Κεφάλαιο 7

Χώροι Επικάλυψης

Περιεχόμενα

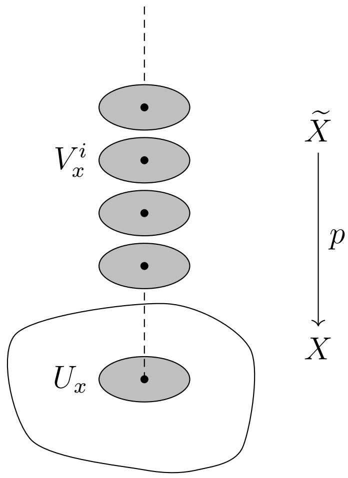
Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του χώρου επικάλυψης (covering space) ενός τοπολογικού χώρου και αποδεικνύονται κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων επικάλυψης μέσω των οποίων μελετάται η θεμελιώδης ομάδα και σε κάποιες περιπτώσεις υπολογίζεται. Υπολογίζουμε τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου και των προβολικών χώρων και παρουσιάζουμε κάποιες εφαρμογές τους, μεταξύ των οποίων και μια τοπολογική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας.

7.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες

Ορισμός 7.1.1. Ένας **χώρος επικάλυψης** ενός τοπολογικού χώρου X είναι ένα ζεύγος $(\widetilde{X}, p)$ αποτελούμενο από έναν τοπολογικό χώρο $\widetilde{X}$ και μια συνεχή, επί απεικόνιση $p : \widetilde{X} \to X$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε σημείο $x \in X$, υπάρχει ανοικτή περιοχή U_x του x, έτσι ώστε η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(U_x)$ είναι ξένη ένωση ανοικτών V_j^x, $j \in J$, καθένα από τα οποία απεικονίζεται ομοιομορφικά μέσω της p στο U_x. Μια τέτοια περιοχή U_x

[0]https://eclass.uoa.gr/courses/MATH536/

του x λέγεται **στοιχειώδης περιοχή** του x, τα αντίστοιχα ανοικτά V_j^x λέγονται **συνιστώσες** της στοιχειώδους περιοχής U_x και συνήθως το εκφράζουμε γράφοντας $U_x = \coprod_{j \in J} V_j^x$ όπου κάθε $p\mid_{V_j^x}\colon V_j^x \to U_x$ είναι ομοιομορφισμός. Η απεικόνιση p αναφέρεται ως **απεικόνιση επικάλυψης** ή **προβολή επικάλυψης**. Πολλές φορές, επίσης, θα λέμε απλά τον $\widetilde{X}$ χώρο επικάλυψης χωρίς να αναφερόμαστε στην p. Η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(x)$ του x μέσω της p λέγεται **νήμα** του x ως προς την p.

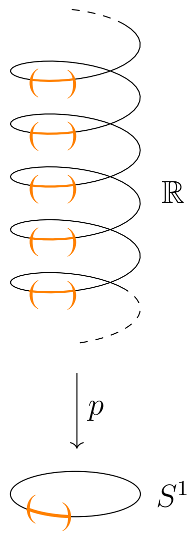


Παράδειγμα 7.1.2. Κάθε ομοιομορφισμός είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Παράδειγμα 7.1.3. Θεωρούμε τον κύκλο S^1 ως το υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών μέτρου 1. Ο χώρος $\mathbb{R}$ επικαλύπτει τον κύκλο μέσω της απεικονίσεως $p : \mathbb{R} \to S^1$ που δίνεται από τον τύπο $p(x) = e^{2\pi i x}$. Πράγματι, για κάθε $e^{2\pi i x} \in S^1$, έστω U_x το ανοικτό ημικύκλιο με κέντρο το $e^{2\pi i x}$. Τότε

$$p^{-1}(U_x) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} (x - \frac{1}{4} + k, x + \frac{1}{4} + k).$$

Σημειώνουμε ότι η p είναι περιοδική με περίοδο 1 και ανοικτή, γιατί απεικονίζει τα βασικά σε ανοικτά. Πράγματι, η εικόνα του ανοικτού διαστήματος (α, β) αποτελείται από τα σημεία του κύκλου γωνίας μεταξύ $2\pi\alpha$ και $2\pi\beta$ που είναι ανοικτό υποσύνολο του κύκλου. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε περιορισμός $p_k : V_k^x = (x - \frac{1}{4} + k, x + \frac{1}{4} + k) \to U_x$ είναι $1\!-\!1$, επί, συνεχής ως περιορισμός συνεχούς και ανοικτή ως περιορισμός ανοικτής στο ανοικτό V_k^x. Δηλαδή η p_k είναι πράγματι ομοιομορφισμός. Αντί για την περιοχή U_x θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ως στοιχειώδη περιοχή οποιοδήποτε κυκλικό τμήμα με κέντρο το $e^{2\pi i x}$ και μήκος μικρότερο από $1/2$ (βλέπε Σχήμα 7.1)



Σχήμα 7.1: Η επικάλυψη του κύκλου από την πραγματική ευθεία.

Παράδειγμα 7.1.4. Αν $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X_1$ και $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X_2$ είναι απεικονίσεις επικάλυψης, τότε και το γινόμενό τους $p_1 \times p_2 : \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. Ιδιαιτέρως, η απεικόνιση $p : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to S^1\times S^1$ με $p(x,y) = \left(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}\right)$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Παράδειγμα 7.1.5. Για κάθε θετικό ακέραιο n, η απεικόνιση $p : S^1 \to S^1$ με $p(z) = z^n$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, θεωρούμε πρώτα τη ρίζα της μονάδας $\omega = e^{2\pi i/n}$. Αν $x \in S^1$ και y μια n-ιοστή ρίζα του x, τότε

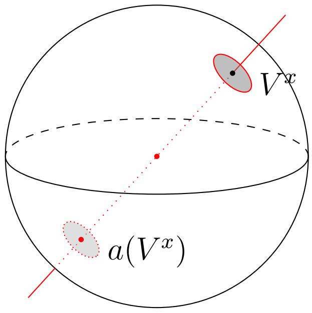
$$p^{-1}(x) = \{y, y\omega, y\omega^2, \dots, y\omega^{n-1}\}.$$

Αν συμβολίσουμε με U_x το συμπλήρωμα $S^1 \setminus \{x\}$ του x και με V_0^x το ανοικτό κυκλικό τμήμα με άκρα τα $y, y\omega$ (με άλλα λόγια $V_0^x = \{z \in S^1 \, : \, 0 < \arg(z/y) < 2\pi/n\}$, όπου με $\arg(z)$ συμβολίζουμε το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z), τότε οι ανοικτές περιοχές $V_i^x = \omega^i V_0^x$, $i = 0, \dots, n-1$ είναι ξένες μεταξύ τους, $p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} V_i^x$ και κάθε περιορισμός $p|_{V_i^x} : V_i^x \to U_x$ είναι ομοιομορφισμός.

Παράδειγμα 7.1.6. Η απεικόνιση πηλίκο $\pi : S^n \to S^n/\sim$, όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας $x \sim -x$ στη σφαίρα S^n (δηλαδή ταυτοποιούμε αντιποδικά σημεία), είναι απεικόνιση επικάλυψης και το νήμα του $\pi(x)$ είναι το δισύνολο $\{x, -x\}$.

Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι η π είναι ανοικτή. Έστω U ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας S^n. Εφόσον η αντιποδική απεικόνιση $\alpha : S^n \to S^n$, με $\alpha(x) = -x$, είναι ομοιομορφισμός, η εικόνα $\alpha(U)$ του U μέσω της α είναι ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας. Έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = U \cup \alpha(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας και αφού η π είναι απεικόνιση πηλίκο το $\pi(U)$ είναι ανοικτό, που σημαίνει ότι η π είναι ανοικτή.

Έστω $y \in S^n/\sim$. Τότε $\pi^{-1}(y) = \{x, \alpha(x)\}$ για κάποιο $x \in S^n$. Εφόσον η απόσταση (στον $\mathbb{R}^{n+1}$) των $x, \alpha(x)$ ισούται με 2, μπορούμε να επιλέξουμε ανοικτή περιοχή V^x του x στη σφαίρα S^n τέτοια, ώστε $V^x \cap \alpha(V^x) = \emptyset$ (όπως στο ακόλουθο σχήμα). Τότε $\pi^{-1}\big(\pi(V^x)\big) = U \cup \alpha(V^x)$ και ο περιορισμός $\pi : V^x \to \pi(V^x)$ είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι $1-1$, επί, συνεχής (ως περιορισμός συνεχούς) και ανοικτή (ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό). Ομοίως, ο περιορισμός $\pi : \alpha(V^x) \to \pi(\alpha(V^x)) = \pi(V^x)$ είναι ομοιομορφισμός και έτσι το ανοικτό $\pi(V^x)$ είναι στοιχειώδης περιοχή του y με αντίστοιχες συνιστώσες τα ανοικτά V^x και $\alpha(V^x)$.



Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι οι χώροι $\mathbb{RP}^n$ και $S^n/\sim$ είναι ομοιομορφικοί. Υπενθυμίζουμε πως ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$, είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$, όπου η σχέση ισοδυναμίας στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ορίζεται ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x = \lambda y$ για κάποιο μη μηδενικό πραγματικό αριθμό λ. Για να δείξουμε ότι $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\sim$, θεωρούμε τη σύνθεση

$$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \xrightarrow{r} S^n \xrightarrow{\pi} S^n/\sim$$

όπου r είναι η συστολή $x \mapsto x/\|x\|$ και π η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο. Η φ είναι απεικόνιση πηλίκο ως σύνθεση απεικονίσεων πηλίκο και παρατηρούμε ότι $\varphi(x) = \varphi(y)$ αν και μόνο αν $x \sim y$ (εδώ το λ είναι $\|x\|/\|y\|$ ή $-\|x\|/\|y\|$). Το Θεώρημα **??** ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Το ενδιαφέρον μας για τους χώρους επικάλυψης πηγάζει εν μέρει από τις ακόλουθες πολύ σημαντικές ιδιότητες που απολαμβάνουν σε σχέση με μονοπάτια και ομοτοπίες, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Ορισμός 7.1.7. Έστω $\varphi : Y \to X$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων και $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X. Μια **ανύψωση** (lift) της φ είναι μια συνεχής απεικόνιση $\widetilde{\varphi} : Y \to X$, έτσι ώστε $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

Πρόταση 7.1.8 (Μοναδικότητα των ανυψώσεων)**.** *Έστω $\varphi : Y \to X$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων, $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X και $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2 : Y \to \widetilde{X}$ δύο ανυψώσεις της φ. Αν ο χώρος Y είναι συνεκτικός και $\widetilde{\varphi}_1(y_0) = \widetilde{\varphi}_2(y_0)$ για κάποιο $y_0 \in Y$, τότε $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{y \in Y : \widetilde{\varphi}_1(y) = \widetilde{\varphi}_2(y)\}$. Το A είναι μη κενό αφού το y_0 ανήκει στο A. Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό και κλειστό, οπότε το συμπέρασμα θα προκύψει από τη συνεκτικότητα του Y.

Προκειμένου να δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό, θεωρούμε y στο A, στοιχειώδη περιοχή U του $\varphi(y)$ και τη συνιστώσα V_1 του $p^{-1}(U)$ που περιέχει το $\widetilde{\varphi}_1(y) = \widetilde{\varphi}_2(y)$. Τότε η τομή $V = \widetilde{\varphi}_1^{-1}(V_1) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(V_1)$ είναι ανοικτή περιοχή του y η οποία περιέχεται στο A και ως εκ τούτου το A είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $a \in A$, τότε $\widetilde{\varphi}_1(a) = \widetilde{\varphi}_2(a)$, γιατί τα σημεία $\widetilde{\varphi}_1(a)$ και $\widetilde{\varphi}_2(a)$ ανήκουν στην ίδια συνιστώσα (την V_1) και στο ίδιο νήμα.

Θα δείξουμε ότι το A είναι κλειστό αποδεικνύοντας ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Έστω $y \notin A$, δηλαδή $\widetilde{\varphi}_1(y) \neq \widetilde{\varphi}_2(y)$. Εφόσον τα $\widetilde{\varphi}_1(y)$ και $\widetilde{\varphi}_2(y)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους και ανήκουν στο ίδιο νήμα $p^{-1}\big(\varphi(y)\big)$, ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες, έστω V_1 και V_2, αντίστοιχα. Κάθε στοιχείο της τομής $\widetilde{\varphi}_1^{-1}(V_1) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(V_2)$ απεικονίζεται στο V_1 μέσω της $\widetilde{\varphi}_1$ και στο V_2 μέσω της $\widetilde{\varphi}_2$. Άρα η τομή $\widetilde{\varphi}_1^{-1}(V_1) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(V_2)$ είναι ανοικτή περιοχή του y, η οποία περιέχεται στο συμπλήρωμα του A και συνεπώς το συμπλήρωμα του A είναι ανοικτό. □

Πρόταση 7.1.9 (Ύπαρξη ανυψώσεων μονοπατιών)**.** *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X και $f : I \to X$ ένα μονοπάτι με $f(0) = x$. Αν $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, τότε υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{f} : I \to \widetilde{X}$ του f με $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα του Lebesgue **??** υπάρχει φυσικός n τέτοιος, ώστε κάθε διάστημα της μορφής $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k = 0, \dots, n-1$, του I απεικονίζεται μέσω της f σε μια στοιχειώδη περιοχή U_k, δηλαδή $f\big([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\big) \subseteq U_k$. Έστω V_0 η συνιστώσα της U_0 που περιέχει το $\tilde{x}$. Ορίζουμε την $\tilde{f}$ πρώτα στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$ ως εξής:

$$\tilde{f} = \big(p|_{V_0}\big)^{-1} \circ f.$$

Τότε $\tilde{f}(0) = \big(p|_{V_0}\big)^{-1}(f(x_0)) = \tilde{x}$. Υποθέτουμε ότι η $\tilde{f}$ έχει ορισθεί έως και στο διάστημα $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Επεκτείνουμε τον ορισμό της στο $[\frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}]$ ως εξής: Επιλέγουμε συνιστώσα V_{k+1} της στοιχειώδους περιοχής U_{k+1} που περιέχει το σημείο $\tilde{f}(\frac{k+1}{n})$. Αυτό έχει νόημα, γιατί $p\big(\tilde{f}(\frac{k+1}{n})\big) = f(\frac{k+1}{n}) \in U_{k+1}$. Ορίζουμε την $\tilde{f}$ στο $[\frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}]$ μέσω του τύπου

$$\tilde{f} = \big(p|_{V_{k+1}}\big)^{-1} \circ f.$$

Τότε $\big(p|_{V_{k+1}}\big)^{-1} \circ f(\frac{k+1}{n}) = \tilde{f}(\frac{k+1}{n})$, αφού τα δύο αυτά σημεία ανήκουν στο ίδιο νήμα και στην ίδια συνιστώσα. Δηλαδή, ο "νέος" τύπος συμφωνεί με τον "παλιό" και έχουμε πράγματι επέκταση. Η συνέχεια της $\tilde{f}$ έπεται από το λήμμα της συγκόλλησης **??**, ενώ η μοναδικότητα από τη συνεκτικότητα του I και την προηγούμενη πρόταση. □

Πρόταση 7.1.10. *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X και $f, g : I \to X$ δύο ομοτοπικά μονοπάτια. Αν οι $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ είναι ανυψώσεις των f και g, αντίστοιχα, με $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, τότε $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$. Ιδιαιτέρως, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

Δηλαδή, ανυψώσεις με την ίδια αρχή ομοτοπικών μονοπατιών, είναι ομοτοπικές και συνεπώς έχουν το ίδιο τέλος.

Απόδειξη. Έστω $H : I \times I \to X$ μια ομοτοπία από το μονοπάτι f στο μονοπάτι g. Εφόσον οι στοιχειώδεις περιοχές αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του X, οι αντίστροφες εικόνες τους μέσω της ομοτοπίας H αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς $I \times I$. Συνεπώς, από το λήμμα του Lebesgue, υπάρχει φυσικός n τέτοιος, ώστε κάθε τετράγωνο του $I \times I$ πλευράς $1/n$ να απεικονίζεται μέσω της H σε μια στοιχειώδη περιοχή. Διαμερίζουμε το $I \times I$ σε "μικρά" τετραγωνάκια πλευράς $1/n$. Πιο συγκεκριμένα, αν θέσουμε $T_{ij} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, τότε υπάρχει στοιχειώδης περιοχή U_{ij}, έτσι ώστε $H(T_{ij}) \subseteq U_{ij}$, για κάθε $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Θα ανυψώσουμε την ομοτοπία H σε ομοτοπία $\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$. Ο ορισμός της $\widetilde{H}$ θα γίνει διαδοχικά σε κάθε τετράγωνο $T_{0,0}, T_{1,0}, \ldots$, της πρώτης γραμμής μετά της δεύτερης $T_{0,1}, T_{1,1}, \ldots$ κ.ο.κ. Στο σημείο $(0,0)$ ορίζουμε $\widetilde{H}(0,0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ και σημειώνουμε ότι $p \circ \widetilde{H}(0,0) = H(0,0)$. Υποθέτοντας ότι η $\widetilde{H}$ έχει ορισθεί σε όλα τα τετράγωνα πριν το T_{ij}, ιδιαιτέρως έχει ορισθεί στο σημείο $(i/n, j/n)$, επεκτείνουμε τον ορισμό της στο

T_{ij} ως εξής: Έχουμε ότι $H(T_{ij}) \subseteq U_{ij}$ και $p \circ \widetilde{H}(i/n, j/n) = H(i/n, j/n) \in U_{ij}$. Θεωρούμε, λοιπόν, τη συνιστώσα V_{ij} της στοιχειώδους περιοχής U_{ij} που περιέχει το σημείο $\widetilde{H}(i/n, j/n)$ και επεκτείνουμε την $\widetilde{H}$ στο T_{ij} μέσω του τύπου

$$\widetilde{H}|_{T_{ij}} = \left(p|_{V_{ij}}\right)^{-1} \circ H.$$

Έτσι έχουμε $p \circ \widetilde{H} = H$ και στο τετραγωνάκι T_{ij}. Από την επιλογή της συνιστώσας V_{ij} έπεται ότι ο τύπος της επέκτασης συμφωνεί με τον "προηγούμενο" στο σημείο $(i/n, j/n)$. Επιπροσθέτως, ο τύπος της επέκτασης στο T_{ij} συμφωνεί με τον τύπο της $\widetilde{H}$ στις πλευρές του T_{ij} που η $\widetilde{H}$ είχε ήδη ορισθεί (δηλαδή τον "παλιό"). Πράγματι, οι πλευρές του T_{ij} που μπορεί να παρουσιαστεί αλληλοκάλυψη των τύπων είναι οι $A = \{\frac{i}{n}\} \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ και $B = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times \{\frac{j}{n}\}$. Σε κάθε περίπτωση, από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε συμφωνία των δύο τύπων, γιατί μέσω των περιορισμών αυτών στα A και B ορίζονται μονοπάτια με την ίδια αρχή $\widetilde{H}(i/n, j/n)$ που αποτελούν ανυψώσεις του ίδιου μονοπατιού. Από το λήμμα της συγκόλλησης η $\widetilde{H}$ είναι συνεχής.

Τέλος, ελέγχουμε ότι πράγματι η $\widetilde{H}$ είναι ομοτοπία από την ανύψωση $\tilde{f}$ στην $\tilde{g}$. Τα μονοπάτια $\widetilde{H}(s, 0)$ και $\tilde{f}(s)$ είναι ανυψώσεις του ίδιου μονοπατιού (του f) με την ίδια αρχή $\widetilde{H}(0, 0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων μονοπατιών έπεται ότι $\widetilde{H}(s, 0) = \tilde{f}(s)$, για κάθε $s \in I$. Το μονοπάτι $\widetilde{H}(0, t)$ είναι σταθερό ως ανύψωση του σταθερού μονοπατιού $H(0, t) = f(0) = g(0)$. Συνεπώς, $\widetilde{H}(0, t) = \widetilde{H}(0, 0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, για κάθε $t \in I$. Ομοίως προκύπτει ότι $\widetilde{H}(s, 1) = \tilde{g}(s)$, για κάθε $s \in I$, αφού και τα δύο μονοπάτια είναι ανυψώσεις του μονοπατιού g που έχουν την ίδια αρχή $\widetilde{H}(0, 1) = \tilde{g}(0)$. Επίσης, το μονοπάτι $\widetilde{H}(1, t)$ είναι σταθερό ως ανύψωση του σταθερού μονοπατιού $f(1) = g(1)$ και έτσι $\widetilde{H}(1, t) = \widetilde{H}(1, 0) = \tilde{f}(1) = \widetilde{H}(1, 1) = \tilde{g}(1)$, για κάθε $t \in I$. $\square$

Ένα από τα κύρια αντικείμενα της μελέτης μας είναι η θεμελιώδης ομάδα ενός τοπολογικού χώρου. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ιδιότητες των χώρων επικάλυψης οι οποίες συσχετίζονται με τη θεμελιώδη ομάδα τόσο του χώρου επικάλυψης όσο και του επικαλυπτόμενου χώρου.

Λήμμα 7.1.11. *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X. Αν ο X είναι συνεκτικός, τότε ο πληθάριθμος $|p^{-1}(x)|$ είναι σταθερός, καθώς $x \in X$. Δηλαδή, $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$ για κάθε ζεύγος σημείων x, y του X.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$ και $A = \{y \in X : |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x_0)|\}$. Το A είναι μη κενό, αφού περιέχει το x_0.

Το A είναι ανοικτό. Πράγματι, για κάθε $x \in A$ θεωρούμε στοιχειώδη περιοχή U_x του x. Εφόσον κάθε συνιστώσα της αντίστροφης εικόνας $p^{-1}(U_x)$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε νήμα, έχουμε ότι $|p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|$, για κάθε $y \in U_x$. Άρα $x \in U_x \subseteq A$ που σημαίνει ότι το A είναι ανοικτό.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το συμπλήρωμα $X \setminus A$ του A είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών, ένα ανοικτό για κάθε πληθάριθμο διαφορετικό του $|p^{-1}(x_0)|$. Από τη συνεκτικότητα του X έπεται ότι $A = X$. □

Πρόταση 7.1.12. *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X και $x_0 \in X$. Τότε για κάθε $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ο επαγόμενος ομομορφισμός $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ είναι μονομορφισμός. Επιπλέον, η εικόνα του μονομορφισμού p_* αποτελείται από τις κλάσεις ομοτοπίας θηλειών στο x_0, των οποίων οι ανυψώσεις με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι θηλειές (δηλ. έχουν τέλος το $\tilde{x}_0$).*

Απόδειξη. Έστω $[\tilde{f}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ με $p_*([\tilde{f}]) = 1$, ισοδύναμα $p \circ \tilde{f} \simeq C_{x_0}$. Η $\tilde{f}$ είναι ανύψωση της $p \circ \tilde{f}$ που έχει την ίδια αρχή με την ανύψωση $C_{\tilde{x}_0}$ του σταθερού μονοπατιού C_{x_0}. Εφόσον τα μονοπάτια $p \circ \tilde{f}$ και C_{x_0} είναι ομοτοπικά, από την Πρόταση 7.1.10 έπεται ότι και οι ανυψώσεις τους (αφού έχουν την ίδια αρχή) είναι ομοτοπικές, δηλαδή $[\tilde{f}] = [C_{\tilde{x}_0}] = 1$, που αποδεικνύει ότι η p_* είναι μονομορφισμός.

Για τον πρόσθετο ισχυρισμό, έστω $[f] \in \operatorname{Im} p_*$. Τότε $[f] = p_*([\tilde{g}]) = [p \circ \tilde{g}]$, δηλαδή $p \circ \tilde{g} \simeq f$, για κάποια θηλειά $\tilde{g}$ στο $\tilde{x}_0$. Αν θεωρήσουμε μια ανύψωση $\tilde{f}$ του f με αρχή $\tilde{x}_0$, τότε τα μονοπάτια $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ είναι ανυψώσεις με την ίδια αρχή των ομοτοπικών μονοπατιών f και $p \circ \tilde{g}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 7.1.10, $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$. Αφού το μονοπάτι $\tilde{g}$ είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$ και το ομοτοπικό του $\tilde{f}$ είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$. □

Πρόταση 7.1.13. *Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ ένας χώρος επικάλυψης του χώρου X, $x_0 \in X$ και $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Αν ο χώρος $\widetilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε*

$$|p^{-1}(x_0)| = [\pi_1(X, x_0) : p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)].$$

Υπενθυμίζουμε ότι με $[G : H]$ συμβολίζουμε τον δείκτη μιας υποομάδας H σε μια ομάδα G.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με H την υποομάδα $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ της ομάδας $\pi_1(X, x_0)$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : \Big\{\text{Δεξιά σύμπλοκα της } H \text{ στην } \pi_1(X, x_0)\Big\} \to p^{-1}(x_0)$$

ως ακολούθως: αν $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, τότε $\Phi\big(H[f]\big) = \tilde{f}(1)$, όπου $\tilde{f}$ η ανύψωση της f με αρχή το $\tilde{x}_0$.

- Η Φ είναι καλά ορισμένη: Αν $\Phi\big(H[f]\big) = \Phi\big(H[g]\big)$, τότε $[f] = [h][g]$ για κάποιο στοιχείο $[h] \in H$ και ως εκ τούτου $f \simeq h \cdot g$. Θεωρούμε ανυψώσεις $\tilde{f}, \tilde{h}$ και $\tilde{g}$ με αρχή $\tilde{x}_0$ των μονοπατιών f, h και g, αντίστοιχα. Από την προηγούμενη πρόταση η ανύψωση $\tilde{h}$ είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$ και συνεπώς ορίζεται το γινόμενο $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$. Τα μονοπάτια $\tilde{f}$ και $\tilde{h} \cdot \tilde{g}$ είναι ομοτοπικά ως ανυψώσεις με την ίδια αρχή $\tilde{x}_0$ των ομοτοπικών μονοπατιών f και $h \cdot g$, αντίστοιχα. Ιδιαιτέρως, έχουν το ίδιο τέλος, δηλαδή, $\tilde{f}(1) = (\tilde{h} \cdot \tilde{g})(1) = \tilde{g}(1)$.

- Η απεικόνιση Φ είναι επί: Είναι άμεση συνέπεια της κατά τόξα συνεκτικότητας του $\widetilde{X}$. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, θεωρούμε μονοπάτι $\tilde{f}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$ και παρατηρούμε ότι $\Phi\big(H[p \circ \tilde{f}]\big) = \tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$.

- Η απεικόνιση Φ είναι $1-1$: Ας υποθέσουμε ότι $\Phi\big(H[f]\big) = \Phi\big(H[f]\big)$. Τότε οι αντίστοιχες ανυψώσεις $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ (όπως στον ορισμό της Φ) έχουν το ίδιο τέλος. Αυτό σημαίνει ότι ορίζεται το γινόμενο μονοπατιών $\tilde{f} \cdot \tilde{g}^{-1}$ και είναι θηλειά στο $\tilde{x}_0$. Άρα, από την προηγούμενη πρόταση, $[p \circ (\tilde{f} \cdot \tilde{g}^{-1})] \in H$. Όμως $H \ni [p \circ (\tilde{f} \cdot \tilde{g}^{-1})] = [f] \cdot [g]^{-1}$, που σημαίνει ότι τα στοιχεία $[f]$ και $[g]$ ορίζουν το ίδιο δεξιό σύμπλοκο της H, δηλαδή, $H[f] = H[g]$.

Τελικά, αφού Φ είναι $1-1$ και επί έχουμε τη ζητούμενη ισότητα μεταξύ της πληθικότητας του νήματος $p^{-1}(x_0)$ και του πλήθους των δεξιών συμπλόκων της H στην $\pi_1(X, x_0)$. □

7.2 Η Θεμελιώδης Ομάδα του Κύκλου

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, υπολογίζουμε τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου και των προβολικών χώρων.

Θεώρημα 7.2.1. *Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι άπειρη κυκλική.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\pi_1(S^1, 1) \cong (\mathbb{Z}, +)$. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση για την επικάλυψη $p : \mathbb{R} \to S^1$, με $p(x) = e^{2\pi i x}$ και $x_0 = 1$. Εφόσον $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ και η ομάδα $p_*\big(\pi_1(\mathbb{R}, 0)\big)$ είναι τετριμμένη (ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι απλά συνεκτικός), έχουμε μια

$1-1$ και επί απεικόνιση $\Phi : \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$, όπου η εικόνα $\Phi([f])$ ενός στοιχείου $[f]$ της $\pi_1(S^1,1)$ είναι το τέλος $\tilde{f}(1)$, ανυψώσεως $\tilde{f}$ της f με αρχή το 0.

Ισχυριζόμαστε ότι η $\Phi : \pi_1(S^1,1) \to (\mathbb{Z},+)$ είναι ισομορφισμός ομάδων. Αρκεί να δείξουμε ότι η Φ είναι ομομορφισμός. Έστω, λοιπόν, $[f]$ και $[g]$ δύο στοιχεία της $\pi_1(S^1,1)$ και $\tilde{f}, \tilde{g}$ ανυψώσεις των f, g, αντίστοιχα, με αρχή το 0. Θεωρουμε τη μεταφορά $\tilde{g}_1(s)$ με αρχή το $\tilde{f}(1) = n$, δηλαδή, $\tilde{g}_1(s) = n + \tilde{g}(s)$ και παρατηρούμε ότι

$$p \circ \tilde{g}_1(s) = e^{2\pi i \tilde{g}_1(s)} = e^{2\pi i (n+\tilde{g}(s))} = e^{2\pi i n} e^{2\pi i \tilde{g}(s)} = p \circ \tilde{g}(s) = g(s).$$

Από τον τρόπο επιλογής του μονοπατιού $\tilde{g}_1(s)$ ορίζεται το γινόμενο μονοπατιών $\tilde{f} \cdot \tilde{g}_1$ και $p \circ (\tilde{f} \cdot \tilde{g}_1) = f \cdot g$, που σημαίνει ότι το μονοπάτι $\tilde{f} \cdot \tilde{g}_1$ είναι ανύψωση του $f \cdot g$ με αρχή το 0. Συνεπώς,

$$\Phi\big([f]\cdot[g]\big) = \Phi\big([f\cdot g]\big) = (\tilde{f}\cdot\tilde{g}_1)(1) = \tilde{g}_1(1) = n+\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)+\tilde{g}(1) = \Phi\big([f]\big)+\Phi\big([g]\big).$$

□

Πόρισμα 7.2.2. *Οι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικοί, αν $n \neq 2$.*

Απόδειξη. Με ένα απλό επιχείρημα συνεκτικότητας διαπιστώνουμε ότι ο $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ένα σημείο από τον πρώτο χώρο, ο χώρος που προκύπτει έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, ενώ οποιοδήποτε σημείο και να αφαιρέσουμε από τον $\mathbb{R}^2$ ο χώρος που προκύπτει είναι συνεκτικός.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $n > 2$ και ότι $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^n$ μέσω ενός ομοιομορφισμού φ. Τότε $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(\mathbf{0})\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ και έτσι $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$. Εφόσον ο χώρος $\mathbb{R}^m \setminus \mathbf{0}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τη σφαίρα S^{m-1}, προκύπτει ότι $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^{n-1})$, που μας οδηγεί σε αντίφαση, αφού η πρώτη ομάδα είναι άπειρη κυκλική, ενώ η δεύτερη τετριμμένη όταν $n > 2$. □

Όπως θα δούμε στο τελευταίο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας τις ομάδες ομολογίας των σφαιρών, οι χώροι $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικοί οποτεδήποτε $m \neq n$.

Θεώρημα 7.2.3. *Η θεμελιώδης ομάδα του πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{RP}^n$, για $n \geq 2$, είναι κυκλική τάξεως 2.*

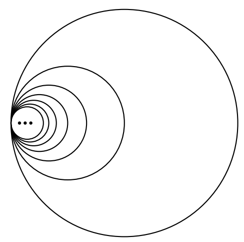
Απόδειξη. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.1.6 και τα σχόλια που το ακολουθούν, ο χώρος $\mathbb{RP}^n$ επικαλύπτεται από τη σφαίρα S^n και κάθε νήμα αποτελείται από δύο στοιχεία. Εφόσον η σφαίρα S^n είναι απλά συνεκτικός χώρος για $n \geq 2$ (βλ. Πρόταση **??**), έπεται ότι η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $\mathbb{RP}^n$ αποτελείται από δύο ακριβώς στοιχεία και ως εκ τούτου είναι κυκλική τάξεως 2. $\square$

Παρατήρηση 7.2.4. Αφού ο χώρος $\mathbb{RP}^1$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο (βλ. Άσκηση **??**), η θεμελιώδης ομάδα του είναι επίσης άπειρη κυκλική.

Συνοψίζοντας,

$$\pi_1(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{για } n = 1 \\ 1, & \text{για } n \geq 2 \end{cases} \qquad \pi_1(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{για } n = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{για } n \geq 2. \end{cases}$$

Παράδειγμα 7.2.5. (Υπεραριθμήσιμη θεμελιώδης ομάδα) Για κάθε φυσικό $n \geq 1$, συμβολίζουμε με K_n τον κύκλο του επιπέδου με κέντρο το σημείο $(1/n, 0)$ και ακτίνα $1/n$. Θεωρούμε την ένωση $X = \bigcup\limits_{n \geq 1} K_n$ των κύκλων και την εφοδιάζουμε με την τοπολογία του υπόχωρου που κληρονομεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Ο χώρος X είναι γνωστός ως "σκουλαρίκι της Χαβάης" (Hawaiian earing) και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι συμπαγής.



Για κάθε $n \geq 1$ η απεικόνιση $r_n : X \to K_n$ που είναι η ταυτοτική στον K_n και απεικονίζει κάθε άλλο κύκλο $K_m, m \neq n$ στο σημείο $x_0 = (0,0)$ είναι μια συστολή. Οι συστολές αυτές επάγουν μια ακολουθία επιμορφισμών

$$(r_n)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(K_n, x_0) = \mathbb{Z}.$$

Από την ακολουθία των επιμορφισμών, προκύπτει απεικόνιση

$$r : \pi_1(X, x_0) \to \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z} \quad \text{με} \quad [\gamma] \mapsto \big((r_1)_*([\gamma]), (r_2)_*([\gamma]), \dots\big),$$

όπου $\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}$ είναι η ομάδα καρτεσιανό γινόμενο (πράξη κατά "συν/νη") αριθμησίμων το πλήθος αντιτύπων της άπειρης κυκλικής. Η απεικόνιση r είναι επί, γιατί για κάθε ακολουθία ακέραιων $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ μπορούμε να ορίσουμε θηλειά γ του X στο x_0 η οποία τυλίγεται λ_n φορές γύρω από τον κύκλο K_n φορές στο διάστημα $[1 - 1/n, 1 - 1/(n+1)]$ και της οποίας η κλάση ομοτοπίας $[\gamma]$ απεικονίζεται στην ακολουθία $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. Είναι άμεσο ότι η

γ είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[1 - 1/n, 1 - 1/(n+1)]$. Η γ είναι, επίσης, συνεχής στο 1, εφόσον κάθε ανοικτή περιοχή $U \subseteq X$ του x_0 περιέχει, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος, όλους τους κύκλους K_n και ως εκ τούτου η αντίστροφη εικόνα $\gamma^{-1}(U)$ είναι ανοικτό ως το συμπλήρωμα μιας πεπερασμένης ένωσης κλειστών. Το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}$ είναι υπεραριθμήσιμη ομάδα (κάθε πραγματικός αριθμός αναπαρίσταται από μια ακολουθία ακεραίων) και άρα, αφού η r είναι επί, η ομάδα $\pi_1(X, x_0)$ είναι επίσης υπεραριθμήσιμη.

Έχοντας υπολογίσει τη θεμελιώδη ομάδα του κύκλου και των προβολικών χώρων, κλείνουμε αυτή την παράγραφο αποδεικνύοντας ότι η θεμελιώδης ομάδα του καρτεσιανού γινομένου δύο χώρων είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο των θεμελιωδών ομάδων των χώρων.

Πρόταση 7.2.6. *Έστω X_1, X_2 ένα ζεύγος τοπολογικών χώρων και $X_1 \times X_2$ το καρτεσιανό τους γινόμενο με την τοπολογία γινόμενο. Αν τα $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ είναι σημεία αναφοράς των δύο χώρων και $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, τότε*

$$\pi_1(X_1 \times X_2, x) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2).$$

Απόδειξη. Για $i = 1, 2$, συμβολίζουμε με $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ την προβολή στον i-παράγοντα. Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της τοπολογίας γινόμενο είναι ότι μια απεικόνιση $f : Y \to X_1 \times X_2$, όπου Y είναι ένας τοπολογικός χώρος, είναι συνεχής αν και μόνο αν η σύνθεσή της $p_i \circ f$ με κάθε προβολή p_i είναι συνεχής.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i \circ f"'] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, κάθε θηλειά f στο x στον χώρο γινόμενο, μας δίνει μια θηλειά $p_1 \circ f$ στο x_1 εντός του πρώτου χώρου και μια θηλειά $p_2 \circ f$ στο x_2 στον δεύτερο χώρο. Έτσι ορίζεται απεικόνιση

$$\varphi : \pi_1(X_1 \times X_2, x) \to \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$$

με $\varphi([f]) = ([p_1 \circ f], [p_2 \circ [f]) = \big(p_{1*}([f]), p_{2*}([f])\big)$. Κάθε ομοτοπία H μεταξύ θηλειών στο x καθορίζεται πλήρως από το ζεύγος των ομοτοπιών $p_1 \circ H$ και $p_2 \circ H$ μεταξύ θηλειών στα x_1 και x_2, αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι η φ είναι $1-1$, ενώ είναι άμεσο ότι είναι επί και ομομορφισμός. $\square$

Παρατήρηση 7.2.7. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ μια πεπερασμένη οικογένεια τοπολογικών χώρων, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ ο αντίστοιχος χώρος γινόμενο, $x_i \in X_i$ σημεία αναφοράς και $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Με επαγωγή (ή απευθείας όπως πριν) έχουμε ισομορφισμό

$$\pi_1(X_1 \times \cdots \times X_n, x) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \cdots \times \pi_1(X_n, x_n).$$

Παράδειγμα 7.2.8. Αν $T = S^1 \times S^1$ είναι η σπείρα, τότε $\pi_1(T) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Γενικότερα, για τη θεμελιώδη ομάδα της n-διάστατης σπείρας, έχουμε ότι $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$. Δηλαδή, το ευθύ γινόμενο n το πλήθος αντιτύπων της άπειρης κυκλικής.

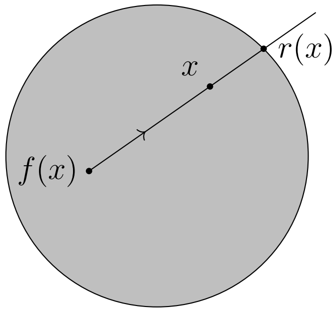
7.3 Εφαρμογές

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer

Λήμμα 7.3.1. *Δεν υπάρχει συστολή από τον κλειστό δίσκο D^2 στο σύνορό του S^1.*

Απόδειξη. Αν υπήρχε συστολή $r : D^2 \to S^1$, τότε η ένθεση $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ θα έδινε μονομορφισμό $i_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(D^2, x_0)$, όπου $x_0 \in S^1$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί, αφού η πρώτη ομάδα είναι άπειρη και η δεύτερη πεπερασμένη (τετριμμένη). □

Θεώρημα 7.3.2. *Αν η $f : D^2 \to D^2$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε υπάρχει $x \in D^2$ τέτοιο, ώστε $f(x) = x$.*



Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in D^2$. Θα ορίσουμε συστολή $r : D^2 \to S^1$ η ύπαρξη της οποίας σε συνδυασμό με το προηγούμενο λήμμα μας δίνει την επιθυμητή αντίφαση. Εφόσον $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in D^2$, μπορούμε να θεωρήσουμε την ημιευθεία $[f(x), x)$ με αρχή το $f(x)$ που διέρχεται από το x. Ορίζουμε ως $r(x)$ το σημείο τομής της παραπάνω ημιευθείας με το σύνορο του δίσκου S^1 (όπως στο παραπάνω σχήμα). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η r είναι συνεχής, ενώ είναι άμεσο ότι $r(a) = a$ για κάθε $a \in S^1$. □

Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας

Πρώτα, εισάγουμε την έννοια του βαθμού για συνεχείς απεικονίσεις από τον κύκλο στον εαυτό του.

Έστω $\varphi : S^1 \to S^1$ μια συνεχής απεικόνιση. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1 προκύπτει ότι κλάση ομοτοπίας α του μονοπατιού $f(s) = e^{2\pi i s}$, $s \in I$, είναι γεννήτορας της άπειρης κυκλικής $\pi_1(S^1, 1)$. Θεωρούμε μονοπάτι h στον κύκλο από το σημείο $\varphi(1)$ στο 1. Η σύνθεση

$$\pi_1(S^1,1) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(S^1,\varphi(1)) \xrightarrow{\Phi_h} \pi_1(S^1,1)\ ,$$

όπου $\Phi_h([g]) = [h^{-1}gh]$ είναι ο ισομορφισμός της αλλαγής σημείου αναφοράς, ως ενδομορφισμός άπειρης κυκλικής απεικονίζει τον γεννήτορα σε πολλαπλάσιό του. Δηλαδή, υπάρχει ακέραιος n τέτοιος, ώστε $(\Phi_h \circ \varphi_*)(\alpha) = n \cdot \alpha$. Ο **βαθμός** της φ ορίζεται ως ο ακέραιος n και συμβολίζεται με $\deg\varphi$.

Ο βαθμός της φ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του μονοπατιού h, γιατί η ομάδα $\pi_1(S^1, 1)$ είναι αβελιανή. Πράγματι, αν γ είναι ένα άλλο μονοπάτι από το $\varphi(1)$ στο 1 και $[g]$ ένα τυχαίο στοιχείο της ομάδας $G = \pi_1(S^1, 1)$, τότε

$$[\gamma^{-1}g\gamma] = [\gamma^{-1}][g][\gamma] = \underbrace{[\gamma^{-1}h]}_{\in G}\underbrace{[h^{-1}g\gamma]}_{\in G} = [h^{-1}g\gamma][\gamma^{-1}h] = [h^{-1}gh].$$

Παρατήρηση 7.3.3. Έπεται άμεσα από τον ορισμό ότι ο βαθμός μιας σταθερής απεικόνισης ισούται με 0 και ο βαθμός της απεικονίσεως $x \mapsto x^m$ ισούται με m.

Ο βαθμός είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο:

Λήμμα 7.3.4. *Αν οι $\varphi, \psi : S^1 \to S^1$ είναι δύο ομοτοπικές (συνεχείς) απεικονίσεις, τότε $deg\varphi = deg\psi$.*

Απόδειξη. Έστω H μια ομοτοπία από την φ στην ψ, γ μονοπάτι από το $\psi(1)$ στο 1 και h το μονοπάτι από το $\varphi(1)$ στο $\psi(1)$ που ορίζεται μέσω του τύπου $h(t) = H(1, t)$. Από το Λήμμα **??** έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1,1) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi_1(S^1,\varphi(1)) \arrow[d, "\Phi_h"] & \\
& \pi_1(S^1,\psi(1)) \arrow[r, "\Phi_\gamma"] & \pi_1(S^1,1)
\end{tikzcd}$$

Εφόσον ο βαθμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του μονοπατιού και

$$\Phi_\gamma \circ \psi_* = \Phi_\gamma \circ \Phi_h \circ \varphi_* = \Phi_{h\cdot\gamma} \circ \varphi_*$$

έχουμε ότι deg$\varphi =$ degψ. □

Θεώρημα 7.3.5 (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας)**.** *Έστω $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_0$ ένα πολυώνυμο θετικού βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές. Τότε υπάρχει μιγαδικός αριθμός x, έτσι ώστε $f(x) = 0$.*

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{C}$. Ιδιαιτέρως, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in S^1$ και έτσι ορίζεται η συνεχής απεικόνιση $\hat{f} : S^1 \to S^1$ με τύπο

$$\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

- Εφόσον $f(x) \neq 0$ για κάθε x με $\|x\| \leq 1$ (δηλαδή στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο), μπορούμε να ορίσουμε ομοτοπία $H : S^1 \times I \to S^1$ μέσω του τύπου

  $$H(x,t) = \frac{f(tx)}{\|f(tx)\|}$$

  από τη σταθερή απεικόνιση $\frac{f(0)}{\|f(0)\|}$ στην $\hat{f}$. Έπεται ότι deg$\hat{f} = 0$.

- Όπως πριν, έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x με $\|x\| \geq 1$ (δηλαδή στο συμπλήρωμα του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου). Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε ομοτοπία $F : S^1 \times I \to S^1$ με

  $$F(x,t) = \frac{K(x,t)}{\|K(x,t)\|},$$

  όπου $K(x,t) = x^n + t(a_1 x^{n-1} + t a_2 x^{n-2} + \cdots + t^{n-1} a_n)$, $x \in S^1, t \in I$. Σημειώνουμε ότι $K(x,t) = t^n f(x/t) \neq 0$, για $t \neq 0$, αφού $\|x/t\| \geq 1$. Επίσης, $K(x,0) \neq 0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η F είναι ομοτοπία από την x^n στην $\hat{f}$ και άρα deg$\hat{f} = n$.

Τελικά, $0 =$ deg$\hat{f} = n > 0$, που είναι άτοπο. □

Το θεώρημα των Borsuk-Ulam

Άλλη μια σπουδαία εφαρμογή όσων έχουμε δει μέχρι τώρα είναι το θεώρημα των Borsuk-Ulam.

Θεώρημα 7.3.6 (Borsuk-Ulam). *Έστω $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε υπάρχει σημείο $x \in S^2$ με $f(x) = f(-x)$. Ιδιαιτέρως, η f δεν είναι $1-1$.*

Ερμηνεύοντας το θεώρημα θα μπορούσε κάποιος να πει ότι υπάρχουν πάντα δύο αντιποδικά σημεία στην επιφάνεια της γης με ίση θερμοκρασία και πίεση (υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία και η πίεση μεταβάλλονται συνεχώς). Το θεώρημα, που ισχύει γενικότερα για $n \geq 2$, αποδείχθηκε πρώτα από τον Karol Borsuk ο οποίος αποδίδει τη διατύπωση του προβλήματος στον Stanislaw Ulam. Όταν $n = 1$, δηλαδή για συνεχείς απεικονίσεις $f : S^1 \to \mathbb{R}$, το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Για περισσότερες πληροφορίες και εφαρμογές ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [4].

Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο:

Θεώρημα 7.3.7. *Δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : S^2 \to S^1$ η οποία να διατηρεί τα αντιποδικά σημεία, δηλαδή τέτοια, ώστε $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^2$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι υπάρχει συνεχής $f : S^2 \to S^1$ που να διατηρεί τα αντιποδικά σημεία. Έχουμε δείξει ότι οι απεικονίσεις πηλίκο

$$p_2 : S^2 \to S^2/[x \sim -x] \cong \mathbb{RP}^2 \quad \text{και} \quad p_1 : S^1 \to S^1/[x \sim -x] \cong S^1$$

είναι επικαλύψεις. Αφού η f διατηρεί αντιποδικά σημεία, επάγει συνεχή απεικόνιση $g : \mathbb{RP}^2 \to S^1$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_2"'] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Ο επαγόμενος ομομορφισμός $g_* : \pi_1(\mathbb{RP}^2) \to \pi_1(S^1)$ (σε οποιοδήποτε σημείο αναφοράς και αν ληφθεί) είναι τετριμμένος, αφού η θεμελιώδης ομάδα του χώρου $\mathbb{RP}^2$ είναι πεπερασμένη (κυκλική τάξεως δύο), ενώ η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου δεν περιέχει μη τετριμμένα στοιχεία πεπερασμένης τάξης, ως άπειρη κυκλική.

Θεωρούμε μια κλάση ομοτοπίας μονοπατιών $[\alpha]$ στη σφαίρα S^2 με άκρα αντιποδικά σημεία. Τότε τα άκρα της κλάσεως $[f \circ \alpha]$ είναι αντιποδικά σημεία της S^1. Έτσι η $[f \circ \alpha]$ είναι "ανύψωση" της κλάσης $[p_1 \circ f \circ \alpha]$ (που αποτελείται από θηλειές), η οποία έχει διαφορετικά άκρα. Συνεπώς, η κλάση $[p_1 \circ f \circ \alpha]$ δεν ανήκει στην εικόνα της p_{1*} και ως εκ τούτου δεν ισούται με κλάση ομοτοπίας σταθερού μονοπατιού. Όμως από τη μεταθετικότητα του διαγραμμάτος προκύπτει η αντίφαση ότι η κλάση $[p_1 \circ f \circ \alpha]$ ισούται με κλάση ομοτοπίας σταθερού μονοπατιού, αφού $[p_1 \circ f \circ \alpha] = g_*[p_2 \circ \alpha]$ και η g_* είναι τετριμμένη. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.6. Αν υποθέσουμε ότι $f(x) \neq f(-x)$ για κάθε $x \in S^2$, τότε ορίζεται συνεχής απεικόνιση $g : S^2 \to S^1$ με

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Παρατηρούμε ότι $g(-x) = g(-x)$, για κάθε $x \in S^2$, το οποίο αντιφάσκει στο προηγούμενο θεώρημα. $\square$

Πόρισμα 7.3.8. *Έστω A_1, A_2 και A_3 τρία κλειστά υποσύνολα της σφαίρας S^2, έτσι ώστε $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Τότε τουλάχιστον ένα από τα A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, περιέχει ζεύγος αντιποδικών σημείων $\{x, -x\}$.*

Απόδειξη. Για το τυχαίο $x \in S^2$ θεωρούμε τις αποστάσεις του από τα A_i, $d_i(x) = d(x, A_i) = inf\{d(x, a_i) : a_i \in A_i\}$ και την απεικόνιση $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x) = \big(d_1(x), d_2(x)\big)$, η συνέχεια της οποίας έπεται από τη συνέχεια της συνήθους μετρικής d του $\mathbb{R}^3$. Από το θεώρημα των Borsuk-Ulam, υπάρχει $x_0 \in S^2$ με $f(x_0) = f(-x_0)$. Δηλαδή, $d_1(x_0) = d_1(-x_0)$ και $d_2(x_0) = d_2(-x_0)$. Αν μια από τις αποστάσεις $d_1(x_0)$ ή $d_2(x_0)$ είναι μηδέν, τότε το ζεύγος των σημείων $\{x_0, -x_0\}$ περιέχεται στο A_1 ή στο A_2, αντίστοιχα, αφού τα A_1, A_2 είναι κλειστά. Αν, από την άλλη, $d_1(x_0) > 0$ και $d_2(x_0) > 0$, τότε αμφότερα τα $x_0, -x_0$ δεν ανήκουν σε κάνενα από τα A_1 ή A_2 και συνεπώς το ζεύγος $\{x_0, -x_0\}$ περιέχεται στο A_3, αφού τα A_1, A_2 και A_3 καλύπτουν τη σφαίρα S^2. $\square$

Ασκήσεις

7.1 Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης.

(i) Αποδείξτε ότι η p είναι τοπικός ομοιομορφισμός (δηλ. κάθε σημείο του $\widetilde{X}$ έχει περιοχή U με $p(U)$ ανοικτό και $p|_U : U \to p(U)$ ομοιομορφισμός), ανοικτή απεικόνιση και απεικόνιση πηλίκο. Επιπλέον, αν η p είναι $1-1$, τότε είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Αν για κάθε $x \in X$, το νήμα $p^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο (δηλ. το κάλυμμα είναι πεπερασμένο), τότε η p είναι κλειστή απεικόνιση.

(iii) Αν ο X είναι συμπαγής και Hausdorff, τότε ο $\widetilde{X}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν το κάλυμμα είναι πεπερασμένο.

7.2 Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης, A ένας υπόχωρος του X και $\widetilde{A} = p^{-1}(A)$. Δείξτε ότι ο περιορισμός $p : \widetilde{A} \to A$ είναι επικάλυψη.

7.3 Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν συστολές $r : X \to A$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
(i) $X = \mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^3 \supset A \cong \mathbb{S}^1$.
(ii) $X = \mathbb{S}^1 \times D^2$, όπου $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$, και $A = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ το σύνορο του X.

7.4 Λέμε ότι ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, αν για κάθε συνεχή $f : X \to X$ υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$. Αποδείξτε ότι αν ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε:
(i) Αν A υπόχωρος του X για τον οποίο υπάρχει συστολή $r : X \to A$, τότε ο A έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.
(ii) Κάθε χώρος Y ομοιομορφικός με τον X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

7.5 Έστω B^2 η ανοικτή μοναδιαία μπάλα στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί παράδειγμα συνεχούς απεικονίσεως $f : B^2 \to B^2$ χωρίς σταθερά σημεία.

7.6 (i) Αποδείξτε ότι η αντιποδική απεικόνιση $a : S^1 \to S^1$, $a(x) = -x$, είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. Ιδιαιτέρως, $deg(a) = 1$.
(ii) Κάθε συνεχής $f : S^1 \to S^1$ τέτοια, ώστε $deg(f) \neq 1$ έχει σταθερό σημείο. [Υπόδειξη: Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in S^1$, τότε $f \simeq a$.]

7.7 Έστω $f : S^1 \to S^1$ συνεχής ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
(i) Αποδείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.
(ii) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει κάποιο σημείο x στο αντιποδικό του $-x$.

7.8 Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $x \in U$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $U \setminus \{x\}$ δεν είναι απλά συνεκτικός. [Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν "μικρό" κύκλο C στο U γύρω από το x και μελετήστε την ακολουθία των ενθέσεων $C \hookrightarrow U \setminus \{x\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$.]

7.9 Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$.

7.10 Κάθε 3×3 πίνακας με στοιχεία θετικούς πραγματικούς αριθμούς έχει ένα ιδιοδιάνυσμα με θετική ιδιοτιμή. [Υπόδειξη: Η περιοχή $B = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \text{ και } |v| = 1\}$ είναι ομοιομορφική με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο.]

7.11 Έστω $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ένα πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζες πάνω στον μοναδιαίο κύκλο S^1. Δείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p(x)$ στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου (δηλ. $|x| < 1$) ισούται με τον βαθμό της απεικονίσεως $\hat{p} : S^1 \to S^1$, όπου $\hat{p}(x) = \dfrac{p(x)}{|p(x)|}$. [Υπόδειξη: Εκφράστε το $p(x)$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων $\phi(x) \cdot \psi(x)$, έτσι ώστε το $\phi(x)$ να έχει τις ρίζες του εντός του μοναδιαίου δίσκου, το $\psi(x)$ εκτός του μοναδιαίου δίσκου και συνδυάστε τις δύο περιπτώσεις της αποδείξεως του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας που έγινε στην τάξη. Τέλος, παρατηρήστε ότι οι απεικονίσεις af και f είναι ομοτοπικές για κάθε $a \in S^1$ και $f : S^1 \to S^1$.]

7.12 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, αποδείξτε ότι το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων έχει λύση.

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2}\sin(x)y - 2x = 0 \\ \frac{1}{2}\cos(x)y + \frac{x^2}{2} - 2y = 0 \end{array} \right\}$$

7.13 Έστω $f : X \to Y$ ένας τοπικός ομοιομορφισμός μεταξύ δύο χώρων Hausdorff. Υποθέτουμε ότι η f είναι επί και αντιστρέφει τα μονοσύνολα σε συμπαγή. Αν $\left|f^{-1}(y_1)\right| = \left|f^{-1}(y_2)\right|$ για κάθε ζεύγος σημείων y_1, y_2 του Y, τότε η f είναι απεικόνιση επικάλυψης. [Υπόδειξη: Αναζητήστε στοιχειώδη περιοχή του τυχαίου $y \in Y$ της μορφής $\cap_i f(U_i)$, όπου τα U_i είναι ανοικτά, ξένα και απεικονίζονται ομοιομορφικά μέσω της f στην ίδια ανοικτή περιοχή του y.]

Βιβλιογραφία

[1] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[2] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[3] W. S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[4] J. Matousek. Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Springer, Universitext 2003.

[5] J. R. Munkres. Topology, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.

[6] J. Rotman. An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, 1988.