Κεφάλαιο 5

Χώροι Πηλίκο

Περιεχόμενα

Στην Αλγεβρική Τοπολογία, για έναν τοπολογικό χώρο ορίζονται διάφορες ομάδες όπως οι ομάδες ομοτοπίας, οι ομάδες ομολογίας και οι ομάδες συνομολογίας. Φυσικά, άλλο πράγμα είναι ο ορισμός και άλλο ο υπολογισμός (ή η άντληση πληροφοριών από αυτές για τη μελέτη του χώρου). Η δομή ενός συμπλέγματος κελιών μας παρέχει τη δυνατότητα της μελέτης αυτών των ομάδων. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η περιγραφή κατασκευής τοπολογικών χώρων μέσω κατάλληλων σχέσεων ισοδυναμίας και ιδιαιτέρως η ανάπτυξη των εννοιών που απαιτούνται για τον ορισμό των συμπλεγμάτων κελιών και την περιγραφή των ιδιοτήτων τους.

5.1 Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός 5.1.1. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση επί ενός συνόλου Y. Η **τοπολογία πηλίκο** του συνόλου Y ως προς την απεικόνιση π ορίζεται

[0]https://eclass.uoa.gr/courses/MATH536/

ως εξής:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subseteq Y \mid \pi^{-1}(U) \ \text{ ανοικτό υποσύνολο του } X\}.$$

Δηλαδή, ανοικτά είναι εκείνα τα υποσύνολα του Y που αντιστρέφονται (μέσω της π) σε ανοικτά υποσύνολα του X.

Σημειώνουμε ότι η τοπολογία πηλίκο του Y ως προς την π είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο Y η οποία καθιστά την π συνεχή. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η οικογένεια $\mathcal{T}_Y$ ικανοποιεί τα απαραίτητα αξιώματα προκειμένου να αποτελεί μια τοπολογία.

Ορισμός 5.1.2. Έστω $\pi : X \to Y$ μια επί απεικόνιση μεταξύ των τοπολογικών χώρων X και Y. Η π λέγεται **απεικόνιση πηλίκο**, αν τα ανοικτά του Y είναι ακριβώς αυτά που αντιστρέφονται σε ανοικτά. Δηλαδή, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του Y αν και μόνο αν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος Y έχει στην ουσία την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την π.

Παρατήρηση 5.1.3. Κάθε απεικόνιση πηλίκο είναι συνεχής απεικόνιση, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει (Άσκηση).

Παρατήρηση 5.1.4. Αν η $\pi : X \to Y$ είναι απεικόνιση πηλίκο και ο X είναι συμπαγής (ή συνεκτικός), τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο Y είναι επίσης συμπαγής (ή συνεκτικός).

Παράδειγμα 5.1.5 (Το βασικό παράδειγμα)**.** Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον X. Συμβολίζουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$ και με $X/{\sim}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Θεωρούμε τη φυσική προβολή $\pi : X \to X/{\sim}$, όπου $\pi(x) = [x]$. Το σύνολο $X/{\sim}$ εφοδιασμένο με την αντίστοιχη τοπολογία πηλίκο λέγεται **χώρος πηλίκο** (ή και χώρος ταυτοποίησης).

Ορισμός 5.1.6. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων λέγεται **ανοικτή** (αντ. **κλειστή**), αν απεικονίζει τα ανοικτά (αντ. κλειστά) υποσύνολα του X σε ανοικτά (αντ. κλειστά) υποσύνολα του Y.

Παράδειγμα 5.1.7. Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$, όπου ο X είναι συμπαγής και ο Y Hausdorff, είναι κλειστή (γιατί;).

Παράδειγμα 5.1.8. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $X \times Y$ ο αντίστοιχος χώρος γινόμενο. Η πρώτη προβολή $\pi_1 : X \times Y \to X$ είναι ανοικτή απεικόνιση (γιατί;).

Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζονται οι βασικές ιδιότητες των απεικονίσεων (και χώρων) πηλίκο.

Θεώρημα 5.1.9. *Έστω X, Y, Z τοπολογικοί χώροι και $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση πηλίκο.*

1. *Κάθε συνεχής, επί και ανοικτή (ή κλειστή) απεικόνιση $f : X \to Y$, είναι απεικόνιση πηλίκο.*

2. *Μια απεικόνιση $f : Y \to Z$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η σύνθεση $f \circ \pi$ είναι συνεχής.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

3. *Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Z$ η οποία είναι σταθερή σε κάθε νήμα $\pi^{-1}(\{y\})$ της π, υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $\tilde{f} : Y \to Z$, έτσι ώστε $f = \tilde{f} \circ \pi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f=\tilde{f}\circ\pi"] & \\ Y \arrow[r, "\tilde{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

4. *Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X με $x \sim x'$, αν και μόνο αν $\pi(x) = \pi(x')$ και θεωρούμε τον αντίστοιχο χώρο πηλίκο $X/\sim$. Τότε οι χώροι Y και $X/\sim$ είναι ομοιομορφικοί. (Δηλαδή κάθε χώρος πηλίκο είναι όπως στο βασικό παράδειγμα).*

Απόδειξη. 1. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ανοικτή (ομοίως αν f κλειστή). Η μία κατεύθυνση έπεται άμεσα από τη συνέχεια της f. Αντίστροφα, αν το U είναι υποσύνολο του Y για το οποίο το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε η εικόνα $f\big(f^{-1}(U)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, αφού η f είναι ανοικτή. Όμως η f είναι και επί. Άρα $f\big(f^{-1}(U)\big) = U$ ανοικτό υποσύνολο του Y.
2. Πάλι η μια κατεύθυνση είναι προφανής. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η σύνθεση $f \circ \pi$ είναι συνεχής. Αν το U είναι ανοικτό υποσύνολο του Z, τότε το $(f\circ\pi)^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Όμως $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ και η π είναι απεικόνιση πηλίκο. Έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, το οποίο σημαίνει ότι η f είναι συνεχής.
3. Δοθέντος $y \in Y$ υπάρχει κάποιο $x \in X$, έτσι ώστε $\pi(x) = y$. Ορίζουμε $\tilde{f}(y) = f(x)$. Εφόσον η f είναι σταθερή σε κάθε νήμα, η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή του x). Επίσης, η $\tilde{f}$ έχει ορισθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιείται η

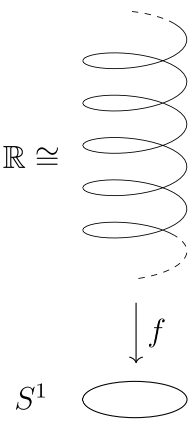
σχέση $f(x) = \tilde{f} \circ \pi(x)$, για κάθε $x \in X$. Επιπροσθέτως, η $\tilde{f}$ είναι μοναδική με αυτή την ιδιότητα: αν έχουμε απεικόνιση $g : Y \to Z$ με $g \circ \pi = f$ και $y \in Y$, τότε $y = \pi(x)$ για κάποιο $x \in X$ και $\tilde{f}(y) = f(x) = g \circ \pi(x) = g(y)$. Τέλος, η συνέχεια της $\tilde{f}$ προκύπτει από τον προηγούμενο ισχυρισμό, γιατί $\tilde{f} \circ \pi = f$ συνεχής.
4. Έστω $f : X \to X/\!\sim$ η φυσική προβολή, δηλαδή $f(x) = [x]$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η f είναι σταθερή στα νήματα της π και η π στα νήματα της f.

Σημειώνουμε επίσης ότι και οι δύο απεικονίσεις είναι απεικονίσεις πηλίκο. Συνεπώς, από το 3) υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $\tilde{f} : Y \to X/\!\sim$ με $\tilde{f} \circ \pi = f$ και μοναδική συνεχής απεικόνιση $\tilde{g} : X/\!\sim \to Y$ με $\tilde{g} \circ f = \pi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, bend left, "\tilde{f}"] & X/\!\sim \arrow[l, bend left, "\tilde{g}"] \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in X$ έχουμε: $\tilde{f} \circ \tilde{g}[x] = \tilde{f} \circ \tilde{g} \circ f(x) = \tilde{f} \circ \pi(x) = f(x) = [x]$ και έτσι $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \mathrm{Id}_{X/\sim}$. Αν $y \in Y$, τότε $y = \pi(x)$ για κάποιο $x \in X$ και όπως πριν έχουμε: $\tilde{g} \circ \tilde{f}(y) = \tilde{g} \circ \tilde{f} \circ \pi(x) = \tilde{g} \circ f(x) = \pi(x) = y$. Δηλαδή, $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_Y$. Συνεπώς η $\tilde{f}$ είναι 1-1 και επί (γιατί επιδέχεται δεξί και αριστερό αντίστροφο), συνεχής με αντίστροφη την $(\tilde{f})^{-1} = \tilde{g}$ η οποία είναι επίσης συνεχής. Τελικά, η $\tilde{f} : Y \to X/\!\sim$ είναι ο απαιτούμενος ομοιομορφισμός. $\square$

Όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, το 4) του προηγούμενου θεωρήματος αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την περιγραφή ενός χώρου πηλίκο.

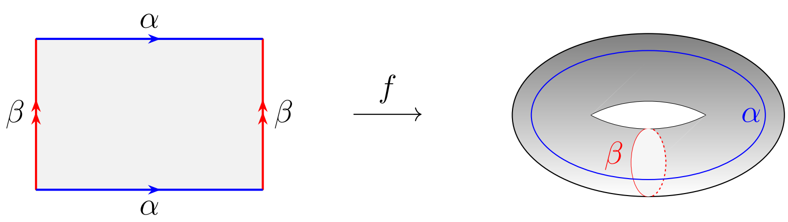


Σχήμα 5.1: Η απεικόνιση πηλίκο από τον $\mathbb{R}$ στον κύκλο.

Παράδειγμα 5.1.10. Στον χώρο $\mathbb{R}$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Z}$. Τότε $S^1 \cong \mathbb{R}/\sim$. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to S^1$

με τύπο $f(x) = e^{2\pi i x}$ και παρατηρούμε ότι $x \sim y$ αν και μόνο αν $f(x) = f(y)$. Η f είναι επί, συνεχής, ανοικτή (γιατί η εικόνα του ανοικτού διαστήματος (a, b) αποτελείται από τα σημεία στην S^1 "γωνίας" μεταξύ $2\pi a$ και $2\pi b$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο της S^1) και συνεπώς απεικόνιση πηλίκο. Από τον τέταρτο ισχυρισμό του προηγούμενου θεωρήματος έπεται ότι $S^1 \cong \mathbb{R}/\sim$.

Παράδειγμα 5.1.11. (Η σπείρα (torus)) Στον χώρο $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που παράγεται από τις "ταυτίσεις" $(0, y) \sim (1, y)$ και $(x, 0) \sim (x, 1)$, $x, y \in [0, 1]$. Τότε $I^2/\sim \cong S^1 \times S^1$. Πράγματι, έστω $f : I^2 \to S^1 \times S^1$ με $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Τότε η f είναι επί, συνεχής και κλειστή (αφού I^2 συμπαγής και $S^1 \times S^1$ Hausdorff). Δηλαδή, η f είναι απεικόνιση πηλίκο η οποία είναι άμεσο να διαπιστώσουμε ότι διατηρεί τα νήματα της φυσικής προβολής $I^2 \to I^2/\sim$. Ο ισχυρισμός έπεται από το προηγούμενο θεώρημα.



Σχήμα 5.2: Η σπείρα $T = S^1 \times S^1$ ως χώρος πηλίκο.

Παράδειγμα 5.1.12. (Χώροι τροχιών) Έστω G μια ομάδα η οποία δρα με ομοιομορφισμούς επί ενός τοπολογικού χώρου X. Η δράση ορίζει με φυσικό τρόπο μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο X, όπου δύο στοιχεία του χώρου είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια τροχιά. Ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο συμβολίζεται με X/G και αναφέρεται ως χώρος τροχιών της δράσης.

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε τη δράση της αβελιανής ομάδας $\mathbb{Z}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ με μετατοπίσεις (δηλ. $g * x = g + x$) δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \underbrace{S^1 \times \cdots S^1}_{n-\text{φορές}}$.

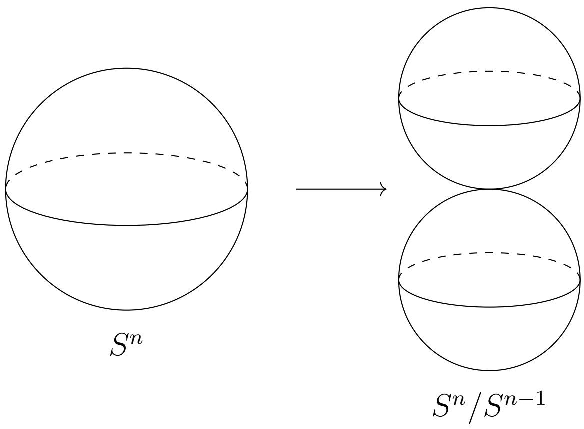
Παράδειγμα 5.1.13. (Ο πραγματικός προβολικός χώρος) Η ομάδα $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, με τον συνήθη πολλαπλασιασμό, δρα στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $n \geq 1$, με ομοιομορφισμούς: $g * (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (gx_1, \ldots, gx_{n+1})$. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$), είναι ο αντίστοιχος χώρος τροχιών. Η τροχιά ενός σημείου του $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (δηλαδή ένα στοιχείο του προβολικού χώρου $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathbb{R}^*)$, είναι ο μονοδιάστατος γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από το σημείο αυτό εκτός από την αρχή των αξόνων. Ο περιορισμός $\psi = \pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{RP}^n$ της απεικόνισης πηλίκο $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n$ είναι συνεχής και επί, όπου $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι η n-διάστατη (μοναδιαία) σφαίρα. Εφόσον η σφαίρα είναι συμπαγής και συνεκτική, έπεται ότι και ο χώρος $\mathbb{RP}^n$ είναι συμπαγής και συνεκτικός.

Παράδειγμα 5.1.14. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A_1, \ldots, A_k$ μια πεπερασμένη οικογένεια ξένων, κλειστών υποσυνόλων του X. Ορίζουμε στον X σχέση ισοδυναμίας $\sim$ που περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x, y \in A_i$ για κάποιο i ή $x = y$ αν τα x, y δεν ανήκουν στην ένωση $\cup_{i=1}^{k} A_i$. Ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο $X/{\sim} = X/(A_1, \ldots, A_k)$ προκύπτει από τον X θεωρώντας κάθε A_i ως ένα σημείο.

Στο σχήμα 5.3 βλέπουμε για $n = 2$ τον χώρο X/A, όπου $X = S^n$ και

$$A = \big\{(x_1, \ldots, x_n, 0) \in S^n\big\}$$

ο υπόχωρος της σφαίρας S^n που είναι ομοιομορφικός με την S^{n-1}. Ο χώρος X/A αποτελείται από δύο αντίτυπα της S^n που έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, την εικόνα του A.



Σχήμα 5.3: Ο χώρος πηλίκο S^n/S^{n-1}.

Παράδειγμα 5.1.15. Στον χώρο $X = \mathbb{R}$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με $x \sim y$, αν τα x, y είναι μη-μηδενικά. Τότε έχουμε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, την $[0] = \{0\}$ και την $[1] = \mathbb{R}^*$. Δηλαδή ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο $X/{\sim}$ αποτελείται από δύο στοιχεία. Παρατηρούμε ότι ο $X/{\sim}$ δεν είναι Hausdorff, αφού το μονοσύνολό του $[1]$ δεν είναι κλειστό (αν ήταν, τότε το $[0]$ θα ήταν ανοικτό και κατά συνέπεια το $\{0\} = \pi^{-1}([0])$ θα ήταν ανοικτό στον $\mathbb{R}$).

5.2 Χώροι Επισύναψης

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε έναν χώρο πηλίκο ο οποίος δεν είναι Hausdorff. Γενικότερα, για έναν χώρο πηλίκο είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε αν ικανοποιούνται κάποια από τα συνήθη διαχωριστικά αξιώματα. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε μια κατηγορία χώρων πηλίκο οι οποίοι είναι φυσιολογικοί, όχι απλά Hausdorff. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό.

Ορισμός 5.2.1. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται **φυσιολογικός** (normal), αν τα μονοσυνολά του είναι κλειστά και για κάθε ζεύγος A, B ξένων, κλειστών υποσυνόλων του X, υπάρχουν ξένα, ανοικτά υποσύνολα του X που περιέχουν τα A και B αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος και κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι φυσιολογικός.

Ορισμός 5.2.2. Η ξένη ένωση μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων $(X_a)_{a\in I}$ είναι η ένωση των (ξένων) τοπολογικών χώρων $X_a \times \{a\}$. Συμβολίζουμε με $\bigsqcup_{a\in I} X_a$. Δηλαδή

$$\bigsqcup_{a\in I} X_a = \bigcup_{a\in I} \big(X_a \times \{a\}\big) = \big\{(x,a) \,:\, a \in I \text{ και } x \in X_a\big\}$$

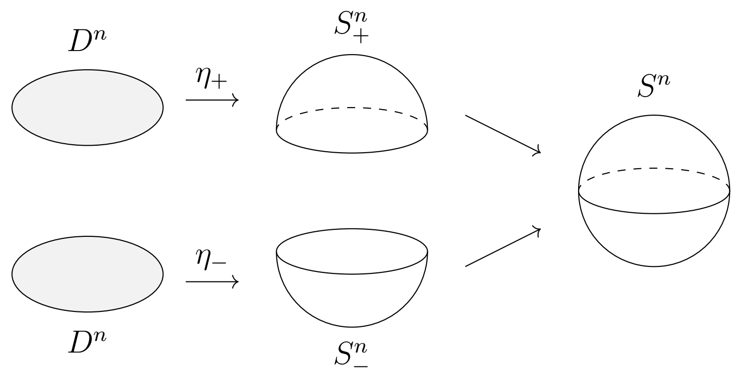
Η ξένη ένωση $\bigsqcup_{a\in I} X_a$ γίνεται τοπολογικός χώρος ως εξής: ένα υποσύνολο U είναι ανοικτό στο $\bigsqcup_{a\in I} X_a$ αν και μόνο αν η τομή $U \cap \big(X_a \times \{a\}\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\big(X_a \times \{a\}\big)$ για κάθε $a \in I$. Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι η πεπερασμένη ξένη ένωση συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος.

Κάθε χώρος X_a θεωρείται ως υποσύνολο (υπόχωρος) του $\bigsqcup_{a\in I} X_a$ μέσω της εμφύτευσης $i_a : X_a \hookrightarrow \bigsqcup_{a\in I} X_a$, όπου $i_a(x) = (x,a)$.

Ορισμός 5.2.3. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι, A ένα κλειστό υποσύνολο του X και $f : A \to Y$ συνεχής (το A θεωρείται ως τοπολογικός χώρος με τη σχετική τοπολογία, την τοπολογία του υπόχωρου). Ορίζουμε τον χώρο πηλίκο $Y \cup_f X = (Y \sqcup X)/a \sim f(a)$, για κάθε $a \in A$, και λέμε ότι ο χώρος $Y \cup_f X$ προκύπτει από την **επισύναψη του** X **στον** Y **κατά μήκος του** A **διά μέσου της** f. Δηλαδή, είναι ο χώρος πηλίκο της ξένης ένωσης $Y \sqcup X$ ως προς τη διαμέριση: $\{x\}$, $x \in X \setminus A$ και $\Big\{\{y\} \cup f^{-1}(y)\Big\}$, $y \in Y$.

Παράδειγμα 5.2.4. Για κάθε $n \geq 1$, και $Y = \{x_0\}$ έναν χώρο μονοσύνολο, θεωρούμε τη σταθερή απεικόνιση $f : \partial D^n \to \{x_0\}$. Τότε ο χώρος $\{x_0\} \cup_f D^n$ είναι στην ουσία ο χώρος πηλίκο $D^n/\partial D^n$ και είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα S^n (βλ. Άσκηση 11).

Παράδειγμα 5.2.5. Αν $i : \partial D^n \hookrightarrow D_n$ είναι η ένθεση, δηλαδή $i(x) = x$, τότε ο χώρος $D^n \cup_i D^n$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα S^n. Πράγματι, θεωρούμε τις απεικονίσεις $\eta_+, \eta_- : D^n \to S^n$ με $\eta_+(x) = (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ και $\eta_-(x) = (x, -\sqrt{1 - \|x\|^2})$, οι οποίες δίνουν ομοιομορφισμούς από τον δίσκο D^n στο πάνω $S^n_+ = \big\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\big\}$ και κάτω ημισφαίριο $S^n_- = \big\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \leq 0\big\}$, αντίστοιχα. Η απεικόνιση $\phi : D_n \sqcup D_n \to S^n$ που δίνεται από την η_+ στο πρώτο αντίτυπο του δίσκου και από την η_- στο δεύτερο, είναι επί, συνεχής και κλειστή (αφού $D_n \sqcup D_n$ συμπαγής και S^n Hausdorff). Συνεπώς η ϕ είναι απεικόνιση πηλίκο για την οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι σταθερή σε κάθε νήμα της απεικόνισης πηλίκο που αντιστοιχεί στον ορισμό του χώρου $D^n \cup_i D^n$. Από το Θεώρημα 5.1.9 (4), έπεται ότι $D^n \cup_i D^n \cong S^n$.



Σχήμα 5.4: $D^n \cup_i D^n \cong S^n$.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω X και Y ένα ζεύγος (ξένων) τοπολογικών χώρων, A ένα κλειστό υποσύνολο του X, $f : A \to Y$ συνεχής, $Z_f = Y \cup_f X$ ο χώρος που προκύπτει από τον Y με την επισύναψη του X κατά μήκος του A μέσω της f και $\pi : Y \cup X \to Z_f$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο.*

1. *Ο περιορισμός $\pi|_Y : Y \to Z_f$ είναι κλειστή απεικόνιση η οποία απεικονίζει ομοιομορφικά τον Y σε έναν κλειστό υπόχωρο του Z_f.*

2. *Ο περιορισμός $\pi|_{X-A} : X - A \to Z_f$ είναι ανοικτή απεικόνιση η οποία απεικονίζει ομοιομορφικά το $X - A$ σε έναν ανοικτό υπόχωρο του Z_f.*

Απόδειξη. 1. Ο περιορισμός $\pi|_Y$ είναι συνεχής και $1-1$ αφού διαφορετικά στοιχεία του Y δεν ταυτοποιούνται μεταξύ τους. Αν το Γ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του Y, τότε το $\pi^{-1}\big(\pi(\Gamma)\big) = \Gamma \cup f^{-1}(\Gamma)$ είναι κλειστό στον $Y \cup X$, αφού το σύνολο Γ είναι κλειστό στον Y και το $f^{-1}(\Gamma)$ είναι κλειστό στον υπόχωρο A και έτσι κλειστό στον X. Άρα το $\pi(\Gamma)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Z_f, αφού η π είναι απεικόνιση πηλίκο, που σημαίνει ότι ο περιορισμός $\pi|_Y$ είναι κλειστή απεικόνιση. Ιδιαιτέρως, η εικόνα του Y μέσω της π είναι κλειστό υποσύνολο του Z_f και ο περιορισμός $\pi|_Y$ είναι ομοιομορφισμός, αφού είναι συνεχής, $1-1$ και κλειστή.
2. Όπως πριν, αρκεί να δείξουμε ότι ο περιορισμός $\pi|_{X-A}$ είναι ανοικτή απεικόνιση. Έστω, λοιπόν, U ένα ανοικτό υποσύνολο του $X - A$. Εφόσον η π είναι απεικόνιση πηλίκο, η εικόνα του $\pi(U)$ είναι ανοικτό στον Z_f αν και μόνο αν το $\pi^{-1}\big(\pi(U)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $Y \cup X$. Όμως, από τον ορισμό της σχέσεως ισοδυναμίας (μέσω της οποίας ορίζεται ο Z_f) έχουμε ότι $U = \pi^{-1}\big(\pi(U)\big)$ (οι όποιες ταυτοποιήσεις σημείων του X λαμβάνουν χώρα στον υπόχωρο A). Εφόσον το U είναι ανοικτό στον $X - A$ και το $X - A$ είναι ανοικτό στον $Y \cup X$, έπεται ότι το U είναι ανοικτό στον $Y \cup X$ και τελικά το $\pi(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z_f. □

Παρατήρηση 5.2.7. Λόγω της προηγούμενης πρότασης, μπορούμε να θεωρούμε τον χώρο Y ως κλειστό υπόχωρο του $X \cup_f Y$ και τον $X - A$ ως ανοικτό υπόχωρο του $X \cup_f Y$, ταυτίζοντάς τους με τις εικόνες τους μέσω της π. Έτσι ο Z_f μπορεί να θεωρηθεί ως ξένη ένωση των Y και $X - A$.

Θεώρημα 5.2.8. *Έστω X και Y ένα ζεύγος (ξένων) τοπολογικών χώρων, A ένα κλειστό υποσύνολο του X, $f : A \to Y$ συνεχής και $Z_f = Y \cup_f X$. Αν οι χώροι X και Y είναι φυσιολογικοί, τότε και ο χώρος Z_f είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη. Όπως πριν, συμβολίζουμε με $\pi : Y \cup X \to Z_f$ την αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι τα μονοσύνολα του Z_f είναι κλειστά. Έστω $z \in Z_f$. Αν $z \in \pi(Y)$, τότε το $\{z\}$ είναι κλειστό, αφού τα μονοσύνολα είναι κλειστά στον Y και ο περιορισμός $\pi|_Y : Y \to Z_f$ είναι κλειστή απεικόνιση. Αν $z \notin \pi(Y)$, τότε η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(z)$ είναι μονοσύνολο του X και άρα κλειστό στον X. Εφόσον ο X είναι κλειστός υπόχωρος του $Y \cup X$, το $\pi^{-1}(z)$ είναι επίσης κλειστός υπόχωρος του $Y \cup X$. Αφού η π είναι απεικόνιση πηλίκο, έπεται ότι το $\{z\}$ είναι κλειστό στον Z_f.

Έστω A_1 και A_2 δύο κλειστά, ξένα υποσύνολα του Z_f. Τότε τα $A_1 \cap \pi(Y)$ και $A_2 \cap \pi(Y)$ είναι ξένα, κλειστά υποσύνολα του $\pi(Y)$. Από την κανονικότητα του $\pi(Y)$ (είναι ομοιομορφικός με τον Y), υπάρχουν ξένες ανοικτές περιοχές U_1 και U_2 των $A_1 \cap \pi(Y)$ και $A_2 \cap \pi(Y)$, αντίστοιχα, των οποίων, επιπροσθέτως, οι κλειστότητες είναι ξένες. Εφόσον το $\pi(Y)$ είναι κλειστό στον Z_f, οι κλειστότητες των U_1 και U_2 ταυτίζονται με τις κλειστότητές τους στον Z_f.

Θεωρούμε τα ξένα και κλειστά υποσύνολα

$$B_1 = A_1 \cup \overline{U_1} \text{ και } B_2 = A_2 \cup \overline{U_2}$$

του Z_f και τα ξένα κλειστά υποσύνολα

$$C_1 = \pi^{-1}(B_1) \cap X \text{ και } C_2 = \pi^{-1}(B_2) \cap X$$

του X. Εφόσον ο X είναι κανονικός, υπάρχουν ξένες, ανοικτές περιοχές V_1 και V_2 (στον X) των C_1 και C_2, αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι τα

$$\Gamma_1 = \pi(V_1 - A) \cup U_1 \text{ και } \Gamma_2 = \pi(V_2 - A) \cup U_2$$

είναι ανοικτά υποσύνολα του Z_f. Πράγματι, εφόσον η π είναι απεικόνιση πηλίκο, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι αντίστροφες εικόνες τους $\pi^{-1}(\Gamma_1)$ και $\pi^{-1}(\Gamma_2)$ είναι ανοικτά στον $Y \cup X$. Παρατηρούμε ότι $\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap Y = \pi^{-1}(U_1)$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, ενώ

$$\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap X = \big((V_1 - A) \cup \pi^{-1}(U_1)\big) \cap X = (V_1 - A) \cup f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big).$$

Εφόσον το $f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big)$ είναι ανοικτό στον υπόχωρο A του X, υπάρχει ανοικτό O του X τέτοιο, ώστε $f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big) = A \cap O$. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big) = A \cap O = A \cap O \cap V_1,$$

αφού $f^{-1}\big(\pi^{-1}(U_1)\big) \subseteq C_1 \subseteq V_1$. Έτσι

$$\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap X = (V_1 - A) \cup (A \cap O \cap V_1) = (V_1 - A) \cup (O \cap V_1),$$

όπου τα $V_1 - A$ και $O \cap V_1$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Έπεται ότι το $\pi^{-1}(\Gamma_1) \cap X$ είναι ανοικτό και στον X, που σημαίνει ότι είναι ανοικτό στον $Y \cup X$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το $\pi^{-1}(\Gamma_2) \cap X$ είναι ανοικτό στον $Y \cup X$.

Τα Γ_1 και Γ_2 είναι ανοικτές περιοχές των A_1 και A_2, αντίστοιχα: Έστω $a \in A_1$. Αν $a \in \pi(Y)$, τότε $a \in U_1 \subseteq \Gamma_1$. Αν $a \notin \pi(Y)$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X - A$ με $a = \pi(x)$. Εφόσον το A_1 περιέχεται στο B_1, έπεται ότι $x \in C_1 \subseteq V_1$, δηλαδή $x \in V_1 - A$ και έτσι $a \in \Gamma_1$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $A_2 \subseteq \Gamma_2$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι τα Γ_1 και Γ_2 είναι ξένα. Τα U_1 και U_2 έχουν επιλεγεί ξένα, όπως και τα V_1, V_2. Αφού ο περιορισμός της π στο $X - A$ είναι ομοιομορφισμός, έχουμε ότι τα $\pi(V_1 - A)$ και $\pi(V_2 - A)$ είναι ξένα. Από τον εγκλεισμό $\pi(V_2 - A) \subseteq Z_f - \pi(Y)$, προκύπτει ότι $\pi(V_2 - A) \cap U_1 = \emptyset$, αφού $U_1 \subseteq \pi(Y)$. Ομοίως, $\pi(V_1 - A) \cap U_2 = \emptyset$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Συνοψίζοντας, τα Γ_1, Γ_2 είναι ξένες, ανοικτές περιοχές των A_1, A_2, αντίστοιχα, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της φυσιολογικότητας του Z_f. □

5.3 Συμπλέγματα Κελιών

Τα συμπλέγματα κελιών αποτελούν μια ευρεία και σημαντική κλάση τοπολογικών χώρων για τους οποίους υπάρχει μέθοδος υπολογισμού της θεμελιώδους ομάδας και των ομάδων ομολογίας.

Ένα n-**κελί** e^n είναι ένας χώρος ομοιομορφικός με τον ανοικτό δίσκο $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 5.3.1. Ένα **σύμπλεγμα κελιών** είναι ένας τοπολογικός χώρος X ο οποίος ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

1. Αρχίζουμε με ένα διακριτό σύνολο X^0 (δηλ. διακριτό τοπολογικό χώρο), του οποίου τα στοιχεία αναφέρονται ως 0-κελιά.

2. Κατασκευάζουμε τον n-σκελετό X^n από τον X^{n-1} επισυνάπτοντάς του μια οικογένεια κελιών e_a^n διάστασης n μέσω (συνεχών πάντα) απεικονίσεων

   $$\phi_a^n : \partial D_a^n = S^{n-1} \to X^{n-1}.$$

   Δηλαδή έχουμε

   $$\phi : \sqcup_a \partial D_a^n \to X^{n-1} \ \text{ και } \ X^n = X^{n-1} \cup_\phi \Big(\sqcup_a D_a^n \Big),$$

   όπου ϕ είναι η συνεχής απεικόνιση της οποίας ο περιορισμός σε κάθε ∂D_a^n είναι η ϕ_a^n. Συνολοθεωρητικά, $X^n = X^{n-1} \bigsqcup_a e_a^n$.

3. Η ανωτέρω διαδικασία είτε σταματάει σε κάποιο πεπερασμένο βήμα και $X = X^n$, $n < \infty$ είτε συνεχίζει και έχουμε $X = \cup_n X^n$ (λόγω της Πρότασης 5.2.6 μπορούμε να θεωρούμε τον χώρο X^{n-1} ως υπόχωρο του X^n). Στη δεύτερη περίπτωση, ο X εφοδιάζεται με την ασθενή τοπολογία. Δηλαδή, ένα υποσύνολο A του X είναι κλειστό αν και μόνο αν η τομή $A \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X^n για κάθε n (ή, ισοδύναμα, το A είναι ανοικτό στον X αν και μόνο το $A \cap X^n$ είναι ανοικτό στον X^n).

Η σύνθεση $\Phi_a^n : D_a^n \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_a D_a^n \xrightarrow{\pi} X^n \hookrightarrow X$ αναφέρεται ως **χαρακτηριστική απεικόνιση** και επεκτείνει την ϕ_a^n υπό την έννοια ότι $\Phi_a^n|_{\partial D_a^n} = \pi \circ \phi_a^n$. Έχοντας ταυτίσει το X^{n-1} με την εικόνα του μέσω της π, η προηγούμενη ισότητα γίνεται $\Phi_a^n|_{\partial D_a^n} = \phi_a^n$. Επιπλέον, από την Πρόταση 5.2.6, η Φ_a^n είναι ομοιομορφισμός στο εσωτερικό του δίσκου D_a^n και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το κελί e_a^n "κολλάει" στον X.

Αν $X = X^n$ για κάποιο n, τότε λέμε ότι το σύμπλεγμα κελιών X είναι πεπερασμένης διάστασης. Η **διάστασή** του είναι το μικρότερο τέτοιο n. Ένα σύμπλεγμα κελιών ονομάζεται **πεπερασμένο**, αν αποτελείται από πεπερασμένα το πλήθος κελιά. Από τους ορισμούς, έπεται εύκολα ότι ένα πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών είναι συμπαγής χώρος. Ο επαγωγικός ορισμός ενός συμπλέγματος κελιών X μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε επαγωγικά επιχειρήματα κάτι που είναι πολύ αποδοτικό, όπως θα διαπιστώσουμε. Για παράδειγμα, προκύπτει άμεσα με επαγωγή, ότι ο σκελετός X^n είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Αποδεικνύεται ότι κάθε σύμπλεγμα κελιών είναι χώρος Hausdorff και έτσι, μεταξύ άλλων, τα συμπαγή του υποσύνολα είναι κλειστά. Δεν είναι πολύ πιο δύσκολο όμως να αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο:

Θεώρημα 5.3.2. *Κάθε σύμπλεγμα κελιών X είναι φυσιολογικός χώρος. Ιδιαιτέρως, ο X είναι Hausdorff.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.2.8, έπεται επαγωγικά, ότι κάθε σκελετός X^n του X είναι φυσιολογικός χώρος. Υποθέτουμε λοιπόν, για τη συνέχεια, ότι το σύμπλεγμα κελιών X έχει άπειρη διάσταση. Τα μονοσύνολα είναι κλειστά στον X, αφού η τομή $\{x\} \cap X^n$ είναι κλειστό στον X^n, για κάθε $x \in X$.

Έστω A και B δύο κλειστά, ξένα υποσύνολα του X. Ορίζουμε $\Gamma_0 = A \cup B$ και για κάθε $n > 0$, ορίζουμε

$$\Gamma_n = A \cup B \cup X^1 \cup \cdots \cup X^n.$$

Ορίζουμε, επίσης, συνεχή απεικόνιση $\varphi_0 : \Gamma_0 \to [0,1]$, η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο του A στο 0 και κάθε στοιχείο του B στο 1. Για $n > 0$, ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία συνεχών απεικονίσεων $\varphi_n : \Gamma_n \to [0,1]$, όπου η κάθε μια επεκτείνει την προηγούμενη, ως εξής: Σημειώνουμε πρώτα ότι η τομή $\Gamma_n \cap X^{n+1}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X^{n+1} ο οποίος είναι φυσιολογικός χώρος. Από το θεώρημα επέκτασης του Tietze, ο περιορισμός της φ_n στο $\Gamma_n \cap X^{n+1}$ επεκτείνεται σε μια συνεχή απεικόνιση $\psi : X^{n+1} \to [0,1]$. Εφόσον τα Γ_n και X^{n+1} είναι κλειστά υποσύνολα του Γ_{n+1}, επί της τομής των οποίων οι φ_n και ψ "συμφωνούν", ορίζεται συνεχής απεικόνιση $\varphi_{n+1} : \Gamma_{n+1} \to [0,1]$ που επεκτείνει την φ_n (και την ψ, βλ. Λήμμα 6.1.4). Μέσω των διαδοχικών επεκτάσεων φ_n, ορίζεται απεικόνιση $\varphi : X \to [0,1]$ η οποία επεκτείνει καθεμία από τις φ_n και είναι συνεχής, αφού ο X είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς τα X^n, $n \geq 0$. Η φ μηδενίζεται σε κάθε σημείο του A, λαμβάνει την τιμή 1 σε κάθε σημείο του B και τα ζητούμενα ανοικτά που διαχωρίζουν τα A και B είναι οι αντίστροφες εικόνες μέσω της φ των $[0,1/3)$ και $(2/3,1]$, αντίστοιχα. $\square$

Έχοντας εξασφαλίσει ότι ένα σύμπλεγμα κελιών είναι χώρος Hausdorff, είναι εύκολο να δούμε κάποιες πρόσθετες ιδιότητες. Έστω X ένα σύμπλεγμα κελιών με κελιά e^n_a και αντίστοιχες χαρακτηριστικές απεικονίσεις $\Phi^n_a : D^n_a \to X$.

1. $\Phi^n_a(D^n_a) = \overline{e^n_a}$ για κάθε n.

   Πράγματι, εφόσον ο χώρος D^n_a είναι συμπαγής και ο X Hausdorff, η εικόνα $\Phi^n_a(D^n_a)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X η οποία, αφού περιέχει το κελί, περιέχει και την κλειστότητά του, δηλαδή $\overline{e^n_a} \subseteq \Phi^n_a(D^n_a)$. Για τον άλλο εγκλεισμό, λόγω συνέχειας έχουμε
   $$\Phi^n_a(D^n_a) = \Phi^n_a(\overline{\mathrm{Int} D^n_a}) \subseteq \overline{\Phi^n_a(\mathrm{Int} D^n_a)} = \overline{e^n_a}.$$

2. Για κάθε κελί e^n_a το σύνολο $\overline{e^n_a} - e^n_a$ περιέχεται σε μια ένωση πεπερασμένων το πλήθος κελιών διάστασης μικρότερης του n.

   Παρατηρούμε ότι $\overline{e^n_a} - e^n_a = \Phi^n_a(S^{n-1})$ και άρα το $\overline{e^n_a} - e^n_a$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X (και άρα κλειστό αφού X Hausdorff) που περιέχεται στο X^{n-1}. Για κάθε $m < n$, η τομή $X^m \cap (\overline{e^n_a} - e^n_a)$ είναι συμπαγής ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς και ως εκ τούτου μπορεί να τέμνει μόνο πεπερασμένα το πλήθος κελιά $e^m_1, \ldots, e^m_{k_m}$ της διαφοράς $X^m - X^{m-1}$, αφού αυτά είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X^m (τα οποία περιέχουν αντίτυπα κλειστών δίσκων των οποίων τα συμπληρώματα μαζί με τα κελιά δίνουν ανοικτό κάλυμμα του $X^m \cap (\overline{e_a^n} - e_a^n))$. Έπεται ότι

$$\overline{e_a^n} - e_a^n \subseteq \bigcup_{m<n} \{e_1^m, \ldots, e_{k_m}^m\}.$$

3. Ένα υποσύνολο K του X είναι κλειστό αν και μόνο αν η τομή $K \cap \overline{e_a^n}$ είναι κλειστό εντός του $\overline{e_a^n}$ για κάθε κελί e_a^n του X.

   Η μια κατεύθυνση είναι άμεση: αν το K είναι κλειστό στο X, τότε η τομή $K \cap \overline{e_a^n}$ είναι κλειστό στο $\overline{e_a^n}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το $K \cap \overline{e_a^n}$ είναι κλειστό στο $\overline{e_a^n}$ για κάθε κελί. Εφόσον το $\overline{e_a^n}$ είναι κλειστό στον X, η προηγούμενη υπόθεση είναι ισοδύναμη με την απαίτηση το $K \cap \overline{e_a^n}$ να είναι κλειστό στον X. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, υποθέτουμε επίσης ότι η τομή $K \cap X^{n-1}$ είναι κλειστό στον X^{n-1} (και άρα στον X). Σημειώνουμε πρώτα ότι

$$\left(\Phi_a^n\right)^{-1}(K \cap X^n) = \left(\Phi_a^n\right)^{-1}(K \cap \overline{e_a^n} \cap X^n),$$

   αφού $\Phi_a^n(D_a^n) = \overline{e_a^n}$. Καθώς το $K \cap \overline{e_a^n} \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X^n, συμπεραίνουμε ότι το $\left(\Phi_a^n\right)^{-1}(K \cap X^n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του D_a^n. Αυτό σημαίνει ότι το $K \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X^n αφού η

$$\Phi_a^n : D_a^n \to \overline{e_a^n}$$

   είναι απεικόνιση πηλίκο (γιατί;). Τελικά, το $K \cap X^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X^n για κάθε n, και συνεπώς το K είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Παράδειγμα 5.3.3. Η ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ επιδέχεται τη δομή ενός μονοδιάστατου συμπλέγματος κελιών, με τους ακέραιους ως 0-κελιά και τα διαστήματα $(m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, ως 1-κελιά.

Παράδειγμα 5.3.4. Όπως εύκολα διαπιστώνουμε από το Σχήμα 5.2, η σπείρα T έχει τη δομή ενός συμπλέγματος κελιών με ένα 0-κελί (την εικόνα των κορυφών του τετραγώνου), δύο 1-κελιά (των οποίων οι κλειστότητες είναι οι "κύκλοι" α και β) και ένα 2-κελί (το εσωτερικό του τετραγώνου).

Παράδειγμα 5.3.5. Η σφαίρα S^n, $n > 0$, έχει δομή συμπλέγματος κελιών με ένα 0-κελί και ένα n-κελί: σε ένα μονοσύνολο $\{x_0\}$ επισυνάπτουμε ένα n-κελί μέσω της χαρακτηριστικής απεικονίσεως $\Phi : D^n \to \{x_0\}$ που απεικονίζει κάθε σημείο του συνόρου στο x_0 (βλ. Άσκηση 11).

Από το Παράδειγμα 5.2.5, διαπιστώνουμε, επίσης, ότι μπορούμε να δούμε τη σφαίρα S^n, $n \geq 0$, ως σύμπλεγμα κελιών και με ένα διαφορετικό τρόπο: με ακριβώς δύο m-κελιά σε κάθε διάσταση $m \leq n$, έτσι ώστε ο m-σκελετός να είναι η S^m.

Παράδειγμα 5.3.6. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$ (βλ. Παράδειγμα 5.1.13) είναι ένα σύμπλεγμα κελιών με ένα κελί διάστασης m για κάθε $m \in \{0, 1 \ldots, n\}$.

Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση πηλίκο

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n,\ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_0, x_1, \ldots, x_n],$$

και τον υπόχωρο

$$K_m = \big\{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{RP}^n \ :\ x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\big\}$$

ο οποίος, βλέπουμε εύκολα, ότι είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{RP}^m$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση $\Phi^m : D^m \to K_m$ με τύπο

$$\Phi^m(y_1, \ldots, y_m) = [y_1, \ldots, y_m, \sqrt{1 - \|(y_1, \ldots, y_m)\|^2}, 0 \ldots, 0]$$

είναι συνεχής, επί και κλειστή (αφού ο $\mathbb{RP}^m$ είναι Hausdorff, Άσκηση 5). Επιπλέον, ο περιορισμός Ψ της Φ^m στο εσωτερικό του δίσκου D^m είναι 1-1. Παρατηρούμε ότι

$$\Phi^m(\mathrm{Int}D^m) = \big\{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{RP}^n \ :\ x_{m+1} = \cdots = x_n = 0, x_m \neq 0\big\} = K_m \backslash K_{m-1}.$$

Εφόσον $(\Phi^m)^{-1}(K_m \setminus K_{m-1}) = \mathrm{Int}D^m$, η $\Psi : \mathrm{Int}D^m \to K_m \setminus K_{m-1}$ είναι κλειστή ως περιορισμός κλειστής (γιατί;) και άρα ομοιομορφισμός. Τελικά, οι απεικονίσεις επισύναψης των κελιών είναι οι $\phi^m : S^{m-1} = \partial D^m \to K_{m-1}$ με $\phi^m(y) = [y, 0, \ldots, 0]$ και οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές απεικονίσεις οι Φ^m. Έχουμε λοιπόν,

$$X^0 = \{\text{σημείο}\} \subset X^1 \subset X^2 \subset \cdots \subset X^n = \mathbb{R}^n,$$

όπου $X^m = K_m \cong \mathbb{RP}^m$ για κάθε $m \in \{1, \ldots, m\}$ και κάθε διαφορά $X^m \setminus X^{m-1}$ είναι ένα m-κελί.

Ασκήσεις

5.1 Έστω $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση πηλίκο και A ένα υποσύνολο του X. Ο *κορεσμός* (saturation) του A είναι η ένωση όλων των νημάτων που τέμνουν το A, δηλαδή είναι το σύνολο $\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup_{y\in\pi(A)} \pi^{-1}(y)$. Το A λέγεται *κορεσμένο* (saturated) αν και μόνο αν $A = \pi^{-1}\pi(A)$. Αποδείξτε ότι η π είναι ανοικτή (κλειστή) αν και μόνο αν ο κορεσμός κάθε ανοικτού (κλειστού) υποσυνόλου A του X είναι ανοικτό (κλειστό) υποσύνολο του X.

5.2 Ο περιορισμός μιας απεικόνισης πηλίκο σε ένα κορεσμένο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο είναι απεικόνιση πηλίκο.

5.3 Ένας τοπολογικός χώρος X του οποίου τα μονοσύνολα είναι κλειστά, λέγεται *κανονικός* (regular), αν για κάθε στοιχείο $x \in X$ και κάθε κλειστό υποσύνολο B του X που δεν περιέχει το x, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X που περιέχουν το x και το B, αντίστοιχα. Δείξτε ότι αν ο X είναι κανονικός και το A κλειστό υποσύνολό του, τότε ο χώρος πηλίκο X/A είναι Hausdorff. Αν επιπροσθέτως ο χώρος X είναι φυσιολογικός (normal), τότε και ο X/A είναι φυσιολογικός.

5.4 Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ δύο συνεχείς απεικονίσεις, έτσι ώστε $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Αποδείξτε ότι η f είναι απεικόνιση πηλίκο. Αν επιπλέον, ο X είναι Hausdorff, τότε και ο Y είναι Hausdorff.

5.5 Έστω $\pi : X \to Y$ μια απεικόνιση πηλίκο. Αν η π είναι κλειστή και ο X είναι φυσιολογικός, τότε ο Y είναι φυσιολογικός και ιδιαιτέρως Hausdorff.

5.6 Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{RP}^1$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο S^1.

5.7 Αποδείξτε ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{RP}^n$ είναι Hausdorff, χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος 5.3.2.

5.8 Αν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα με ομοιομορφισμούς επί ενός χώρου Hausdorff X, τότε ο χώρος τροχιών X/G είναι επίσης Hausdorff.

5.9 Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ αν και μόνο αν τα σημεία (x_0, y_0) και (x_1, y_1) ανήκουν σε κάποιο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να περιγραφεί ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο.

5.10 Έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, $n > 0$, ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x = \lambda y$ για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό λ. Ποιος είναι ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο;

5.11 Αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $D^n/\partial D^n$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα S^n. Υπόδειξη: χρησιμοποιώντας τη στερεογραφική προβολή, θεωρήστε ομοιομορφισμό $f : \mathrm{Int}(D^n) \to S^n \setminus \{N\}$ και την απεικόνιση $\varphi : D^n \to S^n$ με τύπο

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in \mathrm{Int}(D^n) \\ N, & \text{αν } x \in \partial D^n \end{cases}$$

5.12 Έστω $X = S^1 \times I$ και $A = S^1 \times \{1\}$. Να δειχθεί ότι $X/A \cong D^2$.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $X \cong Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ και θεωρήστε την απεικόνιση $f : Y \to D^2$ με τύπο $f(x) = 2(|x| - 1/2)x$.

5.13 Κάθε συμπαγής υπόχωρος K ενός συμπλέγματος κελιών X, περιέχεται στην ένωση πεπερασμένων το πλήθος κελιών του X.
Υπόδειξη: Αν όχι, τότε επιλέγουμε σημείο $x_a \in K \cap e_a^n$ για κάθε κελί e_a^n για το οποίο η τομή είναι μη κενή. Κάθε υποσύνολο του συνόλου που αποτελείται από όλα τα x_a είναι κλειστό.

5.14 Ένα σύμπλεγμα κελιών X είναι συμπαγής χώρος αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο.

5.15 Έστω X ένα σύμπλεγμα κελιών και Y ένας τοπολογικός χώρος. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν ο περιορισμός $f|_{\overline{e}} : \overline{e} \to Y$ είναι συνεχής για κάθε κελί e του X.

Έστω X ένα σύμπλεγμα κελιών. Ένα σύμπλεγμα κελιών Y λέγεται **υποσύμπλεγμα** του X, αν το Y είναι υπόχωρος του X και ο n-σκελετός Y^n του Y ισούται με $X^n \cap Y$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Διαφορετικά, η δομή του συμπλέγματος Y καθορίζεται από τον υπόχωρο Y και τη δομή του X ως συμπλέγματος κελιών.

5.16 Έστω Y ένα υποσύμπλεγμα ενός συμπλέγματος κελιών X.

(i) Κάθε κελί του Y είναι κελί του X.

(ii) Ένα κελί e του X είναι κελί του Y αν και μόνο αν η τομή $e \cap Y$ είναι μη κενή.

5.17 Έστω X ένα σύμπλεγμα κελιών και Y η ένωση μιας οικογένειας O κελιών του X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το υποσύνολο Y είναι υποσύμπλεγμα του X.

(ii) Το Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.

(iii) Το Y περιέχει την κλειστότητα κάθε κελιού της οικογένειας O.

5.18 Έστω X ένα σύμπλεγμα κελιών.

(i) Αυθαίρετες τομές και αυθαίρετες ενώσεις υποσυμπλεγμάτων του X είναι υποσυμπλέγματα του X.

(ii) Κάθε σκελετός X^n του X είναι υποσύμπλεγμα του X.

(iii) Κάθε ένωση n-κελιών του X με τον $(n-1)$-σκελετό X^{n-1} είναι υποσύμπλεγμα του X.

(iv) Κάθε κελί του X περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα του X.

Βιβλιογραφία

[1] A. Hatcher. Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002. Free electronic version available at http://www.math.cornell.edu/ hatcher

[2] J. M. Lee. Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 202, Springer, New York, 2011.

[3] A. T. Lundell and S. Weingram. Topology of CW-complexes, Van Nostrand, New York, 1969.

[4] J. R. Munkres. Topology, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.

[5] J. W. Vick. Homology Theory, An Introduction to Algebraic Topology, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 145, Springer Verlag, 1994.