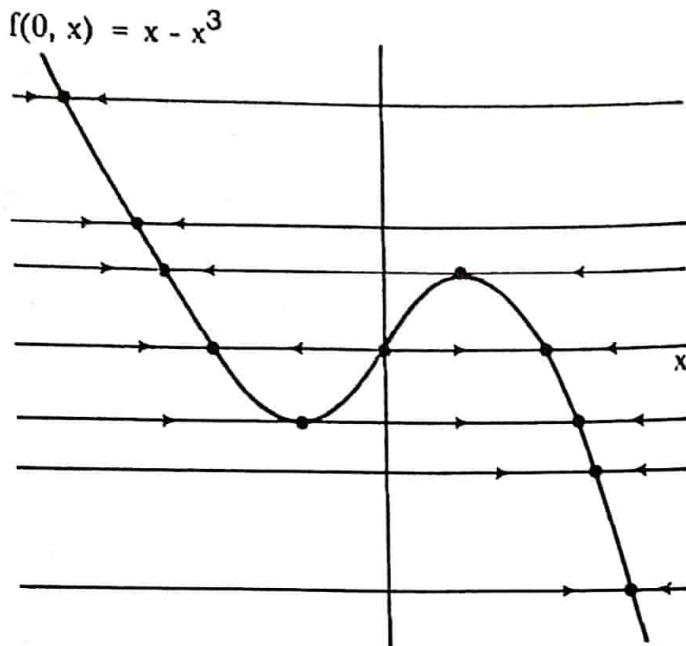
Παράδειγμα 10.4. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda x - x^3 := f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10.4)$$

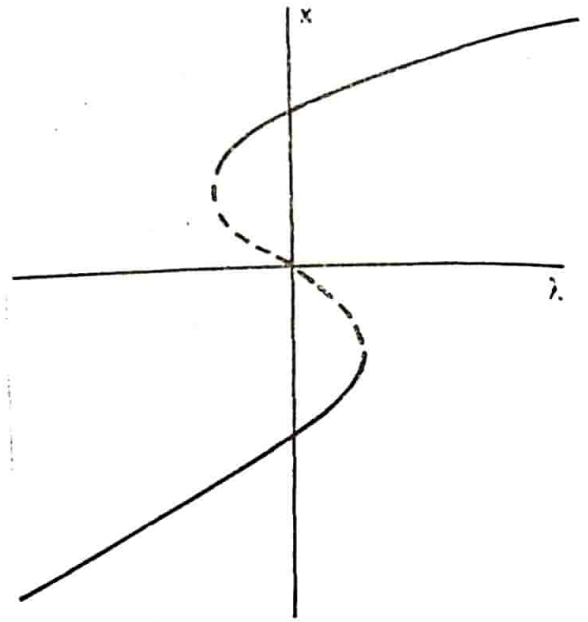
Για $\lambda = 0$, τα σημεία ισορροπίας είναι $-1, 0, 1$ και οι τροχιές τα ανοιχτά διαστήματα $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$ και, φυσικά, τα σημεία $\{1\}, \{0\}, \{-1\}$. Υπάρχει, λοιπόν, ευσταθής τροχιακή δομή. Η ροή συνεχίζει να

έχει ευσταθή τροχιακή δομή για $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$, όπου $\lambda_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ είναι το

τοπικό μέγιστο και $-\lambda_0$ το τοπικό ελάχιστο της $f(0, x)$. Για $\lambda = \pm \lambda_0$ η εξίσωση (10.4) βρίσκεται σε σημείο διακλάδωσης. Για $\lambda < -\lambda_0$ και $\lambda > \lambda_0$, η εξίσωση (10.4) έχει και πάλι ευσταθή τροχιακή δομή. Τα διαγράμματα φάσεων για διάφορες τιμές του λ και το διάγραμμα διακλάδωσης της (10.4) απεικονίζονται, αντιστοίχως, στα Σχ. 10.6 και 10.7.



Σχήμα 10.6.



Σχήμα 10.7.

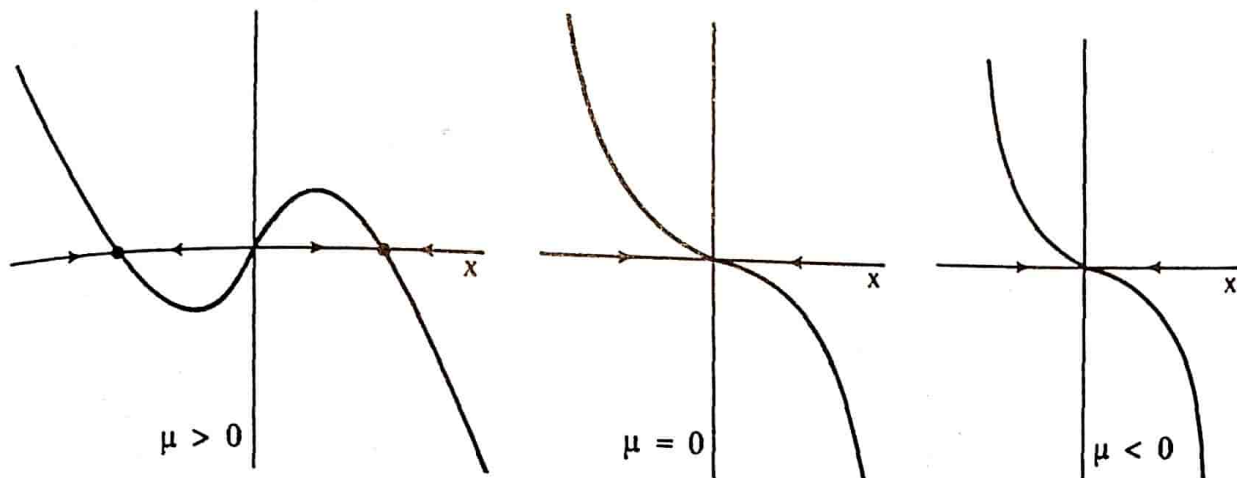
Παράδειγμα 10.5. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \mu x - x^3 := f(\mu, x), \mu \in \mathbb{R} \quad (10.5)$$

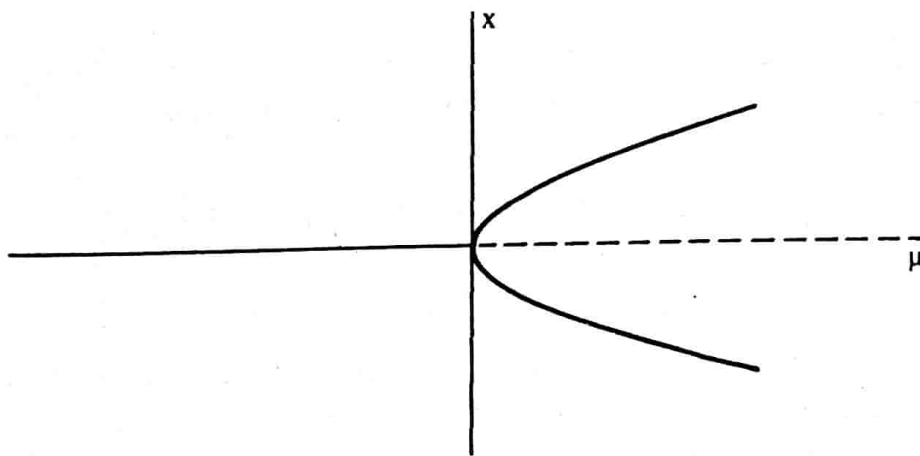
Το αποτέλεσμα της μεταβολής του μ είναι ισοδύναμο με το να μεταβάλλουμε την κλίση της καμπύλης στο 0, κρατώντας σταθερό τον x -άξονα. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η (10.5) έχει τρία σημεία ισορροπίας, και είναι ευσταθής για κάθε $\mu > 0$. Στο $\mu = 0$, τα σημεία ισορροπίας συμπιέτουν στο $x = 0$ και η (10.5) βρίσκεται σε σημείο διακλάδωσης. Για κάθε $\mu < 0$, η (10.5) έχει επίσης ευσταθή τροχιακή δομή με ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Το διάγραμμα διακλάδωσης της (10.5) απεικονίζεται στο Σχ. 10.9 και λόγω της προφανούς ομοιότητάς του, είναι γνωστό ως **δικρανική διακλάδωση**. Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ είναι πάντοτε σημείο ισορροπίας. Όμως, καθώς η παράμετρος μ διέρχεται από την τιμή διακλάδωσης $\mu = 0$, το σημείο ισορροπίας στο 0 χάνει την ευστάθειά του, προσφέροντας την σε δύο νέα ευσταθή σημεία ισορροπίας που προέρχονται από το 0.

Σε αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα, η δικρανική διακλάδωση λέγεται **υπερ-κρίσιμη**, επειδή τα πρόσθετα σημεία ισορροπίας που εισάγονται στην τιμή διακλάδωσης προέρχονται από τις τιμές του μ στις οποίες το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

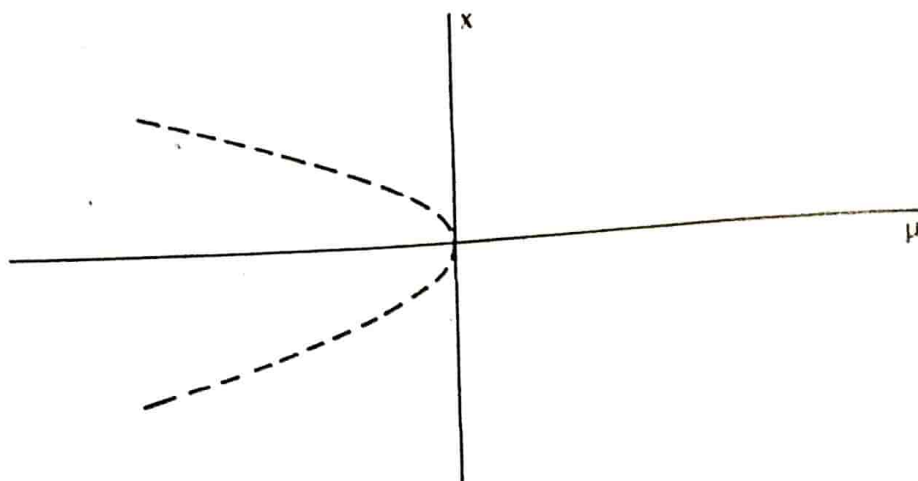


Σχήμα 10.8.



Σχήμα 10.9.

Όταν τα επιπλέον σημεία ισορροπίας προέρχονται από τις τιμές της παραμέτρου στις οποίες το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, η διακλάδωση λέγεται υπο-κρίσιμη.



Σχήμα 10.10.

Στο Σχ. 10.10, έχουμε ένα παράδειγμα υπο-κρίσιμης δικρανικής διακλάδωσης για τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \mu x + x^3, \mu \in \mathbb{R} \quad (10.6)$$

Παράδειγμα 10.6. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων, θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda + \mu x - x^3 := f(\lambda, \mu, x), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (10.7)$$

Η $f(\lambda, \mu, x)$ είναι η γενικότερη διαταραχή της $-x^3$ με όρους μικρότερου βαθμού, αφού ο όρος x^2 μπορεί πάντοτε -με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής- να εξαλειφθεί· πράγματι η συνάρτηση $-x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μετατρέπεται στην $-x^3 + \mu x + \lambda$ μέσω του μετασχηματισμού

$$x \rightarrow x + \frac{\alpha}{3}.$$

Βρίσκουμε, αρχικά, τις τιμές διακλάδωσης των παραμέτρων. Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα παραδείγματα, στα σημεία διακλάδωσης, μια διαφορική εξίσωση έχει ένα πολλαπλό σημείο ισορροπίας· θα πρέπει, δηλαδή, να ισχύει

$$f(\lambda, \mu, x) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, \mu, x) = 0 \quad (10.8)$$

Για την (10.7) οι σχέσεις αυτές είναι

$$\lambda + \mu x - x^3 = 0 \quad \text{και} \quad \mu - 3x^2 = 0 \quad (10.9)$$

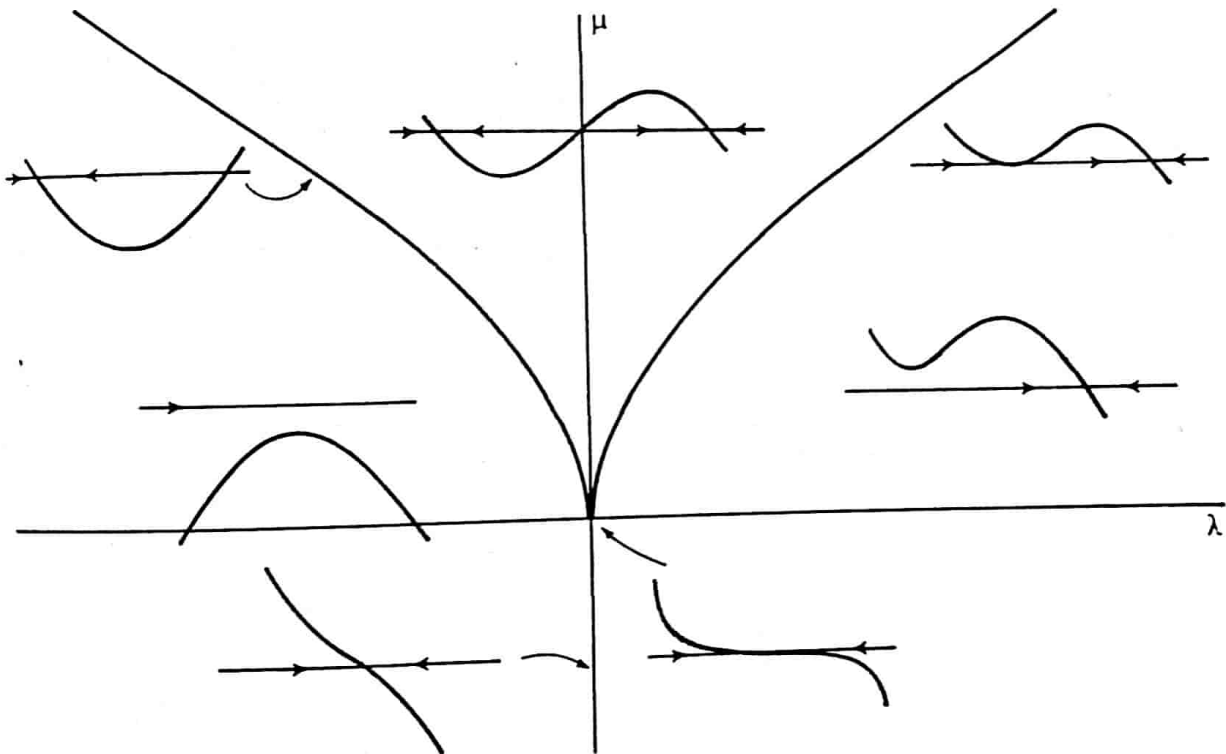
Μας ενδιαφέρουν όλες οι τιμές των λ και μ για τις οποίες οι (10.9) έχουν μια κοινή λύση x . Από τις (2.9) παίρνουμε

$$\mu = 3x^2, \quad \lambda = -2x^3 \quad (10.10)$$

που μας δίνουν την εξίσωση μιας αιχμής (cusp):

$$4\mu^3 = 27\lambda^2 \quad (10.11)$$

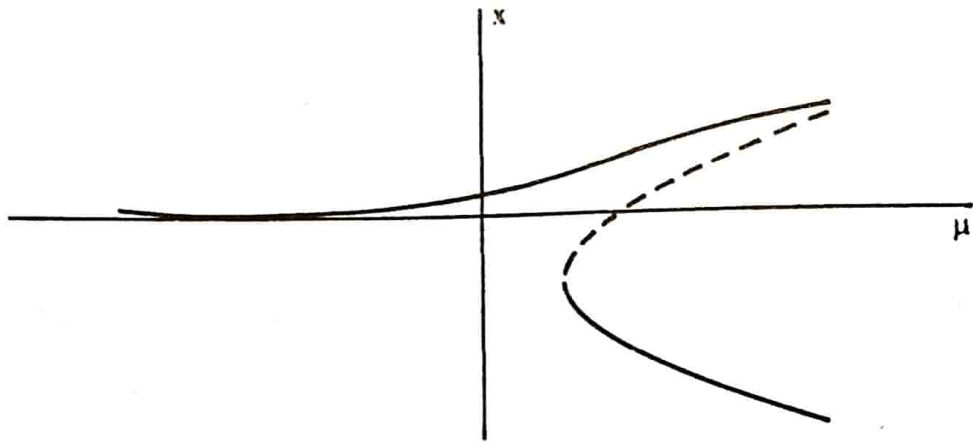
Στο Σχ. 10.11 έχει σχεδιασθεί η αιχμή στο (λ, μ) -επίπεδο, καθώς και ορισμένα αντιπροσωπευτικά διαγράμματα φάσεων της (10.7).



Σχήμα 10.11.

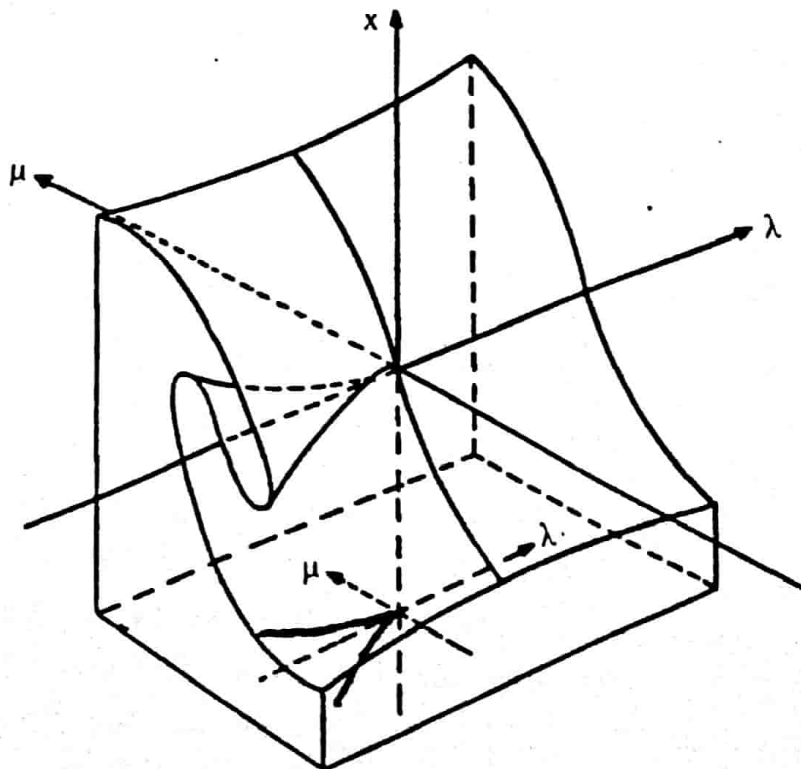
Από το Σχ. 10.11, μπορούμε με το να σταθεροποιήσουμε το μ σε μια θετική τιμή (π.χ. $\mu = 1$) να πάρουμε το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 10.7, που αναφέρεται στο Παράδειγμα 10.4. Εξάλλου, θέτοντας $\lambda = 0$ μπορούμε να πάρουμε το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 10.9, που αναφέρεται στο Παράδειγμα 10.5.

Η εξίσωση (10.7) περιέχει και μια "κρυμμένη" υπερ-κρίσιμη διακλάδωση σάγματος-κόμβου: σταθεροποιούμε το $\lambda \neq 0$ (π.χ. $\lambda=1$) και μεταβάλλουμε το μ (Σχ. 10.12).



Σχήμα 10.12.

Αν και είναι δύσκολο να σχεδιασθεί, το πλήρες διάγραμμα διακλάδωσης της (10.7) στον τρισδιάστατο (λ, μ, x) -χώρο, μπορεί να κατασκευαστεί από την $f(\lambda, \mu, x)=0$. Τα Σχ. 10.7, 10.9 και 10.12 δεν είναι, βεβαίως, παρά διάφορες επίπεδες τομές του πλήρους διαγράμματος διακλάδωσης του Σχ. 10.13.



Σχήμα 10.13.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της μαθηματικής ανάλυσης, που αποτελεί ένα ουσιαστικά απαραίτητο εργαλείο της Θεωρίας Διακλαδώσεων. Το παρουσιάζουμε σε μια απλοποιημένη εκδοχή του, κατάλληλη για τη μελέτη διακλαδώσεων των σημείων ισορροπίας βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 10.1. (Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης). Έστω ότι η $F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x)$ είναι μια C^1 -συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις

$$F(0,0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$$

Τότε υπάρχουν σταθερές $\delta > 0$, $\eta > 0$ και μια C^1 -συνάρτηση ψ με $\psi: \{\lambda \in \mathbb{R}^k: \|\lambda\| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$\psi(0) = 0 \quad \text{και} \quad F(\lambda, \psi(\lambda)) = 0 \quad \text{για} \quad \|\lambda\| < \delta.$$

Επιπλέον, αν υπάρχει κάποιο $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\|\lambda_0\| < \delta$, $|x_0| < \eta$ και $F(\lambda_0, x_0) = 0$, τότε ισχύει

$$x_0 = \psi(\lambda_0)$$

Παρατήρηση 10.1. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης σε κάποιες συγκεκριμένες καταστάσεις, ενδεχομένως απαιτείται να γίνει ένας μετασχηματισμός των μεταβλητών, έτσι, ώστε η αρχή των αξόνων να μηδενίζει τη συνάρτηση που εμφανίζεται. Αν, π.χ., η $G: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\mu, y) \rightarrow G(\mu, y)$ έχει $G(\mu_0, y_0) = 0$, τότε παίρνουμε ως F την $F(\lambda, x) = G(\mu_0 + \lambda, y_0 + x)$.

Παρατήρηση 10.2. Ο τρόπος με τον οποίον χρησιμοποιείται το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης για τη μελέτη διακλαδώσεων των σημείων ισορροπίας, είναι ο εξής:

Έστω $x' = f(\lambda, x)$ μια διαφορική εξίσωση που εξαρτάται από k παραμέτρους $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Αν το $x=0$ είναι ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης στο $\lambda=0$, τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Έτσι, εξασφαλίζεται ότι η εξίσωση $f(\lambda, x) = 0$ μπορεί να λυθεί τοπικά ως προς $x = \psi(\lambda)$, ως συνάρτηση των παραμέτρων $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Επιπλέον, για μικρό λ , ισχύει

$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, \psi(\lambda)) \neq 0$. Κατά συνέπεια, η ποιοτική δομή της ροής δεν αλλάζει κοντά στο $x=0$, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν διακλαδώσεις, στην περιοχή του $x=0$, για μικρές τιμές των παραμέτρων.

Παρατήρηση 10.3. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = f(\lambda, x) \quad (10.12)$$

όπου η $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow f(\lambda, x)$ είναι μια C^1 -συνάρτηση, τέτοια, ώστε

$$f(0, 0) = g(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'(0) \neq 0 \quad (10.13)$$

καθώς και τη μη-διαταραγμένη διαφορική εξίσωση

$$x' = g(x) \quad (10.14)$$

για την οποία υποθέτουμε ότι έχει σημείο ισορροπίας στο $x=0$ (δηλ. $g(0)=0$).

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό που παρατηρήσαμε για την εξίσωση (10.1) ισχύει και στη γενική παραπάνω περίπτωση, ότι, δηλαδή, η ροή κοντά σε ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας δεν διαφοροποιείται από μικρές διαταραχές του διανυσματικού πεδίου.

Παρατήρηση 10.4. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = f(\lambda, x) \quad (10.15)$$

όπου η $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow f(\lambda, x)$ είναι μια C^2 -συνάρτηση, τέτοια, ώστε

$$f(0, 0) = g(x) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad , \quad (10.16)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = g''(0) \neq 0$$

και, επιπλέον, $g(0)=0$.

Στο Παράδειγμα 10.2, είδαμε ότι η ροή της (10.2) αλλάζει, στο $\lambda=0$, από ροή με δύο σημεία ισορροπίας όταν $\lambda g''(0) < 0$ σε ροή με κανένα σημείο ισορροπίας όταν $\lambda g''(0) > 0$ (το ρόλο της f εκεί, παίζει η g εδώ). Με τη χρήση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, μπορεί να δειχθεί ότι η συμπεριφορά της διακλάδωσης της (10.2), διατηρείται στη γενική περίπτωση ((10.15), (10.16)).

Το πλήθος των σημείων ισορροπίας της (10.15) εξαρτάται από την ακρότατη τιμή

$$a(\lambda) := f(\lambda, \psi(\lambda)) \quad (10.17)$$

της συνάρτησης f . Ειδικότερα, όταν $a(\lambda)g''(0) < 0$, υπάρχουν δύο υπερβολικά σημεία ισορροπίας κοντά στην αρχή των αξόνων, αν $a(\lambda) = 0$, υπάρχει ένα μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων και, τέλος, όταν $a(\lambda)g''(0) > 0$, δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας γύρω από την αρχή των αξόνων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και υπεισέρχονται k παράμετροι, η συμπεριφορά διακλάδωσης της (10.15) εξαρτάται από έναν μόνο αριθμό, το $a(\lambda)$. Όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο, λέμε ότι το αρχικό διανυσματικό πεδίο g είναι μια διακλάδωση συνδιάστασης 1.

Παρατήρηση 10.5. Θεωρούμε, τέλος, τη διαφορική εξίσωση

$$x' = f(\lambda, x) \quad (10.18)$$

όπου η $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow f(\lambda, x)$ είναι μια C^3 -συνάρτηση, τέτοια, ώστε

$$f(0, 0) = g(x) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2}(0, 0) = g''(0) \neq 0 \quad (10.19)$$

Μια πλήρης ανάλυση διακλάδωσης αυτού του προβλήματος είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Τα πράγματα είναι απλούστερα αν θεωρήσουμε $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ τότε, με τη βοήθεια, και πάλι, του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, μπορεί να δειχθεί ότι το Παράδειγμα 10.6 είναι

αντιπροσωπευτικό του τι μπορεί να συμβεί στη γενική περίπτωση ((10.18), (10.19)), κοντά στο σημείο ισορροπίας $x=0$.

Ένα άλλο παράδειγμα προβλήματος διακλάδωσης, που σε πρώτη ματιά εμφανίζεται να είναι διαφορετικής φύσης, αλλά στην πραγματικότητα είναι του ίδιου τύπου με τα προηγούμενα είναι το εξής:

Παράδειγμα 10.7. Να βρεθούν οι διαφορετικοί τύποι διαγράμματος φάσεων που εμφανίζονται στο μονοπαραμετρικό σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + \mu y - x(x^2 + y^2) \end{aligned}, \mu \in \mathbb{R} \quad (10.20)$$

Σε πολικές συντεταγμένες το (10.20) γράφεται

$$\begin{aligned} r' &= r(\mu - r^2) \\ \Theta' &= 1 \end{aligned} \quad (10.21)$$

Για $\mu < 0$, ισχύει $r=0$ όταν $r'=0$. διαφορετικά $r < 0$. Έτσι για κάθε αρνητικό μ , τα διαγράμματα φάσεων είναι ευσταθείς εστίες (ελκυστικοί έλικες). Όταν $\mu=0$, ισχύει $r' = -r^3$ και έτσι το διάγραμμα φάσεων είναι και πάλι ευσταθής εστία (όταν $\mu=0$, το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι κέντρο). Όταν, όμως $\mu > 0$, η αρχή των αξόνων είναι ασταθής αφού $r' > 0$ για $0 < r < \sqrt{\mu}$.

Η $r(t) = \sqrt{\mu}$, $\Theta(t) = t$ είναι λύση του (10.21), και έτσι ο κύκλος $r = \sqrt{\mu}$ συνιστά μια κλειστή τροχιά. Όταν $r > \sqrt{\mu}$, ισχύει $r' < 0$ και έτσι η κλειστή αυτή τροχιά είναι ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Έχουμε, λοιπόν, ότι στο $\mu=0$ το σύστημα (10.20) υφίσταται διακλάδωση.

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης του (10.20) στο $(0,0)$, είναι $\mu \pm i$, και στο σημείο διακλάδωσης $\mu=0$ γίνονται γνήσια φανταστικές. Για $\mu > 0$, υπάρχει ένας οριακός κύκλος που, καθώς το μ αυξάνει, αυξάνει σε μέγεθος "απομακρυνόμενος" από το σημείο ισορροπίας. Αυτό είναι ένα παράδειγμα της λεγόμενης διακλάδωσης Hopf.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ικανές συνθήκες για την εμφάνιση ένας οριακού κύκλου κατ'αυτόν τον τρόπο.

Θεώρημα 10.2. (Διακλάδωση Hopf). Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \mu) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \mu) \end{aligned}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (10.22)$$

Έστω ότι το (10.22) έχει σημείο ισορροπίας στο (0,0) για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1(\mu)$ και $\lambda_2(\mu)$ του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι γνήσια φανταστικές όταν $\mu = \mu_0$. Αν το πραγματικό μέρος ($\text{Re}\lambda_1(\mu) = \text{Re}\lambda_2(\mu)$) των ιδιοτιμών ικανοποιεί τη σχέση

$$\left. \frac{d}{d\mu} \text{Re}\lambda_1(\mu) \right|_{\mu = \mu_0} > 0 \quad (10.23)$$

και αν το (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας όταν $\mu = \mu_0$, τότε:

- (i) το $\mu = \mu_0$ είναι σημείο διακλάδωσης του (10.22)
- (ii) για $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ (για κάποιο $\mu_1 < \mu_0$) το (0,0) είναι ευσταθής εστία
- (iii) για $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ (για κάποιο $\mu_2 > \mu_0$) το (0,0) είναι ασταθής εστία που περιβάλλεται από έναν ευσταθή οριακό κύκλο, του οποίου η ακτίνα αυξάνει καθώς αυξάνει το μ .

Παράδειγμα 10.6. Η διακλάδωση Hopf χαρακτηρίζεται από μεταβολή της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας που συνοδεύεται από τη δημιουργία ενός οριακού κύκλου.

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Ma-McC].

Παράδειγμα 10.8. Ναδειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= \mu x_1 - 2x_2 - 2x_1(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ x_2' &= 2x_1 - \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{aligned} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (10.24)$$

υφίσταται μια διακλάδωση Hopf στο (0,0), όταν $\mu = 0$.

Το (0,0) είναι ένα σημείο ισορροπίας του (10.24) για κάθε μ . Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} x_1' &= \mu x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + \mu x_2 \end{aligned} \quad (10.25)$$

που έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2}(\mu) = \mu \pm 2i$.
Έτσι, όταν $\mu=0$ έχουμε ότι $\lambda_{1,2}(0) = \pm 2i$ και

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_1(\mu) \right|_{\mu=0} = 1 > 0$$

Η συνάρτηση

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (10.26)$$

$$\text{με } V'(x_1, x_2) = -2(2x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (10.27)$$

είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov του (10.24) με $\mu=0$, και κατά συνέπεια το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ισχύουν, λοιπόν, όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 10.2.

Παρατήρηση 10.7. Αν δεν μπορεί να βρεθεί μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov, τότε είναι δύσκολο να ελεγχθεί αν το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, όταν το μ βρίσκεται στο σημείο διακλάδωσης μ_0 . Επειδή το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι κέντρο, το Θεώρημα Γραμμικοποίησης δεν είναι δυνατό να προσδιορίσει τη φύση του μη γραμμικού σημείου ισορροπίας. Υπάρχει, παρ'όλα αυτά μια διαδικασία, που επιτρέπει τον προσδιορισμό της ευστάθειας στο $\mu=\mu_0$. Αυτή συνίσταται στον υπολογισμό ενός δείκτη που περιγράφεται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 10.1. Θεωρούμε το σύστημα

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, \mu), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2, \mu) \quad (10.28)$$

και έστω

$$x' = Ax, \quad x = (x_1, x_2) \quad (10.29)$$

η γραμμικοποίηση του (10.28) στο $(0,0)$ όταν $\mu=\mu_0$.
Έστω M ένας μη ιδιάζων πίνακας, τέτοιος, ώστε

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & |\beta| \\ -|\beta| & 0 \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

όπου $\pm i\beta$ είναι οι ιδιοτιμές του A .

Έστω

$$y_1' = g_1(y_1, y_2), \quad y_2' = g_2(y_1, y_2) \quad (10.31)$$

το σύστημα στο οποίο μετατρέπεται το (10.28) με $\mu = \mu_0$, μέσω του μετασχηματισμού

$$x = My \quad (10.32)$$

Έστω, τέλος,

$$g_{jk}^i = \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_j \partial y_k} (0, 1) \quad \text{και} \quad g_{jkl}^i = \frac{\partial^3 g_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l} (0, 0) \quad (10.33)$$

και ορίζουμε

$$\begin{aligned} I = & |\beta| \{g_{111}^1 + g_{122}^1 + g_{112}^2 + g_{222}^2\} + \\ & + \{g_{11}^1 g_{11}^2 - g_{11}^1 g_{12}^1 + g_{11}^2 g_{12}^2\} + \\ & + \{g_{22}^2 g_{12}^2 - g_{22}^1 g_{12}^1 - g_{22}^1 g_{22}^2\} \end{aligned} \quad (10.34)$$

Αν $I < 0$, τότε το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 10.9. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x'' + (x^2 - \mu)x' + 2x + x^3 = 0 \quad (10.35)$$

έχει σημείο διακλάδωσης στο $\mu = 0$ και ταλαντώνεται για κάποιο $\mu > 0$.

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -(x_1^2 - \mu)x_2 - 2x_1 - x_1^3 \end{aligned} \quad (10.36)$$

που έχει ένα σημείο ισορροπίας στο $(0,0)$.

Η γραμμικοποίηση του (10.36) είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

που έχει ιδιοτιμές

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8}}{2}$$

Για $\mu=0$, οι ιδιοτιμές αυτές είναι γνήσια φανταστικές και ισχύει

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda \Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2}$$

Ο πίνακας

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (10.38)$$

έχει την ιδιότητα

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλλαγή μεταβλητής

$$\mathbf{x} = M\mathbf{y} \quad (10.39)$$

μετασχηματίζει το (10.36), με $\mu=0$, στο σύστημα

$$y_1' = \sqrt{2} y_2$$

$$y_2' = -\sqrt{2} y_1 - y_1^2 y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1^3 \quad (10.40)$$

Ο δείκτης I υπολογίζεται από την (10.34) και είναι

$$I = -2\sqrt{2}$$

Το σύστημα (10.36), λοιπόν, διακλαδώνεται σε έναν ευσταθή οριακό κύκλο, που περιβάλλει ένα ασταθές σημείο ισορροπίας στο $(0,0)$, καθώς το μ αυξάνεται διερχόμενο από το 0. Το (10.36) συνιστά την αναπαράσταση της (10.35) στο επίπεδο φάσεων και η ύπαρξη μιας κλειστής τροχιάς, συνεπάγεται ότι η $x(t)$ ταλαντώνεται για κάποιο $\mu > 0$.

11. ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ

Όταν βράζουμε νερό, παρατηρούμε ότι ξαφνικά εμφανίζονται φυσαλλίδες και ένα μέρος του υγρού μετατρέπεται σε ατμό. Κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας, ένας κεραυνός μπορεί να πέσει ξαφνικά. Κύτταρα που έχουν επιδείξει κανονική συμπεριφορά, ξαφνικά γίνονται καρκινικά και πολλαπλασιάζονται ραγδαία.

Τέτοιες ξαφνικές αλλαγές στην κατάσταση ενός συστήματος λέγονται καταστροφές. Ο στόχος της θεωρίας καταστροφών είναι η κατασκευή ενός μαθηματικού συστήματος που να προσφέρεται για την περιγραφή ασυνεχών μεταβολών κατάστασης σε κάθε πλαίσιο. Αυτός ο στόχος δεν έχει επιτευχθεί γενικώς, όμως η θεωρία έχει αναπτυχθεί τόσο, ώστε να καλύπτει ένα κάποιο πλήθος ενδεχομένων.

Η θεωρία καταστροφών έχει προκαλέσει έντονη επιστημονική διαμάχη. Σε αυτή την παράγραφο θα επιχειρήσουμε απλώς να δώσουμε μια "γεύση" ορισμένων ιδεών της· η αναλυτική μαθηματική επεξεργασία τους, ξεφεύγει από τα όρια και το επίπεδο που απευθύνονται αυτές οι σημειώσεις. Τέλος, θα επιχειρήσουμε και έναν σχολιασμό και μια κριτική της θεωρίας. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν στα συγγράμματα:

- R. Thom: Structural Stability and Morphogenesis, Benjamin-Cummings, 1975.
- V. I. Arnold: Catastrophe Theory, Springer, 1984.
- T. Poston-I. Stewart: Catastrophe Theory and its Applications, Pitman, 1978.
- Y. C. Lu: Singularity Theory and an introduction to Catastrophe Theory, Springer, 1976.
- I. Ekeland: Mathematics and the Unexpected, University of Chicago Press, 1988.

(Μετάφραση στα Ελληνικά είναι υπό έκδοση, εκδ. οίκος Δίαυλος).

Θεωρούμε ότι η κατάσταση ενός συστήματος μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια των μεταβλητών x_1, \dots, x_n , μια μικρή μεταβολή στις οποίες συνοδεύεται από μια μικρή αλλαγή στη μορφή του συστήματος. Εκτός από τις x_1, \dots, x_n , εμφανίζονται και παράμετροι a_1, \dots, a_k που χαρακτηρίζουν την αλληλεπίδραση των διαφόρων τμημάτων του συστήματος. Αν με μια μικρή μεταβολή στις a_1, \dots, a_k , η κατάσταση του συστήματος διαφοροποιείται δραστικά, λέμε ότι συμβαίνει μια καταστροφή, και το σύνολο των τιμών a_1, \dots, a_k για τις οποίες συμβαίνει η καταστροφή, λέγεται σύνολο

καταστροφής. Αν, αντιθέτως, μια μικρή μεταβολή στις a_1, \dots, a_k , προκαλεί μια μικρή τροποποίηση της κατάστασης του συστήματος, αυτή η κατάσταση λέγεται **κανονική**.

Οι x_1, \dots, x_n λέγονται **μεταβλητές κατάστασης**, ενώ οι ποσότητες a_1, \dots, a_k , που μπορεί να επηρεάζονται από εξωτερικές διαταραχές, λέγονται **παράμετροι του συστήματος**.

Έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση

$$V(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_k)$$

που για σταθεροποιημένες a_1, \dots, a_k δίνει τις ενδεχόμενες καταστάσεις του συστήματος ως τιμές των x_1, \dots, x_n , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11.1)$$

Πολύ συχνά, η V σχετίζεται με κάποιας μορφής ενέργεια του συστήματος και έτσι η V λέγεται **συνάρτηση δυναμικού**. Όταν οι x_1, \dots, x_n ικανοποιούν τις (11.1), προσδιορίζουν μια **κατάσταση ισορροπίας**.

Ορισμός 11.1. Η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

ονομάζεται **ορίζουσα Hesse** της V .

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί το ακόλουθο:

Θεώρημα 11.1. Μια κατάσταση ισορροπίας είναι καταστροφική ή κανονική, ανάλογα με το αν η ορίζουσα Hesse της συνάρτησης δυναμικού μηδενίζεται ή όχι, αντιστοίχως.

Ένα άλλο ερώτημα είναι το εξής: αν το σύστημα βρίσκεται σε κανονική κατάσταση ισορροπίας και μεταβληθούν λίγο οι x_1, \dots, x_n ενώ μείνουν αμετάβλητες οι $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, θα παραμείνει το σύστημα κοντά στη θέση ισορροπίας ή θα τείνει να απομακρυνθεί από αυτήν; Το κριτήριο που χρησιμοποιείται, σχετικά, είναι: αν για κάθε δυνατή, μικρή μεταβολή των x_1, \dots, x_n το δυναμικό V αυξάνει από την ισορροπία του, η κατάσταση ισορροπίας λέγεται **ευσταθής**. Αν, αντιθέτως, για τέτοιες μεταβολές των x_1, \dots, x_n το V δεν αυξάνει, η κατάσταση ισορροπίας λέγεται **ασταθής**.

Αν οι μεταβλητές κατάστασης επιλέγουν καταλλήλως, οι ιδιαιτερότητες που ενδεχομένως παρουσιάζει το σύστημα κοντά σε μια θέση ισορροπίας, μπορούν να αναχθούν στη μελέτη μερικών μόνο τυπικών περιπτώσεων, που είναι γνωστές ως **στοιχειώδεις καταστροφές**. Αυτές οι στοιχειώδεις καταστροφές περιλαμβάνουν μια ή δύο μεταβλητές κατάστασης, ανεξάρτητα από το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης που υπάρχουν αρχικά.

Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε ότι η θέση ισορροπίας είναι στην αρχή των αξόνων, τότε μπορούμε -με ακρίβεια τέταρτης τάξης- να γράψουμε

$$V = V_0 + \sum_{i,j} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,\ell} b_{ij\ell} x_i x_j x_\ell + \sum_{i,j,\ell,m} c_{ij\ell m} x_i x_j x_\ell x_m$$

Εν γένει οι συντελεστές d_{ij} , $b_{ij\ell}$, $c_{ij\ell m}$ εξαρτώνται από τις $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Περιστρέφοντας τους άξονες, μπορούμε να έχουμε στο πρώτο από τα παραπάνω αθροίσματα μόνο τετραγωνικούς όρους και έτσι να πάρουμε

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^2 + \sum_{i,j,\ell} B_{ij\ell} X_i X_j X_\ell + \sum_{i,j,\ell,m} C_{ij\ell m} X_i X_j X_\ell X_m$$

όπου οι λ_i λέγονται **ιδιοτιμές**.

Εύκολα φαίνεται ότι η οριζούσα Hesse του Θεωρήματος 11.1 ισούται με

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i$$

στη θέση ισορροπίας. Αν, λοιπόν, δεν μηδενίζεται καμιά ιδιοτιμή καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του συστήματος, η κατάσταση ισορροπίας

παραμένει κανονική. Επίσης, τα χαρακτηριστικά ευστάθειας δεν μεταβάλλονται, όταν αλλάζουν οι παράμετροι. Με άλλα λόγια, δεν μπορεί να συμβεί ανταλλαγή ευστάθειας εκτός από εκεί όπου μηδενίζεται μια τουλάχιστον ιδιοτιμή· τότε τα $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ αποτελούν ένα μέλος του συνόλου καταστροφής. Αυτές οι ιδέες μας δείχνουν τη στενή σύνδεση των διακλαδώσεων με τις καταστροφές και μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Θεώρημα 11.2. Αν δεν μηδενίζεται καμιά ιδιοτιμή, η κατάσταση ισορροπίας είναι κανονική και η ευστάθεια τους δεν μεταβάλλεται με τις παραμέτρους του συστήματος.

Στην περίπτωση που υφίσταται καταστροφή (αν, δηλ. μηδενίζεται μια τουλάχιστον ιδιοτιμή), ο R. Thom απέδειξε το 1975 το ακόλουθο.

Θεώρημα 11.3. Για συστήματα με τέσσερεις το πολύ παραμέτρους (αλλά με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών κατάστασης) υπάρχουν, ουσιαστικά, επτά πιθανοί τύποι συνόλων καταστροφής.

Το θεώρημα αυτό εξειδικεύεται στον παρακάτω πίνακα· για την κατανόηση του απαιτείται η ακόλουθη ορολογία: όταν οι όροι m -τάξης της (11.3) δεν μπορούν να απαλειφούν μέσω κατάλληλης επιλογής παραμέτρων, η κατάσταση λέγεται **ισορροπία επιπέδου m** ($m=3,4,5,6$).

ΟΝΟΜΑ			ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ	Πλήθος και είδος ριζών των όρων τρίτης τάξης
Πτυχή	1	3	c_1x+x^3	Τρεις άνισες πραγματικές
Αιχμή	1	4	$c_1x+c_2x^2+x^4$	
Χελιδονοουρά	1	5	$c_1x+c_2x^2+c_3x+x^5$	
Ελλειπτική Ομφαλική	2	3	$x^3-3xy^2+a(x^2+y^2)+bx+cy$	Μία μόνο πραγμ.
Υπερβολική Ομφαλική	2	3	$x^3+y^3+axy+bx+cy$	
Παραβολική Ομφαλ.	2	4	$x^2y+y^4+ax^2+by^2+cx+dy$	Τρεις (δύο ίσες) πραγματικές
Πεταλούδα	1	6	$c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+x^6$	

Παρατήρηση 11.1. Η έννοια του επιρρήματος "ουσιαστικά" στη διατύπωση του Θεωρήματος 11.3 είναι η εξής: αν η $V(x,a)$ έχει σύνολο καταστροφής K και η $U(y,b)$ έχει ως σύνολο καταστροφής το κενό, τότε

$$W(x,y,a,b) := V(x,a) + U(y,b)$$

έχει το ίδιο σύνολο καταστροφής με την V . Έτσι οι επιπρόσθετες μεταβλητές κατάστασης y και παράμετροι b , δεν είναι ουσιώδεις στην κατάταξη του συνόλου καταστροφής της W .

Παρατήρηση 11.2. Είναι δυνατόν να μελετηθεί το τι συμβαίνει όταν μπορούν να μηδενισθούν τρεις ιδιοτιμές: μπορεί να εμφανισθούν τέσσερεις ακόμα καταστροφές. Όταν, όμως, μηδενίζονται περισσότερες από τρεις ιδιοτιμές, το πλήθος των ενδεχομένων είναι απεριόριστο.

Παρατήρηση 11.3. Στα προηγούμενα, έχει υποτεθεί ότι οι θέσεις ισορροπίας δίνονται από εκείνες τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης που κάνουν τη V στάσιμη. Τέτοιες θέσεις αναμένεται πως θα υπάρχουν σε εσωτερικά σημεία του πεδίου επί του οποίου μεταβάλλονται οι μεταβλητές κατάστασης. Αν, όμως, για την εμφάνιση θέσης ισορροπίας απαιτείται η V να παίρνει τη μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή της, τότε η θέση αυτή μπορεί να μην πραγματοποιείται σε εσωτερικό σημείο του πεδίου μεταβολής των μεταβλητών κατάστασης, αλλά στο σύνορο του. Τότε, όμως, η V δεν είναι στάσιμη εκεί και έτσι όλη η θεωρία ακυρώνεται.

Παράδειγμα 11.1. Να ταξινομηθεί το σύνολο καταστροφών της

$$V(x,y,a,b) = x^3 - 4xy + ax^2 + bx + 4y^2 \quad (11.2)$$

Τα κρίσιμα σημεία της V θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 4y + 2ax + b = 0 \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -4x + 8y = 0 \quad (11.4)$$

Η ορίζουσα Hesse της V γίνεται ίση με το μηδέν, αν

$$\begin{vmatrix} 6x + 2a & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 48x + 16(a - 1) = 0 \quad (11.5)$$

Από τις (11.3) ως (11.5) παίρνουμε ότι ένα σημείο (a,b) ανήκει στο σύνολο καταστροφών της V τότε και μόνο τότε, αν

$$b^3 = (1-\alpha)^2 \quad (11.6)$$

Θέτουμε

$$u = x + \frac{1}{3} (\alpha - 1) \quad c_1 = \alpha - 1$$

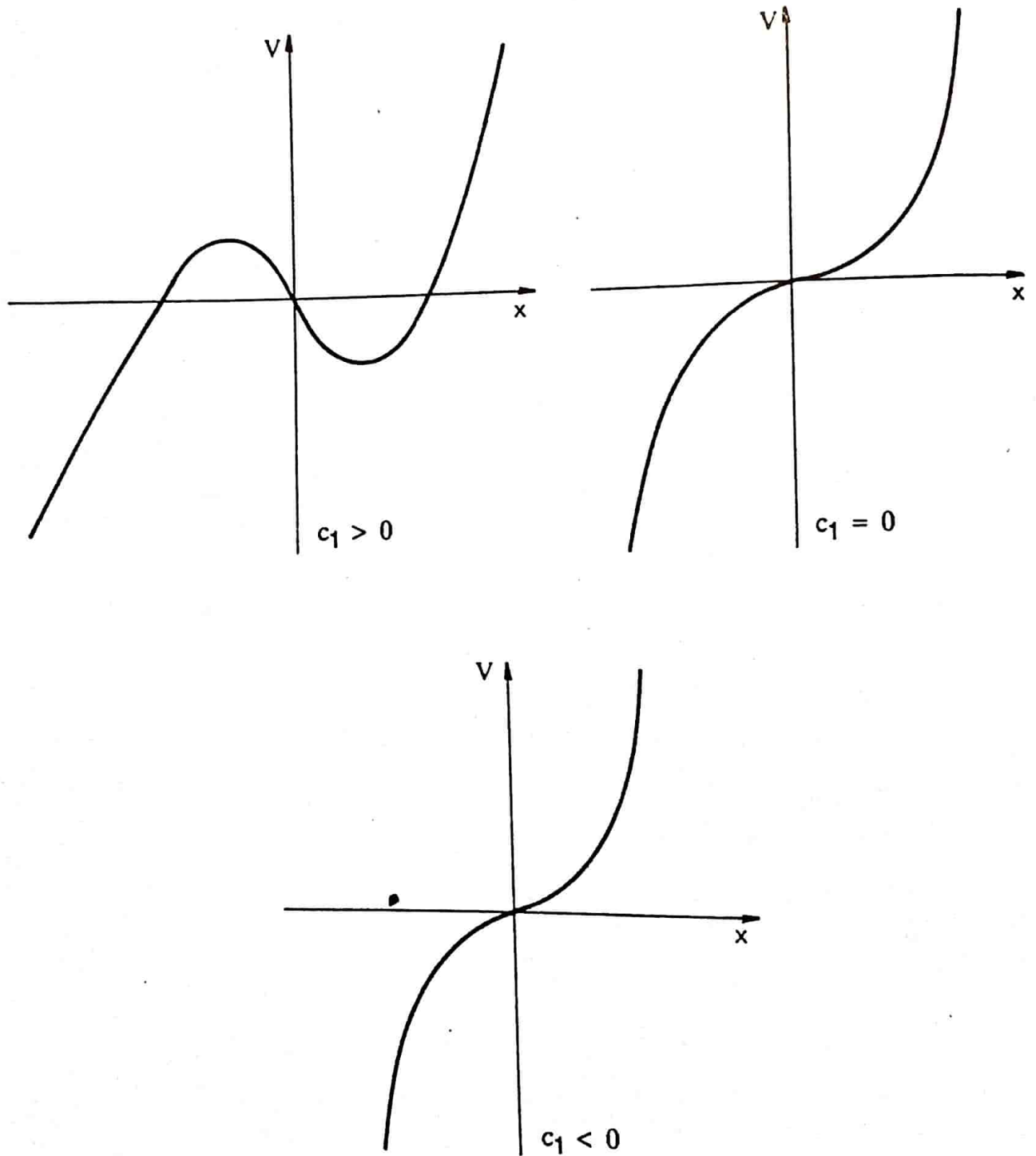
$$v = x - 2y \quad c_2 = b - \frac{1}{3} (\alpha - 1)^2 \quad (11.7)$$

παίρνουμε

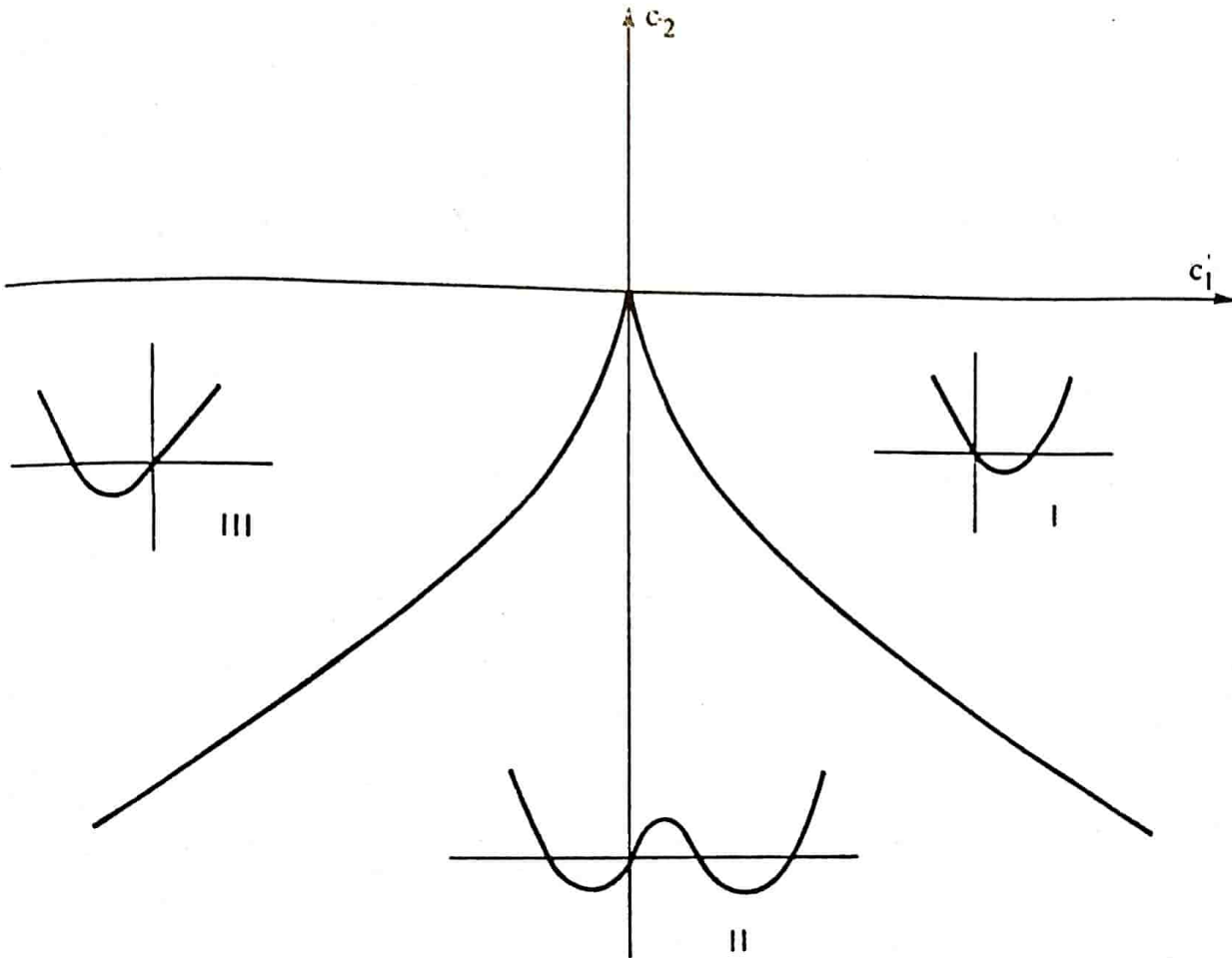
$$V(u, v, c_1, c_2) = u^3 + c_2 u + v^2 - \frac{1}{3} c_1 \left[c_2 + \left(\frac{c_1^2}{3} \right) \right] \quad (11.8)$$

Παρατηρούμε ότι η πρόσθεση μιας σταθεράς στη συνάρτηση δυναμικού, δεν μεταβάλλει τις εξισώσεις του συστήματος και, έτσι, δεν μπορεί να έχει καμιά επίδραση επί του συνόλου καταστροφών. Συνεπώς, ο τελευταίος όρος της (11.8) μπορεί να αγνοηθεί. Εξάλλου, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή v δεν είναι ουσιώδης για την κατάταξη του συνόλου καταστροφών, που προφανώς είναι πτυχή.

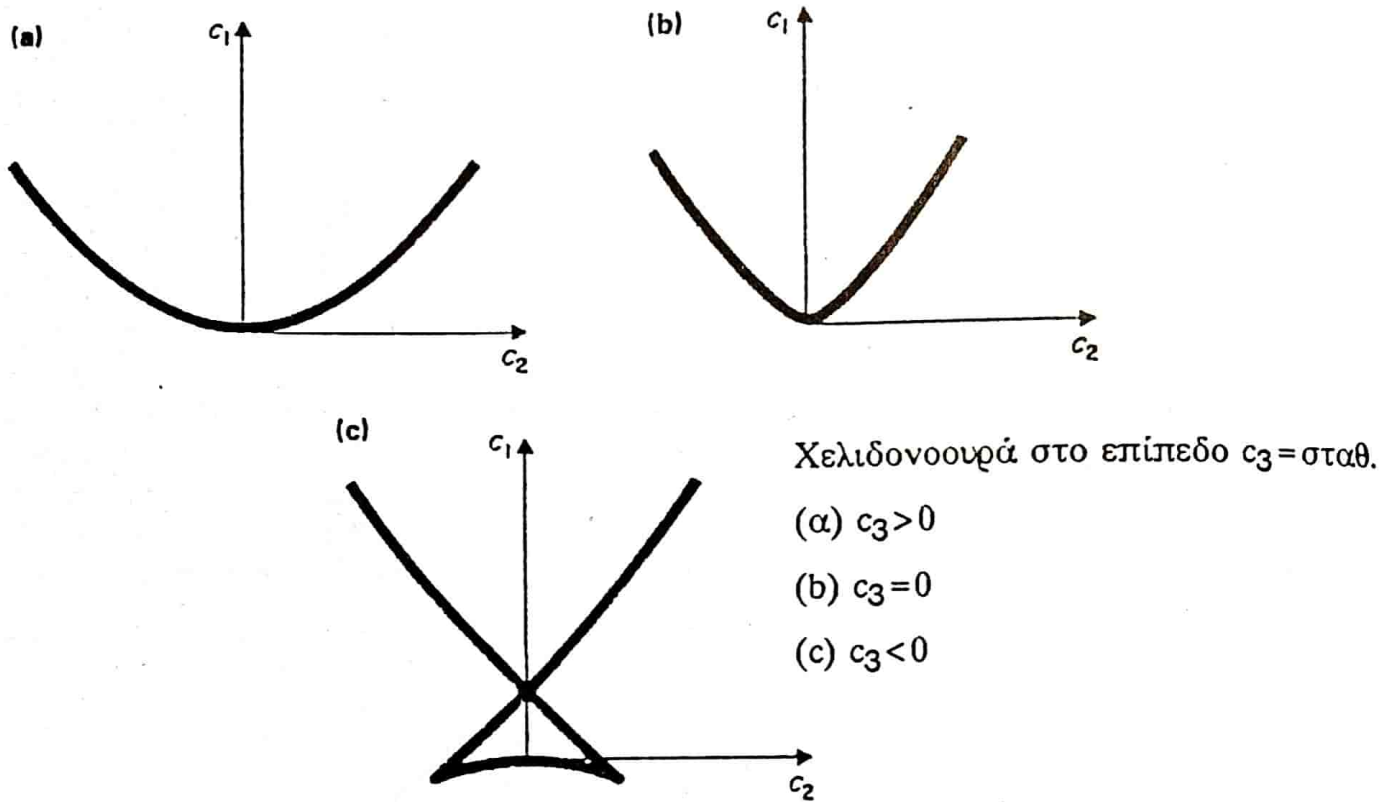
Στη συνέχεια, δίνουμε ορισμένα σχήματα που αναφέρονται στις επτά στοιχειώδεις καταστροφές.



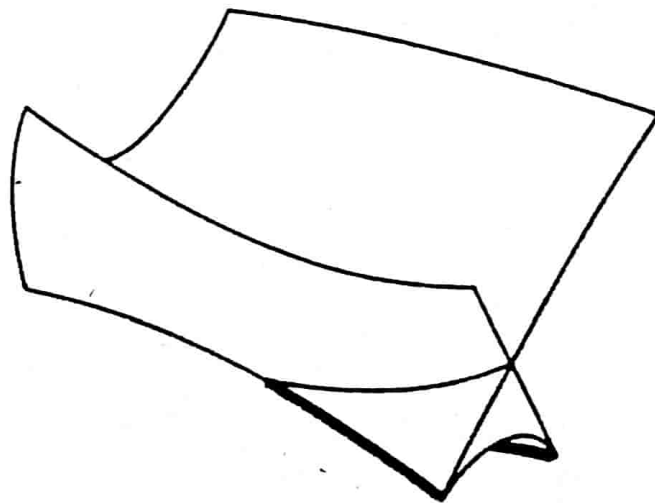
Σχήμα 11.1. Πτυχή για διάφορες τιμές της παραμέτρου c_1 .



Σχήμα 11.2. Αιχμή

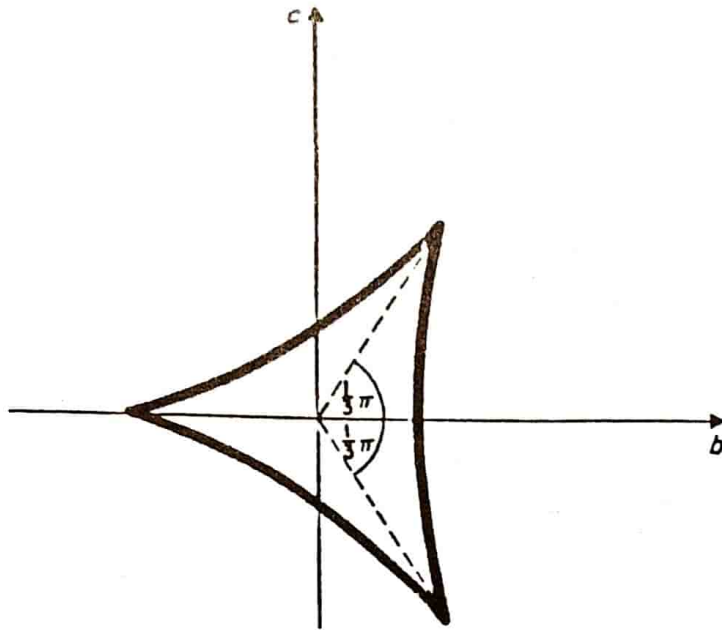


Σχήμα 11.3.

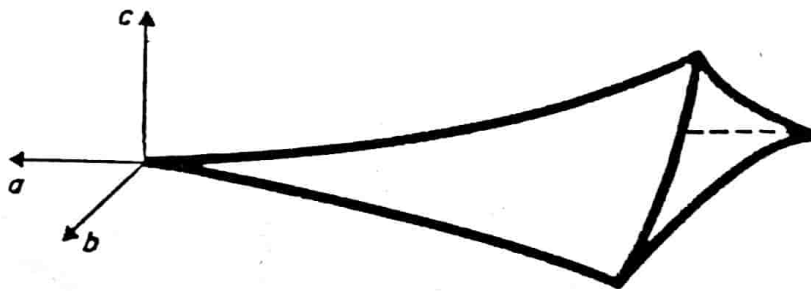


Χελιδονοουρά σε τρεις διαστάσεις

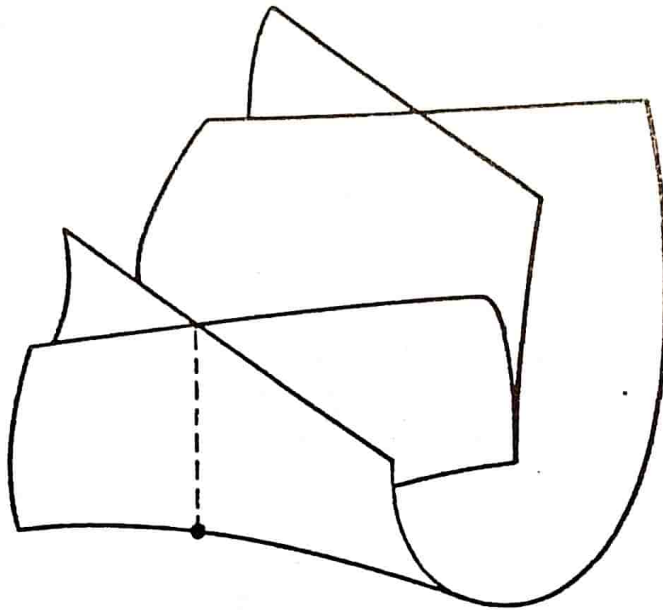
Σχήμα 11.4.



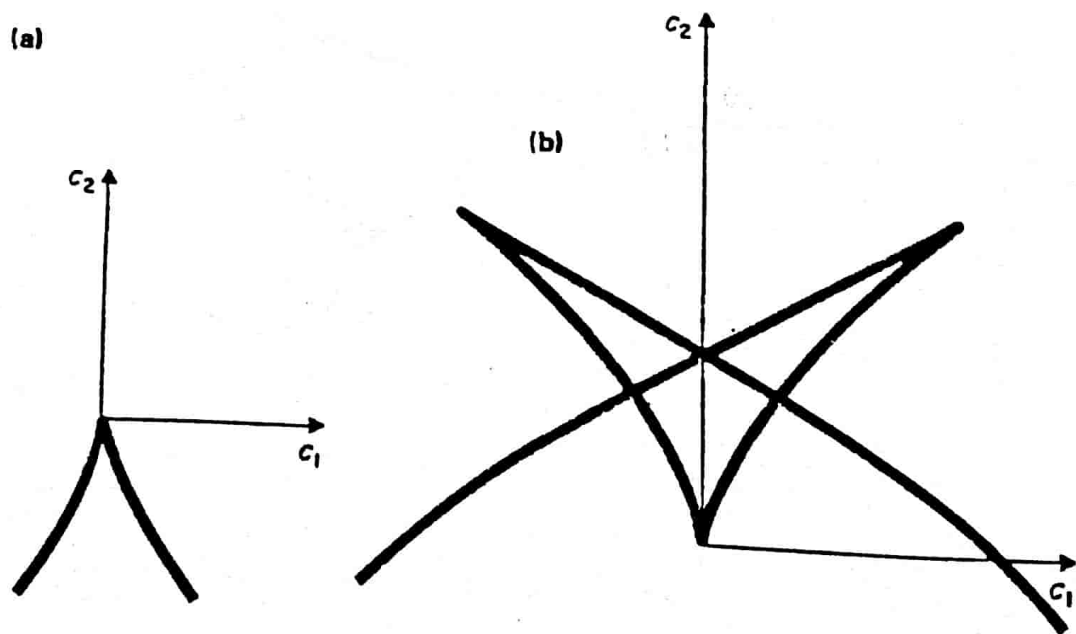
Σχήμα 11.5. Ελλειπτική Ομφαλική στο επίπεδο $\alpha = \text{σταθ.}$



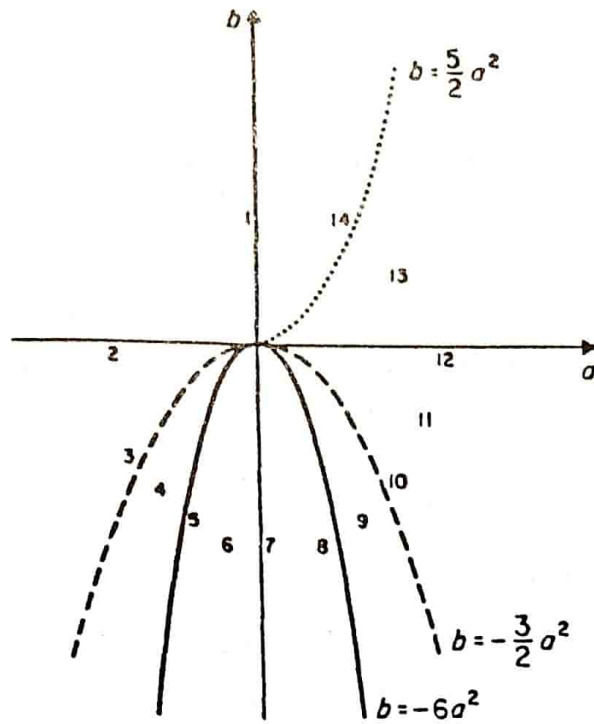
Σχήμα 11.6. Ελλειπτική Ομφαλική στον (α, b, c) -χώρο, για $\alpha < 0$.



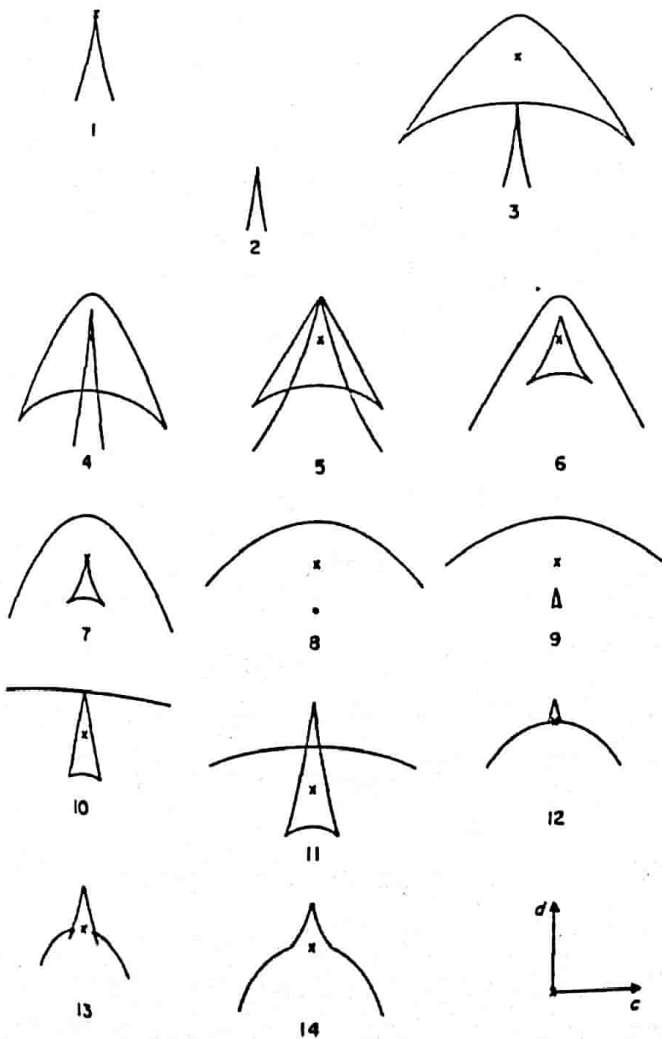
Σχήμα 11.7. Υπερβολική Ομφαλική στον (α, b, c) -χώρο.



Σχήμα 11.8. Πεταλούδα, όταν $c_3=0$ και (α) $c_4>0$, (β) $c_4<0$.



Σχήμα 11.9. Υποδιαίρεσεις του (α,β)-επιπέδου για την Παραβολική Ομφαλική.



Σύνολο καταστροφών στο (c, d)-επίπεδο για τις αριθμημένες θέσεις του (a, b)-επιπέδου.

Η αρχή των αξόνων σημειώνεται με "x". Οι διευθύνσεις των αξόνων εμφανίζονται κάτω δεξιά.

Σχήμα 11.10.

ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ

Η Θεωρία Καταστροφών μας πληροφορεί ότι αν επιδράσουμε σε ένα σύστημα με απόσβεση (dissipative system), μέσω δύο εξωτερικών μεταβλητών -διατηρώντας σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους- το σύνολο καταστροφών θα είναι μια οικογένεια αιχμών στο επίπεδο. Ενδεχομένως δεν θα υπάρχουν καθόλου αιχμές και το σύνολο καταστροφών θα αποτελείται μόνο από λείες καμπύλες (χωρίς γωνίες). Αυτό που μας λέει η Θεωρία, είναι ότι -στη διδιάστατη περίπτωση- δεν θα εμφανιστεί ποτέ ένα σχήμα πιο περίπλοκο από την αιχμή, ως σύνολο καταστροφών: θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι θα μπορούσαν να συμβαίνουν καταστροφές σε μεμονωμένα σημεία του επιπέδου, ή ότι θα υπήρχαν ολόκληρα πεδία αποτελούμενα μόνο από σημεία καταστροφών. Κάτι τέτοιο, κατά τη Θεωρία Καταστροφών- δεν συμβαίνει γενικώς. Η Θεωρία δεν ισχυρίζεται ότι οι πρότασεις της ισχύουν για όλα τα συστήματα με απόσβεση, αλλά για τα περισσότερα: αν ένα σύστημα δεν εμπίπτει σε αυτό το "γενικώς", η θεωρία λέει πως αν είχαμε τη δυνατότητα να παρέμβουμε στο σύστημα, τροποποιώντας το δυναμικό του λίγο, θα παίρναμε ένα νέο σύστημα, με σύνολο καταστροφών αποτελούμενο από λείες καμπύλες και αιχμές.

Εντελώς ανάλογα πράγματα συμβαίνουν και όταν έχουμε περισσότερες εξωτερικές μεταβλητές, μέχρι έξι: αν προσπαθήσει κανείς να επιδράσει σε ένα σύστημα μέσω επτά μεταβλητών συγχρόνως, το σύνολο καταστροφών γίνεται τόσο πολύπλοκο που δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες μορφές.

Συμπερασματικά, η Θεωρία Καταστροφών δεν μας λέει a priori τι θα συμβεί σε καμιά δεδομένη κατάσταση. Ακόμα και αν έχουμε να κάνουμε με ένα "καλό" σύστημα με απόσβεση και έχουμε τρεις εξωτερικές μεταβλητές στη διάθεσή μας, δεν υπάρχει τρόπος να προβλέψουμε αν θα παρατηρήσουμε μια χελιδονοουρά ή μια ομφαλική. Ενδέχεται να παρατηρήσουμε κάτι εντελώς διαφορετικό, πράγμα που θα σημαίνει ότι η συνάρτηση δυναμικού του συστήματος θα συνιστά μια εξαίρεση από τις συνήθεις περιπτώσεις.

Η κύρια συνεισφορά της Θεωρίας Καταστροφών έγκειται στην ιδέα της μελέτης ενός πολύπλοκου συστήματος από έξω, καταγράφοντας τις αντιδράσεις του σε ένα καλά ορισμένο σύνολο ερεθισμάτων. Έγκειται, επίσης, στο ενδιαφέρον προς τις ποιοτικές μεταβολές του συστήματος (π.χ. ξαφνικές μεταβάσεις από μια κατάσταση σε μια άλλη).

Η Θεωρία Καταστροφών ήταν ένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά γεγονότα της δεκαετίας του 1970. Μόλις κυκλοφόρησε το βιβλίο του Thom, και παρά τον έντονα τεχνικό του χαρακτήρα, το ενδιαφέρον για τη θεωρία επεκτάθηκε πολύ πέρα από την επιστημονική κοινότητα, με άρθρα και συνεντεύξεις στα μέσα μαζικής επικοινωνίας. Ο C. Zeeman, ένας άγγλος μαθηματικός, αναζήτησε συστηματικά εφαρμογές σε ένα πλήθος καταστάσεων: καρδιακοί παλμοί, συμπεριφορά επίθεσης σκύλων, εξεγέρσεις σε φυλακές. Ο ίδιος ο Thom μελέτησε τη μορφογένεση (ανάπτυξη του εμβρύου από ένα μοναδικό κύτταρο) και χρησιμοποίησε τη Θεωρία στη γλωσσολογική μελέτη. Η αξία αυτών των μοντέλων αμφισβητήθηκε και η επιστημονική διαμάχη, σύντομα εξελίχθηκε σε πολεμική. Στην άλλη πλευρά, ο αργεντινός μαθηματικός H. Sussmann, επιτέθηκε στη Θεωρία Καταστροφών για το ότι δεν είχε καμιά αξιόπιστη εφαρμογή με τα δικά του λόγια: "Στα μαθηματικά οι ορισμοί είναι τζάμπα. Επιτρέπεται απολύτως να ονομάσουμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή "ελέφαντα" και μια φασματική ανάλυση "προβοσκίδα". Μπορεί τότε να αποδειχθεί ένα θεώρημα, ότι όλοι οι ελέφαντες έχουν προβοσκίδες. Αυτό που δεν επιτρέπεται, είναι να προσποιούμαστε ότι αυτό το αποτέλεσμα έχει οποιαδήποτε σχέση με κάποια μεγάλα γκρίζα ζώα".

Πολλά, βέβαια, μπορούν να ειπωθούν σχετικά. Κατ'αρχή, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η Θεωρία Καταστροφών δεν είναι παρά ένα υποκατάστατο μιας καλύτερης θεωρίας, που δεν γεννήθηκε ποτέ: μια τέτοια θεωρία, θα αντιμετώπιζε τη φοβερή δοκιμασία της περιγραφής όλων των δυνατών μεταβάσεων μεταξύ ευσταθών κινήσεων (ανάμεσα σε περιοδικές τροχιές ή παράξενους ελκυστές). Μια τέτοια θεωρία δεν είναι καν ορατή: το μόνο σχετικό που αντιλαμβανόμαστε καλά, είναι το πως ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας, μετατρέπεται σε ευσταθή περιοδική λύση (Διακλάδωση Hopf).

Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι ο χρόνος είναι απών από τη Θεωρία Καταστροφών: οι μαθηματικοί τον θεωρούμε ως μια τετάρτη εξωτερική μεταβλητή (οι τρεις άλλες είναι οι χωρικές συντεταγμένες), ενώ οι φυσικοί και οι βιολόγοι, δεν παρατηρούν απ'ευθείας τετραδιάστατες καταστροφές, αλλά μια διαδοχή, στο χρόνο, τρισδιάστατων καταστροφών.

12. ΧΑΟΣ

12.1. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ POINCARÉ

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

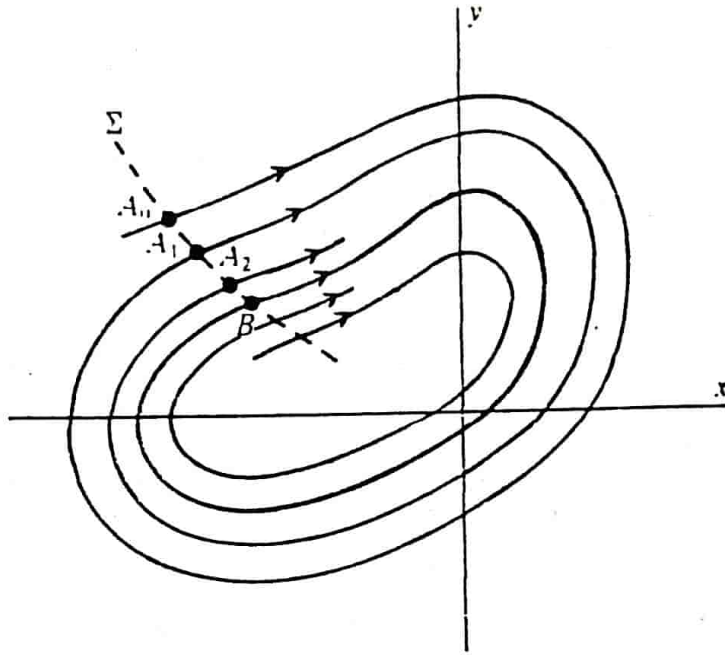
$$x' = F(x,y), y' = G(x,y)$$

και το διάγραμμα φάσεων του στο xy -επίπεδο. Η λύση του συστήματος αντιστοιχεί σε μια τροχιά, ή ροή, σε κάποιο διδιάστατο χώρο φάσεων. Υπάρχει ένα πολύ φιλόδοξο πρόγραμμα του Poincaré, που αναζητά να καθορίσει τη γενική συμπεριφορά συστημάτων, όπως το παραπάνω, τα οποία έχουν n -διάστατους χώρους φάσεων, καθώς $t \rightarrow \infty$. Το πρόγραμμα του Poincaré είναι πλήρως λυμένο μόνο για την ειδική περίπτωση συστημάτων στο διδιάστατο χώρο φάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, είτε οι λύσεις προσεγγίζουν έναν ευσταθή ελκυστή διάστασης μηδέν (σημείο), ή είναι περιοδικές και προσεγγίζουν έναν οριακό κύκλο διάστασης ένα (κλειστή καμπύλη). Για $n \geq 3$, η γενική ασυμπτωτική συμπεριφορά των αυτόνομων συστημάτων δεν είναι γνωστή. Πρόσφατες μελέτες της συμπεριφοράς τέτοιων συστημάτων σε υψηλότερες διαστάσεις, αποκάλυψαν την ύπαρξη μη κενών, πεπερασμένων περιοχών του χώρου φάσεων, οι οποίες δεν περιέχουν σημεία έλξης ή οριακούς κύκλους. Οι ροές τέτοιων αυτόνομων συστημάτων, εισέρχονται σε αυτές τις περιοχές και αποκλίνουν ή μια από την άλλη, καλύπτοντας έτσι όλο τον χώρο αυτών των περιοχών, με χαοτικό τρόπο. Τέτοιες περιοχές, υποσύνολα του χώρου φάσεων, λέγοντας παράξενοι ελκυστές, αφού έλκουν κοντινές τροχιές με "παράξενο" (χαοτικό) τρόπο. Η δομή αυτών των συνόλων είναι της μορφής $M \times C$, όπου M μια πολλαπλότητα και C είτε το σύνολο του Cantor ή γινόμενο συνόλων Cantor. Μια στοιχειώδης απόπειρα εισαγωγής στους παράξενους ελκυστές και τη σχετική χαοτική συμπεριφορά, δίνεται στην §12.2.

Είναι προφανές ότι η πολυπλοκότητα της συμπεριφοράς ενός διδιάστατου αυτόνομου συστήματος, όπως το παραπάνω, μπορεί να ελαττωθεί με το να μελετήσουμε το σύστημα σε μια διάσταση. Μια χρήσιμη τεχνική, που επιτυγχάνει αυτήν ακριβώς τη μείωση, μετατρέποντας -ταυτοχρόνως- τις διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις διαφορών, ονομάζεται απεικόνιση Poincaré.

Έστω Σ μια καμπύλη ή μονοδιάστατη διατομή του επιπέδου, με την ιδιότητα ότι τέμνει κάθε τροχιά εγκαρσίως, δηλ. δεν εφάπτεται πουθενά σε μια τροχιά. Θεωρούμε ένα σημείο $A_0: (x_0, y_0)$ επί της διατομής

Σ . Ακολουθώντας την τροχιά που διέρχεται από το A_0 κατά τη διεύθυνση ροής, παρατηρούμε ότι τέμνει τη Σ στο σημείο $A_1: (x_1, y_1)$. Αυτό το σημείο λέγεται πρώτη επαναφορά ή απεικόνιση Poincaré του σημείου A_0 . Ένα τέτοιο σημείο δεν υπάρχει κατ'ανάγκη. Συνεχίζοντας επί της τροχιάς, η δεύτερη επαναφορά του A_0 (ή, αλλιώς, η πρώτη επαναφορά του A_1), είναι το $A_2: (x_2, y_2)$.



Σχήμα 12.1.

Αυτή η διακριτή ακολουθία τομών της τροχιάς με τη Σ , δίνει μία εξίσωση διαφορών που περιγράφει την απεικόνιση της Σ στον εαυτό της. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την απεικόνιση με έναν τελεστή P_Σ , που για τη συγκεκριμένη διατομή Σ και για κάθε $(x, y) \in \Sigma$, είναι

$$(\bar{x}, \bar{y}) := P_\Sigma(x, y)$$

όπου (\bar{x}, \bar{y}) το σημείο πρώτης επαναφοράς της τροχιάς από το (x, y) . Για τις διαδοχικές επαναφορές που ξεκινούν από το (x_0, y_0) , έχουμε το συμβολισμό

$$(x_2, y_2) = P_\Sigma(P_\Sigma(x_0, y_0)) = P_\Sigma^2(x_0, y_0)$$

$$(x_n, y_n) = P_\Sigma^n(x_0, y_0)$$

Η χρονική στιγμή έναρξης μιας ακολουθίας δεν είναι σημαντική, αφού το σύστημα είναι αυτόνομο. Γενικώς, η απεικόνιση $P_{\Sigma}(x,y)$ εκφράζει το χρόνο που χρειάζεται το σημείο (x,y) για να φθάσει την πρώτη του επαναφορά, ακολουθώντας τη ροή. Εξάλλου, το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών επαναφορών δεν είναι σταθερό.

Το Σχ. 12.1 δείχνει επίσης έναν ευσταθή οριακό κύκλο και σ' αυτήν την περίπτωση οι πρώτες επαναφορές προσεγγίζουν τον οριακό κύκλο. Από το σημείο B του οριακού κύκλου, οι πρώτες επαναφορές απεικονίζονται επί των εαυτών τους. Το σημείο B είναι, δηλαδή, ένα σταθερό σημείο του τελεστή P_{Σ} και η ακολουθία A_0, A_1, A_2, \dots προσεγγίζει το σταθερό σημείο. Το ίδιο ισχύει για μια ακολουθία πρώτων επαναφορών από το εσωτερικό του οριακού κύκλου. Είναι αναμενόμενο, ότι η τέτοια συμπεριφορά των πρώτων επαναφορών θα εξασφαλίζει ευστάθεια του οριακού κύκλου.

Οι απεικονίσεις Poincaré μπορούν να αποκαλύψουν σημαντικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος. Όπως ήδη είδαμε, υπάρχουν περιοδικές λύσεις για αυτόνομα συστήματα, όταν εμφανίζονται σταθερά σημεία. Έτσι, αν -στο Σχ. 12.1- αγνοηθούν οι τροχιές, και ληφθούν υπ' όψη μόνο οι τέλειες της απεικόνισης Poincaré, μπορούμε να πάρουμε χρήσιμες πληροφορίες· αν, π.χ., το αυτόνομο σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, αυτό θα αντικατοπτρίζεται στην ιδιομορφή συμπεριφορά της αντίστοιχης απεικόνισης Poincaré. Στην περίπτωση που αναζητούμε την ύπαρξη κάποιας περιοδικότητας για ένα μη αυτόνομο σύστημα, εργαζόμαστε ως εξής· έστω το (μη αυτόνομο) σύστημα

$$x' = F(x,y,t)$$

$$y' = G(x,y,t)$$

όπου οι F και G είναι 2π -περιοδικές ως προς t . Αυτό το σύστημα είναι ισοδύναμο με το αυτόνομο σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y,z) & y' &= G(x,y,z) \\ z' &= 1 & z(0) &= 0 \end{aligned}$$

όπου οι F, G είναι 2π -περιοδικές ως προς z^* . Σε έναν "τοροειδή" χώρο, για τον οποίο το επίπεδο $z=2\pi$ έχει καμφθεί ώστε να συμπίπτει με το

* Η κυκλική μεταβλητή $z(z \in S^1)$ μεταβάλλει το χώρο φάσεων, από \mathbb{R}^2 σε $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

$z=0$, έχουμε εποπτεία και αυτή η κατασκευή μπορεί να παίξει το ρόλο της διατομής για μια απεικόνιση Poincaré. Έτσι, η διατομή Σ , σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να γραφεί ως

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 : z=z_0\}$$

για κάποιο z_0 . Είναι έτσι κατανοητό ότι όλες οι λύσεις (τροχιές) τέμνουν τη Σ εγκάρσιως, όπως φαίνεται από τον περιορισμό $z'=1$.

Για περισσότερα σχετικά στοιχεία και παραδείγματα, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [Jor-Smi], που έχει αποτελέσει και τη βάση για την ανάπτυξη όλου αυτού του κεφαλαίου 12.

12.2. ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΞΕΝΟΙ ΕΛΚΥΣΤΕΣ

Προσφάτως, οι αριθμητικές επιλύσεις μη αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης και αυτόνομων συστημάτων τρίτης τάξης, αποκάλυψαν, απροσδόκητα, ιδιαίτερα περίπλοκες δομές λύσεων σε σχέση με εκείνες που θα περίμενε κανείς από φαινομενικά απλές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= a(y-x) \\ y' &= bx-y-xy \quad a,b,c: \text{σταθερές} \\ z' &= xy-cz \end{aligned} \tag{12.1}$$

μελετήθηκε από τον Lorenz το 1963, σε σχέση με ένα πρόβλημα κίνησης αερίων μαζών στην ατμόσφαιρα. Οι λύσεις, που υπολογίζονται με τη βοήθεια υπολογιστή, παρουσιάζουν ιδιαίτερα πολύπλοκη συμπεριφορά για ένα ευρύ πεδίο τιμών των παραμέτρων. Με τον όρο "πολύπλοκη συμπεριφορά" εννοούμε τυχαία ή χασοτική έξοδο μέσω του συστήματος, παρ'όλο που οι λύσεις παραμένουν αιτιοκρατικές (ντετερμινιστικές) σε σχέση με τις αρχικές τιμές τους και δεν υπάρχει τυχαία είσοδος.

Μια εξίσωση που δείχνει από τα ενδιαφέροντα αυτά χαρακτηριστικά είναι η εξίσωση Duffing.

$$x' + kx' - x + x^3 = \Gamma \sin \omega t \tag{12.2}$$

Το αντίστοιχο ($\Gamma=0$) αυτόνομο σύστημα έχει σημεία ισορροπίας στο $x=0$ (σαγματικό σημείο) και στο $x=\pm 1$ (ευσταθείς εστίες όταν $k \in (0, 2\sqrt{2})$).

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$x = c(t) + a(t)\sigma\omega\tau + b(t)\eta\mu\omega\tau \quad (12.3)$$

όπου για τις $a(t)$ και $b(t)$ υποτίθεται ότι οι παράγωγοι της δεύτερης τάξης μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι, παίρνουμε

$$c'' + kc' = -c(c^2 - 1 + 3/2 r^2) \quad (12.4)$$

$$ka' + 2\omega b' = -a(-1 - \omega^2 + 3c^2 + 3/4 r^2) - k\omega b + \Gamma \quad (12.5)$$

$$-2\omega a' + kb' = -b(-1 - \omega^2 + 3c^2 + 3/4 r^2) + k\omega a \quad (12.6)$$

$$\text{όπου} \quad r^2 = a^2 + b^2 \quad (12.7)$$

$$\text{Θέτοντας} \quad c' = d \quad (12.8)$$

μπορούμε να εργασθούμε στον (a, b, c, d) -χώρο, όπου οι τροχιές ορίζονται από τις (12.5), (12.6), (12.8) και τη νέα γραφή της (12.4)

$$d' = -c(c^2 - 1 + 3/2 r^2) - kd \quad (12.9)$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος, που αντιστοιχούν σε σταθερές ταλαντώσεις, βρίσκονται με το να εξισώσουμε τα δεξιά μέλη των (12.5), (12.6), (12.8), (12.9) με το μηδέν.

Από τις έτσι προκύπτουσες σχέσεις, παίρνουμε

$$r^2[(-1 - \omega^2 + 3c^2 + 3/4 r^2) + k^2\omega^2] = \Gamma^2 \quad (12.10)$$

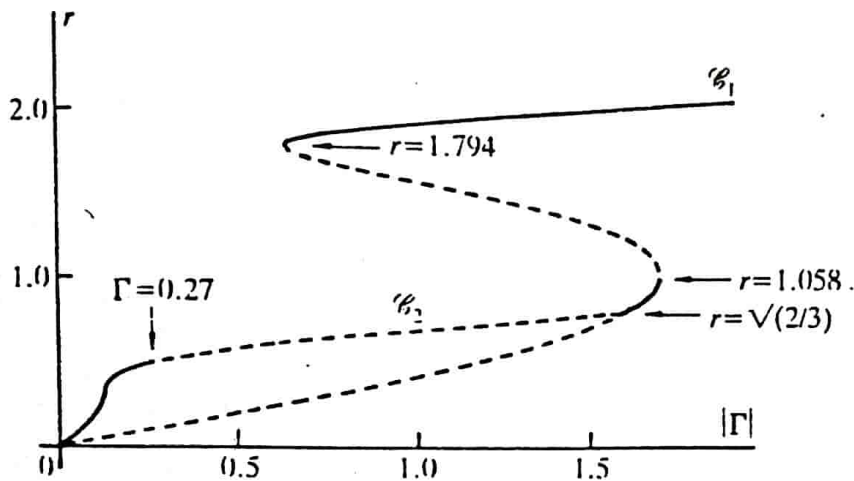
Υπάρχουν δύο σύνολα λύσεων της (12.10)

$$\text{ΤΥΠΟΣ I:} \quad c=0, \quad r^2[(-1 - \omega^2 + 3/4 r^2) + k^2\omega^2] = \Gamma^2 \quad (12.11)$$

$$\text{ΤΥΠΟΣ II:} \quad \text{μόνο για} \quad r \leq \sqrt{\frac{2}{3}} :$$

$$c^2 = 1 - 3/2 r^2, \quad r^2[(2 - \omega^2 - 15/4 r^2)^2 + k^2\omega^2] = \Gamma^2 \quad (12.12)$$

Το Σχ. 12.2 δείχνει γραφικές παραστάσεις του r ως προς $|\Gamma|$, με τη χρήση της (12.11): η καμπύλη \mathcal{C}_1 , και της (12.12): η καμπύλη \mathcal{C}_2 . Τα αποτελέσματα έχουν σχεδιαστεί για $k=0.3$, $\omega=1.2$. Η επιλογή των τιμών αυτών έγινε για να επιδειχθούν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ιδιότητες των λύσεων.



Σχήμα 12.2.

Η συνεχής γραμμή δείχνει πειραματικώς ευσταθείς $2\pi/\omega$ -περιοδικές λύσεις, ενώ η διακεκομμένη την απουσία τους. Η τιμή $\Gamma=0.27$ έχει βρεθεί με αριθμητική αναζήτηση.

Μας ενδιαφέρει ποιές από τις λύσεις των (12.10)-(12.12) είναι ευσταθείς. Επανερχόμενοι στη μορφή που δεν περιέχει το d , θέτοντας $a=a_0$, $b=b_0$, $c=0$ για τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (12.4), (12.5), (12.6), εισάγοντας τοπικές συντεταγμένες $a-a_0$ και $b-b_0$, και γραμμικοποιώντας, παίρνουμε ότι οι συνθήκες

$$r_0^2 > \frac{2}{3} (1 - \omega^2) \quad (12.13)$$

και

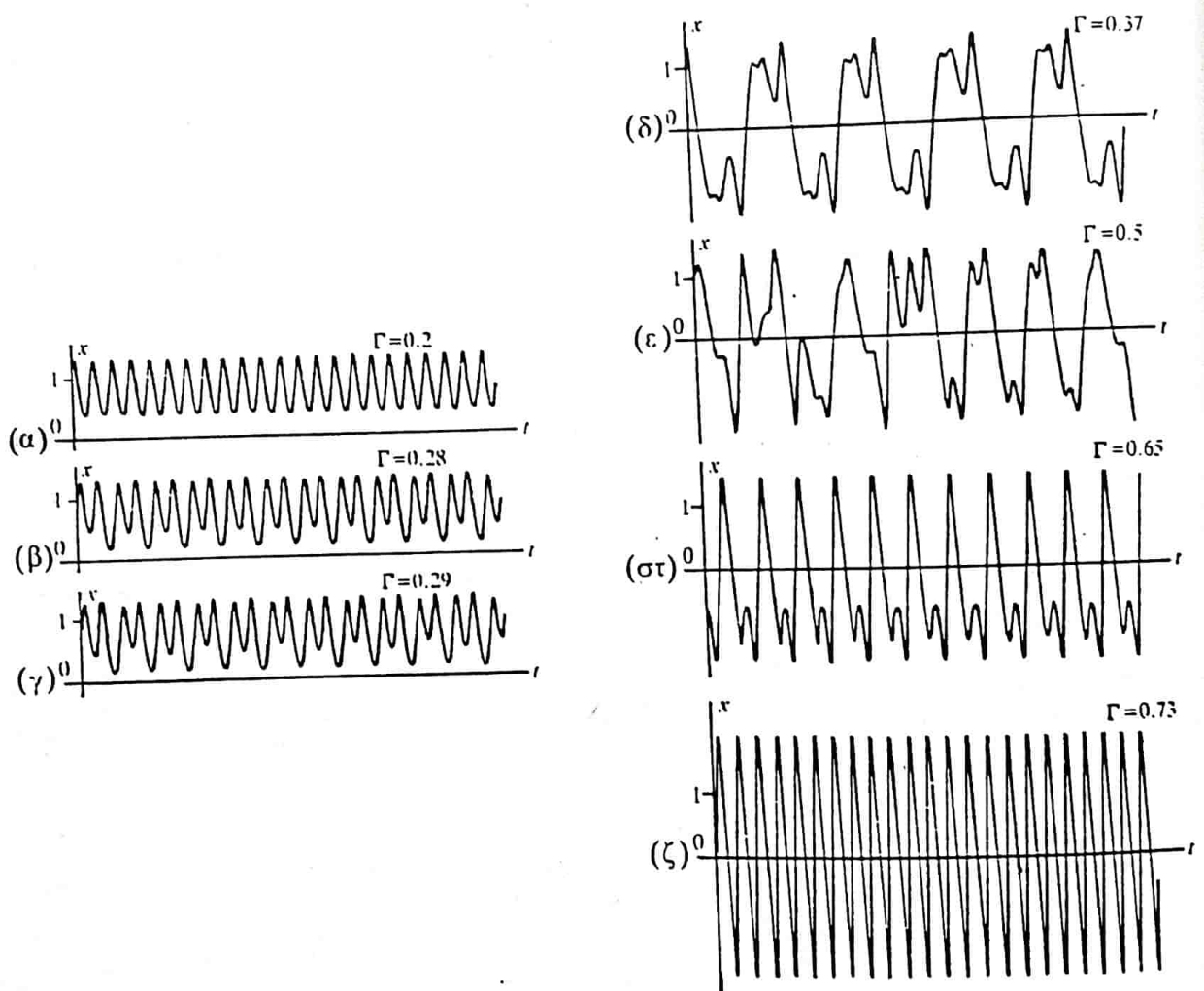
$$27r_0^4 - 48(1 + \omega^2)r_0^2 + 16(1 + \omega^2)^2 + 16k^2\omega^2 > 0 \quad (12.14)$$

είναι ικανές και αναγκαίες για ασυμπωτική ευστάθεια, για λύσεις Τύπου I.

Για την περίπτωση του Σχ. 12.2 ($k=0.3$, $\omega=1.2$) οι (12.13), (12.14) ικανοποιούνται τότε και μόνον τότε αν

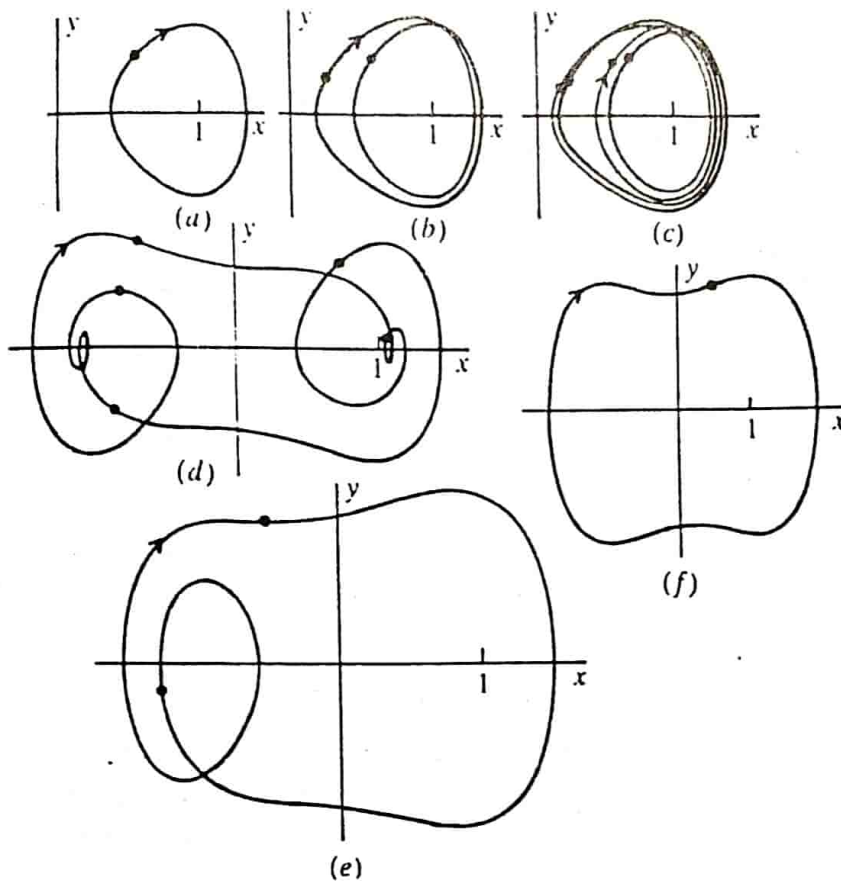
$$r_0 > 1.794 \quad \eta \quad 0.816 < r_0 < 1.058$$

Οι ακραίες τιμές έχουν σημειωθεί στο Σχ. 12.2. Αυτές οι τιμές εμφανίζονται εκεί που αναστρέφεται η (Γ, r_0) -καμπύλη και αντιστοιχούν σε θέσεις καταστροφών.



Σχήμα 12.3.

Λύσεις της (12.2) με $k=0.3$, $\omega=1.2$ στις περιπτώσεις (α) $\Gamma=0.2$ (περίοδος 1), (β) $\Gamma=0.28$ (περίοδος 2), (γ) $\Gamma=0.29$ (περίοδος 4), (δ) $\Gamma=0.37$ (περίοδος 5), (ε) $\Gamma=0.5$ (χαοτική ανταπόκριση), (στ) $\Gamma=0.65$ (περίοδος 2), (ζ) $\Gamma=0.73$ (περίοδος 1).



Σχήμα 12.4.

Μερικές τυπικές περιοδικές λύσεις της (12.2) για $k=0.3$ και $\omega=1.2$ έχουν προβληθεί στο (x,y) -επίπεδο: (α) $\Gamma=0.2$, (β) $\Gamma=0.28$ (περίοδος 2), (γ) $\Gamma=0.29$ (περίοδος 4), (δ) $\Gamma=0.37$ (περίοδος 5), (ε) $\Gamma=0.65$ (περίοδος 2), (φ) $\Gamma=0.73$ (έχει σχεδιασθεί, με σμίκρυνση, στο μισό μέγεθος).

Για τις λύσεις Τύπου II, μπορεί κανείς να προβλέψει ότι όλες οι λύσεις που αντιστοιχούν στην \mathcal{G}_2 είναι ευσταθείς για τις δεδομένες τιμές των k και ω . Η πραγματική συμπεριφορά είναι, εντούτοις, πολύ πιο πολύπλοκη. Με αριθμητικό υπολογισμό των λύσεων απ'ευθείας από την (12.2) για $k=0.3$, $\omega=1.2$ και για Γ που κυμαίνεται σε ένα πεδίο τιμών, μπορούμε να δούμε αυτές τις περιπλοκές. Θα ασχοληθούμε με λύσεις που ξεκινούν από το σημείο ισορροπίας $x=1$.

Για $\Gamma \in [0, 0.27)$, βρίσκουμε $2\pi/\omega$ -περιοδικές, ευσταθείς, αρμονικές λύσεις όπως προβλέπεται από τη θεωρία.

Όταν, όμως, $\Gamma > 0.27$, τα πράγματα διαφοροποιούνται ριζικά. Για $\Gamma=0.28$, η λύση είναι ακόμα περιοδική, αλλά έχει γίνει μια ταλάντωση περιόδου 2 (με νέα περίοδο $4\pi/\omega$, διπλάσια της αρχικής). Περίπου στο

$\Gamma=0.29$ έχουμε ένα νέο διπλασιασμό περιόδου, που δίνει ταλάντωση περιόδου 4. Αυτός ο διπλασιασμός περιόδου συνεχίζεται για τιμές του Γ μέχρι περίπου το 0.3 (δεν φαίνονται στα σχήματα).

Όταν $\Gamma \in (0.3, 0.36)$ δεν παρατηρείται καμιά κανονικότητα: λέμε ότι οι λύσεις παρουσιάζουν **χαοτική συμπεριφορά**.

Κοντά στο $\Gamma=0.37$, όμως, εμφανίζονται λύσεις περιόδου 5 (αυτές έχουν ως "κέντρο" το $x=0$).

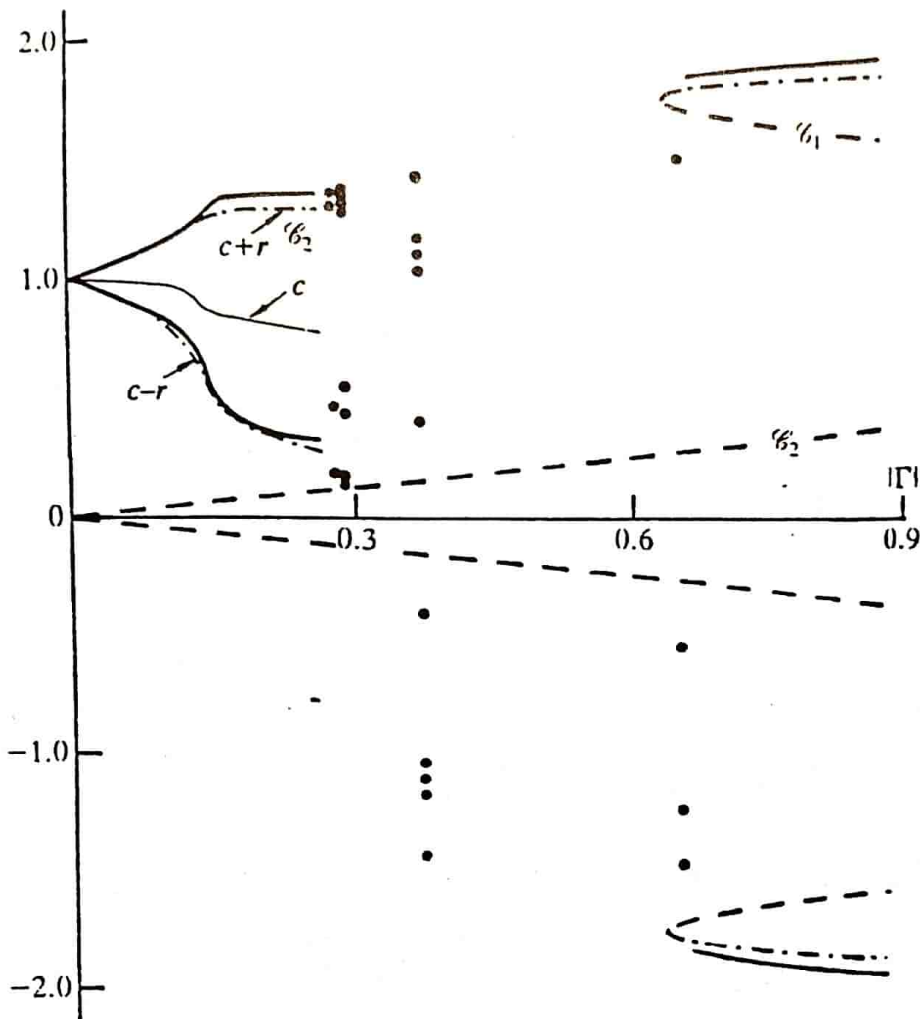
Για $\Gamma \in (0.37, 0.65)$ εμφανίζεται μια νέα χαοτική περιοχή.

Σε ένα διάστημα δεξιά του $\Gamma=0.65$ εμφανίζονται και άλλες λύσεις περιόδου 2.

Για $\Gamma=0.66$, περίπου, εμφανίζονται ευσταθείς ταλαντώσεις Τύπου I.

Τέλος, το Σχήμα 12.5 μας δίνει μια άλλη οπτική για τις προηγούμενες παρατηρήσεις, αφού σε αυτό εμφανίζονται και οι διακλαδώσεις του πλάτους.

Η αναζήτηση περιοδικής συμπεριφοράς μπορεί να βοηθηθεί με το να σχεδιαστούν οι απεικονίσεις Poincare που είναι κατάλληλες για την εκάστοτε αναζητούμενη περίοδο. Οι $2\pi/\omega$ -περιοδικές λύσεις, οδηγούν σε απεικονίσεις -στο (x,y) -επίπεδο- που έχουν ένα μόνο σταθερό σημείο, οι $4\pi/\omega$ -περιοδικές σε απεικονίσεις με δύο σταθερά σημεία, κ.ο.κ. (πρβλ. Σχ. 12.4). Αν εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία και στην περίπτωση χαοτικής συμπεριφοράς, έστω $\Gamma=0.5$, παρατηρούμε ότι υπάρχει τελικώς κάποια υποκείμενη δομή. Το Σχ. 12.6 δείχνει μια απεικόνιση Poincaré για αυτή την περίπτωση. Η διατομή που παρουσιάζεται είναι γαι $t=2n\pi$, $n \in \mathbb{N}_0$. Σε αυτήν την χαοτική περιοχή δεν εμφανίζονται σταθερά σημεία· αντιθέτως, ολόκληρο το εμφανιζόμενο σύνολο παίζει έναν τέτοιο ρόλο: έχει την ιδιότητα αν κάποιο σημείο βρεθεί μια φορά εντός του συνόλου, τότε παράγει μια ακολουθία πρώτων επαναφορών που βρίσκεται ολόκληρη εντός του συνόλου. Ένα τέτοιο σύνολο χαρακτηρίζεται ως **παράξενος ελκυστής**. Αφού η απεικόνιση Poincaré δίνει το χρόνο μεταξύ διαδοχικών επαναφορών, παρατηρούμε ότι αν ένα σημείο εισέλθει στον παράξενο ελκυστή, τότε θα παραμείνει εκεί για άπειρο χρόνο (δεν θα εξέλθει ποτέ).

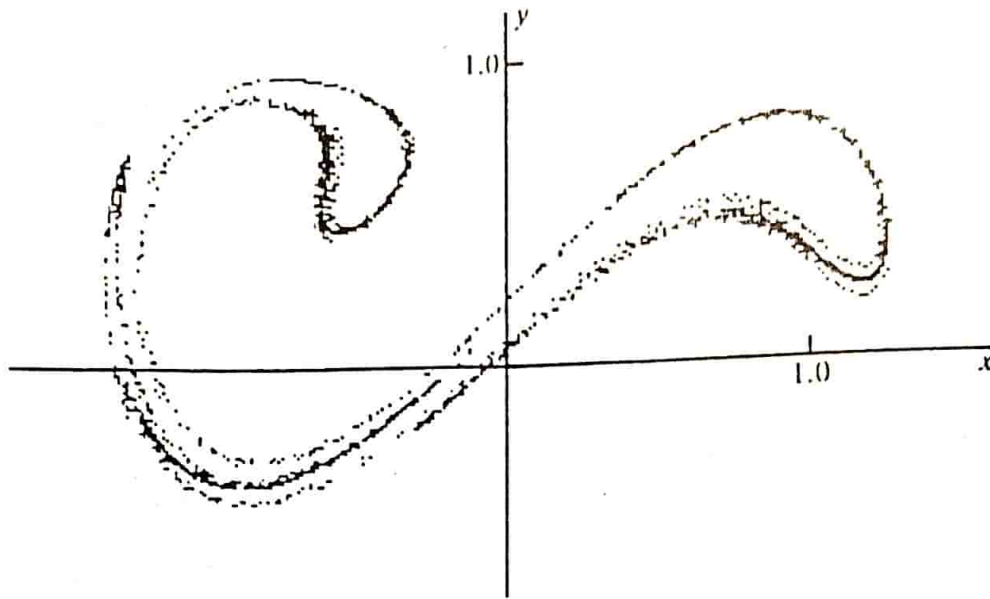


Σχήμα 12.5.

Η C_1 αντιστοιχεί σε λύσεις Τύπου I και η C_2 σε λύσεις Τύπου II.
 - · - · : προβλεπόμενο ευσταθές πλάτος | — : απευθείας υπολογισμένο πλάτος
 - - - : προβλεπόμενο ασταθές πλάτος | ● : τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα

Το σχήμα του παράξενου ελκυστή εξαρτάται από την επιλογή της διατομής: οι πρώτες επαναφορές για τη διατομή $t = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}_0$, π.χ., δίνουν ένα διαφορετικό σχήμα στο επίπεδο. Όσο για τις λύσεις στον (x, y, t) -χώρο, αυτές παραμένουν σε έναν περιοδικώς επαναλαμβανόμενο σωλήνα, που η διατομή του, για $t=0$, έχει το σχήμα του Σχ. 12.6.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες, προσφάτως, για την ερμηνεία της εμφάνισης παράξενων ελκυστών. Στο παράδειγμα μας, οφείλεται στην "εισβολή" της ευσταθούς περιοδικής λύσης στην περιοχή ασταθών ταλαντώσεων. Περισσότερα θα δούμε στην ενότητα που ακολουθεί.



Σχήμα 12.6.

12.3. ΟΜΟΚΛΙΝΗΣ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$x'' + x' - 2x = 10 \text{ συν}t \quad (12.15)$$

Οι 2π-πρώτες επαναφορές επί της διατομής $\Sigma: t=0$, για τυχούσα αρχική κατάσταση μπορούν να βρεθούν (πρβλ. σελ. 136) με το να γραφεί η (12.15) ως

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 2x - y + 10 \text{ συν}z \\ z' &= 1, \quad z(0) = 0 \end{aligned} \quad (12.16)$$

και έτσι οι ακολουθίες των πρώτων επαναφορών, εμφανίζονται ως ακολουθίες σημείων στο επίπεδο $z=0$. Αν $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, τότε οι πρώτες επαναφορές από το (x_0, y_0) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{1}{3} (2x_0 + y_0 + 5)e^{2n\pi} + \frac{1}{3} (x_0 - y_0 + 4)e^{-4n\pi} - 3 \\
 y_n &= \frac{1}{3} (2x_0 + y_0 + 5)e^{2n\pi} - \frac{2}{3} (x_0 - y_0 + 4)e^{-4n\pi} + 1
 \end{aligned}
 \tag{12.17}$$

και, ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (-3, 1)$$

Το (3-1) είναι σταθερό σημείο· χαρακτηρίζεται ως ασταθές, αφού υπάρχουν σημεία σε μια περιοχή του, από τα οποία το σύνολο των διαδοχικών επαναφορών δεν τείνει προς το σταθερό σημείο.

Με το σταθερό σημείο συσχετίζουμε δύο σύνολα: το πρώτο, είναι το σύνολο εκείνο που έχει την ιδιότητα ότι οι πρώτες επαναφορές όλων των σημείων του τείνουν στο σταθερό σημείο καθώς $t \rightarrow \infty$. αυτό το σύνολο λέγεται **ευσταθής πολλαπλότητα** και στο παράδειγμα μας συνίσταται στην ευθεία γραμμή

$$2x_0 + y_0 + 5 = 0$$

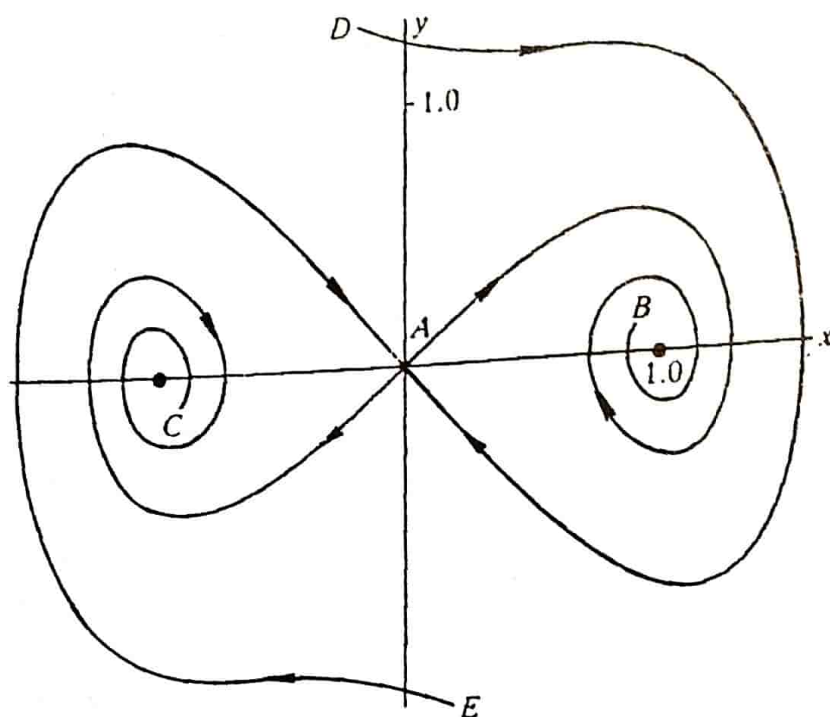
Το δεύτερο σύνολο ορίζεται όπως προηγουμένως με τη διαφορά ότι θεωρούμε $t \rightarrow -\infty$, λέγεται **ασταθής πολλαπλότητα** και στο παράδειγμα μας δίνεται από την

$$x_0 - y_0 + 4 = 0$$

Αυτές οι καμπύλες είναι ανάλογες με τις διαχωρίζουσες ενός σαγματικού σημείου στο επίπεδο για ένα αυτόνομο σύστημα.

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τις αντίστοιχες πολλαπλότητες για το ασταθές σταθερό σημείο της εξίσωσης Duffing (12.2).

Για μικρό Γ αναμένουμε την ύπαρξη και ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας, αφού, όταν $\Gamma=0$, αυτές οι καμπύλες ανάγονται στις διαχωρίζουσες του σαγματικού σημείου στο διάγραμμα φάσεων. Στο Σχ. 12.7 έχουν σχεδιαστεί για την περίπτωση $\Gamma=0$, $k=0.3$, $\omega=1.2$: το A είναι το σταθερό σημείο, οι DA και EA είναι οι ευσταθείς πολλαπλότητες, ενώ οι AB και AC οι ασταθείς πολλαπλότητες.



Σχήμα 12.7.

Οι αντίστοιχες πολλαπλότητες έχουν επίσης σχεδιασθεί για τις περιπτώσεις $\Gamma=0.2$, $k=0.3$, $\omega=1.2$ (Σχ. 12.8 (α)), $\Gamma=0.28$, $k=0.3$, $\omega=1.2$ (Σχ. 12.8 (β)) και $\Gamma=0.5$, $k=0.3$, $\omega=1.2$ (Σχ. 12.8 (γ)).

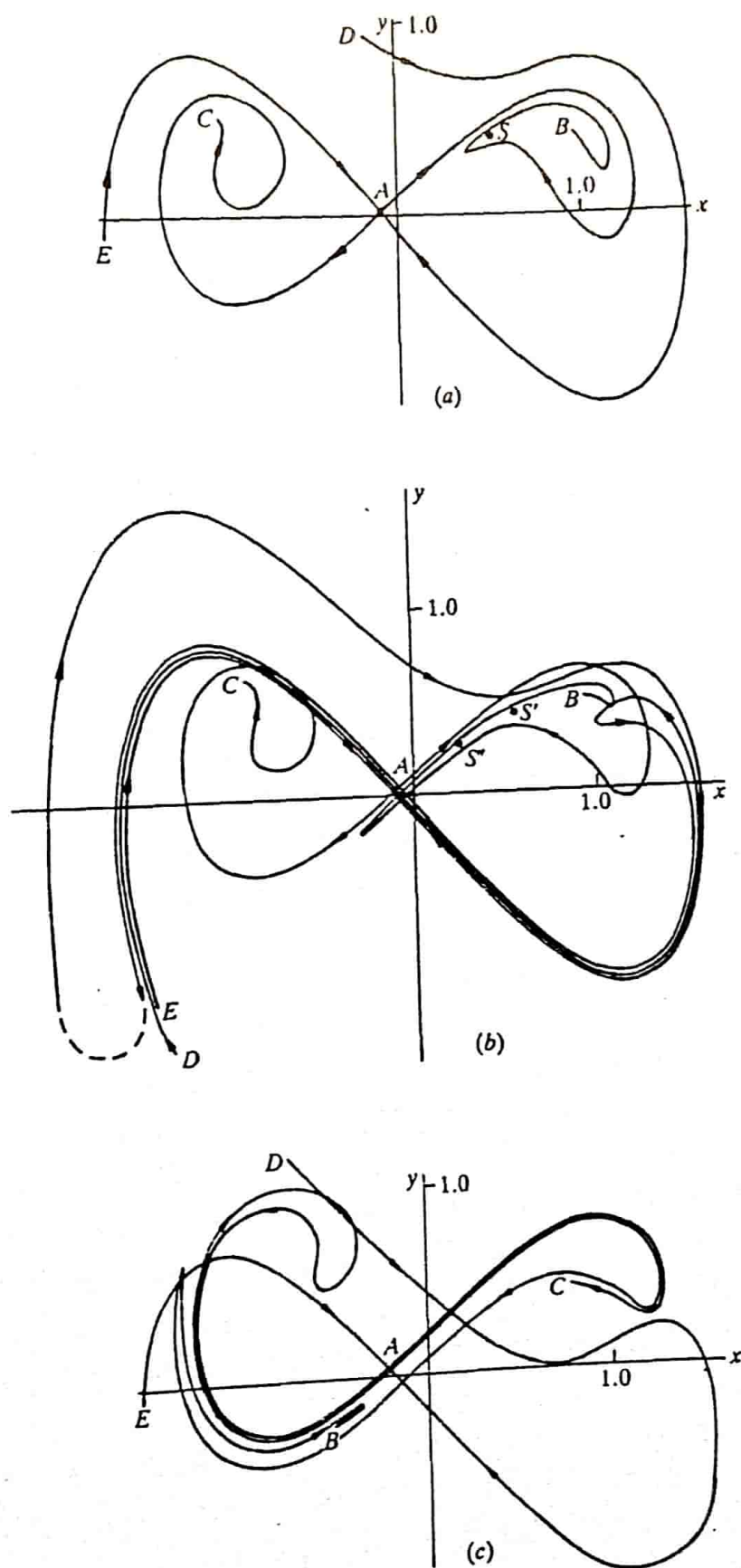
Στην περίπτωση που $\Gamma=0$ (Σχ. 12.7) οι ασταθείς πολλαπλότητες προσεγγίζουν σημεία ισορροπίας. Στην περίπτωση που $\Gamma=0.2$ (Σχ. 12.8 (α)), οι ασταθείς πολλαπλότητες AB και AC προσεγγίζουν σταθερά σημεία επί των ευσταθών περιοδικών λύσεων: το σταθερό σημείο S αντιστοιχεί στην ταλάντωση του Σχ. 12.4 (α).

Στην περίπτωση του $\Gamma=0.28$, οι ασταθείς πολλαπλότητες προσεγγίζουν την ευσταθή υφαρμονική που παριστάνεται με τα S' , S'' και που αντιστοιχεί στην ταλάντωση του Σχ. 12.4 (β).

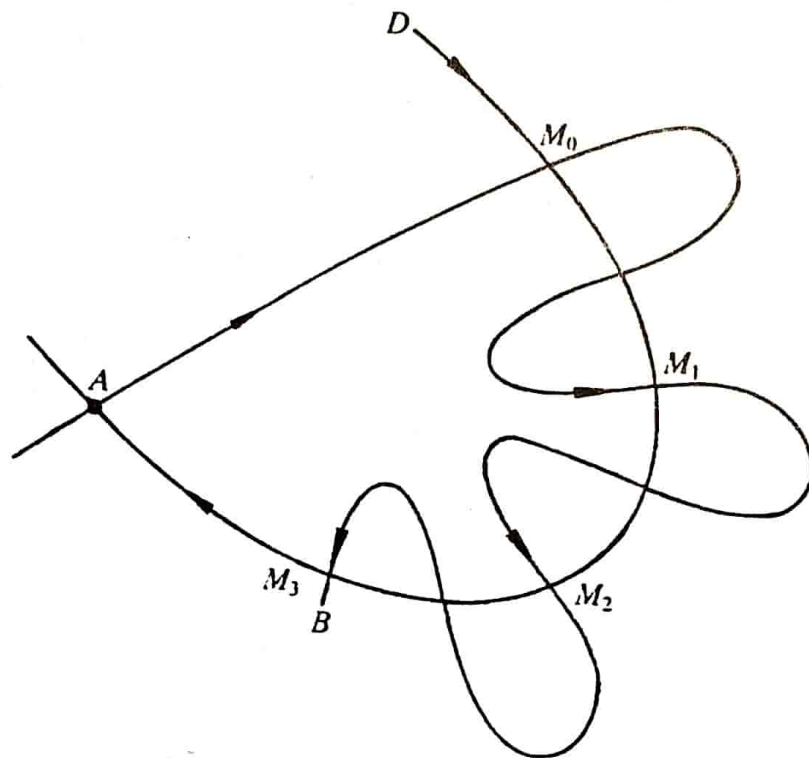
Οι ασταθείς πολλαπλότητες σχεδιάζονται ως εξής: εντοπίζουμε αρχικά το σταθερό σημείο A και τις διευθύνσεις των ασταθών πολλαπλοτήτων στο A και στη συνέχεια θεωρούμε διαδοχικές πρώτες επαναφορές από διαδοχικές αρχικές τιμές επί ενός μικρού διαστήματος των ασταθών πολλαπλοτήτων κοντά στο A. Οι ευσταθείς πολλαπλότητες ευρίσκονται παρομοίως, με το να "αντιστρέψουμε" το χρόνο.

Πολλαπλότητες που προέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο λέγονται ομοκλινείς. Όταν $\Gamma=0.2$ (Σχ. 12.8 (α)), οι ομοκλινείς πολλαπλότητες δεν τέμνονται. Για $\Gamma=0.28$ (Σχ. 12.8(β)) οι AB και DA,

καθώς και οι AC και EA τέμνονται. Αυτές οι ομοκλινείς τομές έχουν σημαντικές συνέπειες για τις λύσεις της εξίσωσης Duffing.



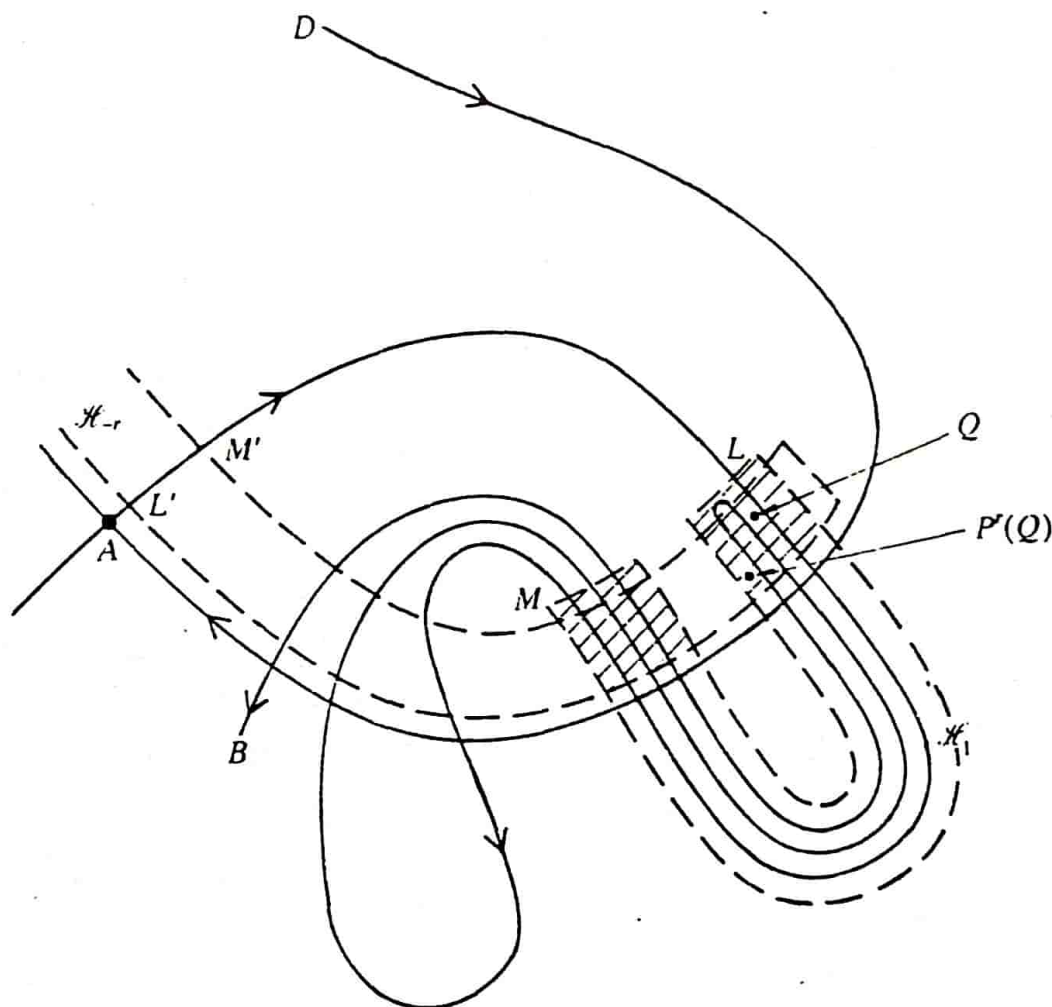
Σχήμα 12.8.



Σχήμα 12.9.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ομόκλινους τομής που αναπαριστάται στο Σχ. 12.9. Έστω ότι η πρώτη τομή συμβαίνει στο M_0 και έστω M_1 η πρώτη επαναφορά του M_0 επί της AD . Λόγω του μονοσήμαντου των λύσεων η πρώτη επαναφορά του M_0 επί της AB θα είναι επίσης το M_1 . Αυτές οι τομές διατηρούν τον προσανατολισμό, υπό την έννοια ότι η AB τέμνει την DA υπό την ίδια διεύθυνση στο M_0 και στο M_1 . Ως εκ τούτου, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ακόμα σημείο τομής, μεταξύ M_0 και M_1 και κατ'επέκταση, οι πολλαπλότητες θα τέμνονται στις πρώτες επαναφορές M_2, M_3, \dots . Αφού το σταθερό σημείο προσεγγίζεται ασυμπτωτικά, θα υπάρχει μια απειρία τόμων της AB με την DA και καθώς η ασταθής πολλαπλότητα θα τέμνει συνεχώς την ευσταθή πολλαπλότητα, δεν θα μπορεί να προσεγγίσει κανένα άλλο σταθερό σημείο: έτσι, θα πρέπει να παρουσιαστεί μια διακλάδωση για κάποια τιμή του Γ . Αυτή η διακλάδωση λέγεται ομοκλινής, και συμβαίνει εκεί όπου πρωτοεφάπτονται ομοκλινώς οι πολλαπλότητες· περίπου για $\Gamma = 0.26$. Κάθε επαφή μεταξύ των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων, εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης που διέρχεται από αυτό το σημείο επαφής (ή τομής) και που τείνει στην ασταθή περιοδική λύση όταν $t \rightarrow \infty$ καθώς και όταν $t \rightarrow -\infty$.

Στο Σχ. 12.8 (c) έχουν σχεδιαστεί οι πολλαπλότητες όταν $\Gamma=0.5$. Σε αυτή την περίπτωση η πολυπλοκότητα αυξάνει προφανώς αφού η AC τέμνει και την DA και την EA. Μια ιδέα για το τι συμβαίνει μπορεί να δοθεί περιγραφικά ως εξής:



Σχήμα 12.10.

Θεωρούμε ένα τμήμα μεταξύ των σημείων L και M επί της ασταθούς πολλαπλότητας AB. Τα L και M έχουν έτσι επιλεγεί, ώστε να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της AD. Έστω \mathfrak{R}_0 ένα σύνολο αρχικών σημείων που βρίσκονται κοντά στο LM, όπως φαίνεται στο Σχ. 12.10, υπό τη μορφή ενός πετάλου, που τέμνεται δύο φορές από την ευσταθή πολλαπλότητα AD. Θεωρούμε τώρα απεικονίσεις του πετάλου μέσω της P:

$$P(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_1, P^2(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_2, P^3(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_3, \dots$$

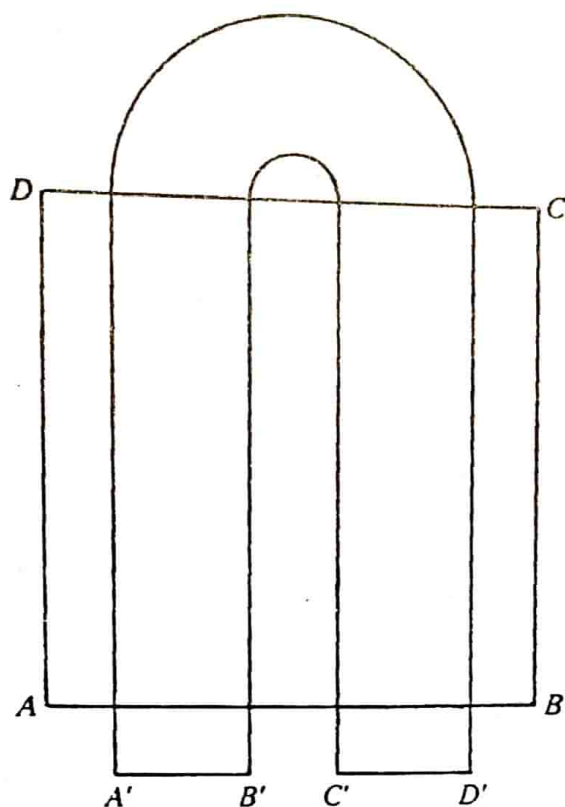
$$P^{-1}(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_{-1}, P^{-2}(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_{-2}, \dots$$

Από το σαγματικό χαρακτήρα του σταθερού σημείου A , έπεται ότι για κάποια τιμή r , το σύνολο \mathfrak{X}_r θα αποτελείται από σημεία που θα βρίσκονται σε μια στενή λωρίδα που τέμνει το πέταλο όπως στο Σχ. 12.10· οι τομές έχουν γραμμοσκιασθεί. Έστω $Q \in \mathfrak{X}_r \cap \mathfrak{X}_0$, τυχόν σημείο. Τότε $P^r(Q) \in \mathfrak{X}_r \cap \mathfrak{X}_0$. Το \mathfrak{X}_0 και \mathfrak{X}_r τέμνονται, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε μια παραμόρφωση του πεταλοειδούς σχήματος. Ο βρόχος της ασταθούς πολλαπλότητας που περιέχεται στο \mathfrak{X}_r μεταφέρεται μαζί της σε μια περιοχή του LM : το είδος της αναμενόμενης εικόνας, έχει σχεδιαστεί για $r=1$ στο Σχ. 12.10. Αν, επιπλέον, $P^r(Q) \in \mathfrak{X}_r$, τότε $P^{2r}(Q) \in \mathfrak{X}_0$ και έτσι εμφανίζεται ένας ακόμα βρόχος. Δεν αποκλείεται ακόμα, να συμβεί $P^r(Q) = Q$, πράγμα που θα σημαίνει ότι υπάρχουν r -περιοδικές λύσεις.

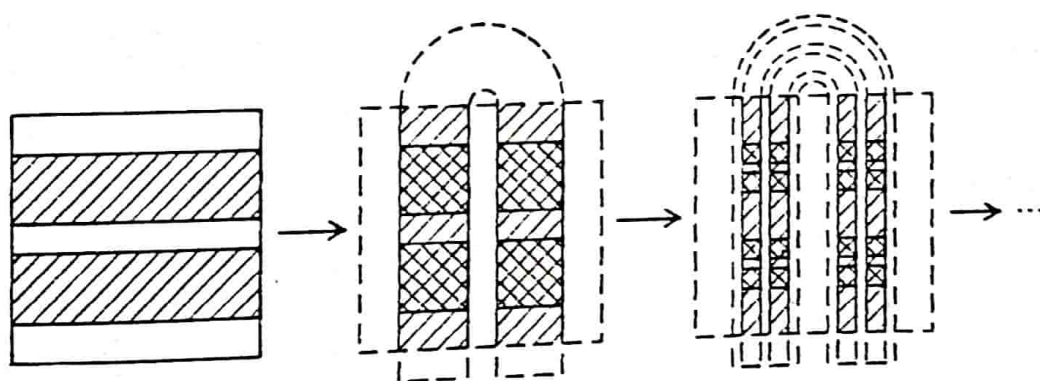
Καθώς το Γ αυξάνεται πέρα από την τιμή 0.28, τα σταθερά σημεία των λύσεων διπλασιασμού περιόδου είναι οριακά σημεία για αρχικές τιμές που δεν βρίσκονται ούτε επί των ασταθών, ούτε επί των ευσταθών πολλαπλοτήτων. Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα και των δύο κλάδων της ασταθούς πολλαπλότητας, σημαίνει ότι οι πρώτες επαναφορές λύσεων της διαφορικής εξίσωσης "παγιδεύονται" ταχέως από τις συστροφές της ασταθούς πολλαπλότητας και στη συνέχεια προσεγγίζουν ένα οριακό σύνολο που βρίσκεται επί της ασταθούς πολλαπλότητας του A (πρβλ. Σχ. 12.6 για $\Gamma=0.5$). Αυτή είναι η κατάσταση σε κάθε χαοτική περιοχή, όπου το οριακό σύνολο είναι ένας παράξενος ελκυστής.

Υπάρχουν ακόμα διαστήματα τιμών του Γ , όπου -μέσα στη χαοτική περιοχή- μοιάζει να επανεμφανίζεται τάξη (πρβλ. Σχ. 12.4 (d)). Οι λεπτομέρειες του μηχανισμού που δημιουργεί τον παράξενο ελκυστή για την εξίσωση Duffing είναι δύσκολο να περιγραφούν. Όμως ένα ανάλογο φαινόμενο παρουσιάζεται σε πολλές καταστάσεις και η ουσία του μπορεί να περιγραφεί με την ανάλυση των συνεπειών της επαναληπτικής διαδικασίας επί του πετάλου και να αποδειχθεί ότι υπάρχει, πράγματι, ένα σύνολο σημείων με την ιδιότητα της έλξης: υποθέτουμε για λόγους απλότητας, ότι η ομοκλινής διακλάδωση προκαλεί την απεικόνιση ενός τετραγώνου $ABCD$ (Σχ. 12.11) σε ένα πέταλο $A'B'C'D'$, μέσω του τελεστή P των πρώτων επαναφορών (θεωρούμε ότι $\Gamma=1$). Η διαδικασία είναι η εξής: το τετράγωνο τεντώνεται στην διεύθυνση AB , συμπιέζεται στην διεύθυνση $A'B'$, στρέφεται κατά 180° και επανατοποθετείται επί του τετραγώνου.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για εκείνα τα σημεία που βρίσκονται εντός του τετραγώνου: στο Σχ. 12.12 έχουν σχεδιαστεί οι δύο πρώτες επαναλήψεις. Οι οριζόντιες γραμμοσκιασμένες λωρίδες έχουν



Σχήμα 12.11.



Σχήμα 12.12.

έτσι επιλεγεί ώστε να απεικονίζονται επί των κατακόρυφων τμημάτων του πετάλου. Αυτές οι δύο κατακόρυφες λωρίδες, απεικονίζονται επί του ζεύγους των λεπτότερων πετάλων. Σε κάθε βήμα, ενδιαφερόμαστε για εκείνα τα τμήματα των απεικονιζόμενων τμημάτων που είναι κοινά για τα τμήματα από τα οποία έχει γίνει η απεικόνιση: τα δύο πρώτα βήματα με την χιαστί γραμμοσκίαση, έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 12.12. Μετά τις δύο πρώτες επαναλήψεις έχουν απομείνει σημεία σε 16 τετράγωνα, μετά από τρεις σε 64 κ.ο.κ.

Το οριακό σύνολο, που καθώς το πλήθος των επαναλήψεων τείνει στο άπειρο, είναι ένα μη αριθμήσιμο σύνολο με δομή πολύ ανάλογη, αλλά 2-διάστατη, με εκείνη του γνωστού Συνόλου Cantor.

Μια εκτενής μελέτη ομοκλινών διακλαδώσεων και απεικονίσεων πετάλου μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο:

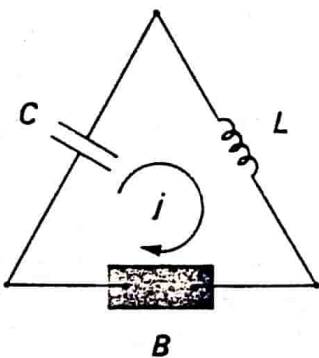
- I. Guckenheimer - P. Holmes: *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer, 1983.

13. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

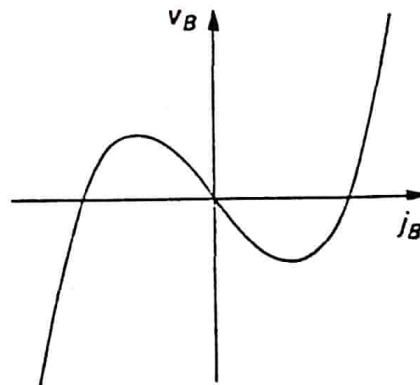
13.1. Ο ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ VAN DER POL

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του Σχ. 13.1, που αποτελείται από έναν πυκνωτή χωρητικότητας C , ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και ένα "μαύρο κουτί" B που είναι ένα στοιχείο (ή ένα σύνολο στοιχείων) του κυκλώματος με σχέση ρεύματος-δυναμικού όπως αυτή του Σχ. 13.2. Το μαύρο αυτό κουτί λέγεται μη γραμμική αντίσταση με κυβική χαρακτηριστική

$$v_B = f(j_B) = j_B \left(\frac{1}{3} j_B^2 - 1 \right) \quad (13.1)$$



Σχήμα 13.1.



Σχήμα 13.2.

Έστω v_L , v_B και $-v_C$ οι διαφορές δυναμικού κατά μήκος των στοιχείων του κυκλώματος κατά τη διεύθυνση του ρεύματος j . Από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff (το αλγεβρικό άθροισμα των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων σε ένα κλειστό κύκλωμα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των γινομένων jR στο κύκλωμα) έχουμε

$$v_L + v_B - v_C = 0$$

που μας δίνει τις δυναμικές εξισώσεις

$$L \frac{dj}{dt} = v_C - f(j), \quad C \frac{dv_C}{dt} = -j \quad (13.2)$$

αφού

$$v_L = \frac{dj}{dt}, \quad v_B = f(j) \quad \text{και} \quad v_C = -\frac{Q}{C}, \quad j = \frac{dQ}{dt}$$

Κάνοντας το μετασχηματισμό

$$\frac{t}{L} \rightarrow t \quad j \rightarrow x_1 \quad v_C \rightarrow x_2 \quad \frac{L}{C} \rightarrow \eta$$

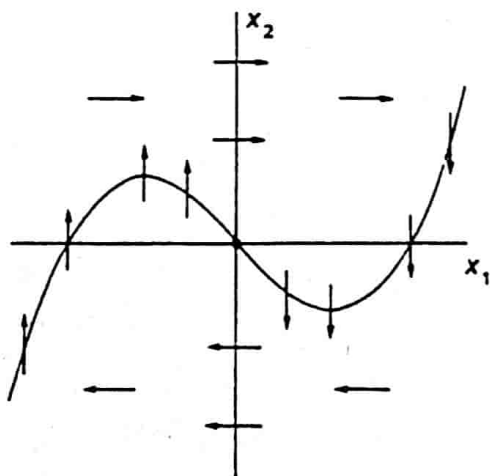
παίρνουμε το σύστημα

$$x_1' = x_2 - f(x_1)$$

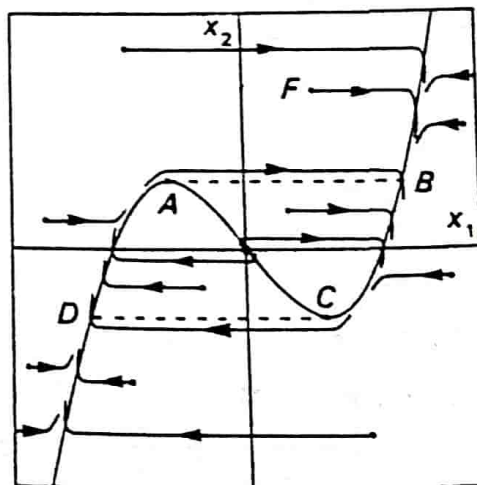
$$x_2' = -\eta x_2 \quad (13.3)$$

που έχει σημείο ισορροπίας για $x_1 = x_2 = 0$.

Οι ισοκλινείς του συστήματος έχουν σχεδιασθεί στο Σχ. 13.3.



Σχήμα 13.3.



Σχήμα 13.4.

Έστω ότι το L συγκρινόμενο με το C (δηλ. το η) είναι τόσο μικρό, ώστε η x_2 μπορεί να αγνοηθεί σε σχέση με την x_1 σε όλα τα

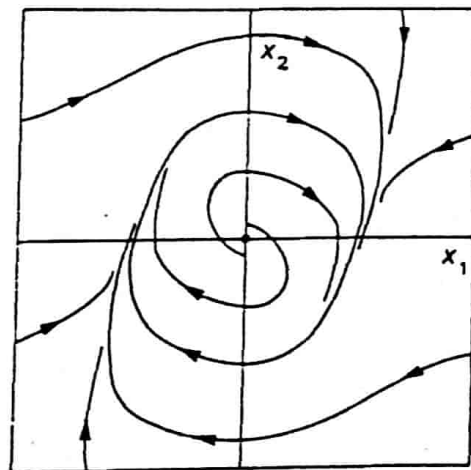
σημεία του επιπέδου φάσεων που δεν βρίσκονται σε μια μικρή περιοχή της ισοκλινούς $x_1' = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο $(x_2 - f(x_1), -\eta x_1)$ έχει ουσιαστικά την οριζόντια διεύθυνση στο Σχ. 13.3, εκτός από τα σημεία που βρίσκονται κοντά στην καμπύλη

$$x_2 = f(x_1) = \frac{x_1^3}{3} - x_1 \quad (13.4)$$

Το διάγραμμα φάσεων θα πρέπει, λοιπόν, να είναι όπως στο Σχ. 13.4, με έναν οριακό κύκλο ABCD.

Το σύστημα (4.3) δεν έχει οριακό κύκλο μόνο όταν $\eta \rightarrow 0$.

Για παράδειγμα, όταν $\eta = 1$, το (4.3) είναι μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης Van der Pol (9.14) σελ. 100, με $\varepsilon = 1$. Ως γνωστό η εξίσωση Van der Pol έχει έναν ακριβώς ευσταθή οριακό κύκλο για κάθε ε . Όταν $\varepsilon \rightarrow \infty$ αυτός ο οριακός κύκλος παίρνει τη μορφή του Σχ. 13.4. Όταν $\varepsilon \rightarrow 0$, ο οριακός κύκλος γίνεται σχεδόν κύκλος με ακτίνα ίση με 2. Καθώς το ε αυξάνει από το 0, ο οριακός κύκλος μετασχηματίζεται κατά λείο τρόπο από τη μια αυτή ακραία μορφή στην άλλη: Σχ. 13.5.



Σχήμα 13.5.

13.2. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ VOLTERRA-LOTKA

Αυτό είναι απλό μοντέλο ενός προβλήματος "θηράματος-θηρευτή": ας υποθέσουμε ότι ο ανθρώπινος πληθυσμός ενός νησιού τρέφεται μόνο με ψάρια και ότι δεν αναπτύσσονται νέες μέθοδοι αλιείας καθώς μεταβάλλεται ο ιχθυοπληθυσμός. Έστω $x(t)$, $y(t)$ ο ιχθυοπληθυσμός και ο ανθρώπινος πληθυσμός, αντιστοίχως, στο χρόνο t . Υποθέτουμε ότι -αν

αφεθούν ανενόχλητα- τα ψάρια αυξάνονται με εκθετικό τρόπο, και ότι -υπό την απουσία ψαριών- ο ρυθμός λιμοκτονίας του ανθρώπινου πληθυσμού είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό γεννήσεων και έτσι ο πληθυσμός φθίνει εκθετικά. Το πλήθος των ψαριών που καταναλώνονται, εξαρτάται από τη συχνότητα συνάντησης τους με τους ανθρώπους· αν υποθέσουμε πως, όταν συναντώνται, υπάρχει μια σταθερή πιθανότητα ότι οι άνθρωποι θα πιάσουν ένα ψάρι και ότι ο χρόνος που απαιτείται για να φαγωθεί το ψάρι είναι αμελητέος, τότε έχουμε

$$x' = \alpha x - \beta xy \quad (13.5)$$

$$y' = -\gamma y + \delta xy \quad (13.6)$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικές σταθερές. Μας ενδιαφέρουν μόνο λύσεις με $x \geq 0$, $y \geq 0$. Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι

$$x = 0, y = 0 \quad \text{και} \quad x = \frac{\gamma}{\delta}, y = \frac{\alpha}{\beta}$$

Γραμμικοποίηση περί το $(0,0)$ οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} \xi' &= \alpha \xi \\ \eta' &= -\gamma \eta \end{aligned} \quad (13.7)$$

που δείχνει ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Αντίστοιχα, γραμμικο-

ποίηση περί το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ οδηγεί στο σύστημα

$$\xi' = -\beta \frac{\gamma}{\delta} \eta$$

$$\eta' = \frac{\delta \alpha}{\beta} \xi$$

δείχνοντας ότι το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ είναι κέντρο.

Όταν, εξάλλου, $x = \frac{\gamma}{\delta}$, η (13.5) μας λέει ότι η x' είναι θετική

και η x είναι αύξουσα για $y < \frac{\alpha}{\beta}$. Οι τροχιές, συνεπώς, έχουν τη δομή του Σχ. 13.6.

Οι ακριβείς εξισώσεις των τροχιών προκύπτουν με το να παρατηρήσουμε ότι

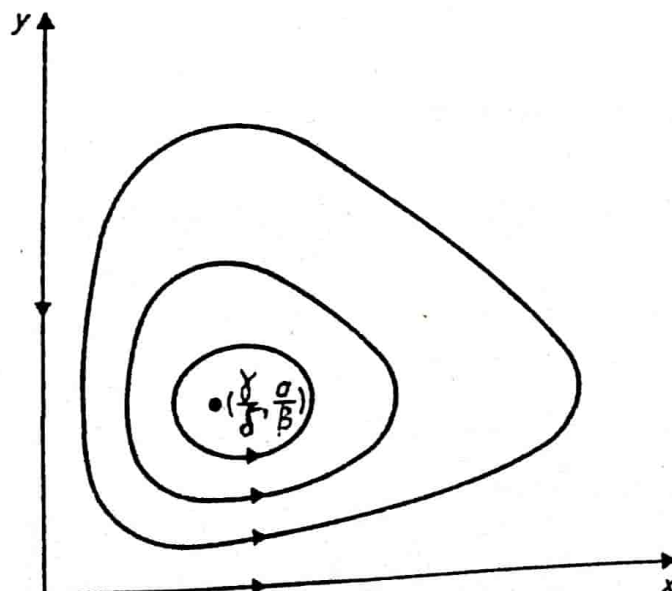
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\delta x - \gamma)y}{(\alpha - \beta y)x} \quad (13.9)$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, χωριζομένων μεταβλητών, με λύση

$$\alpha \ln y - \beta y + \gamma \ln x - \delta x = \sigma, \quad \sigma: \text{σταθ.} \quad (13.10)$$

Το αριστερό μέλος της (13.10) έχει ελάχιστο στο $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ και

έτσι οι καμπύλες (13.10) πρέπει να είναι κλειστές καμπύλες στην περιοχή αυτού του σημείου, πράγμα που συμφωνεί με το ότι το σημείο είναι κέντρο και με το Σχ. 13.6.



Σχήμα 13.6.

Αφού μια τυπική τροχιά είναι κλειστή καμπύλη, η μεταβολή των x και y ως προς το t θα πρέπει να είναι περιοδική, εκτός και αν αρχικά είτε $x=0$ ή $y=0$, πράγμα που αποκλείεται. Από το Σχ. 13.6 είναι φανερό, ότι η y έχει μέγιστο (ελάχιστο), περίπου μετά χρόνο ίσο με το ένα τέταρτο της περιόδου, από τότε που η x έχει μέγιστο (ελάχιστο). Μια ερμηνεία είναι ότι όταν ο ανθρώπινος πληθυσμός είναι σε μέγιστη τιμή, ο ιχθυοπληθυσμός βρίσκεται σε μείωση, που με τη σειρά της προκαλεί μείωση στον ανθρώπινο πληθυσμό, και αντιστρόφως. Μια περιβαλλοντική αλλαγή μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε μετάπτωση από μια τροχιά σε μιαν άλλη, αλλά η περιοδική διακύμανση συνεχίζεται, χωρίς τάση να βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας.

Αν, αντί της εκθετικής αύξησης του ιχθυοπληθυσμού όταν δεν υπάρχουν θηρευτές, υποτεθεί λογιστική αύξηση, τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= ax - gx^2 - \beta xy \\ y' &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned} \quad , \quad g \in \mathbb{R}^+ \quad (13.11)$$

που περιλαμβάνει το σύστημα $\{(13.5), (13.6)\}$ ως ειδική περίπτωση όταν $g=0$. Το σύστημα (13.11) λέγεται μοντέλο **Volterra-Lotka** για το πρόβλημα θηράματος-θηρευτή. Μπορεί να μελετηθεί στο επίπεδο φάσεων κατ'ανάλογο τρόπο με εκείνον της περίπτωσης που $g=0$.

Έχουν μελετηθεί διάφορες εκδοχές του μοντέλου Volterra-Lotka. αν, π.χ., x_0 ψάρια μπορούν να βρουν καταφύγιο ώστε να είναι αδύνατο να αλιευθούν, το (13.11) γίνεται

$$\begin{aligned} x' &= ax - gx^2 - \beta y(x - x_0) \\ y' &= -\gamma y + \delta y(x - x_0) \end{aligned} \quad (13.12)$$

και μπορεί να μελετηθεί ανάλογα, επίσης.

13.3. ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Υποθέτουμε ότι έχουμε ανταγωνισμό μεταξύ ατόμων του ίδιου είδους που ανταποκρίνονται στην αντιμετώπιση του αντιπάλου με μια μόνο από πεπερασμένου πλήθους στρατηγικές, κατά τον επόμενο πίνακα.

Δείκτης (i)	Χαρακτηρισμός Στρατηγικής	Αρχική Τακτική	Τακτική όταν αυτή του αντιπάλου είναι Κλιμάκωση
1	Γερακιού (Γ)	Κλιμάκωση	Κλιμάκωση
2	Περιστεράς (Π)	Επίδειξη	Άτακτη Φυγή
3	Λεονταρισμός (Λ)	Κλιμάκωση	Άτακτη Φυγή

Ένα άτομο που "παίζει" τη στρατηγική i εναντίον ενός ατόμου που παίζει την j , έχει "απόδοση" a_{ij} , που σχετίζεται με την αναπαραγωγική ικανότητα των ατόμων. Υποθέτουμε ότι κάθε άτομο παίζει πάντοτε την ίδια στρατηγική και ότι οι γόννοι παίζουν την ίδια στρατηγική με τους γονείς τους.

Έστω x_i η αναλογία του πληθυσμού που παίζει την στρατηγική i . Τότε

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 1 \quad (13.13)$$

και

$$x_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \quad (13.14)$$

Η απόδοση ενός ατόμου που παίζει την στρατηγική i εναντίον του υπολοίπου πληθυσμού, είναι

$$\sum_j a_{ij} x_j = (Ax)_i \quad (13.15)$$

όπου A ο λεγόμενος πίνακας απόδοσης.

Η μέση απόδοση ενός ατόμου είναι

$$\sum_j x_i (Ax)_i = x^T Ax \quad (13.16)$$

και κατά συνέπεια το "πλεονέκτημα" του να παιχθεί η στρατηγική i είναι

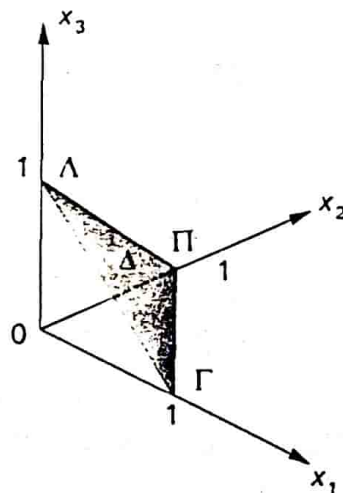
x^T συμβολίζει το ανάστροφο του διανύσματος x .

$$(Ax)_i - x^T Ax \quad (13.17)$$

Ο κατά κεφαλή ρυθμός ανάπτυξης του τμήματος εκείνου του πληθυσμού που παίζει τη στρατηγική i , θεωρείται ανάλογος αυτού του πλεονεκτήματος· έτσι με καταλληλή επιλογή της μονάδας χρόνου, παίρνουμε

$$x_i' = x_i[(Ax)_i - x^T Ax] \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.18)$$

Οι εξισώσεις αυτές αναπαριστούν την κατάσταση μόνο του πληθυσμού για σημεία του \mathbb{R}^3 που ικανοποιούν τις (13.13), (13.14), δηλ. της περιοχής Δ του Σχ. 13.7.



Σχήμα 13.7.

Η επίπεδη τριγωνική επιφάνεια $\Lambda\Pi\Gamma$ συμβολίζεται με Δ και είναι το σύνολο

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \quad , \quad x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \right\}$$

Τον πίνακα απόδοσης μπορούμε να τον βρούμε βαθμολογώντας κάθε "εμπλοκή" των αντιπάλων, ως εξής:

Νίκη:6, Ήττα:0, Τραυματισμός:-10, Χαμένος χρόνος:-1

Οι πραγματικές τιμές δεν είναι σημαντικές· εκείνα που είναι σημαντικά είναι τα πρόσημα και η τάξη μεγέθους των τιμών. Αν ένα άτομο στρατηγικής Γ συναντήσει ένα άτομο στρατηγικής Π ή Λ το νικά, και έτσι $a_{12} = a_{13} = 6$. Αν δύο άτομα στρατηγικής Γ συναντηθούν, μάχονται μέχρι να τραυματισθεί το ένα· κάθε τέτοιο άτομο έχει την ίδια πιθανότητα νίκης και έτσι $a_{11} = 1/2 (6-10) = -2$. Ένα άτομο στρατηγικής Π που συναντά ένα άτομο στρατηγικής Γ ή Λ ηττάται, και έτσι $a_{21} = a_{23} = 0$. Όταν δύο άτομα στρατηγικής Π συναντηθούν, επιδεικνύονται το ένα στο άλλο για κάποιο χρονικό διάστημα, μέχρι που το ένα εγκαταλείπει· έτσι $a_{22} = 1/2 (6+0) - 1 = 2$. Τέλος, ένα άτομο στρατηγικής Λ ηττάται από ένα άτομο στρατηγικής Γ , νικά ένα άτομο στρατηγικής Π και έχει 50% πιθανότητα να νικήσει ένα άλλο άτομο στρατηγικής Λ , οπότε $a_{31} = 0$, $a_{32} = 6$, $a_{33} = 1/2 (6+0) = 3$. Συνεπώς

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το πλεονέκτημα μιας στρατηγικής δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε μια σταθερά σε μια στήλη του A και έτσι ο A μπορεί να απλοποιηθεί στον

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

και έτσι θα μελετήσουμε το σύστημα $\{(13.18), (13.20)\}$.

Είναι εύκολο (υπολογιστικά) να διαπιστώσουμε ότι το σημείο $(x_1, x_2, x_3) = (3/5, 0, 2/5)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος $\{(13.18), (13.20)\}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση

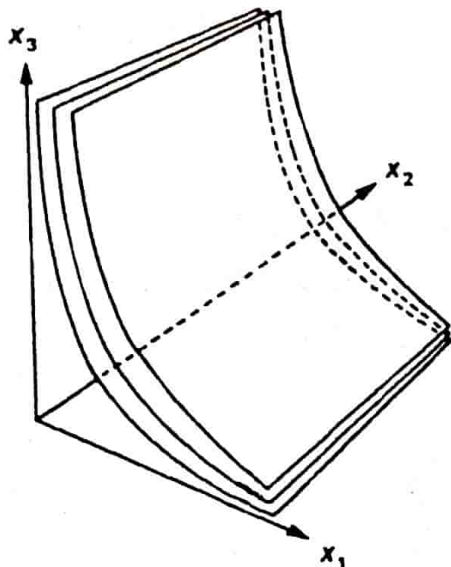
$$V(\mathbf{x}) = \sqrt[5]{x_1^3 x_3^2}$$

για να δείξουμε ότι το $Q: (3/5, 0, 2/5)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, με πεδίο έλξης

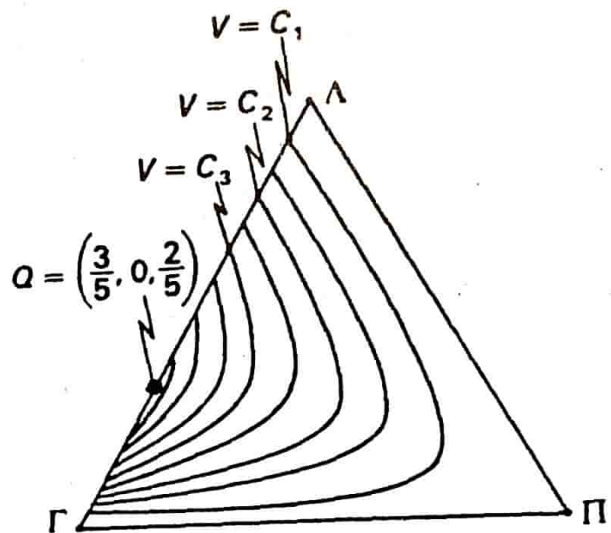
$$\Delta = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_2 + x_3 = 1: x_1, x_2, x_3 > 0\}$$

Όπως φαίνεται στο Σχ. 13.8, οι επίπεδες επιφάνειες

$V(x_1, x_2, x_3)$ τέμνουν το επίπεδο $x_2=0$ κατά υπερβολές και είναι αναλλοίωτες από παράλληλες προς τον x_2 -άξονα μεταφορές. Η τριγωνική επιφάνεια Δ , τέμνει αυτές τις επίπεδες-επιφάνειες κατά ένα σύστημα καμπύλων, όπως φαίνεται στο Σχ. 13.9.



Σχήμα 13.8.



Σχήμα 13.9.

Επί της $\text{int}\Delta$, η παράγωγος της V κατά μήκος των τροχιών της (13.18) είναι

$$\begin{aligned} V'(x) &= V(x) \left[\frac{3x_1'}{5x_1} + \frac{2x_3'}{5x_3} \right] = V(x) \left[\left[\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5} \right] Ax - x^T Ax \right] \\ &= V(x) \left[(1-x_1-x_3) \left(\frac{11}{5} - x_1 - x_3 \right) + 5 \left(x_1 - \frac{3}{5} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

(13.21)

και συνεπώς η $V'(x)$ είναι θετική για $x \in \text{int}\Delta$ και η V αυξάνει επί των τροχιών της (13.18) καθώς αυξάνει το t .

Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 (σελ. 64), συμπεραίνουμε ότι επί οποιασδήποτε τροχιάς εντός της $\text{int}\Delta$, η V αυξάνει μέχρι τη μέγιστη τιμή της που λαμβάνεται στο Q . Έτσι, όλες οι τροχιές εντός της $\text{int}\Delta$, τείνουν προς το Q καθώς αυξάνει το t . Επιπλέον, η $\text{int}\Delta$ είναι υποσύνολο του πεδίου έλξης του Q και έτσι δεν περιέχει

σημεία ισορροπίας. Κατά συνέπεια, όλα τα σημεία ισορροπίας της (13.18), εμφανίζονται επί του $\partial\Delta$. Επί της $\Gamma\Lambda$ ($x_2=0$) έχουμε

$$x_1' = x_1(3x_3 - 5x_1x_3) = 0$$

$$x_3' = x_3(2x_1 - 5x_1x_3) = 0$$

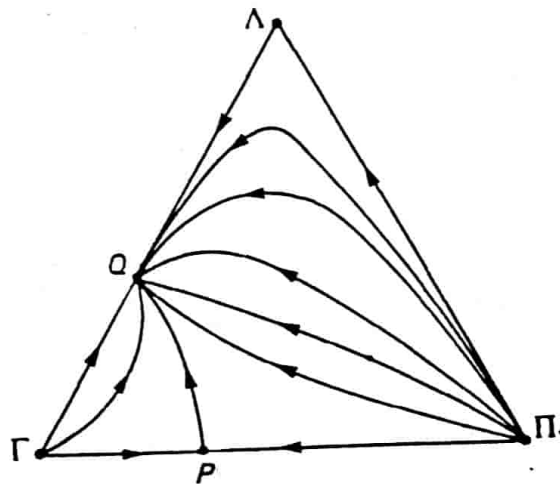
και έτσι, εκτός του Q , έχουμε σημεία ισορροπίας στο $\Gamma:(1,0,0)$ και στο $\Lambda:(0,0,1)$. Ομοίως, επί του $\Lambda\Pi$ ($x_1=0$) και $\Gamma\Pi$ ($x_3=0$), βρίσκουμε ότι έχουμε σημεία ισορροπίας στα $\Pi:(0,1,0)$ και $P:(2/3, 1/3, 0)$. Δεν υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας στην Δ .

Παρατηρώντας, τέλος, ότι

(i) επί της $\Gamma\Lambda$ ισχύει $x_1' > 0$ όταν $x_1 < 3/5$ και $x_1' < 0$ όταν $x_1 > 3/5$.

(ii) επί της $\Lambda\Pi$ ισχύει $x_3' > 0$.

(iii) επί της $\Gamma\Pi$ ισχύει $x_2' > 0$ όταν $x_2 < 1/3$ και $x_2' < 0$ όταν $x_2 > 1/3$, μπορούμε να δούμε τη συμπεριφορά των τροχιών επί του $\partial\Delta$ και να πάρουμε το ακόλουθο διάγραμμα φάσεων.

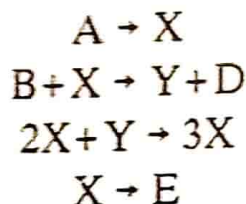


Σχήμα 13.10.

Έστω ότι ένα μεταλλαγμένο άτομο στρατηγικής Λ εμφανίζεται σε έναν πληθυσμό που αποτελείται αρχικά μόνο από άτομα στρατηγικής Γ και άτομα στρατηγικής Π . Ο αναμειγμένος πληθυσμός αναπαρίσταται από ένα σημείο εντός της Δ , κοντά στον $\Gamma\Pi$. Αφού όλες οι τροχιές εντός της Δ τείνουν στο Q καθώς αυξάνει το t , συμπεραίνουμε ότι αυτή η πληθυσμιακή καταστροφή τείνει στο $(3/5, 0, 2/5)$, όπου τα άτομα στρατηγικής Π εξαφανίζονται.

13.4. ΕΝΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΕ ΧΗΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θεωρούμε τις χημικές αντιδράσεις



και υποθέτουμε ότι οι αντίστροφες αντιδράσεις μπορούν να αγνοηθούν και ότι οι αρχικές και τελικές συγκεντρώσεις προϊόντων A,B,D,E είναι σταθερές.

Οι προκύπτουσες εξισώσεις χημικής κινητικής είναι

$$\begin{aligned} X' &= \alpha - (b+1)X + X^2Y \\ Y' &= bX - X^2Y \end{aligned} \quad (13.22)$$

για θετικές παραμέτρους α και b . Το σύστημα έχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας P στη θέση $(\alpha, b/\alpha)$. Η γραμμικοποίηση του (13.22) στο P έχει πίνακα συντελεστών

$$\begin{bmatrix} 2XY - b - 1 & X^2 \\ b - 2XY & -X^2 \end{bmatrix} \Big|_{\left(\alpha, \frac{b}{\alpha}\right)} = \begin{bmatrix} b - 1 & \alpha^2 \\ -b & -\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (13.23)$$

Η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι α^2 και έτσι η ευστάθεια του P προσδιορίζεται από το ίχνος του πίνακα. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές όταν $\alpha^2 + 1 > b$ και ασταθές όταν $\alpha^2 + 1 < b$.

Εισάγοντας τοπικές συντεταγμένες

$$x_1 = X - \alpha$$

$$x_2 = Y - \frac{b}{\alpha}$$

παίρνουμε

$$x_1' = (b-1)x_1 + \alpha^2 x_2 + 2\alpha x_1 x_2 + \frac{b}{\alpha} x_1^2 + x_1^2 x_2$$

$$x_2' = -bx_1 - \alpha^2 x_2 - 2\alpha x_1 x_2 - \frac{b}{\alpha} x_1^2 - x_1^2 x_2 \quad (13.24)$$

Θεωρώντας το (13.24) ως ένα σύστημα με παράμετρο b , όπου το α παραμένει σταθερό, έχουμε ότι για $b \in ((\alpha-1)^2, (\alpha+1)^2)$ το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι $1/2 (b-\alpha^2-1)$. Έτσι

$$\frac{d}{db} \left[\frac{1}{2} (b - \alpha^2 - 1) \right] = \frac{1}{2}$$

στην τιμή διακλάδωσης $b = \alpha^2 + 1$.

Ο πίνακας

$$M = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$M^{-1} \begin{bmatrix} b-1 & \alpha^2 \\ -b & -\alpha^2 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

και ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{x} = M\mathbf{y}$$

μετατρέπει το σύστημα (13.24), στο

$$y_1' = \alpha y_2 + (1 - \alpha^2)\alpha y_1^2 + 2\alpha^2 y_1 y_2 - \alpha^4 y_1^3 + \alpha^3 y_1^2 y_2 \quad (13.25)$$

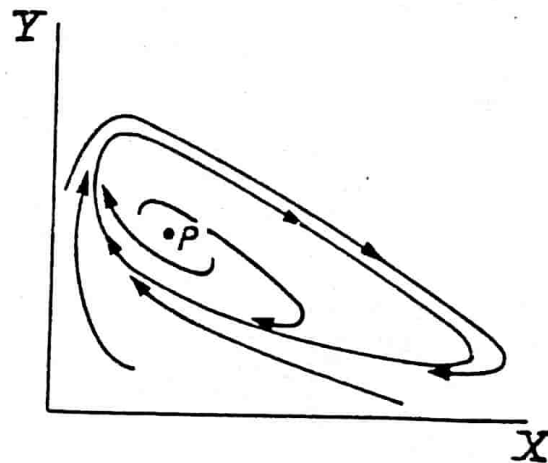
$$y_2' = -\alpha y_1$$

Ο δείκτης ευστάθειας I που δίνεται από τη σχέση (10.34) της σελ. 117, μπορεί να υπολογισθεί, και αφού μόνο οι όροι g_{111}^1 και $g_{11}^1 g_{12}^1$ είναι μη μηδενικοί, έχουμε

$$I = -2a^5 - 4a^3$$

Έπεται ότι το σύστημα (13.22) διακλαδώνεται σε έναν ελκυστικό οριακό κύκλο που περιβάλλει το P καθώς το b αυξάνει διερχόμενο από την κρίσιμη τιμή $1+a^2$.

Ένα παράδειγμα τυπικού διαγράμματος φάσεων, για $a=1$, $b=3$, δίνεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 13.11.

10.1. Έστω ότι ένας πληθυσμός αυξάνεται σύμφωνα με το λογιστικό μοντέλο και υφίσταται συγκομιδή υπό σταθερό ρυθμό. Η πυκνότητα ενός τέτοιου πληθυσμού δίνεται από την εξίσωση

$$x' = kx - \lambda x^2 - \mu, \quad k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$$

και ενδιαφερόμαστε για λύσεις με $x \geq 0$. Λέμε ότι ο πληθυσμός εξαφανίζεται για μια θετική αρχική πυκνότητα x_0 , αν υπάρχει πεπερασμένη τιμή του t , ώστε $\phi(t, x_0) = 0$.

Χωρίς να λυθεί η εξίσωση ναδειχθεί ότι:

(i) αν $\mu \in \left[0, \frac{k^2}{4\lambda}\right)$, τότε υπάρχει μια τιμή του αρχικού μεγέθους

του πληθυσμού, τέτοια ώστε αν το αρχικό μέγεθος είναι μικρότερο από αυτή την τιμή, τότε ο πληθυσμός εξαφανίζεται· αν, αντιθέτως, το αρχικό μέγεθος υπερβαίνει αυτήν την τιμή, τότε ο πληθυσμός τείνει σε ένα σημείο ισορροπίας.

(ii) αν $\mu > \frac{k^2}{4\lambda}$, τότε ο πληθυσμός εξαφανίζεται ανεξαρτήτως

του αρχικού του μεγέθους.

10.2. Αν, αντί της εξίσωσης της προηγούμενης άσκησης, η πυκνότητα του πληθυσμού ικανοποιεί την

$$x' = kx - \lambda x^2 - \mu x, \quad k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$$

δείξτε ότι αν $k < \mu$, τότε ανεξαρτήτως της αρχικής πυκνότητας $x_0 > 0$, ο πληθυσμός τείνει να εξαφανισθεί καθώς $t \rightarrow +\infty$, αλλά δεν εξαφανίζεται σε πεπερασμένο χρόνο. Μελετήστε το μοντέλο στις περιπτώσεις $k = \mu$ και $k > \mu$.

10.3. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση $\psi(\lambda)$ της οποίας η ύπαρξη εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης για την $F(\lambda, x) = \lambda + (1 + \lambda)x + x^2$.

10.4. Να δειχθεί με τη χρήση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι η εξίσωση

$$\mu + (1 - \mu)y + y^3 = 0$$

έχει μια ακριβώς λύση κοντά στο $(\mu, y) = (1, -1)$.

10.5. Να δειχθεί ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης για τις συναρτήσεις:

(i) $\lambda + \eta \mu x$

(ii) $\frac{1}{2} + \lambda - \sigma \nu \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

(iii) $\eta \mu \lambda + \epsilon \phi x$

10.6. Με τη χρήση του δείκτη ευστάθειας της σελ. 117, δείξτε ότι τα ακόλουθα συστήματα είναι ασυμπτωτικά ευσταθή στο $(0, 0)$:

(i) $x_1' = x_2 - x_1^3 + x_1 x_2$, $x_2' = -x_1 - x_1 x_2^2$

(ii) $x_1' = x_2 - x_1^2 \eta \mu x_1$, $x_2' = -x_1 + x_1 x_2 + 2x_1^2$

(iii) $x_1' = x_2 - x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$, $x_2' = -x_1 + x_1 x_2 + x_2^2$

10.7. Δείξτε ότι τα παρακάτω συστήματα υφίστανται διακλάδωση Hopf στο $\mu = 0$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε ένας ευσταθής οριακός κύκλος περιβάλλει το $(0, 0)$ όταν $\mu > 0$:

(i) $x_1' = x_2 - x_1^3$, $x_2' = -x_1 + \mu x_2 - x_1^2 x_2$

$$(ii) \quad x_1' = \mu x_1 + x_2 - x_1^3 \sigma_{UV} x_1, \quad x_2' = -x_1 + \mu x_2$$

$$(iii) \quad x_1' = \mu x_1 + x_2 + \mu x_1^2 - x_1^2 - x_1 x_2^2, \quad x_2' = -x_1 + x_2^2$$

BIBLIOΓΡΑΦΙΑ

- [Αθ-Κα-Στρατ] Χ. Αθανασιάδης-Γ. Καλογερόπουλος-Ι. Στρατής: Μαθήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Αθήνα 1990.
- [Ar-P] D. K. Arrowsmith-C.M. Place: Ordinary Differential Equations, Chapman and Hall, 1982.
- [Γε] Π. Γεωργίου: Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Αθήνα, 1981.
- [Γκ] Ε. Γκρέκας: Σημειώσεις για το Μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις II, Αθήνα, 1987.
- [C-Ha] S.N. Chow-J.K. Hale: Methods of Bifurcation Theory, Springer, 1982.
- [G] R. Grimshaw: Nonlinear Ordinary Differential Equations, Blackwell Scientific Publications, 1990.
- [Ha] J.K. Hale: Ordinary Differential Equations, Wiley, 1969.
- [Ha-Ko] J.K. Hale-H. Kocak: Differential Equations, Springer (υπό έκδοση).
- [Hi-Sma] M.W. Hirsch-S.Smale: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.
- [Hu] W. Hurewicz: Lectures on Ordinary Differential Equations, MIT Press, 1958.
- [Jon-Sl] D.S. Jones-B.D. Sleeman: Differential Equations and Mathematical Biology, George Allen & Unwin, 1983.
- [Jor-Smi] D.W. Jordan-P.Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations, 2nd, ed., Oxford U.P., 1987.
- [Ma-McC] J.E. Marsden-M. McCracken: The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer, 1976.
- [Sa] D.A. Sanchez: Ordinary Differential Equations and Stability Theory: an introduction, Dover, 1979.
- [Si] G.F. Simmons: Differential Equations with Applications and Historical Notes, Tata-McGraw Hill, 1974.
- [Στα] Ν. Σταυρακάκης: Συμπληρωματικές Σημειώσεις Διαφορικών Εξισώσεων, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1989.
- [Στραν] Χ. Στράντζαλος: Διαφορικές Εξισώσεις, Δυναμικά Συστήματα και Διαφορικά Διανυσματικά Πεδία, Αθήνα, 1982.