ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Κατεύθυνση: **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά**

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
&
ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Ι

Μέρος Α΄

Πρόχειρες Σημειώσεις

Ι. Γ. Στρατής

2010

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (Α΄ ΜΕΡΟΥΣ)

G. Birkhoff - G.-C. Rota
Ordinary Differential Equations, 3rd ed.,
J. Wiley, New York, 1978.

E. A. Coddington - N. Levinson
Theory of Ordinary Differential Equations,
McGraw-Hill, New York, 1955.

C. Corduneanu
Principles of Differential and Integral Equations, 2nd ed.,
Chelsea, New York, 1977.

J. K. Hale
Ordinary Differential Equations,
Wiley-Interscience, New York, 1969.

P. Hartman
Ordinary Differential Equations,
Wiley, New York, 1964.

W. Hurewicz
Lectures on Ordinary Differential Equations,
M.I.T. Press, Cambridge (Massachusetts), 1958.

G. Sansone - R. Conti
Non-linear Differential Equations,
Pergamon Press, Oxford, 1964.

1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Εστω $t \in \mathbb{R}$, D ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Θα γράφουμε (t,x) για ένα στοιχείο του D $(t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n)$.

Εστω $x'(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ $\left(x' = \dfrac{dx}{dt}\right)$ και έστω $f : D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής

Μια σ.δ.ε. είναι μια σχέση της μορφής

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (1)$$

Λεμε οτι η x είναι μια λύση της (1) σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, αν

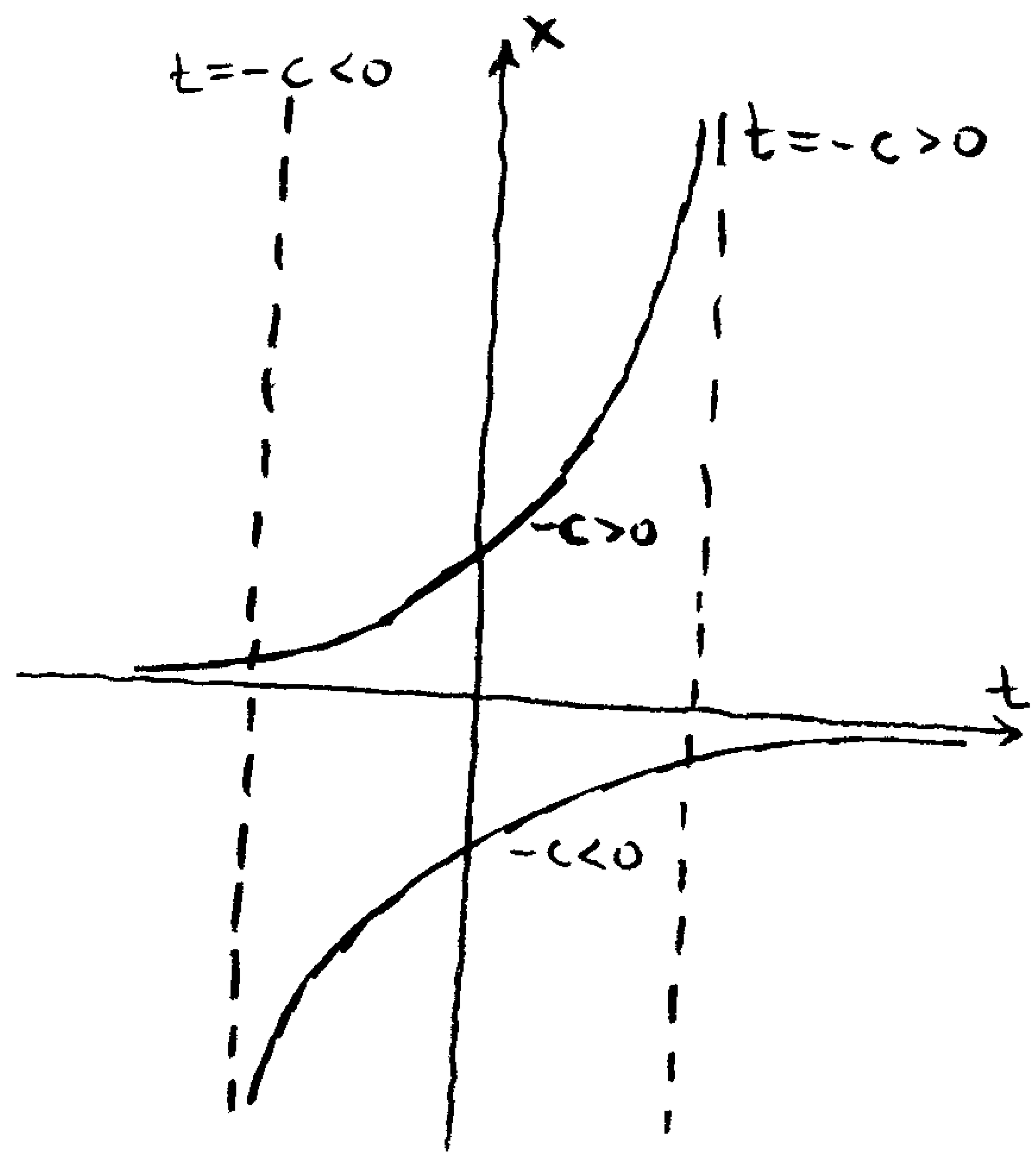
- η x είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο I
- $(t, x(t)) \in D$, $t \in I$
- ικανοποιείται η (1)

Παραδείγματα

1. $D = \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = x^2$: $x' = x^2$

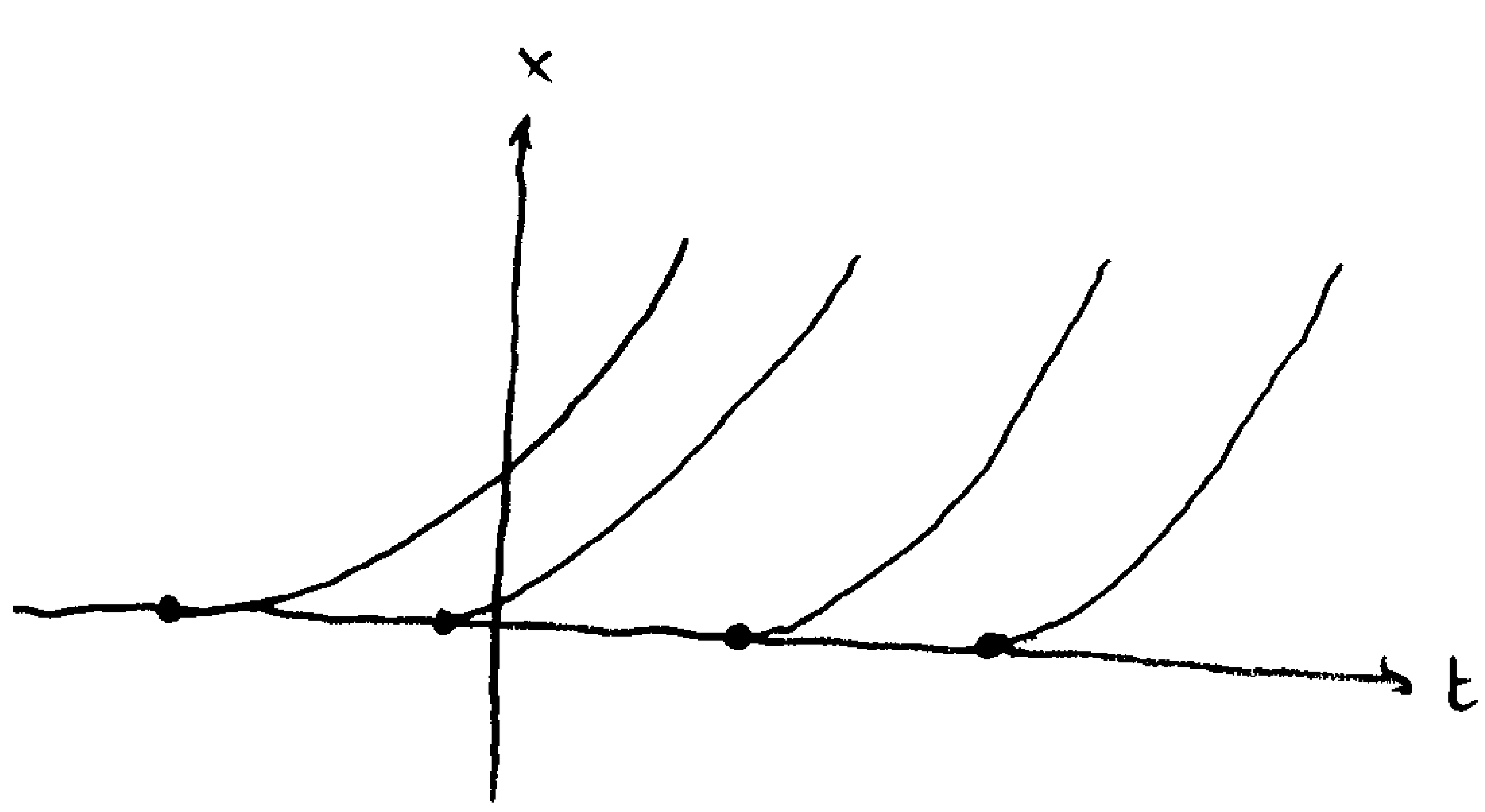
$\phi(t) = -\dfrac{1}{t+c}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ λύση

$c>0$: $t \in (-c, \infty)$, $c<0 : t \in (-\infty, -c)$



2. $D = \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

$\phi(t) = \dfrac{(t-c)^2}{4}$, $t \in [c, \infty)$ λύση. Επίσης η $x \equiv 0$ είναι λύση



Προβλημα Αρχικων Τιμων

Εστω $(t_0, x_0) \in D$ δεδομενο. Εν π.α.τ. για τη δ.ε. (1) συνισταται στην ευρεση ενος διαστηματος $I : t_0 \in I$ και μιας λυσης x της (1) που να ικανοποιει τη σχεση $x(t_0) = x_0$. Συμβολικά

$$\begin{cases} x' = f(t,x) & , t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (2)$$

Παρατηρήσεις

1. Θεωρουμε το π.α.τ. $x' = x^2$, $x(0) = -c$, $c \in \mathbb{R}$

   Το παραδειγμα 1 δειχνει οτι το I μπορει να εξαρταται απο το c και να μην ειναι ολο το $\mathbb{R}$. Για καθε c εχουμε ακριβως μια λυση.

2. Θεωρουμε το π.α.τ. $x' = x^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, $x(0) = 0$.

   Η $x(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, \infty)$ ειναι μια λυση.

   Η $x(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-c)^2}{4} & , t \geq c \geq 0 \\ 0 & , t \leq c \end{cases}$ ειναι επισης μια (αλλη) λυση

   Εδω δεν εχουμε μοναδικη λυση (παρ' ολο που η f ειναι συνεχης).

3. Υπο την προϋποθεση της συνεχειας της f, το π.α.τ. (2) ειναι ισοδυναμο με την ολοκληρωτικη εξισωση

   $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \qquad (3)$$

4. Η θεωρηση διανυσματικων εξισωσεων καθιστα περιττη την θεωρηση εξισωσεων n-ταξης:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y^{(j)}(t_0) = x_{j+1,0} \quad , j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \\ x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \\ x = (y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ f = (x_2, \dots, x_n, F) \end{cases}$$

Το Θεώρημα Συστολής (Σταθερού Σημείου του Banach ή B.-Caccioppoli)

Ορισμός

$X \subseteq N$, N: χώρος με νόρμα

$T : X \to X$ συστολή $\underset{\text{ορσ}}{\iff}$ $\exists\, \alpha \in (0,1)$: $\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x-y\|$ $\forall x,y \in X$

Παράδειγμα

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x + e^{-x}$

δεν είναι συστολή (αν υποθέσουμε ότι $\exists\, \alpha \in (0,1)$ όπως παραπάνω, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού μπορούμε να δείξουμε ότι αν $x, y > -\log(1-\alpha)$ τότε $\|f(x) - f(y)\| > \alpha \|x-y\|$)

Θεώρημα

$\left.\begin{array}{l} X \text{ κλειστό υποσύνολο ενός χ. Banach} \\ T : X \to X \text{ : συστολή} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, x \in X : \; Tx = x$

Για τυχόν $x_0 \in X$, η ακολουθία $\{x_n\}$: $x_{n+1} := Tx_n$ συγκλίνει στο x.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in X$ τυχόν. Θέτουμε $x_n := T^n x_0$. Έστω $\alpha \in (0,1)$ όπως στον ορισμό. Τότε

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\| = \alpha \|Tx_{n-1} - Tx_{n-2}\|$$

$$\leq \alpha^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \dots \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

Έστω $m > n$. Τότε

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq \left(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^n\right) \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\| \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς } n \to +\infty$$

Συνεπώς η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο χώρος είναι πλήρης, η $\{x_n\}$ είναι συγκλίνουσα· έστω $\tilde{x}$ το όριο της. Αφού το X είναι κλειστό, $\tilde{x} \in X$.

Εστω η τυχων:

$$\| T\tilde{x} - \tilde{x} \| \leq \| T\tilde{x} - Tx_n \| + \| Tx_n - \tilde{x} \|$$

$$\leq \alpha \| \tilde{x} - x_n \| + \| \tilde{x} - x_{n+1} \|$$

Καθως $n \to \infty$: $\alpha \| \tilde{x} - x_n \| + \| \tilde{x} - x_{n+1} \| \to 0$

$$\therefore \quad T\tilde{x} = \tilde{x}$$

Μοναδικοτητα: Εστω $\tilde{x}, \tilde{y}$: $T\tilde{x} = \tilde{x}$ και $T\tilde{y} = \tilde{y}$. Τοτε $\| \tilde{x} - \tilde{y} \| = \| T\tilde{x} - T\tilde{y} \| \leq \alpha \| \tilde{x} - \tilde{y} \|$ που ισχυει μονον αν $\| \tilde{x} - \tilde{y} \| = 0$, δηλ. $\tilde{x} = \tilde{y}$.

<u>Παρατηρησεις</u>

(i) Το Θεωρημα δινει, εκτος απο υπαρξη και μοναδικοτητα, και μια υπολογιστικη (επαναληπτικη) τεχνικη ευρεσης της λυσης.

(ii) Ευκολα μπορουμε να εχουμε μια εκτιμηση του ρυθμου συγκλισης της επαναληπτικης διαδικασιας · αποδεικνυεται οτι

$$\| \tilde{x} - x_n \| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \| x_1 - x_0 \|$$

(iii) Η πληροτητα του χωρου ειναι ουσιαστικη. Αν το "Banach" αντικατασταθει με το "με νορμα", στη διατυπωση του Θεωρηματος το συμπερασμα δεν ισχυει καθ' αναγκη:

$$X = \{ \text{πολυωνυμα } p(x) = \sum a_r x^r \text{ με } \|p\| = \sum 2^{-n} |a_n| \}$$

$$T: p \mapsto 1 + x p(x)$$

Ο T ειναι συστολη αλλα δεν εχει σταθερο σημειο

Συμπάγεια και το Θεώρημα του Schauder

Ορισμός

N, M χωροι με νορμα , $X \subseteq N$

$T : X \to M$ συνεχης στο $x \in X \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$

$$\|Tx - Ty\| < \varepsilon \quad \forall y \in X : \|x - y\| < \delta$$

Συνεχης στο X, αν ειναι συνεχης σε καθε $x \in X$.

Ορισμός

N, M, X οπως πριν

$T : X \to M$ ομοιομορφα συνεχης στο $X \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$$\|Tx - Ty\| < \varepsilon \quad \text{οταν} \quad \|x - y\| < \delta.$$

Παραδείγματα

(i) $M = N = \mathbb{R}$, $X = (\alpha, 1)$ $\quad \alpha \geq 0$, $\quad Tx = \frac{1}{x}$, $x \in (\alpha, 1)$

$a > 0$: T ομοιομορφα συνεχης

$a = 0$: T συνεχης , αλλα οχι ομοιομορφα συνεχης

(ii) A : $n \times m$ πινακας

$T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$: $\quad T(x) = Ax$, $x \in \mathbb{C}^m$: ομοιομορφα συνεχης

(iii) N : χωρος με νορμα $\qquad T : N \to \mathbb{R}$: $Tx = \|x\|$ $\quad$ ομοιομ. συνεχης

(iv) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $\quad (x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2 + 1)$ $\qquad$ ομοιομορφα συνεχης

(v) $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχης

$T : C[a,b] \to C[a,b]$: $\quad (Tf)(x) := \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy \qquad \forall f \in C[a,b]$

$C[a,b]$: supremum νορμα

T ομοιομορφα συνεχης στο $C[a,b]$

Θεωρημα 1

$A: X \to Y$ συνεχης στο $x_0 \in X$
$B: Y \to Z$ συνεχης στο $y_0 = Ax_0$
$\Rightarrow$ $BA: X \to Z$ συνεχης στο x_0

Θεωρημα 2

$T: X \to M$ συνεχης στο $x \in X$
$X \subseteq N$, M, N: χωροι με νορμα
$\{x_n\} \in X$: $x_n \to x$ στον N $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $Tx_n \to Tx$ στον M

Παραδειγμα

$D: C^1[0,1] \to C[0,1]$ $\quad Df = f'$. Ο D δεν ειναι παντου συνεχης.

Αποδειξη: $f \in C^1[0,1]$, $f_n(x) = f(x) + \dfrac{e^{-nx}}{n}$

Τοτε $f_n \to f$ στον $C^1[0,1]$ (δηλ. ομοιομορφα), αλλά

$f_n' \not\to f'$ $\left(f_n'(0) \to f'(0) - 1\right)$. Αν ο D ηταν συνεχης στην f, θα ερχομασταν σε αντιφαση με το Θ2.

Ομως ισχυει οτι:

$D: C_1^1[a,b] \to C[a,b]$: συνεχης

όπου

$C_1^1[a,b]$: συνεχως διαφορισιμες συναρτησεις στο $[a,b]$

$$\|f\|_1 := \left(\int_a^b \left(|f|^2 + |f'|^2\right) dx \right)^{1/2}$$

$C[a,b]$: L^2-νορμα

Ορισμος: T με πεδιο ορισμου X
$\tilde{T}$ —//— $\tilde{X}$, $\tilde{X} \supseteq X$

ο $\tilde{T}$ λεγεται επεκταση του T $\overset{}{\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}}$ $Tx = \tilde{T}x \quad \forall x \in X$

Θεώρημα 3

$T: X \to M$ ομοιομορφα συνεχης
$X \subseteq N$: χωρος με νορμα
M: χωρος Banach

Αν X πυκνο υποσυνολο του $\tilde{X}$, τοτε ο T εχει μοναδικη συνεχη επεκταση $\tilde{T}: \tilde{X} \to M$

Αφου οι συνεχεις τελεστες περιλαμβανουν τις συστολες, ειναι φυσικο να αναρωτηθουμε αν το Θ. Συστολης γενικευεται στους συνεχεις τελεστες.

Η απαντηση ειναι οχι· ο τελεστης $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2+1)$ ειναι συνεχης, αλλα δεν εχει (προφανως) σταθερο σημειο.

Τετοιες καταστασεις αποφευγονται με το να περιοριστουμε σε φραγμενα χωρια:

<u>Ορισμος</u>

N : χωρος με νορμα, $\quad S \subseteq N$

S : φραγμενο $\iff \exists M : \|x\| < M \quad \forall x \in S$

<u>Ορισμος</u>

Ενα συνολο S σε εναν διανυσματικο χωρο λεγεται κυρτο $\iff$

$\forall x, y \in S \ : \ \alpha x + (1-\alpha) y \in S \quad \forall \alpha \in [0,1]$

<u>Θεωρημα Σταθερου Σημειου του Brouwer</u>

Καθε συνεχης απεικονιση ενος κλειστου, φραγμενου και κυρτου συνολου του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτο του εχει σταθερο σημειο.

<u>Παραδειγματα</u>

(i) <u>Θεώρημα Perron</u>

Εστω $A \in (\mathbb{R}^+)^{n\times n}$. Ο A εχει τουλαχιστον μια θετικη ιδιοτιμη και τα στοιχεια του αντιστοιχου ιδιοδιανυσματος ειναι μη αρνητικα.

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 \quad \text{και} \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \}$$

$$Bx = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}, \quad x \in S$$

Το σταθερο σημειο x του B ειναι ιδιοδιανυσμα με αντιστοιχη ιδιοτιμη $\|Ax\|_1$.

<u>Ασκηση</u>: να βρεθει μια ισχυροτερη εκδοχη του Θ. Perron, οπου δεν απαιτειται να ειναι στον $\mathbb{R}^+$ ολα τα στοιχεια του A (δες πισω)

Πρεπει να εξασφαλισει οτι ο A απεικονιζει το $\{x : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ στον εαυτο του.

Πρεπει, λοιπον,

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$$

Επισης, πρεπει

$$Ax \neq 0 \quad \text{για } x \neq 0$$

(αλλοιως δεν οριζεται ο B), που μπορει να γινει

$$Ax \neq 0 \quad \forall x : x_i \geq 0 \ \forall i$$

(εκτος απο το $x=0$)

(ii) Το Θ. Brouwer δεν ισχυει σε απειροδιαστατους χωρους:

$$N := \left\{ x = \{x_n\} \quad n = -\infty, \dots, 0, \dots +\infty \ : \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}, \qquad \|x\| = \left(\sum |x_n|^2\right)^{1/2}$$

$$B := \{ x \in N : \|x\| \leq 1 \}$$

$$x, y \in N \qquad Ux = y \ , \ y_n = x_{n-1}$$

$$T : B \to B : Tx = Ux + (1 - \|x\|) z \quad , \quad z = \{z_n\} \ , \quad z_m = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

Ο T δεν εχει σταθερο σημειο.

Συμπαγεια

Ορισμος

N χωρος με νορμα, $S \subseteq N$

S: συμπαγες $\Leftrightarrow$ καθε απειρη ακολουθια στοιχειων του S εχει μια υπακολουθια που συγκλινει σε ενα στοιχειο του S

Θεωρημα

Τα συμπαγη συνολα ειναι κλειστα και φραγμενα

Παρατηρηση: Το αντιστροφο δεν ισχυει· παραδειγμα: η κλειστη μοναδιαια σφαιρα στον $L^2[0,1]$ ειναι κλειστη και φραγμενη, αλλα οχι συμπαγης:

$$f_n(x) = \sqrt{2}\, \sin(n\pi x)$$

Θεωρημα

M, N χωροι με νορμα, X συμπαγες υποσυνολο του M

$T: X \to N$ συνεχης. Τοτε το $T(X) = \{ Tx ; x \in X \}$ ειναι συμπαγες.

Εφαρμογη: N χωρος με νορμα, S συμπαγες υποσυνολο του N

Εστω $f: S \to \mathbb{R}$. Η f ειναι φραγμενη και $\exists\, x_M, x_m \in S$:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in S.$$

Σχετική Συμπάγεια

Ορισμος

N χωρος με νορμα , $S \subseteq N$

S : σχετικως συμπαγες $\Leftrightarrow$ καθε ακολουθια στοιχειων του S εχει μια υπακολουθια που συγκλινει σε ενα στοιχειο του N

Παρατηρησεις: (i) καθε υποσυνολο ενος συμπαγους ή σχετικως συμπαγους συνολου ειναι σχετικως συμπαγες.

(ii) Τα συμπαγη ειναι κλειστα ενω τα σχετικως συμπαγη δεν ειναι κατ' αναγκη κλειστα

Θεωρημα

Η θηκη ενος σχετικως συμπαγους συνολου ειναι συμπαγης.

(Θηκη του S = ενωση του S με το συνολο των οριακων σημειων του)

Πορισμα

Κλειστο + Σχετικως Συμπαγες $\Rightarrow$ Συμπαγες

Ορισμος

N : χωρος με νορμα , $S \subseteq N$

Ενα ε-δικτυο του S ειναι ενα συνολο στοιχειων του S τετοιων ωστε καθε $x \in S$ βρισκεται σε αποσταση ε απο καποιο στοιχειο του δικτυου.

Ενα πεπερασμενο ε-δικτυο ειναι ενα ε-δικτυο που αποτελειται απο πεπερασμενο πληθος στοιχειων.

Θεωρημα

B : χωρος Banach $S \subseteq B$

S σχετικως συμπαγες $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ το S εχει ενα πεπερασμενο ε-δικτυο.

Παρατηρηση : Σε χωρους πεπερασμενης διαστασης : Συμπαγες $\equiv$ Κλειστο + Φραγμενο

Συνθήκες για να είναι συμπαγές ένα υποσύνολο του $C[a,b]$

Ορισμός

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ φραγμένη στο $I\subseteq\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M: |f(x)|\leq M \quad \forall x\in I$
- F οικογένεια συναρτήσεων : ομοιόμορφα φραγμένη στο I

$$\Leftrightarrow \exists M: |f(x)|\leq M \quad \forall x\in I \quad \forall f\in F$$

Παράδειγμα

$f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$

Η f_α ειναι φραγμενη στο $[0,1]$ για καθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Η $f_\alpha : 0\leq\alpha\leq 1$ ειναι ομοιομορφα φραγμενη στο $[0,1]$

Η $f_\alpha : a\geq 0$ δεν ειναι ομοιομορφα φραγμενη ($f_\alpha(\frac{1}{4})$ οσοδηποτε μεγαλη για καταλληλο α)

Θεώρημα

Μια συνεχης απεικονιση ενος συμπαγους συνολου ειναι ομοιομορφα συνεχης

Ορισμός

Μια οικογενεια F συναρτησεων ειναι ισοσυνεχης σε ενα διαστημα I του $\mathbb{R}$ αν $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0 : |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ οταν $|x-y|<\delta$, $x,y\in I$ και $f\in F$.

Προταση

Καθε πεπερασμενο συνολο συνεχων συναρτησεων σε ενα κλειστο διαστημα ειναι ισοσυνεχες.

Θεωρημα Arzelà - Ascoli

Θεωρουμε το $C[a,b]$ με τη supremum νορμα. Ενα συνολο συναρτησεων του $C[a,b]$ ειναι σχετικως συμπαγες $\Leftrightarrow$ ειναι ομοιομορφα φραγμένο και ισοσυνεχες στο $[a,b]$.

(αντι $C([a,b],\mathbb{R})$ μπορουμε να εχουμε $C(D,\mathbb{R}^n)$: D συμπαγες υποσυνολο του $\mathbb{R}^n$)

Το απειροδιάστατο ανάλογο του Θ. Brouwer είναι το

Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder (1ο Θεώρημα)

Αν S είναι κυρτό, συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα, κάθε συνεχής απεικόνιση του S στο S έχει σταθερό σημείο.

ορισμός

Βασικό Πόρισμα (συνήθως αυτό αποκαλείται ΘΣΣ Schauder)

Έστω S κυρτό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $T: S \to S$ συμπαγής και συνεχής απεικόνιση. Τότε η T έχει σταθερό σημείο. (T συμπαγής $\Leftrightarrow$ A φραγμ. $\subseteq X \Rightarrow \overline{T(A)}$ συμπαγές)

Λίγα λόγια για την απόδειξη:

(1) Προσεγγιστικό Λήμμα

X, Y χώροι Banach, $B \subseteq X$ φραγμένο, $T: B \to Y$ συμπαγής

Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $T_\varepsilon : B \to Y$ συνεχής, με πεπερασμένης διάστασης πεδίο τιμών $T_\varepsilon(B)$ που έχει την ιδιότητα

$\|Tx - T_\varepsilon x\| < \varepsilon \quad \forall x \in B.$

(2) ορισμός κατάλληλης οικογένειας τελεστών T_n για τους οποίους ισχύει το Θ. Brouwer (κάθε T_n έχει σταθερό σημείο $\tilde{x}_n$)

(3) $\exists \; w \in X$ και υπακολουθία $\{\tilde{x}_{n_j}\}$: $T\tilde{x}_{n_j} \to w$, $j \to \infty$ και τελικά $Tw = w$

2ο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder

Αν S είναι κυρτό, κλειστό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα, και R είναι ένα σχετικώς συμπαγές υποσύνολο του S, τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $T: S \to R$ έχει σταθερό σημείο.

Θεώρημα Rothe

Εστω $B = B(0,1)$ η μοναδιαια σφαιρα σε ενα χωρο Banach X.
Αν $T : \overline{B} \to X$ ειναι συμπαγης τετοια ωστε $T(\partial B) \subseteq \overline{B}$,
τοτε η T εχει σταθερο σημείο στο $\overline{B}$

Θεώρημα Leray-Schauder

Εστω B οπως παραπάνω. Εστω $T : [0,1] \times \overline{B} \to X$ συμπαγης, ωστε

$T(0, \partial B) \subseteq \overline{B}$ και $\tau \in [0,1]$, $w \in \partial B \Rightarrow T(\tau, w) \neq w$.

Τοτε η $T(1, \cdot)$ εχει σταθερο σημειο.

Θεώρημα Schaefer

$$\left.\begin{array}{l} X : \text{χωρος Banach} \\ S : X \to X \ \text{συμπαγης} \\ \exists\ M \ \text{ανεξαρτητο του } \tau :\ \tau S u = u,\ \tau \in [0,1] \Rightarrow \|u\| \leq M \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η S εχει σταθερο σημειο στο $\overline{B(0,M)}$.

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ι. ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΕΩΝ

Θεωρουμε το π.α.τ.
$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ανοιχτο

Θεωρημα 1 (Peano)

Αν η f ειναι συνεχης στο D, τοτε για καθε $(t_0, x_0) \in D$, το π.α.τ. (1) εχει μια τουλαχιστον λυση.

Αποδειξη

Εστω $I_\alpha = I_\alpha(t_0) = \{ t : |t - t_0| \le \alpha \}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ και
$$B(\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta,t_0,x_0) = \{ (t,x) : t \in I_\alpha \,,\ |x - x_0| \le \beta \} \,, \quad \beta \in \mathbb{R}^+$$

Εστω οτι τα α, β εχουν επιλεγει ετσι, ωστε $B(\alpha,\beta) \subseteq D$.

Εστω $M := \sup \{ |f(t,x)| : (t,x) \in B(\alpha,\beta) \}$.

Επιλεγουμε $\bar\alpha, \bar\beta$ ετσι, ωστε $0 < \bar\alpha \le \alpha$, $0 < \bar\beta \le \beta$, $M\bar\alpha \le \bar\beta$.

Οριζουμε $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\bar\alpha,\bar\beta) = \{ \phi \in \mathcal{C}(I_{\bar\alpha}, \mathbb{R}^n) : \phi(t_0) = x_0$ και $|\phi(t) - x_0| \le \bar\beta \ \ \forall\, t \in I_{\bar\alpha} \}$.

Αμεσα αποδεικνυεται οτι το $\mathcal{A}$ ειναι κυρτο, κλειστο και φραγμενο.

Για τυχουσα $\phi \in \mathcal{A}$ οριζουμε
$$T\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds \,, \quad t \in I_{\bar\alpha}$$

Απο την Παρατηρηση 3, σελ. 2, επεται οτι η ευρεση σταθερων σημειων του T ισοδυναμει με την επιλυση του π.α.τ. (1)

Ειναι προφανες οτι για $\phi \in \mathcal{A}$, $T\phi \in \mathcal{C}(I_{\bar\alpha}, \mathbb{R}^n)$ και $T\phi(t_0) = x_0$.

Επισης, για $t \in I_{\bar\alpha}$:
$$|T\phi(t) - x_0| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s))|\,ds \right| \le M\,|t - t_0| \le$$
$$\le M\bar\alpha \le \bar\beta \,, \quad \text{αφου } B(\bar\alpha,\bar\beta) \subseteq B(\alpha,\beta).$$

Συνεπως $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Εξάλλου

$$|T\phi(t) - T\phi(\bar{t})| \leq \left| \int_{\bar{t}}^{t} |f(s,\phi(s))|\, ds \right| \leq M|t-\bar{t}| \quad , \forall\, t,\bar{t} \in I_{\bar{\alpha}}.$$

Συνεπώς το σύνολο $T(\mathcal{A})$ είναι ισοσυνεχής οικογένεια και ως εκ τούτου το $\overline{T(\mathcal{A})}$ είναι συμπαγές, δηλ. ο T είναι συμπαγής
αφού το $\mathcal{A}$ είναι φραγμένο.

Έστω $\phi, \bar{\Phi} \in \mathcal{A}$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της $f(t,x)$ στο $B(\alpha,\beta)$ έπεται ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$|\phi(s) - \bar{\Phi}(s)| \leq \delta \ , \forall s \in I_{\bar{\alpha}} \Rightarrow |T\phi(t) - T\bar{\Phi}(t)| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s)) - f(s,\bar{\Phi}(s))|\, ds \right|$$

$$\leq \varepsilon\bar{\alpha} \quad , \quad \forall t \in I_{\bar{\alpha}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο T είναι συνεχής.

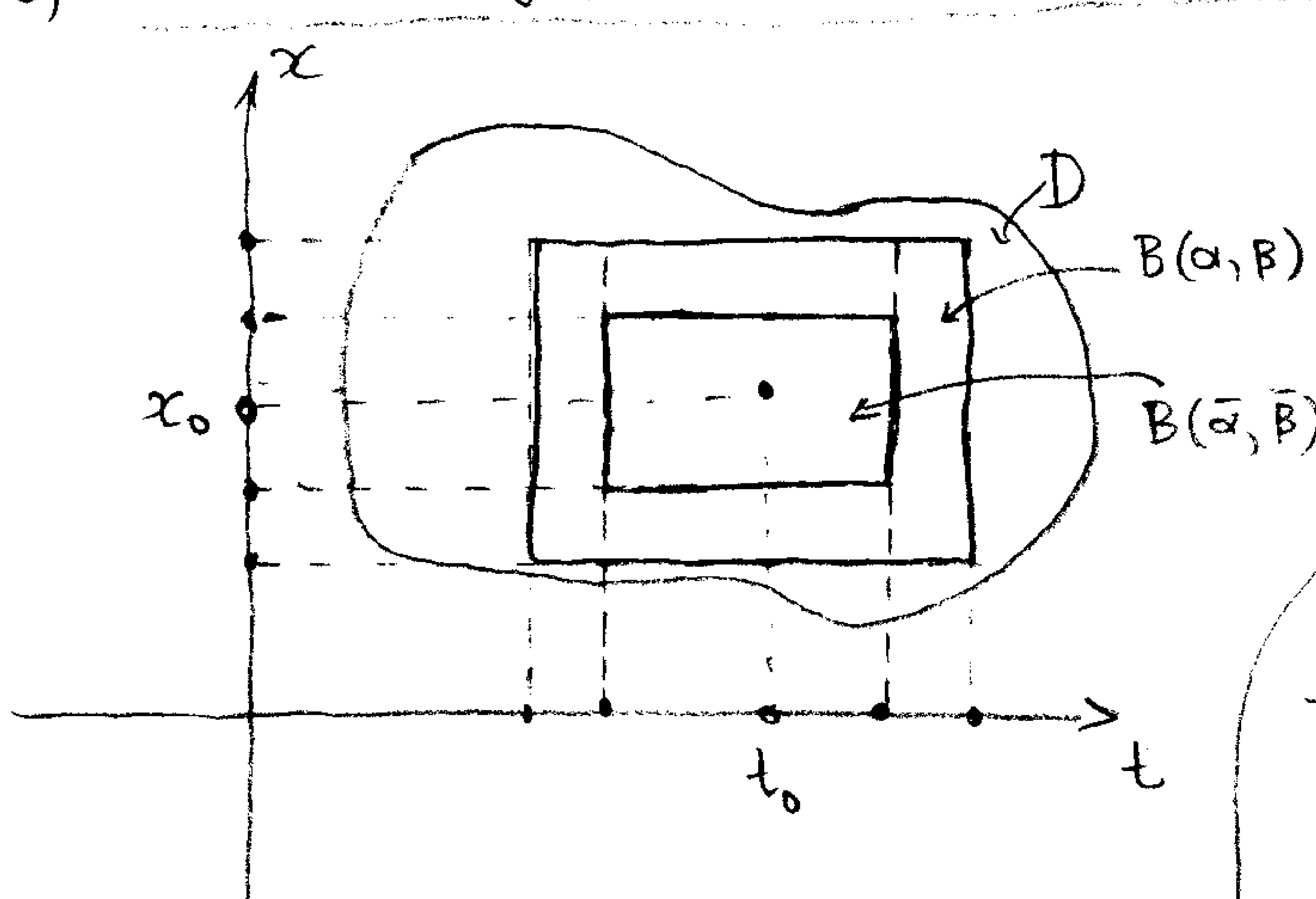
Από το Βασικό Πόρισμα του Θεωρ. Στ. Σημ. Schauder έπεται το ζητούμενο
(S κυρτό, κλειστό, φραγμένο υποσύνολο ενός χ. Banach. $T: S \to S$ συμπαγής & συνεχής $\Rightarrow$ ο T έχει σταθερό σημείο)

<u>Πόρισμα 1</u>

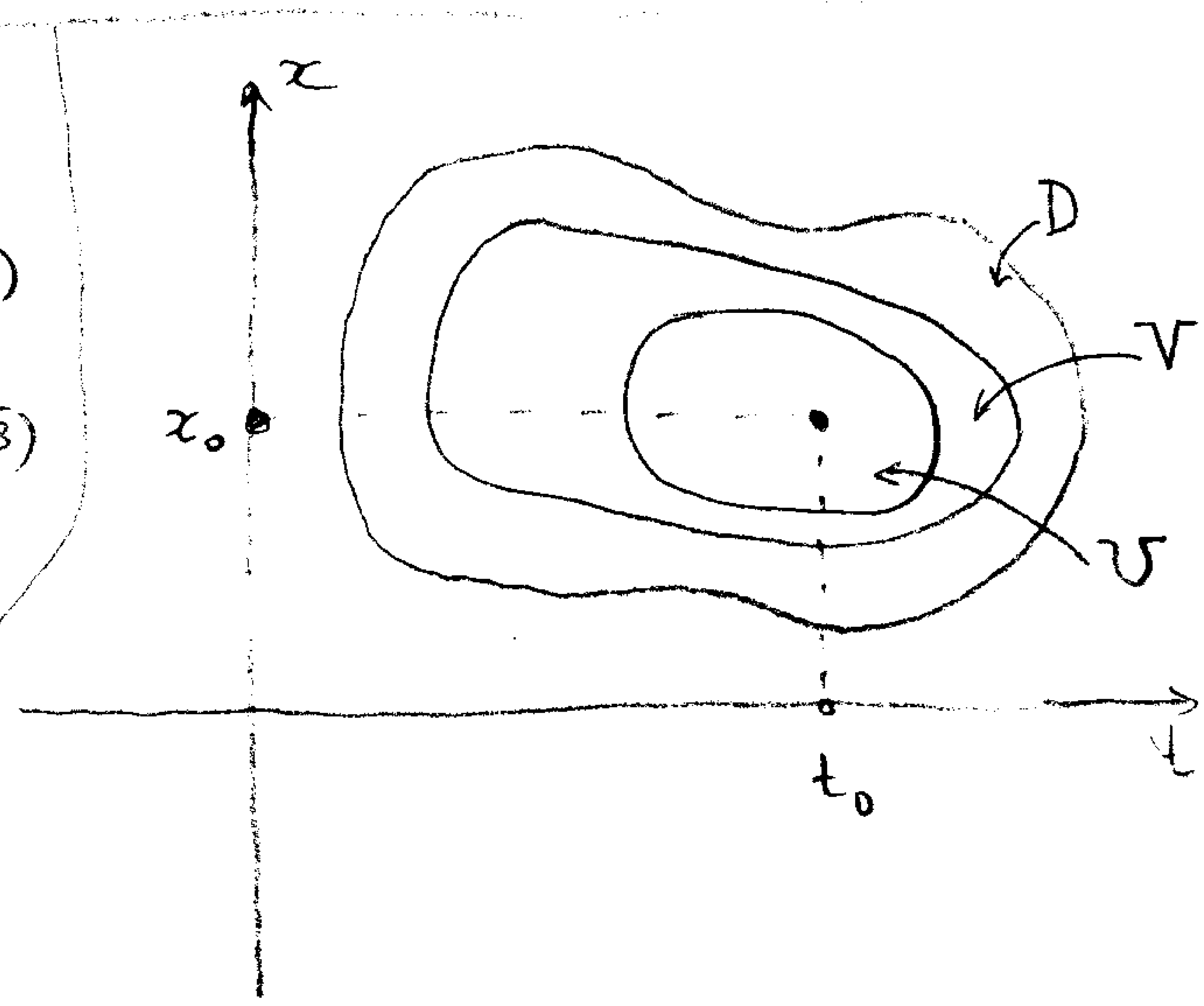
Έστω U συμπαγές υποσύνολο του D. Έστω V ανοιχτό σύνολο στο D με $\overline{V} \subseteq D$. Έστω $U \subseteq V$. Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $(t_0, x_0) \in U$ υπάρχει λύση του π.α.τ. (1) για $t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$.

<u>Απόδειξη</u>

Περιορίζοντας τα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ του Θ1 έτσι, ώστε $B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_0, x_0) \subseteq V$
$\forall (t_0, x_0) \in U$, αναγόμαστε στο Θ1



(Θ1)



(Π1)

Παρατηρήσεις

Το Θ. Peano είναι ένα τοπικό αποτέλεσμα. Όπως είδαμε η λύση ορίζεται στο $I_{\bar{\alpha}}$ με $\bar{a} = \min\left\{a, \frac{B}{M}\right\}$. Στην πραγματικότητα το M εξαρτάται από τις διαστάσεις του $B(\alpha,\beta)$, είναι δηλ. $M = M(\alpha,\beta)$. Μας ενδιαφέρει η επιλογή των α, β έτσι ώστε το min να γίνει όσο το δυνατό μεγαλύτερο. Συχνά το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να εξισώσουμε τα α και $\frac{\beta}{M(\alpha,\beta)}$: αυτό μας επιτρέπει να εκφράσουμε το β συναρτήσει του α και να επιλέξουμε το βέλτιστο α στη συνέχεια.

Παράδειγμα

$$x_1' = x_2 + t x_1^2 \quad , \quad x_2' = x_1 + t x_2^2$$

(A) $x_1(0) = x_2(0) = 0$

Τα α, β είναι απολύτως τυχόντες θετικοί αριθμοί.

Θεωρώντας τη νόρμα της μέγιστης συντεταγμένης, έχουμε

$M(\alpha,\beta) = \beta + \alpha\beta^2$ και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το

$$r = \min\left(a, \frac{1}{1+a\beta}\right)$$

Εξισώνοντας, παίρνουμε $\beta = \dfrac{1-a}{a^2}$ και αφού $\beta > 0$,

πρέπει $\alpha < 1$. Έτσι έχουμε ύπαρξη στο $(-r, r)$ για $r < 1$

Εδώ – μπορεί να διαπιστωθεί ότι – η λύση είναι η ταυτοτικά μηδενική: για $|t| < r \Rightarrow |(x_1,x_2) - (0,0)| < \frac{1-r}{r^2}$ και αν $r \to 1 \Rightarrow |(x_1,x_2)| = 0$.

(B) $x_1(0) = x_2(0) = 1$

$M(\alpha,\beta) = (\beta+1)(\alpha\beta + \alpha + 1)$

Εξισώνοντας: $\alpha^2(\beta+1)^2 + \alpha(\beta+1) - \beta = 0$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+4\beta} - 1}{2(\beta+1)}$$

Η μέγιστη τιμή του α είναι $\frac{1}{3}$ και λαμβάνεται για $\beta = 2$

Συνεπώς η λύση υπάρχει για $|t| < \frac{1}{3}$ και ισχύει

$$|(x_1,x_2) - (1,1)| \leq 2$$

II. ΕΠΕΚΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Αν ϕ είναι μια λύση μιας διαφορικής εξίσωσης σε ένα διάστημα I, λέμε ότι η $\hat{\phi}$ είναι μια επέκταση της ϕ αν:

i) η $\hat{\phi}$ ορίζεται στο $\hat{I}$: $I \subsetneqq \hat{I}$

ii) $\hat{\phi} = \phi$ στο I

iii) η $\hat{\phi}$ ικανοποιεί τη δ.ε. στο $\hat{I}$

Η λύση ϕ είναι μη επεκτάσιμη αν δεν έχει επέκταση, αν, δηλ., το I είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης ϕ.

Λήμμα 1

D: ανοιχτό στον $\mathbb{R}^{n+1}$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής και φραγμένη στο D

Τότε κάθε λύση της $x' = f(t,x)$ που ορίζεται σε ένα διάστημα (a,b), είναι τέτοια ώστε υπάρχουν τα $\phi(a+0)$, $\phi(b-0)$

Αν το $f(b, \phi(b-0))$ ορίζεται (ή μπορεί να οριστεί) ώστε η $f(t,x)$ να είναι συνεχής στο $(b, \phi(b-0))$, τότε η $\phi(t)$ είναι λύση της $x' = f(t,x)$ στο $(a,b]$. Ανάλογα και για το άκρο a.

Απόδειξη

Έστω $t_0 \in (a,b)$. Τότε $\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds$, $t \in (a,b)$

και αν $a < t_1 \le t_2 < b$:

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \le \int_{t_1}^{t_2} |f(s,\phi(s))|\,ds \le M|t_2 - t_1|$$

όπου M ένα φράγμα της $f(t,x)$ στο D.

Αν $t_1, t_2 \to a+0$ έχουμε ότι $\phi(t_2) - \phi(t_1) \to 0$, και από το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy και το ότι η ϕ (ως λύση) είναι συνεχής, έπεται ότι υπάρχει το $\phi(a+0)$.

Το δεύτερο σκέλος του Λήμματος, έπεται από το ότι υπό τις υποθέσεις του ισχύει η ολοκλ. εξίσ. για την ϕ:

Έστω $\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t) & , t \in (a,b) \\ \phi(b-0) & , t = b \end{cases}$. Τότε $\tilde{\phi}(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{\phi}(s))\,ds \Rightarrow \phi'(b-0) = f(b, \tilde{\phi}(b))$

Θεωρημα 1

Εστω D ανοιχτο υποσυνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ συνεχης και $\phi(t)$ λυση της $x' = f(t,x)$ σε ενα διαστημα I. Τοτε υπαρχει επεκταση της ϕ σε ενα μεγιστο διαστημα υπαρξης.

Επιπλεον, αν (a,b) ειναι το μεγιστο διαστημα υπαρξης μιας λυσης $x(t)$ της $x' = f(t,x)$ τοτε το $(t, x(t))$ τεινει στο συνορο του D καθως $t \to a$ και $t \to b$. (Αυτο το μερος του Θ. επεται αμεσα απο το προηγουμενο Λ.)

Αποδειξη

Εστω U συμπαγες υποσυνολο του D, $U \subseteq V$ οπου V ανοιχτο συνολο του D με $\overline{V} \subseteq D$. Απο το Πορισμα 1 (σελ. 9), επεται οτι για καθε αρχικη τιμη στο U, υπαρχει λυση της $x' = f(t,x)$ με πεδιο ορισμου ενα διαστημα πλατους r που εξαρτεται μονο απο τα U, V και το φραγμα της f στο V.

Ας υποθεσουμε οτι $I = [a,b]$ ειναι το διαστημα υπαρξης μιας λυσης $x(t)$. Αν $\{(t, x(t)),\ t \in [a,b]\} \subseteq U$, τοτε υπαρχει μια επεκταση της x σε ενα διαστημα $[a, b+r]$.

Αφου το U ειναι συμπαγες, αυτη η διαδικασια μπορει να συνεχισθει πεπερασμενο πληθος φορων: ετσι, υπαρχει μια επεκταση της $x(t)$ σε ενα διαστημα $[a, b_U]$ τετοιο, ωστε το $(b_U, x(b_U))$ δεν ανηκει στο U.

Εστω τωρα μια ακολουθια ανοιχτων συνολων V_n του D, τετοια ωστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = D$, το $\overline{V_n}$ ειναι κλειστο, φραγμενο και $\overline{V_n} \subseteq V_{n+1}$, $n = 1,2\ldots$ Για καθε V_n υπαρχει b_n (αυτα τα b_n συνιστουν αυξουσα ακολουθια) που κατασκευαζεται οπως παραπανω, ετσι ωστε η λυση $x(t)$ στο $[a,b]$ εχει επεκταση στο $[a, b_n]$ και $(b_n, x(b_n)) \notin \overline{V_n}$.

Αφου η $\{b_n\}$ ειναι ανω φραγμενη, θετουμε $\omega = \lim_{n\to\infty} b_n$. Ειναι προφανες οτι η x επεκτεινεται στο $[a,\omega)$ και δεν μπορει να επεκταθει περαιτερω αφου η ακολουθια $(b_k, x(b_k))$ ειτε ειναι μη φραγμενη ή τεινει στο ∂D.

Παρατηρηση 1

Το προηγουμενο θεωρημα επεκτασιμοτητας μπορει να χρησιμοποιηθει ως εξης: αν ειναι επιθυμητο να δειξουμε οτι μια λυση οριζεται σε ενα διαστημα $[t_0, \infty)$ μπορουμε να εργαστουμε ως ακολουθως:
Εστω οτι η $f(t,x)$ ειναι συνεχης στο $(t_1, \infty)\times(-a,a)$, με $t_1 < t_0$. Ας υποθεσουμε οτι ειναι γνωστο πως:

$|x(t)| \le \beta < \alpha$ για καθε $t \ge t_0$ για το οποιο οριζεται η $x(t)$.

Τοτε η $x(t)$ οριζεται στο $[t_0, \infty)$.

Πραγματι, εστω $T \ge t_0$ και γ: $\beta < \gamma < \alpha$ και εστω

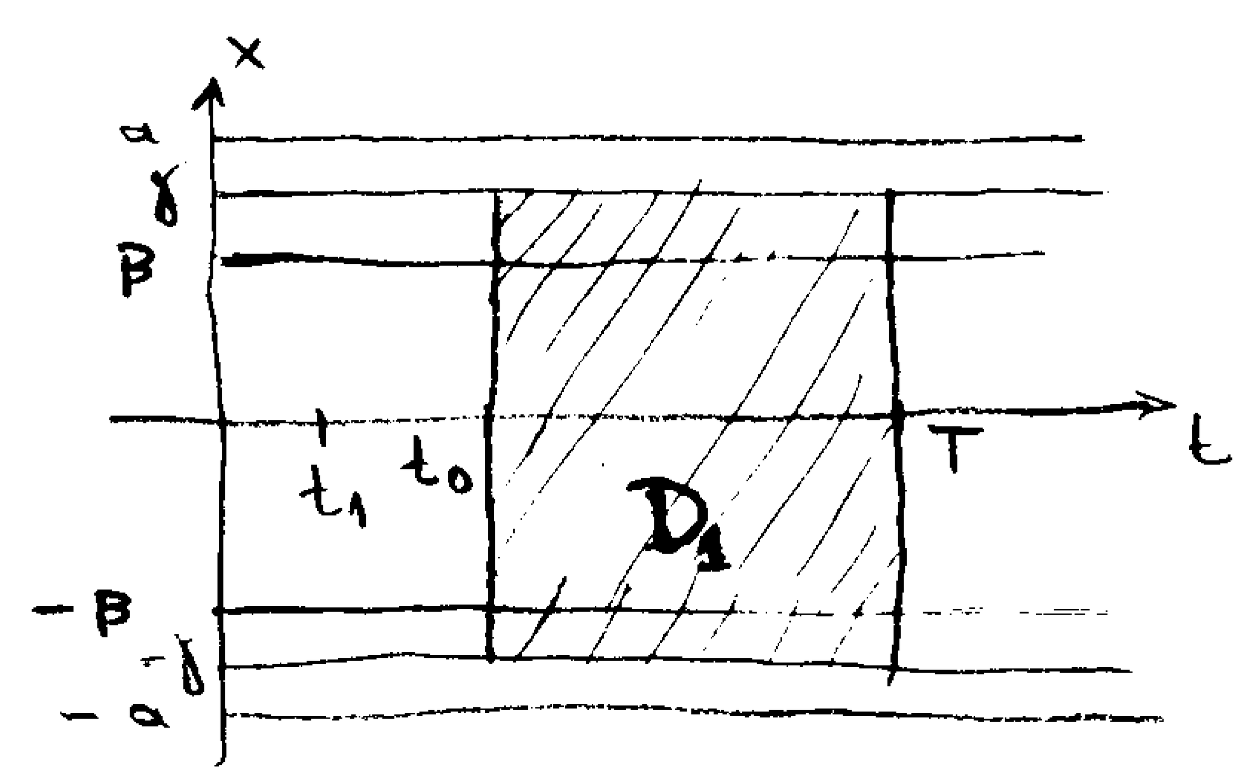
$$D_1 := \{(t,x): t_0 \le t \le T,\ |x| \le \gamma\}$$

Η $f(t,x)$ ειναι φραγμενη στο D_1. Απο το Θ. Επεκτασιμοτητας επεται οτι η λυση μπορει να επεκταθει ως το ∂D_1.

Αλλα $\gamma > \beta$ και $|x(t)| \le \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $x(t)$ θα "φτασει" στο ∂D_1 αναγκαστικα απο την πλευρα $t = T$.

Συνεπως υπαρχει η $x(t)$ για $t_0 \le t \le T$, T: τυχόν. $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$



Παρατηρηση 2

Απο το Θ. Επεκτασιμοτητας επεται ειτε οτι η λυση $x(t)$ υπαρχει για καθε t ($t_0 \le t < \infty$) ή οτι $\exists\, T < \infty$: η λυση $x(t)$ υπαρχει μονο για $t_0 \le t < T$. Σε αυτη την τελευταια περιπτωση ειτε $(t, x(t)) \to \partial \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ = π.ο. της $f(t,x)$, ή $|x(t)| \to \infty$, $t \to T$.

Πραγματι:

(1) $x' = x$, $x(0) = 1$ $\rightsquigarrow$ $x(t) = e^t$, $0 \le t < \infty$

(2) $x' = x^2$, $x(0) = 1$ $\rightsquigarrow$ $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $0 \le t < 1$ & $|x(t)| \to \infty$, $t \to 1$ "blow-up"

(3) $x' = \dfrac{x}{t} - \dfrac{1}{2\sqrt{|t|}}$, $x(-1) = 0$ $\rightsquigarrow$ $x(t) = -t - \sqrt{|t|}$

$\mathcal{D} = (-\infty, 0)\times(-\infty,\infty)$: μη διαφορισιμη λυση οταν $t \to 0$

III. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

<u>Ορισμος</u>

$f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Η f λεγεται τοπικα Lipschitz ως προς x, αν για καθε κλειστο και φραγμενο $U \subseteq D$, υπαρχει $L = L_U$ τετοια ωστε

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y| \quad \text{για } (t,x),(t,y) \in U$$

<u>Παρατηρηση</u>: Αν η $f(t,x)$ εχει συνεχεις πρωτες μερικες παραγωγους ως προς x στο D, τοτε ειναι τοπικα Lipschitz

<u>Παραδειγματα</u>: (i) $x\sin t$ Lips στο $\mathbb{R}^2$ με $L=1$, (ii) $x^{1/3}$ οχι Lips στο $\mathbb{R}^2$
(iii) $tx^{1/2}$ Lips στο $[0,1]\times[\frac{1}{2},1]$, οχι Lips στο $[0,1]\times[0,1]$

<u>Θεωρημα 1</u>

Αν η $f(t,x)$ ειναι συνεχης στο D και τοπικα Lipschitz ως προς x στο D, τοτε για καθε $(t_0,x_0) \in D$, υπαρχει ακριβως μια λυση του (1).

<u>Αποδειξη</u>

Εστω $I_\alpha = I_\alpha(t_0) = \{ t : |t-t_0| \leq \alpha \}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

$$B(\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta,t_0,x_0) = \{ (t,x) : t \in I_\alpha ,\ |x-x_0| \leq \beta \}$$

Εστω U τυχον, δεδομενο κλειστο και φραγμενο υποσυνολο του D. Επιλεγουμε α, β ετσι, ωστε

$$B(\alpha,\beta) \subseteq D \quad \forall\, (t_0,x_0) \in U$$

και $\overline{V} \subseteq D$, οπου $V = \bigcup_{(t_0,x_0)\in U} B(\alpha,\beta)$

Εστω $M := \sup\{ |f(t,x)| : (t,x) \in V \}$ και L η σταθερα Lipschitz της $f(t,x)$ στο V.

Επιλεγουμε $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ ετσι, ωστε $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $0 < \beta \leq \bar{\beta}$, $M\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$, και $L\bar{\alpha} < 1$. Εστω

$$\mathcal{F} = \{ \phi \in \mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}(0), \mathbb{R}^n) : \phi(0) = 0 ,\ |\phi(t)| \leq \bar{\beta} \ \text{ για } t \in I_{\bar{\alpha}}(0) \}$$

Για $\phi \in \mathcal{F}$, ορίζουμε μια συνεχή συνάρτηση $T\phi$ που απεικονίζει το $I_{\bar{\alpha}}(0)$ στο $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$T\phi(t) = \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0) + x_0)\, ds \qquad , t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$$

Κατά τα γνωστά, παρατηρούμε ότι τα σταθερά σημεία της T στο $\mathcal{F}$ συμπίπτουν με τις λύσεις

$$x(t) = \phi(t - t_0) + x_0 \qquad \text{του} \quad (1),$$

για τις οποίες ισχύει $(t, x(t)) \in B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_0, x_0)$.

Προφανώς

$$T\phi(0) = 0,$$

ενώ εύκολα προκύπτει ότι

$$|T\phi(t)| \leq M\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \qquad \forall t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$$

απ' όπου έπεται ότι

$$T\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$$

Επίσης,

$$|T\phi(t) - T\phi(\bar{t})| \leq L\bar{\alpha}\,|\phi - \bar{\phi}| \qquad \forall t \in I_{\bar{\alpha}}(0), \quad \text{δηλ.} \quad |T\phi - T\bar{\phi}| \leq L\bar{\alpha}\,|\phi - \bar{\phi}|$$

Αφού $L\bar{\alpha} < 1$, έπεται ότι η $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ είναι συστολή. Και αφού $\mathcal{F}$: πλήρης, από το Θ. Banach-Cacciopoli έπεται ότι το (1) έχει μοναδική λύση.

Ως εδώ έχουμε τοπική μοναδικότητα. Μπορεί να δειχθεί και η ολική μοναδικότητα (στο μέγιστο διάστημα ύπαρξης).

<u>Παρατήρηση</u>: Ο περιορισμός $L\bar{\alpha} \leq 1$ μπορεί να αρθεί ως εξής:
Αντί της (συνήθους) supremum νόρμας $|\cdot|$, μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη νόρμα

$$\|x\| = \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \bar{\beta}} \left\{ e^{\bar{\alpha} L (t - t_0)} |x(t)| \right\}$$

ως προς την οποία η T είναι συστολή μόνο υπό την προϋπόθεση ότι $M\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$.

Λημμα 1

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &\le a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &\le x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t) \le \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left\{ - \int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds \right\} b(\tau)\,d\tau \right\}$$

Αποδειξη

$x' - ax \le b$. Πολ/με επι $\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right\}$:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right\}\right] \le \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right\} b(t)$$

Ολοκληρωνοντας απο t_0 ως t και λαμβανοντας υπ' οψη οτι $x(t_0) \le x_0$, παιρνουμε το ζητουμενο.

Επίσης: $x'(t) \le Lx(t),\ t \in [t_0, \omega]$ $\Rightarrow x(t) \le x(t_0)e^{L(t-t_0)}$

Λημμα 2 (Gronwall)

x, h, k : συνεχεις στο $[t_0, T)$, $T \le +\infty$, $k(t) \ge 0$.

Εστω $x(t) \le h(t) + \int_{t_0}^{t} k(s)x(s)\,ds$. (+)

Τοτε

$$x(t) \le h(t) + \int_{t_0}^{t} h(s)k(s)\exp\left\{\int_{s}^{t} k(\tau)\,d\tau\right\} ds$$

Αποδειξη

Εστω $y(t) = \int_{t_0}^{t} k(s)x(s)\,ds$. Τοτε $y'(t) = k(t)x(t)$ και

επισ

$$y'(t) \le k(t)y(t) + k(t)h(t)$$

Απο το Λ1 επεται οτι (αφου $y(t_0) = 0$):

$$y(t) \le \int_{t_0}^{t} h(s)k(s)\exp\left\{\int_{s}^{t} k(\tau)\,d\tau\right\} ds$$

και απο την (+) επεται το ζητουμενο.

Λημμα 3 (Bihari)

Εστω

$$x(t) \le M + \int_{t_0}^{t} k(s)\, g(x(s))\, ds \quad , t \in [t_0, T) \qquad (*)$$

οπου M σταθερα, $k(t)$ συνεχης & μη αρνητικη συναρτηση στο $[t_0, T)$ και $g(x)$ συνεχης, αυξουσα συναρτηση, με $g(x) > 0$, $x \ge x_1$.

Εστω G : $G'(x) = \frac{1}{g(x)}$. Τοτε

$$x(t) \le G^{-1}\left[G(M) + \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right]$$

Αποδειξη

Εστω $y(t) := M + \int_{t_0}^{t} k(s)\, g(x(s))\, ds$.

Τοτε $y(t_0) = M$ και $y'(t) = k(t)\, g(x(t))$

Απο την $(*)$ εχουμε $x(t) \le y(t)$. Αφου η $g(x)$ ειναι αυξουσα, παιρνουμε

$$y'(t) \le k(t)\, g(y(t))$$

$$\therefore \quad \frac{y'(t)}{g(y(t))} \le k(t) \quad \Rightarrow \quad G'(y)\, y'(t) \le k(t)$$

$$\Rightarrow \quad G'(y)\, dy \le k(t) dt$$ "χωριζομενων μεταβλητων", ολοκληρωνουμε απο t_0 ως t

$$\Rightarrow \quad G(y(t)) - G(y(t_0)) \le \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad G(y(t)) \le G(M) + \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds \quad \Rightarrow$$

(αφου $g > 0 \Rightarrow G' > 0$ $\Rightarrow G$ γνησιως αυξ. $\Rightarrow \exists!\, G^{-1}$)

$$\Rightarrow \quad y(t) \le G^{-1}\left(G(M) + \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right)$$

ο.ε.δ

Θεωρημα 2 (Osgood) (1898)

Εστω f συνεχης στο $B(\alpha,\beta,t_0,x_0) = \{(t,x) : |t-t_0| \le \alpha,\ |x-x_0| \le \beta\}$

και εστω οτι

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le \phi(|x-y|)$$

οπου $\phi(u)$ μια συνεχης αυξουσα συναρτηση στο $(0,R]$

τετοια ωστε

$$\phi(0) = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^R \frac{du}{\phi(u)} = +\infty \qquad (\#)$$

Τοτε το π.α.τ.

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (\ddagger)$$

εχει μοναδικη λυση.

Αποδειξη

Θεωρουμε μονο την περιπτωση οπου $t \ge t_0$ $\left(t \le t_0 \rightsquigarrow x' = -f(-t,x)\right)$

Εστω οτι εχουμε δυο λυσεις $x(t)$ και $y(t)$, του $(\ddagger)$. Τοτε

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds \quad , \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,y(s))\,ds$$

$$\therefore \quad |x(t) - y(t)| \le \int_{t_0}^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\,ds$$

$$< \varepsilon + \int_{t_0}^t \phi(|x(s) - y(s)|)\,ds \quad , \ \varepsilon > 0$$

Απο το Λημμα του Bihari παιρνουμε

$$|x(t) - y(t)| \le \Phi^{-1}\left(\Phi(\varepsilon) + t - t_0\right), \qquad (*)$$

οπου $\Phi'(u) = \dfrac{1}{\phi(u)}$.

Απο την $(\#)$ εχουμε: $\Phi(\varepsilon) \to -\infty$ οταν $\varepsilon \to 0$ (γιατί;) (ουσιαστικά [illegible])

Συνεπως $\Phi^{-1}(u) \to 0$, οταν $u \to -\infty$

Αφηνοντας $\varepsilon \to 0$ στην $(*)$, εχουμε οτι καθως $\varepsilon \to 0$:

$$\text{RHS} \to 0$$

απ' οπου $x(t) \equiv y(t)$.

$\Rightarrow$

Παρατηρηση : Αν $\phi(u) = Lu$ εχουμε τη συνθηκη Lipschitz

Μια αλλη επιλογη ειναι $\phi(u) = Lu|\ln u|$

Παρατήρηση : f συνεχής & φραγμένη στο $B(\alpha, \beta, t_0, x_0)$ & επιπλέον

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \frac{|x-y|}{|t-t_0|}$$ (Nagumo, 1926

IV. ΟΛΙΚΗ ΥΠΑΡΞΗ - Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

Θεωρουμε τη βαθμωτη διαφορικη ανισοτητα

$$x'(t) \leq \omega(t, x(t)) \qquad (1)$$

οπου $\omega(t,x)$ συνεχης και τοπικα Lipschitz στο χωριο Δ του $\mathbb{R}^2$.

Θεωρουμε το π.α.τ.

$$\begin{aligned} x' &= \omega(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

και εστω $\tilde{x}(t)$ η (μοναδικη) λυση του.

Εστω $x(t)$ συναρτηση που ικανοποιει την (1) και εστω

$$x(t_0) \leq x_0$$

<u>Θεωρημα 1</u>

Υπο τις παραπανω υποθεσεις : $x(t) \leq \tilde{x}(t)$, $\forall\, t \geq t_0$ (3)

<u>Αποδειξη</u>

Εστω οτι η (3) δεν ισχυει. Τοτε $\exists\, t_1 > t_0$:

$$x(t_1) > \tilde{x}(t_1)$$

Εστω $y(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$. Ισχυει $y(t_0) \leq 0$, $y(t_1) > 0$.

Εστω $A = \{t : t \in [t_0, t_1] \text{ και } y(t) = 0\}$. Απο τη συνεχεια της y επεται οτι $A \neq \emptyset$ και οτι το A ειναι κλειστο. Θα εχουμε οτι

$$\tau := \sup A \in A$$

Μπορουμε να βρουμε ενα συμπαγες υποσυνολο K του Δ ωστε $(t, x(t))$, $(t, \tilde{x}(t)) \in K$ για $t \in [\tau, t_1]$. Τοτε

$$\begin{aligned} y'(t) = x'(t) - \tilde{x}'(t) &\leq \omega(t, x(t)) - \omega(t, \tilde{x}(t)) \leq \\ &\leq L\{x(t) - \tilde{x}(t)\} = L y(t) \end{aligned}$$

Για την y εχουμε λοιπον:

$$y(\tau) = 0 \quad , \; y(t) > 0 \quad t \in (\tau, t_1] \quad , \; y'(t) \leq L y(t) \quad , t \in [\tau, t_1].$$

Απο την τελευταια, επεται : $y(t) \leq y(\tau) \exp\{L(t-\tau)\} = 0$ $\quad t \in [\tau, t_1]$: ατοπο

Θα περιγράψουμε συνοπτικά τη μέθοδο σύγκρισης. Χοντρικά, συνίσταται στην αναγωγή της μελέτης κάποιων προβλημάτων για διαφορικά συστήματα (δηλ. διανυσματικές δ.ε) στη μελέτη αντίστοιχων προβλημάτων για βαθμωτές δ.ε.

Έστω $x' = f(t,x)$, f συνεχής & τοπικά Lipschitz στο $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Έστω $V: D \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $x(t)$ είναι λύση της $x' = f(t,x)$, τότε η $v(t) = V(t, x(t))$ είναι διαφορίσιμη και

$$v'(t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f \right)$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ το εσωτερικό γινόμενο: $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, f \right) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n$

Η παράσταση $\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f \right)$, θεωρούμενη ως συνάρτηση του (x,t), λέγεται παράγωγος της $V(t,x)$ ως προς το σύστημα $x' = f(t,x)$.

Έστω, τώρα, ότι

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f \right) \leq \omega(t, V) \quad , \quad (t,x) \in D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \qquad (\#)$$

όπου ω συνεχής και τοπικά Lipschitz στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$.

Έστω $x(t; t_0, x_0)$, $t \in [t_0, T)$, λύση της $x' = f(t,x)$.

Έστω $v(t) := V(t, x(t; t_0, x_0))$. Από την $(\#)$ παίρνουμε

$$v'(t) \leq \omega(t, v(t))$$

Αν $y(t; t_0, y_0)$ είναι η λύση της $y' = \omega(t,y)$ και

$$V(t_0, x_0) \leq y_0$$

τότε, από το Θ1, έπεται ότι

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq y(t; t_0, y_0) \qquad (+)$$

Θεώρημα 2 (Conti)

Εστω $x' = f(t,x)$, όπου f συνεχης και τοπικα Lipschitz στον ημιχώρο $D = \{(t,x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$.

Εστω οτι υπαρχει διαφορισιμη συναρτηση $V : D \to \mathbb{R}$ τετοια, ωστε

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f\right) \leq \omega(t,V) \quad , (t,x) \in D \qquad \text{(A)}$$

για την οποια ισχυει

$$V(t,x) \to +\infty \text{ , όταν } |x| \to \infty \qquad \text{(B)}$$

ομοιομορφα ως προς t σε καθε συμπαγες υποσυνολο.

Εστω ω συνεχης και τοπικα Lipschitz στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$.

Αν η εξισωση συγκρισης

$$y' = \omega(t,y)$$

εχει την ιδιοτητα της ολικης υπαρξης στο μελλον (δηλ. $\pi.\text{o.} = [t_0,\infty)$), τοτε το ιδιο ισχυει και για την $x' = f(t,x)$.

Αποδειξη

Εστω $t_0 > 0$ δεδομενο και $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Εστω $x(t;t_0,x_0)$ η λυση του π.α.τ. $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ και εστω $[t_0,T)$ το μεγιστο διαστημα υπαρξης της.

Εστω $v(t) = V(t, x(t;t_0,x_0))$. Απο την (A) παιρνουμε οτι

$v'(t) \leq \omega(t,v)$

Θεωρουμε το π.α.τ. $y' = \omega(t,y)$, $y(t_0) = V(t_0,x_0)$.

Εχουμε $v(t_0) = V(t_0,x_0) = y(t_0)$.

Απο το Θ1 σελ.19: $\left\{ \begin{array}{l} x' \leq \omega(t,x) \\ x(t_0) \leq x_0 \end{array} \right.$, $\begin{array}{l} \tilde{x}' = \omega(t,\tilde{x}) \\ \tilde{x}(t_0) = x_0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \forall t \geq t_0: \\ x(t) \leq \tilde{x}(t) \end{array}$

επεται οτι $v(t) \leq y(t)$, δηλ.

$$V(t, x(t;t_0,x_0)) \leq y(t; t_0, V(t_0,x_0)) \quad \forall t \in [t_0,T) \qquad (\Gamma)$$

Εξαλλου η $y(t;t_0,y_0)$ οριζεται (για καθε $y_0 \in \mathbb{R}$) στο $t \geq t_0$.

Εστω $T < \infty$.

→

Τοτε θα ισχυει

$$\lim_{t \to T^-} \left| x(t; t_0, x_0) \right| = \infty \qquad (\Delta)$$

αφου αποκλειεται να συγκλινει στο ∂D, μια που αυτο δεν εχει σημεια με $t > 0$. (πρβλ. Θ1 σελ. 12)

Παιρνοντας $t \to T$ στην (Γ), εχουμε οτι:

$$\lim_{t \to T} y(t; t_0, V(t_0, x_0)) \longrightarrow y(T; t_0, V(t_0, x_0))$$: φραγμενο αφου Π.Ο. της y το $[t_0, \infty)$ (B) δεν μπορει να συμβαινει blow-

ενω

$$\lim_{t \to T} V(t, x(t; t_0, x_0)) \longrightarrow \infty$$ λογω της (Δ) και της (B)

Ατοπο. Αρα $T = \infty$.

Παρατηρήσεις

(I) Αν η $\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, f\right) \leq \omega(t, V)$, $(t,x) \in D$ αντικαθίσταται

από την

$$|f(t,x)| \leq \omega(t, |x|) \qquad t \geq 0 \qquad |x| > a$$

τότε το προηγούμενο θεώρημα ισχύει.

Απόδειξη: άσκηση. Θέσατε $V(t,x) = |x|$, $|x| > a$.

(II) Κριτήριο Wintner (ειδική περίπτωση του (I)).

Έστω $\omega(t, y) = g(y)$: $\int^{\infty} \frac{du}{g(u)} = +\infty$

Απόδειξη: άσκηση.

Εφαρμογή

(*) $x' = A(t)x + h(t)$ $\qquad (f(t,x) = A(t)x + h(t))$

$$\begin{aligned} |A(t)x + h(t)| &\leq |A(t)||x| + |h(t)| \\ &\leq \max\{|A(t)|, |h(t)|\} \cdot (|x|+1) \\ &\leq L\, g(|x|) \end{aligned}$$

, όπου L το max & $g(u) = u+1$

Τότε $\int^{\infty} \frac{du}{g(u)} = +\infty$ και από το (II) έπεται ότι κάθε λύση της γραμμικής δ.ε. (*) ορίζεται στο $(-\infty, \infty)$.

V. ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΑ ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Θεωρούμε το π.α.τ.

$$x' = f(t,x) \qquad (1)$$
$$x(t_0) = x_0$$

οπου $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ συνεχης και φραγμενη στο

$$D = \{(t,x) : \ |t-t_0| < a \ , \ |x - x_0| \le b\} \qquad (2)$$

οπου επισης ικανοποιει μια συνθηκη Lipschitz

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2| \qquad (3)$$

Εστω $\quad |f(t,x)| \le M \quad$, στο $D \qquad (4)$

Γνωρίζουμε οτι υπο τις ανωτερω υποθεσεις το (1) εχει μοναδικη λυση $x(t;t_0,x_0)$.

<u>Θεωρημα 1</u>

Εστω $\hat{x}_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n \ : \ |\hat{x}_0 - \tilde{x}_0| \le \frac{b}{2}$. Τοτε, αν

$$|t - t_0| < \min\left\{a, \frac{b}{2M}\right\} \qquad (5)$$

εχουμε

$$|x(t;t_0,\hat{x}_0) - x(t;t_0,\tilde{x}_0)| \le |\hat{x}_0 - \tilde{x}_0| \cdot \exp\{L|t-t_0|\} \qquad (6)$$

<u>Αποδειξη</u>

Εστω $\hat{x}(t) = x(t;t_0,\hat{x}_0)$, $\tilde{x}(t) = x(t;t_0,\tilde{x}_0)$. Οι $\hat{x}, \tilde{x}$ ειναι μοναδικες

Εχουμε

$$\hat{x}(t) - \tilde{x}(t) = \hat{x}_0 - \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \left[f(s,\hat{x}(s)) - f(s,\tilde{x}(s))\right] ds$$

$$\Rightarrow \ |\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)| \le |\hat{x}_0 - \tilde{x}_0| + L\left|\int_{t_0}^{t} |\hat{x}(s) - \tilde{x}(s)|\, ds\right| \qquad (7)$$

Εστω $t > t_0$. Θετουμε $\hat{x}(t) = \hat{x}(t_0 + \tau)$, $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_0 + \tau)$. Εστω

$$h(\tau) = |\hat{x}(t_0+\tau) - \tilde{x}(t_0+\tau)|$$

Εστω, επισης,

$$L(\tau) = L \quad , \quad k = |\hat{x}_0 - \tilde{x}_0|$$

Απο την (7) παιρνουμε

$$h(\tau) \leq k + L \int_0^\tau h(s)\,ds$$

απ' οπου εχουμε (Gronwall για $h \to x$, $k \equiv h(t)$, $L \equiv k(s)$, $0 \to t_0$, $\tau \to t$)

$$h(\tau) \leq k e^{L\tau} \qquad \text{Ο.Ε.Δ.}$$

Ομοιως, οταν $t < t_0$.

ορισμοί συμβόλων o, O του Landau : **δες 24a**

Εστω $J(t,x)$ ο Ιακωβιανος πινακας της f :

$$J(t,x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) \qquad j,k = 1,2,\ldots,n$$

Υποθετουμε οτι

‖ Υπαρχει, ειναι συνεχης και φραγμενος (απο μια σταθερα B) ο Ιακωβιανος πινακας $J(t,x)$ της f. ‖ (8)

Ειναι γνωστο (Taylor) οτι:

$$f(t,x) - f(t,x_0) = J(t,x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|) \qquad (9)$$

Το $J(t,x_0)$ λεγεται μερικη παραγωγος της $f(t,x)$ ως προς x στο σημειο (t,x_0).

Αντιστοιχα, ο πινακας G ειναι η μερικη παραγωγος της $g(t,x)$ στο (t_0,x_0), αν

$$g(t_0,x) - g(t_0,x_0) = G(x-x_0) + o(|x-x_0|) \qquad (10)$$

Τα σύμβολα o & O του Landau

Ορισμοί

$f, g : S \to \mathbb{C}$, $S \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{S}$

- $f(z) = O(g(z))$, $z \to z_0$ $\overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ σταθερά $M > 0$ και περιοχή V_{z_0} του z_0 ώστε
$$|f(z)| \leq M|g(z)| , \forall z \in V_{z_0} \cap S$$

- $f(z) = o(g(z))$, $z \to z_0$ $\overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ περιοχή V_{z_0} του z_0 ώστε
$$|f(z)| \leq \varepsilon |g(z)| , \forall z \in V_{z_0} \cap S$$

•• Αν $g(z) \neq 0$, $z \in V_{z_0}$, τότε $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 0$

Σχέσεις

- $O(o(f)) = o(O(f)) = o(o(f)) = o(f)$
- $O(f) \cdot o(g) = o(fg)$
- $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$
- $O(f) + o(f) = O(f)$
- $f = O(g)$, $z \to z_0$ $\Rightarrow$ $\int_z^{z_0} f(t)\,dt = O\left(\int_z^{z_0} |g(t)|\,dt \right)$
- $f = O(g)$ $z \to z_0$ $\not\Rightarrow$ $f' = O(g')$, $z \to z_0$

Παράδειγμα

Taylor : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + O((x - x_0)^2)$

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + o((x - x_0))$

Εστω I_n ο μοναδιαίος πίνακας στο $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Θεωρούμε τη μεταβολική εξίσωση που αντιστοιχεί στη λύση $x(t;t_0,x_0)$:

$$\begin{cases} X'(t) = J(t,x_0)X(t) \\ X(t_0) = I_n \end{cases} \qquad (11)$$

Το (11) εχει μοναδική λύση, αφού

$$\left| J(t, x(t;t_0,x_0))X_1 - J(t, x(t;t_0,x_0))X_2 \right| < B|X_1 - X_2|$$

Εχουμε το εξής αποτελεσμα.

Θεωρημα 2

Αν στις υποθέσεις του Θ1, η (3) (Lipschitz) αντικαταστάθει απο την (8) εχουμε οτι:

Η $x(t;t_0,x_0)$ ειναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x_0 και για $|t-t_0| < \min\left\{a, \frac{b}{2M}\right\}$, $|\tilde{x}_0 - x_0| < \frac{b}{2}$ ισχυει

$$x(t;t_0,\tilde{x}_0) - x(t;t_0,x_0) = X(t,t_0)(\tilde{x}_0 - x_0) + o(|\tilde{x}_0 - x_0|) \qquad (12)$$

Αποδειξη (Hille, σελ. 78)

Θα δουμε τωρα τη συμπεριφορα της λυσης αν μεταβληθει το t_0 και παραμενει αμεταβλητο το x_0. Εδω πρεπει να προσεχθει το θεμα του κοινου πεδιου ορισμου των προκυπτουσων λυσεων.

<u>Θεωρημα 3</u>

Εστω οτι η $f(t,x)$ ικανοποιει τις υποθεσεις του Θ1. Εστω

$$t_1, t_2 \in (t_0-a, t_0+a) \; : \quad 0 < t_2 - t_1 < r \quad , \; r < \frac{b}{M}$$

Εστω $x_1(t) = x(t; t_1, x_0)$, $x_2(t) = x(t; t_2, x_0)$.

Εστω I_j , $j=1,2$ το υποδιαστημα του (t_0-a, t_0+a) οπου οριζεται η $x_j(t)$ και εστω $I = I_1 \cap I_2$.

Τοτε $[t_1, t_2] \subseteq I$ και

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq M(t_2 - t_1) \exp\{L\,\delta(t)\} \quad , \; t \in I \qquad (13)$$

οπου $\delta(t) = \min\{|t-t_1|, |t-t_2|\}$.

<u>Αποδειξη</u> : ασκηση (δες πισω)

<u>Θεωρημα 4</u>

Εστω $f(t,x)$ συνεχης στο $D = \{(t,x) : |t-t_0| < a, \; |x-x_0| \leq b\}$. Εστω οτι η f εχει συνεχη μερικη παραγωγο $J(t,x)$ ως προς $x \in D$:

$$|J(t,x)| \leq B$$

Εστω $J_0(t;\xi) = J(t, x(t;\xi,x_0))$ και εστω $X_0(t,\xi)$ λυση του

$$X'(t) = J_0(t;\xi)\, X(t) \quad , \quad X(\xi) = I_n$$

οπου $|\xi - \xi_0| < \min\{a, \frac{b}{2M}\}$.

Τοτε η $x(t;\xi,x_0)$ ειναι παραγωγισιμη ως προς ξ και ισχυει

$$\frac{\partial}{\partial \xi} x(t;\xi,x_0) = -\,X_0(t,\xi)\, f(\xi, x_0)$$

<u>Αποδειξη</u> : ασκηση . Πρβλ. Θ2

Αποδειξη

$x_1 := x_1(t; t_1, x_0) \qquad x_2 := x_2(t; t_2, x_0)$

$t_1, t_2 \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \;:\; 0 < t_2 - t_1 < r < \frac{b}{M}$ $\quad \Big\}\; x' = f(t,x)$

Η $x_1(t)$ και η $x_2(t)$ υπαρχουν και ειναι μοναδικες. Επιπλεον $\exists\, \varpi(t_1) \subseteq I_1$ και $\exists\, \varpi(t_2) \subseteq I_2$. Ευκολα φαινεται οτι $I := I_1 \cap I_2 \supseteq [t_1, t_2]$.

Εστω $t \in I$. Τοτε

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_1}^{t} f(s, x_1(s))\,ds - \int_{t_2}^{t} f(s, x_2(s))\,ds \qquad (*)$$

$I_{αριστ.}$ $\quad t_1 \quad \frac{1}{2}(t_1+t_2) \quad t_2 \quad I_{δεξ.}$

$|\leftarrow I^{(1)} \rightarrow|\leftarrow I^{(2)} \rightarrow|\leftarrow I^{(3)} \rightarrow|\leftarrow I^{(4)} \rightarrow|$

$I^{(2)}$: $\delta(t) = t - t_1$. Η $(*)$ γραφεται

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(s, x_2(s))\,ds + \int_{t_1}^{t} \{ f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \}\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq M(t_2 - t_1) + L \int_{t_1}^{t} \|x_1(s) - x_2(s)\|\,ds$$

Θετω $t = t_1 + \tau$, $s = t_1 + \sigma$ και $\phi(t) = \|x_1(t_1+\tau) - x_2(t_1+\tau)\|$

Ετσι παιρνω

$$\phi(t) \leq M(t_2 - t_1) + L \int_0^{\tau} \phi(\sigma)\,d\sigma$$

$\Rightarrow$

$$\phi(t) \leq M(t_2 - t_1) \exp\{L\tau\} \quad \text{και} \quad \tau = \delta(t) \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Αναλογα στα $I^{(1)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$.

Μπορουμε να εχουμε "συγχρονη" μεταβολη των t_0 και x_0. Τοτε εχουμε:

Θεωρημα 5

Εστω οτι η $f(t,x)$ ικανοποιει τις υποθεσεις του Θ1. Εστω $(t_1,\tilde{x}_1)$, $(t_2,\tilde{x}_2) \in D$:

$$|x_0 - \tilde{x}_j| < \tfrac{1}{2}b \quad , \quad j=1,2$$

$$0 < t_2 - t_1 < \frac{b}{2M}$$

Εστω $x_j(t) \equiv x(t;t_j,\tilde{x}_j)$, $j=1,2$, με Π.Ο. I_j. Εστω $I = I_1 \cap I_2$. Τοτε $[t_1,t_2] \subseteq I$ και για $t \in I$:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \exp\{L|t-t_1|\} + M(t_2-t_1)\exp\{L\delta(t)\}$$

οπου $\delta(t) = \min\{|t-t_1|, |t-t_2|\}$

Θα δουμε τωρα τι συμβαινει οταν, με δεδομενες αρχικες συνθηκες, μεταβαλουμε τη δ.ε

Θεωρημα 6

Εστω $D = \{(t,x) : |t-t_0| < a \;,\; |x-x_0| \leq b\}$. Εστω $f,g : D \to \mathbb{R}^n$ με f, g συνεχεις στο D. Εστω ακομα οτι

$$|f(t,x)| \leq M$$

$$|f(t,x) - g(t,x)| < \varepsilon \qquad \text{στο } D$$

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| < L|x_1 - x_2|$$

Εστω $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ μια λυση του $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ και $y(t) = y(t;t_0,x_0)$ η μοναδικη λυση του $y' = g(t,y)$, $y(t_0) = x_0$

Εστω $I \subseteq (t_0 - a, t_0 + a)$; $t_0 \in I$ κοινο διαστημα ορισμου των $x(t), y(t)$.

Τοτε

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L}\left\{ \exp\{L|t-t_0|\} - 1 \right\} \quad , \quad t \in I.$$

Αποδειξη : ασκηση

Ειδικα για την περιπτωση που $n=1$, δηλ. εχουμε βαθμωτη διαφορικη εξισωση, εχουμε

Θεωρημα 7

Εστω $\Delta = \{(t,x) : |t-t_0| < a, \ |x-x_0| < b\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Εστω οτι οι f και g ειναι συνεχεις στο Δ και οτι

$$f(t,x) < g(t,x) \qquad \text{παντου στο } D$$

Εστω $x(t)$ λυση του π.α.τ. $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ και $y(t)$ λυση του π.α.τ. $y'(t) = g(t, y(t))$, $y(t_0) = x_0$. Εστω I το μεγιστο υποδιαστημα του $(t_0 - a, t_0 + a)$ οπου οριζονται και ειναι συνεχεις οι $x(t), y(t)$. Τοτε για $t \in I$ εχουμε

$$y(t) < x(t) \quad \text{αν } t < t_0 \quad \& \quad x(t) < y(t) \quad \text{αν } t > t_0$$

Θα ολοκληρωσουμε αυτη την παραγραφο με τη μελετη της εξαρτησης των λυσεων απο παραμετρους.

Θεωρημα 8

Θεωρουμε το π.α.τ.

$$x' = f(t, x, \lambda)$$
$$x(t_0) = x_0$$

Εστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και x_0 ανεξαρτητο του λ.

Εστω $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ συνεχης και φραγμενη, με πεδιο ορισμου

$$D = \{(t,x,\lambda) : |t-t_0| < a, \ |x-x_0| < \beta, \ |\lambda - \lambda_0| < \gamma\}$$

$$|f(t,x_1,\lambda_1) - f(t,x_2,\lambda_2)| \le L\{|x_1-x_2| + |\lambda_1-\lambda_2|\}$$

Εστω $x(t;t_0,x_0,\lambda)$ η μοναδικη λυση του π.α.τ.

Τοτε, για λ_1,λ_2 : $|\lambda_0-\lambda_j|<\gamma$, $j=1,2$, υπαρχει διαστημα I με $t_0\in I$ τετοιο ωστε για $t\in I$

$$|x(t;t_0,x_0,\lambda_1) - x(t;t_0,x_0,\lambda_2)| \le |\lambda_1-\lambda_2|\left\{\exp\{L|t-t_0|\} - 1\right\}$$

<u>Παρατηρηση</u>

Μπορουμε να εχουμε $\lambda\in\Theta\subseteq\mathbb{R}^k$, Θ: ανοιχτο.

Επισης επιπλεον διαφορισιμοτητα ως προς x,λ της f, δινει επιπλεον διαφορισιμοτητα της λυσης. (Hale: σελ. 21)

<u>Παρατηρηση</u>

Ο Hadamard παρατηρησε οτι για να δινιστα μια διαφορικη εξισωση της μορφης $x'=f(t,x,\lambda)$ αναπαρασταση ενος φυσικου συστηματος, δεν αρκει η υπαρξη λυσης του αντιστοιχου π.α.τ, αλλα θα πρεπει η λυση να ειναι μοναδικη και να εξαρταται συνεχως απο τα αρχικα δεδομενα.

Οταν ικανοποιουνται αυτες οι συνθηκες το π.α.τ. λεγεται ΚΑΛΩΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΜΕΝΟ. Λυσεις που δεν ικανοποιουν αυτες τις συνθηκες ειναι ουσιαστικα αχρηστες για ενα φυσικο προβλημα, γιατι δεν αντιστοιχουν με φυσιολογικο τροπο στις φυσικες μετρησεις.