1. Έστω $\pi : X \to Y$ απεικόνιση πηλίκο και A ένα υποσύνολο του X. Ο *κορεσμός* (saturation) του A είναι η ένωση όλων των νημάτων που τέμνουν το A, δηλαδή είναι το σύνολο $\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup_{y\in\pi(A)} \pi^{-1}(y)$. Το A λέγεται *κορεσμένο* (saturated) αν και μόνο αν $A = \pi^{-1}\pi(A)$. Αποδείξτε ότι η π είναι ανοικτή (κλειστή) αν και μόνο αν ο κορεσμός κάθε ανοικτού (κλειστού) υποσυνόλου A του X είναι ανοικτό (κλειστό) υποσύνολο του X.

2. Ο περιορισμός μιας απεικόνισης πηλίκο σε ένα κορεσμένο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο είναι απεικόνιση πηλίκο.

3. Ένας τοπολογικός χώρος X του οποίου τα μονοσύνολα είναι κλειστά, λέγεται *κανονικός* (regular) αν για κάθε στοιχείο $x \in X$ και κάθε κλειστό υποσύνολο B του X που δεν περιέχει το x, υπάρχουν ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X που περιέχουν το x και το B, αντίστοιχα. Δείξτε ότι αν ο X είναι κανονικός και το A κλειστό υποσύνολό του, τότε ο χώρος πηλίκο X/A είναι Hausdorff. Αν επιπροσθέτως ο χώρος X είναι φυσιολογικός (normal), τότε και ο X/A είναι φυσιολογικός.

4. Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ συνεχείς απεικονίσεις έτσι ώστε $f \circ g = id_Y$. Αποδείξτε ότι η f είναι απεικόνιση πηλίκο. Αν επιπλέον, ο X είναι Hausdorff, τότε και ο Y είναι Hausdorff.

5. α) Αποδείξτε ότι $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.
   β) Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{RP}^n$ είναι Hausdorff.

6. Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής: $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ αν και μόνο αν τα σημεία (x_0, y_0) και (x_1, y_1) ανήκουν σε κάποιο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να περιγραφεί ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο.

7. Έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται στον χώρο $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, $n > 0$, ως εξής: $x \sim y$ αν και μόνο αν $x = \lambda y$ για κάποιο $\mathbb{R} \ni \lambda > 0$. Ποιός είναι ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο;

8. Αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $D^n/\partial D^n$ είναι ομοιομορφικός με την σφαίρα S^n. Υπόδειξη: χρησιμοποιώντας την στερεογραφική προβολή, θεωρείστε ομοιομορφισμό $f : Int(D^n) \to S^n \setminus \{N\}$ και την απεικόνιση $\varphi : D^n \to S^n$ με τύπο
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ αν } x \in Int(D^n) \\ N & , \text{ αν } x \in \partial D^n \end{cases}$$

9. Έστω $X = S^1 \times I$ και $A = S^1 \times \{1\}$. Να δειχθεί ότι $X/A \cong D^2$.
   Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $X \cong Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ και θεωρείστε την απεικόνιση $f : Y \to D^2$ με τύπο $f(x) = 2(|x| - 1/2)x$.

Έστω X και Y ξένοι τοπολογικοί χώροι (δηλ. $X \bigsqcup Y = X \bigcup Y$), A κλειστό υποσύνολο του X, $f : A \to Y$ συνεχής και $Z_f = X \bigcup_f Y$ ο χώρος που προκύπτει από τον Y με την επισύναψη του X κατά μήκος του A μέσω της f. Έστω $\pi : X \bigcup Y \to X \bigcup_f Y$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο.

10. α) Αποδείξτε ότι η π ορίζει έναν ομοιομορφισμό από τον Y σε έναν κλειστό υπόχωρο του Z_f. (Υποδ. Αν Γ κλειστό υποσύνολο του Y, τότε $\pi^{-1}\pi(\Gamma) = \Gamma \cup f^{-1}(\Gamma)$.)
β) Η π απεικονίζει ομοιομορφικά το $X - A$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο του Z_f. (Υπόδειξη: Ο περιορισμός της π στο $X - A$ είναι ανοικτή απεικόνιση.)

11. Αν ο K είναι ένας συμπαγής υπόχωρος ενός συμπλέγματος κελιών X, τότε $K \subseteq X^n$ για κάποιο n, όπου με X^n συμβολίζουμε τον n-σκελετό του X. (Τα μονοσύνολα είναι κλειστά σε ένα χώρο της μορφής $X \bigcup_f Y$, όταν είναι κλειστά στους X, Y.)

12. Ένα σύμπλεγμα κελιών X είναι συμπαγής χώρος αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο. (Κάθε X^n είναι κλειστό υποσύνολο του X.)

1. Μια *τοπολογική ομάδα* είναι μια ομάδα G εφοδιασμένη με μια τοπολογία έτσι ώστε οι απεικονίσεις του πολλαπλασιασμού $\mu : G \times G \to G$ και της αντιστροφής $i : G \to G$ που δίνονται από $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και $i(g) = g^{-1}$, αντίστοιχα, να είναι συνεχείς. Έστω x_0 το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας. Αν $f, g \in \pi_1(G, x_0)$, ορίζουμε $f \circ g \in \pi_1(G, x_0)$ ως εξής: $(f \circ g)(s) = f(s)g(s) = \mu\big(f(s), g(s)\big)$.
   (α) Δείξτε ότι η πράξη $\circ$ επάγει πράξη ομάδας στο $\pi_1(G, x_0)$, η οποία ταυτίζεται με τον συνήθη πολλαπλασιασμό της θεμελιώδους ομάδας. (Υπόδειξη: υπολογίστε το γινόμενο $(f \cdot c_{x_0}) \circ (c_{x_0} \cdot g)$.)
   (β) Δείξτε ότι η ομάδα $\pi_1(G, x_0)$ είναι αβελιανή.

2. Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
   (α) Ο χώρος X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο.
   (β) Η ταυτοτική απεικόνιση $Id_X : X \to X$ είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.
   (γ) Κάθε απεικόνιση $f : X \to Y$, για αυθαίρετο χώρο Y, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
   (δ) Κάθε απεικόνιση $g : Y \to X$, για αυθαίρετο χώρο Y, είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

3. Έστω $f : S^n \to Y$ μια (συνεχής) απεικόνιση σε έναν χώρο Y. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
   (α) Η f είναι ομοτοπική με μια σταθερή απεικόνιση.
   (β) Η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή απεικόνιση $\tilde{f} : D^{n+1} \to Y$.

4. ’Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, Y τοπολογικός χώρος και $\phi : (A, a_0) \to (Y, y_0)$ συνεχής. Αν υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to Y$ της ϕ, τότε η ϕ επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες.

5. Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Ο *κύλινδρος* M_f της f είναι ο χώρος πηλίκο $(X \times I) \bigsqcup Y / \sim$, όπου $(x, 0) \sim f(x)$ για κάθε $x \in X$.
   (α) Δείξτε ότι ο περιορισμός της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο π σε κάθε ένα από τα $X \times 1$ και Y είναι ομοιομορφισμός.
   (β) Δείξτε ότι υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση (deformation retraction) $r : M_f \to \pi(Y)$.
   (γ) Κάθε απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων παραγοντοποιείται ως μια εμφύτευση ακολουθούμενης από μια ομοτοπική ισοδυναμία.

6. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ο *κώνος επί του* X, CX είναι ο χώρος πηλίκο $X \times [0, 1] / \sim$, όπου $(x, t) \sim (y, s)$ αν και μόνο αν $(x, t) = (y, s)$ ή $s = t = 1$. Αποδείξτε ότι ο χώρος CX είναι συμπτύξιμος. [Υπόδειξη: θεωρήστε δεδομένο ότι (λόγω της συμπάγειας του $I = [0, 1]$) η απεικόνιση $\pi \times \mathrm{Id} : X \times I \times I \to CX \times I$ είναι απεικόνιση πηλίκο, όπου $\pi : X \times I \to CX$ η αντίστοιχη απεικόνιση πηλίκο.]

7. Έστω X τοπολογικός χώρος και CX ο κώνος του X. Ταυτίζουμε τον X με τον υπόχωρο $X \times \{0\}$ του κώνου μέσω της εμφύτευσης $X \ni x \mapsto [(x, 0)]$. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής επέκταση $g : CX \to Y$ της f.

8. Αποδείξτε ότι $CS^n \cong D^{n+1}$. Αυτό δείχνει ότι η προηγούμενη άσκηση γενικεύει την Άσκηση 3.

9. Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι, A κλειστό υποσύνολο του X, $f : A \to Y$ συνεχής και $Z_f = X \bigcup_f Y$ ο χώρος που προκύπτει από τον Y με την επισύναψη του X κατά μήκος του A μέσω της f. Αν υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον X στον A, τότε υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση από τον $X \bigcup_f Y$ στον Y (εδώ θεωρούμε τον Y ως υπόχωρο του $X \bigcup_f Y$, αφού γνωρίζουμε ότι εμφυτεύεται μέσω της αντίστοιχης απεικόνισης πηλίκο).

10. Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων. Ο *κώνος* $C(f)$ της f είναι ο χώρος πηλίκο $M_f/(X \times \{1\})$, διαφορετικά $C(f) = \dfrac{CX \sqcup Y}{(x,0) \sim f(x)}$. Αποδείξτε ότι ομοτοπικές απεικονίσεις $f, g : X \to Y$ δίνουν ομοτοπικά ισοδύναμους κώνους. [Υπόδειξη: αν H είναι η ομοτοπία, τότε θεωρήστε την απεικόνιση με $y \mapsto y \in Y$ και $(x,t) \mapsto (x,2t)$, για $t \in [0,1/2]$, $(x,t) \mapsto H(x,2t-1)$, για $t \in [1/2,1]$.]

1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν συστολές $r : X \to A$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
   (i) $X = \mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^3 \supset A \cong \mathbb{S}^1$. (ii) $X = \mathbb{S}^1 \times D^2$, όπου $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$, και $A = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ το σύνορο του X.

2. Λέμε ότι ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου αν για κάθε συνεχή $f : X \to X$ υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. Αποδείξτε ότι αν ο χώρος X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε:
   (i) Αν A υπόχωρος του X για τον οποίο υπάρχει συστολή $r : X \to A$, τότε ο A έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.
   (ii) Κάθε χώρος Y ομοιομορφικός με τον X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

3. Έστω B^2 η ανοικτή μοναδιαία μπάλα στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί παράδειγμα συνεχούς απεικονίσεως $f : B^2 \to B^2$ χωρίς σταθερά σημεία.

4. (i) Αποδείξτε ότι η αντιποδική απεικόνιση $a : S^1 \to S^1$, $a(x) = -x$, είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. Ιδιαιτέρως, $deg(a) = 1$.
   (ii) Κάθε συνεχής $f : S^1 \to S^1$ τέτοια ώστε $deg(f) \neq 1$ έχει σταθερό σημείο. [Υπόδειξη: Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in S^1$, τότε $f \simeq a$.]

5. Έστω $f : S^1 \to S^1$ συνεχής ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
   (i) Αποδείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.
   (ii) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει κάποιο σημείο x στο αντιποδικό του $-x$.

6. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $x \in U$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $U \setminus \{x\}$ δεν είναι απλά συνεκτικός. [Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν "μικρό" κύκλο C στο U γύρω από το x και μελετήστε την ακολουθία των ενθέσεων $C \hookrightarrow U \setminus \{x\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$.]

7. Υπολογίστε την θεμελιώδη ομάδα του $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$.

8. Κάθε 3×3 πίνακας με στοιχεία θετικούς πραγματικούς αριθμούς έχει ένα ιδιοδιάνυσμα με θετική ιδιοτιμή. [Υπόδειξη: Η περιοχή $B = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_i \geq 0, i = 1, 2, 3$ και $|v| = 1\}$ είναι ομοιομορφική με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο.]

9. Έστω $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ένα πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζες πάνω στον μοναδιαίο κύκλο S^1. Δείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p(x)$ στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου (δηλ. $|x| < 1$) ισούται με τον βαθμό της απεικονίσεως $\hat{p} : S^1 \to S^1$, όπου $\hat{p}(x) = \dfrac{p(x)}{|p(x)|}$. [Υπόδειξη: Εκφράστε το $p(x)$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων $\phi(x) \cdot \psi(x)$, έτσι ώστε το $\phi(x)$ να έχει τις

ρίζες του εντός του μοναδιαίου δίσκου, το $\psi(x)$ εκτός του μοναδιαίου δίσκου και συνδυάστε τις δύο περιπτώσεις της αποδείξεως του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας που έγινε στην τάξη. Τέλος, παρατηρήστε ότι οι απεικονίσεις af και f είναι ομοτοπικές για κάθε $a \in S^1$ και $f : S^1 \to S^1$.]

10. Έστω A, B υποσύνολα των $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $-A = A$ και $-B = B$. Μια απεικόνιση $f : A \to B$ λέγεται *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

    1. Για κάθε απεικόνιση $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S^n$ έτσι ώστε $f(x) = f(-x)$.
    2. Για κάθε περιττή απεικόνιση $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει $x \in S^n$ έτσι ώστε $f(x) = 0$.
    3. Δεν υπάρχει περιττή απεικόνιση $f : S^n \to S^{n-1}$.
    4. Δεν υπάρχει απεικόνιση $f : D^n \to S^{n-1}$, η οποία να είναι περιττή στο σύνορο S^{n-1} του δίσκου.
    5. Κάθε περιττή απεικόνιση $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ δεν είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

1. Έστω X και Y πολλαπλότητες (όχι απαραιτήτως ίδιας διάστασης), $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$. Ορίζουμε την σφήνα τους $X \vee Y$ να είναι ο χώρος που λαμβάνεται από την ξένη ένωση των X και Y ταυτοποιώντας το x_0 με το y_0. Δηλαδή, $X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$.
Αποδείξτε ότι $\pi_1(X \vee Y, [x_0]) = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$.

2. Συμβολίζουμε με B^n την ανοικτή μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, με B_a την μικρότερη ανοικτή μπάλα ακτίνας 1/2 και με S_a την σφαίρα ακτίνας 1/2, δηλ. το σύνορο της B_a.
(i) Έστω X συνεκτική πολλαπλότητα διάστασης $n \geq 3$ και $h : B^n \to U$ ομοιομορφισμός από την B^n σε ένα ανοικτό $U \subset X$. Να δειχθεί ότι $\pi_1(X - h(B_a)) = \pi_1(X)$.
(ii) Έστω X_1 και X_2 συνεκτικές πολλαπλότητες της ίδιας διαστάσεως $n \geq 3$ και $h_i : B^n \to U_i$ ομοιομορφισμός από την B^n σε ένα ανοικτό $U_i \subset X_i$, για $i = 1, 2$. Το συνεκτικό άθροισμα των X_1 και X_2 είναι ο χώρος πηλίκο

$$X_1 \# X_2 = \big(X_1 - h_1({}_a)\big) \sqcup \big(X_2 - h_1({}_a)\big) / h_1(x) \sim h_2(x) \text{ για κάθε } x \in S_a.$$

Αποδείξτε ότι $\pi_1(X_1 \# X_2) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

3. Υπολογίστε την θεμελιώδη ομάδα του χώρου που προκύπτει:
(i) από τον κύλινδρο $S^1 \times \mathbb{R}$ βγάζοντας ένα σημείο. [Υπόδειξη: ο κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$ περιστέλεται στον $S^1 \times [\alpha, \beta]$ για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $\alpha < \beta$.]
(ii) από τη σπείρα $T = S^1 \times S^1$ βγάζοντας δύο σημεία.
(iii) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας k ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
(iv) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας ένα κύκλο K. [Υπόδειξη: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1,\, z = 0\}$. Θεωρήστε $U = \mathbb{R}^3 \setminus D$ και V το εσωτερικό του $K \times D$, όπου D δίσκος με σύνορο K.]
(v) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας δύο ευθείες γραμμές L_1 και L_2 που δεν τέμνονται.
(vi) από τον $\mathbb{R}^3$ βγάζοντας ένα κύκλο K και μια ευθεία γραμμή L, υποθέτοντας ότι ο κύκλος και η γραμμή δεν τέμνονται και επιπλέον η γραμμή δεν διέρχεται "μέσα" από τον κύκλο.

4. Έστω $x_1, \ldots, x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι απλά συνεκτικός αν $n \geq 3$.

5. Έστω $X = S^1 \vee S^1$ και $f : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση η οποία διατηρεί το σημείο αναφοράς x_0 (δηλ. το κοινό σημείο των δύο κύκλων). Θεωρούμε τον χώρο (mapping torus) $T_f = X \times I / (x, 0) \sim (f(x), 1)$. Αποδείξτε ότι $\pi_1(T_f) = \langle a, b, t \,|\, tat^{-1} f_*(a)^{-1}, tbt^{-1} f_*(b)^{-1} \rangle$, όπου a, b γεννήτορες των θεμελιωδών ομάδων των δύο κύκλων, t η κλάση ομοτοπίας της εικόνας

στον χώρο πηλίκο του υποσυνόλου $\{x_0\} \times I$ και f_* ο επαγώμενος ομομορφισμός. [Υπόδειξη: αντιμετωπίστε τον χώρο T_f ως σύμπλεγμα κελιών με μια μόνο κορυφή και του οποίου ο 1-σκελετός αποτελείται (εκτός από την κορυφή) από τρεις κύκλους, έναν για κάθε γεννήτορα στην παραπάνω παράσταση, που τέμνονται στην μοναδική κορυφή. Μένει να βρείτε πόσα είναι τα 2-κελιά και πως επισυνάπτονται.]

1. Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ μια προβολή επικάλυψης.

   (i) Αποδείξτε ότι η p είναι τοπικός ομοιομορφισμός (δηλ. κάθε σημείο του $\widetilde{X}$ έχει περιοχή U με $p(U)$ ανοικτό και $p|_U : U \to p(U)$ ομοιομορφισμός), ανοικτή απεικόνιση και απεικόνιση πηλίκο. Επιπλέον, αν η p είναι $1-1$, τότε είναι ομοιομορφισμός.

   (ii) Αν για κάθε $x \in X$ το νήμα $p^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο (δηλ. το κάλυμμα είναι πεπερασμένο), τότε η p είναι κλειστή απεικόνιση.

   (iii) Αν το κάλυμμα δεν είναι πεπερασμένο και τα μονοσύνολα του X είναι κλειστά, τότε η p δεν είναι κλειστή απεικόνιση. [Υπόδειξη: θεωρήστε στοιχειώδη περιοχή U_0 ενός $x_0 \in X$ με άπειρες το πλήθος συνιστώσες V_i και επιλέξτε δίκτυο z_i με όρους διαφορετικούς ανά δύο, $z_i \neq x_0$, και $z_i \to x_0$. Μελετήστε το σύνολο $\{y_i\}_i$, όπου $y_i \in p^{-1}(z_i) \cap V_i$. Εναλλακτικά, υποθέστε ότι ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος και εργασθείτε με ακολουθίες.]

   (iv) Αν ο X είναι συμπαγής και Hausdorff, τότε ο $\widetilde{X}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν το κάλυμμα είναι πεπερασμένο.

2. Έστω $p : \widetilde{X} \to X$ προβολή επικάλυψης, A υπόχωρος του X και $\widetilde{A} = p^{-1}(A)$. Δείξτε ότι ο περιορισμός $p : \widetilde{A} \to A$ είναι επικάλυψη.

3. (i) Έστω $p_2 : X_2 \to X_1$ και $p_1 : X_1 \to X$ απεικονίσεις επικάλυψης. Αν το νήμα $p_1^{-1}(x)$ είναι πεπερασμένο για κάθε $x \in X$, τότε η σύνθεση $p_1 \circ p_2 : X_2 \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. [Υπόδειξη: Για το τυχαίο $x \in X$ επιλέξτε p_1-στοιχειώδη περιοχή U με αντίστοιχες συνιστώσες U_i κάθε μια από τις οποίες να περιέχει p_2-στοιχειώδη περιοχή V_i. Η τομή $\cap_i p_1(V_i)$ είναι στοιχειώδης περιοχή του x για την σύνθεση.]

   (ii) Έστω $X = S^1 \times S^1 \times \cdots$ ο χώρος γινόμενο αριθμησίμου (όχι πεπερασμένου) πλήθους αντιτύπων του S^1, $\widetilde{X}_n = \mathbb{R}^n \times S^1 \times S^1 \times \cdots$, $n \geq 1$, και $p_n : \widetilde{X}_n \to X$ η προβολή επικάλυψης που ορίζεται ως $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_n}, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots)$. Θεωρούμε την ξένη ένωση $\sqcup_n \widetilde{X}_n$ και τον χώρο γινόμενο $\mathbb{N}_+ \times X$, όπου το $\mathbb{N}_+$ είναι εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία. Η απεικόνιση $p : \sqcup \widetilde{X}_n \to \mathbb{N}_+ \times X$ που ορίζεται με $p|_{\widetilde{X}_n} = (n, p_n) : \widetilde{X}_n \to \{n\} \times X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης, η $q : \mathbb{N}_+ \times X \to X$, όπου $q(m,x) = x$, είναι επίσης απεικόνιση επικάλυψης ενώ η σύνθεση τους $\sqcup \widetilde{X}_n \to \mathbb{N}_+ \times X \to X$ δεν είναι. [Υπόδειξη: κανένα ανοικτό υποσύνολο του X δεν μπορεί να αποτελεί στοιχειώδη περιοχή για την σύνθεση.]

   (iii) Έστω $p_2 : X_2 \to X_1$ και $p_1 : X_1 \to X$ απεικονίσεις επικάλυψης. Αν ο X είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός, τότε η σύνθεση $p_1 \circ p_2 : X_2 \to X$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.[Υπόδειξη: Για το τυχαίο $x \in X$, κάθε περιοχή U με την ιδιότητα η ένθεση της U στο X να επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ αποτελεί στοιχειώδη περιοχή του x, της οποίας οι συνιστώσες απολαμβάνουν την ίδια ιδιότητα (δηλ. η ένθεση επάγει τον τετριμμένο ομομορφισμό).]

4. Αποδείξτε ότι αν $n > 1$, κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^n \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση. [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων.]

5. Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

6. Η χαρακτηριστική Euler $\chi(S)$ μιας επιφάνειας S ισούται με $V - E + F$, όπου V ο αριθμός των κορυφών, E ο αριθμός των ακμών και F ο αριθμός των τριγώνων μιας τριγωνοποίησης της S. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η χαρακτηριστική Euler δεν εξαρτάται από την τριγωνοποίηση και ότι είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.

   Έστω $p : \widetilde{S} \to S$ μια προβολή επικάλυψης μεταξύ δύο συμπαγών επιφανειών. Αποδείξτε ότι ο αριθμός των νημάτων της επικάλυψης είναι πεπερασμένος, έστω k, και ότι $\chi(\widetilde{S}) = k \cdot \chi(S)$. [Υπόδειξη: Αρχίστε με μια τριγωνοποίηση της S, η οποία αν χρειαστεί μπορεί να υποδιαιρεθεί έτσι ώστε κάθε τρίγωνο να περιέχεται σε μια στοιχειώδη περιοχή. Συνεπώς, από κάθε τριγωνοποίηση της S μπορούμε να βρούμε μια τριγωνοποίηση της $\widetilde{S}$ έτσι ώστε η αντίστροφη εικόνα κάθε κορυφής (ή ακμής ή τριγώνου) να αποτελείται από k κορυφές (ή ακμές ή τρίγωνα).]

7. Αντίστοιχα, η χαρακτηριστική Euler ενός πεπερασμένου γραφήματος Γ ισούται με τον αριθμό των κορυφών μείον τον αριθμό των ακμών του Γ.

   (i) Αποδείξτε ότι η θεμελιώδης ομάδα του Γ είναι ελεύθερη διάστασης $1 - \chi(\Gamma)$. Ιδιαιτέρως, ομοτοπικώς ισοδύναμα γραφήματα έχουν την ίδια χαρακτηριστική Euler. [Θεωρήστε δεδομένο ότι δύο ισόμορφες ελεύθερες ομάδες έχουν την ίδια διάσταση.]

   (ii) Αν $p : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ είναι μια προβολή επικάλυψης του γραφήματος Γ με πεπερασμένο αριθμό νημάτων, έστω k, τότε θεωρώντας δεδομένο ότι το $\widetilde{\Gamma}$ είναι γράφημα, αποδείξτε ότι $\chi(\widetilde{\Gamma}) = k \cdot \chi(\Gamma)$.

   (iii) Αν η F είναι ελεύθερη ομάδα διάστασης n και η υποομάδα της F πεπερασμένου δείκτου k, τότε η H είναι ελεύθερη διάστασης $k(n-1)+1$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε ένα μπουκέτο με n κύκλους και το χώρο επικάλυψης που αντιστοιχεί στην H.]

8. Έστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος. Μια επικάλυψη $p : \widetilde{X} \to X$, όπου $\widetilde{X}$ κατά τόξα συνεκτικός, λέγεται *αβελιανή* αν είναι κανονική και η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών είναι αβελιανή. Αποδείξτε ότι ο X επιδέχεται μια ("καθολική") αβελιανή επικάλυψη η οποία επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή επικάλυψη του X (για αυτό "καθολική") και είναι μοναδική, ως προς ισομορφισμό (επικαλύψεων), με αυτή την ιδιότητα, δηλ. να επικαλύπτει κάθε άλλη αβελιανή.

9. Έστω $f : X \to Y$ ένας τοπικός ομοιομορφισμός μεταξύ δύο χώρων Hausdorff. Υποθέτουμε ότι η f είναι επί και αντιστρέφει τα μονοσύνολα σε συμπαγή. Αν $\left|f^{-1}(y_1)\right| = \left|f^{-1}(y_2)\right|$ για κάθε ζεύγος σημείων y_1, y_2 του Y, τότε η f είναι απεικόνιση επικάλυψης. [Υπόδειξη: Αναζητήστε στοιχειώδη περιοχή του τυχαίου $y \in Y$ της μορφής $\cap_i f(U_i)$, όπου τα U_i είναι ανοικτά, ξένα και απεικονίζονται ομοιομορφικά μέσω της f στην ίδια ανοικτή περιοχή του y.]

10. Έστω H διακριτή υποομάδα μιας συνεκτικής και τοπικά κατά τόξα συνεκτικής τοπολογικής ομάδας G. Αποδείξτε ότι η δράση της H στην G με πολλαπλασιασμό από δεξιά είναι δράση χώρου επικάλυψης υπό την έννοια ότι για κάθε $x \in G$ υπάρχει περιοχή U του x έτσι ώστε $g = 1$ οποτεδήποτε $U \cap U \cdot g \neq \emptyset$, και ως εκ' τούτου η απεικόνιση πηλίκο $G \to G/H$ ορίζει κανονικό χώρο επικάλυψης. Αν επιπλέον G απλά συνεκτική, τότε $\pi_1(G/H, 1) \cong H$.

    [Υπόδειξη: Θεωρήστε περιοχή V της μονάδας με την ιδιότητα $V \cap H = \{1\}$, την αντίστροφή της εικόνα $\mu^{-1}(V)$ μέσω της συνεχούς $\mu(g,h) = g^{-1}h$ και μια βασική ανοικτή περιοχή $U_1 \times U_2$ του $(1,1)$ εντός της αντίστροφης εικόνας $\mu^{-1}(V)$.]

11. Έστω $\phi : G \to K$ ένας συνεχής επιμορφισμός μεταξύ συνεκτικών και τοπικά κατά τόξα συνεκτικών τοπολογικών ομάδων. Αν η ϕ είναι ανοικτή (ή κλειστή) και έχει διακριτό πυρήνα, τότε η $\phi : G \to K$ είναι η προβολή κανονικού χώρου επικάλυψης.

    [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την "μοναδικότητα" των χώρων πηλίκο.]

1. Έχοντας υπολογίσει τις ομάδες ομολογίας των σφαιρών, η έννοια του βαθμού που είδαμε για απεικονίσεις από τον κύκλο στον εαυτό του γενικεύεται ως εξής. Δοθείσης μιας (πάντα συνεχούς) απεικονίσεως $f : S^n \to S^n$, θεωρούμε τον επαγόμενο ομομομορφισμό $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$. Εφόσον η $H_n(S^n)$ είναι άπειρη κυκλική, ο επαγόμενος ομομορφισμός θα δίνεται με πολ/μό με έναν ακέραιο. Δηλ. θα είναι της μορφής $f_*([\sigma]) = k[\sigma]$. Ο ακέραιος k ονομάζεται **βαθμός** της f και συμβολίζεται με $\deg f$. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες:
   (i) $\deg \mathrm{Id}_{S^n} = 1$.
   (ii) Ομοτοπικές απεικονίσεις $f, g : S^n \to S^n$ έχουν τον ίδιο βαθμό.
   (iii) $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.
   (iv) Αν η $f : S^n \to S^n$ επεκτείνεται σε συνεχή απεικόνιση $\tilde{f} : D^{n+1} \to S^n$, τότε $\deg f = 0$.
   (v) Αν η f είναι ανάκλαση ως προς κάποιο υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$, τότε $\deg f = -1$.
   (vi) Αν η $f = \alpha$ είναι η αντιποδική απεικόνιση, τότε $\deg \alpha = (-1)^{n+1}$.
   (vii) Αν η $f : S^n \to S^n$ δεν είναι επί, τότε $\deg f = 0$.
   (viii) Αν η $f : S^n \to S^n$ δεν έχει σταθερά σημεία, τότε $\deg f = (-1)^{n+1}$.
   Υπόδειξη (Απόδειξη;) για το (v): έστω ότι η f είναι η $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Κατά το υπολογισμό των ομάδων ομολογίας των σφαιρών, αποδείξαμε την ύπαρξη ισομορφισμού $\varphi : H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1})$. Έστω $\mu_0 = [+1] - [-1] \in H_0(S^0)$, $\mu_1 \in H_1(S^1) \cong \pi_1(S^1)$ ο συνήθης γεννήτορας ($t \mapsto e^{2\pi i t}$) της $H_1(S^1)$ και ορίζουμε τον γεννήτορα μ_n της $H_n(S^n)$ μέσω της σχέσης $\varphi(\mu_n) = \mu_{n-1}$. Η "φυσικότητα" του φ δίνει ότι $f_*(\mu_n) = -\mu_n$.

2. Υπολογίστε τις ομάδες ομολογίας $H_n(S^2, A)$ του ζεύγους (S^2, A), όπου το A αποτελείται από δύο σημεία του X. Υπόδειξη: η απεικόνιση $H_0(A) \to H_0(X)$ που επάγεται από την αντίστοιχη ένθεση, απεικονίζει κάθε γεννήτορα της $H_0(A)$ στον γεννήτορα της $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

3. Η **ανάρτηση** (suspension) SX ενός τοπολογικού χώρου X είναι ο χώρος πηλίκο που λαμβάνεται από τον $X \times [-1, 1]$ θεωρώντας τα υποσύνολα $X \times \{-1\}$ και $X \times \{1\}$ ως μονοσύνολα. Δηλαδή είναι δύο κώνοι του X κολλημένοι στις βάσεις τους. Αποδείξτε ότι για κάθε χώρο X και κάθε n υπάρχει ισομορφισμός $\widetilde{H}_n(SX) \cong \widetilde{H}_{n-1}(X)$.

4. Έστω X_1 και X_2 ένα ζεύγος τοπολογικών χώρων και $x_i \in X_i$ σημεία για τα οποία υπάρχουν περιοχές $U_i \subseteq X_i$ οι οποίες περιστέλλονται στα x_i (δηλ. υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση $U_i \to \{x_i\}$). Αν με $X_1 \vee X_2 = X_1 \sqcup X_2/(x_1 \equiv x_2)$ συμβολίσουμε την σφήνα των X_1 και X_2 που προκύπτει ταυτοποιώντας το x_1 με το x_2, τότε $\widetilde{H}_n(X_1 \vee X_2) \cong \widetilde{H}_n(X_1) \oplus \widetilde{H}_n(X_2)$ για κάθε $n \geq 0$.

5. Οι χώροι $S^1 \times S^1$ και $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ έχουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας (σε όλες τις διαστάσεις), όμως τα καθολικά τους καλύμματα όχι. Υπόδειξη: το ένα κάλυμμα είναι συμπτύξιμος χώρος ενώ το άλλο όχι.

6. Έστω $r : X \to A$ μια συστολή (retraction) από έναν χώρο X σε ένα υπόχωρο A. Αποδείξτε ότι $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A)$ για κάθε n. Υπόδειξη: αναζητήστε συνθήκες υπό τις οποίες μια βραχεία ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη.