Λύσεις κάποιων ασκήσεων

2.1 Αν f, g θηλειές στο x_0, τότε $f \circ g$ θηλειά στο x_0, αφού $(f \circ g)(0) = \mu(1,1) = 1$ (η συνέχεια έπεται από την συνέχεια του πολ/μού). Αν έχουμε θηλειές στο x_0 με $f_1 \overset{F}{\simeq} f_2$ και $g_1 \overset{G}{\simeq} g_2$, τότε $f_1 \circ g_1 \overset{H}{\simeq} f_2 \circ g_2$, όπου $H(s,t) = F(s,t) \circ G(s,t)$. Δηλαδή, το γινόμενο θηλειών επάγει γινόμενο στις κλάσεις ομοτοπίας. Είναι άμεσο ότι το αντίστροφο στοιχείο της κλάσης της θηλειάς $f(s)$ στο x_0 ως προς $\circ$ είναι η κλάση της θηλειάς $f(s)^{-1}$ (η συνέχεια έπεται από συνέχεια της αντιστροφής) κτλ.

$[f] \circ [g] = [f \cdot c_{x_0}] \circ [c_{x_0} \cdot g] = [(f \cdot c_{x_0}) \circ (c_{x_0} \cdot g)] = [f \cdot g]$. Για την τελευταία ισότητα παρατηρούμε ότι το γινόμενο $(f \cdot c_{x_0}) \circ (c_{x_0} \cdot g)$ για $s \leq 1/2$ δίνει $f(2s) \circ c_{x_0}(2s) = f(2s)$ και για $s \geq 1/2$ δίνει $c_{x_0}(2s-1) \circ g(2s-1) = g(2s-1)$. Άρα πράγματι οι δύο πράξεις ταυτίζονται. Τέλος, όπως πριν προκύπτει ότι $[f] \cdot [g] = [f] \circ [g] = [c_{x_0} \cdot f] \circ [g \cdot c_{x_0}] = [g] \cdot [f]$.

2.3 Έστω F ομοτοπία από την f στην g, όπου $g(x) = y_0$ για κάθε $x \in S^n$. Ορίζουμε $\tilde{f} : D^{n+1} \to Y$ ως εξής:

$$\tilde{f} = \begin{cases} y_0 & \text{αν } 0 \leq ||x|| \leq 1/2 \\ F(x/||x||, 2 - 2||x||) & \text{αν } 1/2 \leq ||x|| \leq 1 \end{cases}$$

Η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη, συνεχής από το λήμμα της συγκόλλησης και επεκτείνει την f. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\tilde{f} : D^{n+1} \to Y$ (συνεχής) επέκταση της f. Ορίζουμε ομοτοπία $F : S^n \times I \to Y$ με $F(x,t) = \tilde{f}((1-t)x)$ και παρατηρούμε ότι $F(x,0) = \tilde{f}(x) = f(x)$, ενώ $F(x,1) = \tilde{f}(0)$.

Παρατήρηση. Το συμπέρασμα γενικεύεται στην Άσκηση 2.7, αν λάβουμε υπόψη ότι ο κώνος της σφαίρας S^n είναι ομοιομορφικός με τον "δίσκο" D^{n+1}.

2.4 Αν συμβολίσουμε με $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ την ένθεση, τότε έχουμε ότι $\tilde{\phi} \circ i = \phi$. Αυτό σημαίνει ότι $\tilde{\phi}_* \circ i_* = \phi_*$ για τους επαγόμενους ομορφισμούς στις αντίστοιχες θεμελιώδεις ομάδες. Εφόσον η θεμελιώδης ομάδα του $\mathbb{R}^n$ είναι τετριμμένη, ο ομομορφισμός $i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^n, a_0)$ είναι ο τετριμμένος και συνεπώς ο ϕ_* είναι επίσης ο τετριμμένος ομομορφισμός.

2.6 Έστω $\pi : X \times [0,1] \to CX$, $\pi(x,t) = [x,t]$ η απεικόνιση πηλίκο. Θεωρούμε την απεικόνιση γινόμενο $\pi \times Id : (X \times I) \times I \to CX \times I$. Χρησιμοποιώντας την συμπάγεια του I μπορούμε να δείξουμε ότι η $\pi \times Id$ απεικονίζει "κορεσμένα" ανοικτά σε ανοικτά και άρα(;) είναι απεικόνιση πηλίκο. Ορίζουμε $H : (X \times I) \times I \to CX$ με $H((x,t),s) = \pi(x,(1-s)t+s) = [x,(1-s)t+s]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής και σταθερή σε κάθε "νήμα" της $\pi \times Id$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα των χώρων πηλίκο επάγεται συνεχής $\widetilde{H} : CX \times I \to CX$ με $\widetilde{H}([x,t],s) = [x,(1-s)t+s]$, η οποία είναι η ζητούμενη ομοτοπία αφού $\widetilde{H}([x,t],0) = [x,t]$ ενώ $\widetilde{H}([x,t],1) = [x,1]$ σταθερή.

2.7 Έστω H ομοτοπία από την f σε μια σταθερή απεικόνιση $c : X \to Y$ και $\pi : X \times [0,1] \to CX$ η απεικόνιση πηλίκο, δηλ. $\pi(x,t) = [x,t]$. Εφόσον $H(x,1) = c(x) = H(y,1)$ για κάθε $x, y \in X$, η ομοτοπία H είναι σταθερή στα νήματα της π και έτσι επάγει συνεχή απεικόνιση $\widetilde{H} : CX \to Y$ με $\widetilde{H} \circ \pi = H$. Έπεται ότι $\widetilde{H}([x,0]) = H(x,0) \equiv f(x)$, δηλ. $g = \widetilde{H}$.

Αντίστροφα, δεδομένης της συνεχούς επεκτάσεως g, ορίζουμε ομοτοπία $H : X \times I \to Y$ με $H = g \circ \pi$. Τότε $(x,0) \equiv f(x)$ και $H(x,1) = g([x,1]) =$ σταθερή.

3.3 Γνωρίζουμε ότι οι χώροι B^2 και $\mathbb{R}^2$ είναι ομοιομορφικοί. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\mathbb{R}^2$ δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Για να το διαπιστώσουμε αρκεί να θεωρήσουμε μια μεταφορά κατά $a \neq 0$, $\tau_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, δηλ $\tau_a(x) = x + a$.

3.4 (i) Περιστρέφοντας τον κύκλο ως προς την αρχή των αξόνων κατά 180^o, λαμβάνουμε την ζητούμενη ομοτοπία. Πιο συγκεκριμμένα, ορίζουμε $F : S^1 \times I \to S^1$ με $F(e^{i\theta}, t) = e^{i(\theta + t\pi)}$.
(ii) Αν υποθέσουμε ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in S^1$, τότε $tf(x) + (1-t)(-x) \neq 0$ για κάθε $x \in S^1$, $t \in I$ και ο τύπος

$$H(x,t) = \frac{tf(x) + (1-t)(-x)}{\|tf(x) + (1-t)(-x)\|}$$

ορίζει ομοτοπία από την αντιποδική στην f. Έπεται ότι $\deg(f) = \deg(a) = \deg(Id) = 1$, άτοπο.

3.5 (i) Εφόσον η f είναι ομοτοπική με σταθερά, ο βαθμός της είναι μηδέν και το ζητούμενο έπεται από το δεύτερο υποερώτημα της προηγούμενης άσκησης. Εναλλακτικά, η f μπορεί να επεκταθεί σε $\tilde{f} : B^2 \to S^1 \subseteq B^2$. Από το θεώρημα του Brouwer η επέκταση έχει σταθερό σημείο, έστω x_0. Όμως $x_0 \in S^1$ γιατί η εικόνα της επέκτασης περιέχεται στον κύκλο. Αυτό σημαίνει ότι το x_0 είναι σταθερό σημείο για την f.
(ii) Έστω $a : S^1 \to S^1$ η αντιποδική απεικόνιση. Η σύνθεση $a \circ f : S^1 \to S^1$ είναι ομοτοπική με σταθερά (αφού η f είναι). Από το πρώτο υποερώτημα, υπάρχει $x_0 \in S^1$ τέτοιο ώστε $a(f(x_0)) = x_0$, ισοδύναμα $f(x_0) = -x_0$.

3.7 Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^2$ ως υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ μέσω της κανονικής εμφύτευσης $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, όπου $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0, 0)$. Έστω $A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x = (0,0,x_3,x_4)\}$. Η απεικόνιση $r : \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2 \to A \setminus \{\mathbf{0}\}$, με $r(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,x_3,x_4)$ είναι συστέλλουσα παραμόρφωση. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε την ομοτοπία με τύπο $F(x,t) = t(0,0,x_3,x_4) + (1-t)(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, και παρατηρούμε ότι:

- $F(x,0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$.
- $F(x,1) \in A \setminus \{\mathbf{0}\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$.
- $F(x,t) = x$ για κάθε $x \in A \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Έπεται ότι το $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$ έχει τον τύπο ομοτοπίας του $A \setminus \{\mathbf{0}\}$, το οποίο όμως είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \simeq S^1$. Τελικά, $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2) = \pi(S^1) = \mathbb{Z}$.

3.8 Η περιοχή $B = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, v_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \text{ και } \|v\| = 1\}$ είναι ομοιομορφική με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Αν τώρα A είναι ένας πραγματικός 3×3 πίνακας με θετικά στοιχεία και $v \in B$, τότε κάθε συντεταγμένη του Av είναι θετική (κάποια συν/νη του v είναι μη μηδενική) και ιδιαιτέρως $v \neq \mathbf{0}$. Η απεικόνιση $f : B \to B$ με $f(v) = Av/\|Av\|$ είναι, λοιπόν, καλά ορισμένη και συνεχής. Από το θεώρημα του Brouwer υπάρχει $v \in B$ τέτοιο ώστε $f(v) = v$, ισοδύναμα $Av = \|Av\|v$. Δηλαδή το v είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\|Av\| > 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε συν/νη του v είναι αυστηρά θετική.
Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και για $n > 4$ κάθε $n \times n$ πίνακας με στοιχεία θετικούς πραγματικούς αριθμούς έχει ιδιοδιάνυσμα με θετική ιδιοτιμή, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Brouwer στην αντίστοιχη διάσταση που αποδείξαμε με την βοήθεια των ομάδων ομολογίας των σφαιρών.

3.10 (1) $\Longrightarrow$ (2). Από υπόθεση υπάρχει $x \in S^n$ με $f(x) = f(-x)$. Εφόσον η f είναι περιττή $f(x) = f(-x) = -f(x)$, δηλ. $f(x) = 0$.
(2) $\Longrightarrow$ (3). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει περιττή απεικόνιση $f : S^n \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $x \in S^n$ με $f(x) = 0 \notin S^{n-1}$, άτοπο.
(3) $\Longrightarrow$ (4). Θεωρούμε τα δύο ημισφαίρια $D^n_\pm = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid \pm x_0 \geq 0\}$ και τον ομοιομορφισμό $g : D^n_+ \to D^n$ που δίνεται προβάλλοντας στις τελευταίες n συν/νες. Αν έχουμε $f : D^n \to S^{n-1}$ περιττή στο σύνορο, τότε ορίζουμε $\varphi : S^n \to S^{n-1}$ ως εξής:

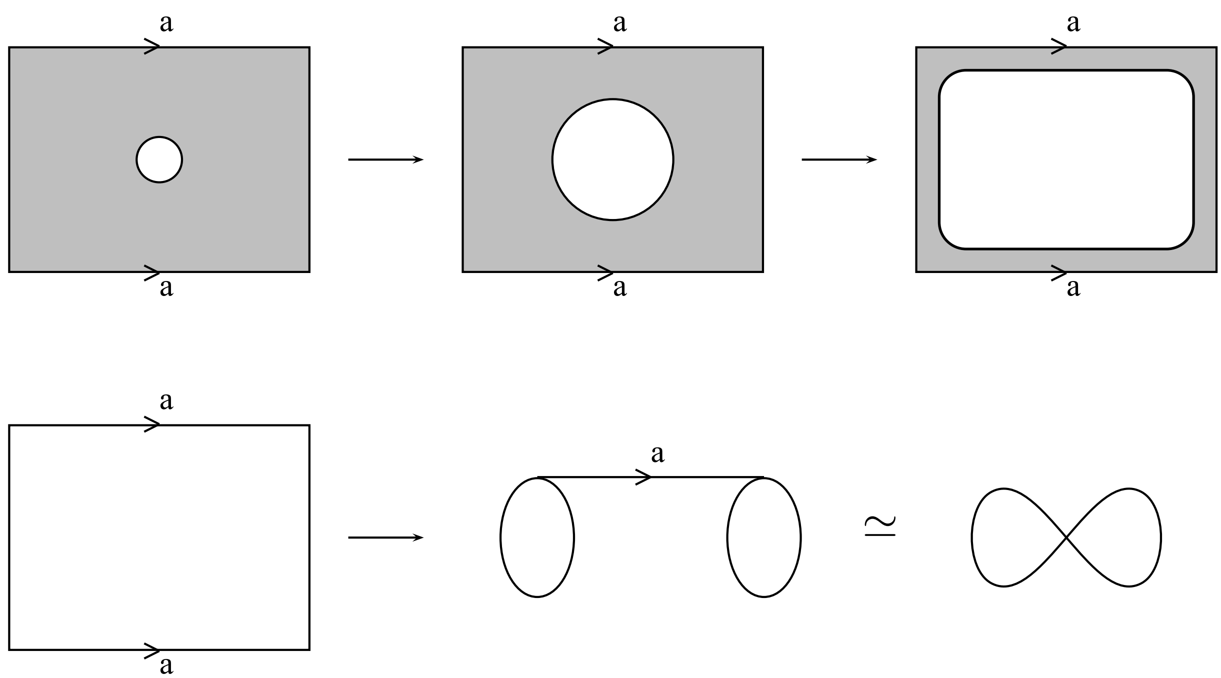
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(g(x)) & \text{αν } x \in D^n_+ \\ -f(g(-x)) & \text{αν } x \in D^n_- \end{cases}$$

Η απεικόνιση φ είναι καλά ορισμένη γιατί αν $x \in x \in D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1}$, τότε $-f(g(-x)) = -f(-g(x)) = f(g(x))$ αφού η f είναι περιττή στο σύνορο. Είναι άμεσο ότι η φ είναι συνεχής και περιττή το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεσή μας.
(4) $\Longrightarrow$ (5). Έστω $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ περιττή, ομοτοπική με σταθερά και $H : S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$ η αντίστοιχη ομοτοπία. Τότε η H είναι σταθερή στο $S^{n-1} \times \{1\}$ και συνεπώς παραγοντοποιείται μέσω του αντίστοιχου κώνου: $\tilde{H} : CS^{n-1} = (S^{n-1} \times I)/(S^{n-1} \times \{1\}) \to S^{n-1}$. Όμως ο κώνος CS^{n-1} είναι ομοιομορφικός με τον δίσκο D^n με το σύνορο του δίσκου ∂D^n να αντιστοιχεί στο $S^{n-1} \times \{0\}$. Εφόσον η f είναι περιττή (στο S^{n-1}), η $\tilde{H}$ είναι περιττή στο σύνορο, άτοπο.
(5) $\Longrightarrow$ (1). Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ με $f(x) \neq f(-x)$ για κάθε $x \in S^n$. Τότε ορίζεται η περιττή απεικόνιση $g : S^n \to S^{n-1}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Ο περιορισμός της $S^{n-1} \to S^{n-1}$ είναι περιττή απεικόνιση και ομοτοπική με σταθερά (γιατί ορίζεται στο άνω ημισφαίριο της S^n), άτοπο.

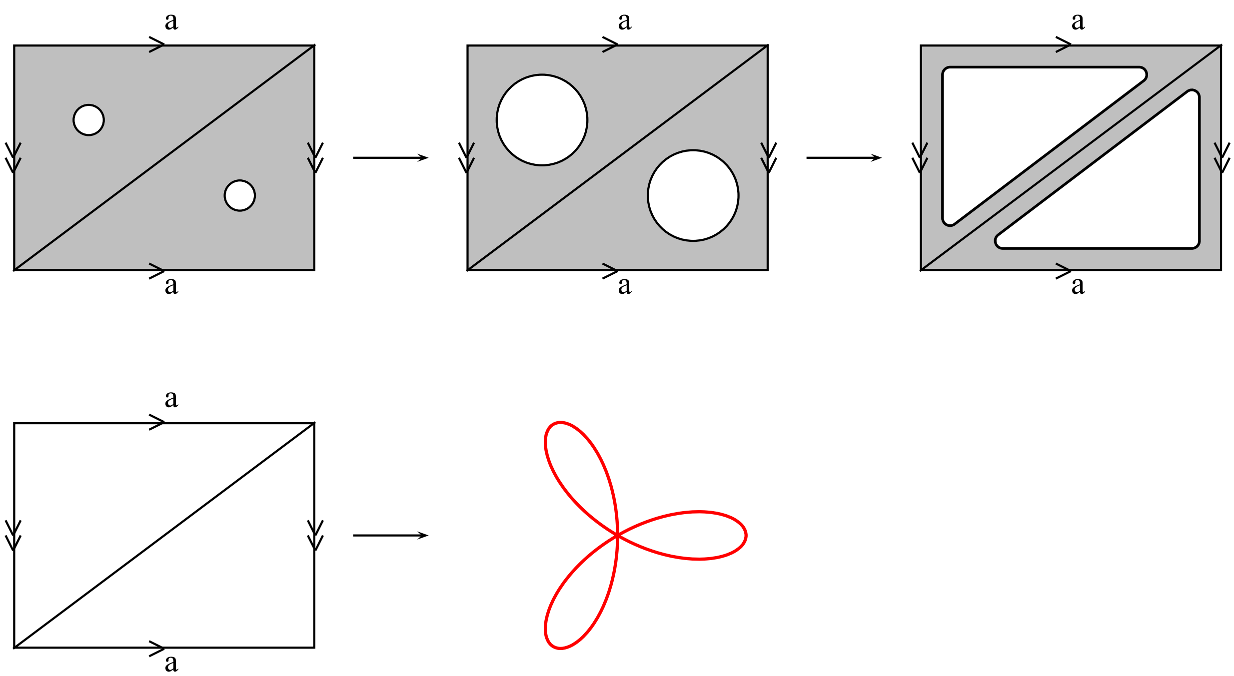
4.3 (i) Παρατηρούμε πρώτα ότι ο χώρος $S^1 \times \mathbb{R}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον υπόχωρό του $S^1 \times [-1,1]$ (ποιά είναι η αντίστοιχη συστέλλουσα παραμόρφωση;). Θεωρώντας μια "πολυγωνική" παράσταση για τον χώρο $S^1 \times [-1,1]$ και βγάζοντας ένα σημείο, διαπιστώνουμε με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος ότι $\pi_1\Big(S^1 \times [-1,1] \setminus \{\text{σημείο}\}\Big) = F_2$, η ελεύθερη διάστασης 2. Άρα η ζητούμενη θεμελιώδης ομάδα είναι η ελεύθερη διάστασης 2.



Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό ομοιομορφισμό $S^1 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Έπεται ότι η θεμελιώδης ομάδα του χώρου που προκύπτει αν βγάλουμε ένα σημείο από τον κύλινδρο είναι ισόμορφη με την θεμελιώδη ομάδα του επιπέδου "μείον" δύο σημεία, δηλ. ελεύθερη διάστασης 2.

(ii) Ο χώρος $X = S^1 \times S^1 \setminus \{\text{δύο σημεία}\}$ προκύπτει ως χώρος πηλίκο ενός τετραγώνου από το οποίο βγάζουμε δύο (εσωτερικά) σημεία και ταυτοποιούμε, ως συνήθως, τις απέναντι πλευρές. Έστω U ανοικτή περιοχή των δύο σημείων που βγάζουμε, ομοιομορφική με ανοικτό δίσκο και V ανοικτή περιοχή του συνόρου του τετραγώνου που δεν περιέχει τα σημεία που βγάζουμε και προκύπτει ως συμπλήρωμα κατάλληλου κλειστού δίσκου, έτσι ώστε η τομή $U \cap V$ να είναι ομοιομορφική με δακτύλιο. Τότε $\pi_1(V) \cong F_2 = \langle a, b\rangle$, $\pi_1(U) \cong F_2 = \langle c, d\rangle$ και $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα $aba^{-1}b^{-1}$ αν θεωρηθεί ως υποσύνολο του V και γεννήτορα cd ως υποσύνολο του U. Από το θεώρημα Seifert-Van Kampen, λαμβάνουμε την ακόλουθη παράσταση για την θεμελιώδη ομάδα του X, $\pi_1(X) = \langle a, b, c, d \,|\, aba^{-1}b^{-1} = cd\rangle$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση "απαλείφουμε" τον γεννήτορα d και προκύπτει ελεύθερη διάστασης 3.

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: θεωρούμε την συνήθη "πολυγωνική" παράσταση του χώρου $S^1 \times S^1$ και βγάζουμε δύο σημεία. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η θεμελιώδης ομάδα του χώρου που προκύπτει είναι η F_3, η ελεύθερη διάστασης 3.



(iii) Έστω X το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από τα σημεία των ευθειών που βγάζουμε και $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ τα σημεία τομής των ευθειών με την σφαίρα S^2. Η γνωστή γραμμική ομοτοπία που δείχνει ότι οι χώροι $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ και S^2 είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι, περιορίζεται σε ομοτοπία $F : \mathbb{R}^3 \setminus X \to \mathbb{R}^3 \setminus X$, δηλ.

$$F(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

από την οποία προκύπτει ότι και οι χώροι $\mathbb{R}^3 \setminus X$, $S^2 \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k}\}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι (δηλ. $F(x,1)$ συστέλλουσα παραμόρφωση από τον πρώτο στον δεύτερο). Έτσι $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X) = \pi_1(S^2 \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k}\}) = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{2k-1 \text{ το πλήθος σημεία}\}) = \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{2k-1}$, δηλ. ελεύθερη διάστασης $2k-1$.

4.4 Ένας τρόπος είναι επαγωγή και θεώρημα Seifert-Van Kampen.

Ένας δεύτερος τρόπος είναι να θεωρήσουμε, για κάθε i, μια ανοικτή μπάλα B_i με κέντρο το x_i, έτσι ώστε οι μπάλες να είναι ξένες μεταξύ τους. Τότε ο χώρος $X = \mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με το υποσύνολό του $A = \mathbb{R}^n - \cup_1^k B_i$. Η απαιτούμενη ομοτοπία (που ορίζει και την αντίστοιχη συστέλλουσα παραμόρφωση από τον χώρο στον υπόχωρο) αφήνει αναλλοίωτα τα σημεία του υπόχωρου και το εσωτερικό κάθε μπάλας (εκτός φυσικά από το κέντρο) το προβάλει "ακτινικά" στο σύνορο. Γνωρίζουμε ότι η επισύναψη κελιών διαστάσεως μεγαλύτερης του 2 σ' ένα χώρο δεν αλλάζει τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου. Επισυνάπτουμε λοιπόν στον A, κατά μήκος κάθε συνόρου μπάλας που έχουμε αφαιρέσει, κελί διάστασης 3 έτσι ώστε να προκύψει ο $\mathbb{R}^n$. Τελικά, $\pi_1(X) = \pi_1(A) = \pi_1(\mathbb{R}^n) = 1$.

5.5 Θεωρούμε τον καθολικό χώρο επικάλυψης $p : \mathbb{R} \to S^1$ του κύκλου. Έστω $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to S^1$ συνεχής και $f_* : \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, x_0) \to \pi_1(S^1, f(x_0))$ ο επαγώμενος ομομορφισμός. Κάθε ομομορφισμός απεικονίζει στοιχεία πεπερασμένης τάξης σε στοιχεία πεπερασμένης τάξης. Εφόσον η $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, x_0)$ είναι κυκλική τάξεως 2 και η $\pi_1(S^1, f(x_0))$ είναι άπειρη κυκλική, ιδιαίτερως δεν περιέχει στοιχεία πεπερ. τάξης, έπεται ότι ο f_* είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός και έτσι $f_*(\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, y_0))$, όπου y_0 στοιχείο στο νήμα του $f(x_0)$. Από το Κριτήριο Ύπαρξης Ανυψώσεων, υπάρχει ανύψωση $\tilde{f} : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}$ της f, η οποία είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση c, αφού ο $\mathbb{R}$ είναι συμπτύξιμος. Συνεπώς $f = p \circ \tilde{f} \simeq p \circ c$, που είναι σταθερή.

5.9 Εφόσον η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός κάθε νήμα $f^{-1}(y)$ είναι διακριτό υποσύνολο του X και άρα πεπερασμένο (ως συμπαγές από υπόθεση). Έστω $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Αφού ο X είναι Hausdorff, για κάθε $i = 1, \dots, n$ μπορούμε να βρούμε ανοικτή περιοχή U_i του x_i έτσι ώστε οι περιοχές αυτές να είναι ανά δύο ξένες. Αντικαθιστώντας κάθε U_i με ένα ανοικτό υποσύνολό του (την τομή του με ανοικτό που περιέχει το x_i και απεικονίζεται ομοιομορφικά στον Y) αν χρειασθεί, μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι η f απεικονίζει κάθε U_i ομοιομορφικά επί μίας ανοικτής περιοχής του Y. Θεωρούμε την τομή $V = \cap_{i=1}^n f(U_i)$ η οποία είναι ανοικτή περιοχή του y. Γενικά, το V δεν μπορεί να παίξει τον ρόλο της στοιχειώδους περιοχής γιατί ενδέχεται η αντίστροφη του εικόνα να περιέχει σημεία που δεν ανήκουν στην ένωση των U_i. Η υπόθεσή μας όμως περί ισοπληθικών νημάτων μας εξασφαλίζει ότι $f^{-1}(V) \subseteq \cup_{i=1}^n U_i$, δηλαδή η V είναι στοιχειώδης περιοχή με συνιστώσες $f^{-1}(V) \cap U_i$. Πράγματι, αν υπήρχε σημείο x_0 στην αντίστροφη εικόνα του V εκτός της ένωσης των U_i, τότε το νήμα του $f(x_0)$ θα περιείχε το x_0 και ένα στοιχείο από κάθε U_i, δηλαδή, τουλάχιστον ένα παραπάνω στοιχείο από το νήμα του y, άτοπο.