Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ

Σημειώσεις παραδόσεων

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

Αθήνα 2012

Οι σημειώσεις αυτές έχουν ως στόχο την διευκόλυνση των φοιτητών οι οποίοι παρακολουθούν το μάθημα της Μεταπτυχιακής Ανάλυσης ΙΙ.

Ελπίζω ότι σε κάποιο βαθμό εξυπηρετούν αυτό το στόχο. Ακόμα ελπίζω ότι με την βοήθεια των φοιτητών και με την πάροδο του χρόνου θα είμαι σε θέση να τις βελτιώνω.

Καθόσον αφορά τον συμβολισμό με K συμβολίζουμε είτε το σώμα των πραγματικών R ή το σώμα των μιγαδικών C.

Αν $\left(X,\|\cdot\|\right)$ είναι χώρος με νόρμα τότε $\mathrm{B}\left(x,\varepsilon\right),\hat{\mathrm{B}}\left(x,\varepsilon\right)$ συμβολίζουμε την ανοικτή αντίστοιχα κλειστή σφαίρα κέντρου $x\in X$ και ακτίνας $\varepsilon>0$. Ιδιαίτερα με $\mathrm{B}_X,\hat{\mathrm{B}}_X$ συμβολίζουμε την ανοικτή αντίστοιχα κλειστή μοναδιαία σφαίρα του X.

Οφείλω πολλές ευχαριστίες στον φίλο μου, καθηγητή Μαθηματικών της μέσης Εκπαίδευσης, Κώστα Θανόπουλο ο οποίος αφιέρωσε σημαντικό μέρος του χρόνου του για να γράψει (και αυτές) τις χειρόγραφες σημειώσεις του μαθήματος στο Word.

Αθήνα Σεπτέμβριος 2012

Σ.Κ. Μερκουράκης

Περιεχόμενα

Βιβλιογραφία

1 [A] Σ. Αργυρός, Σημειώσεις παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, Αθήνα 2004

[B] W.G. Bade, The Banach Space C(S), Aarhus Universitet Matematisk, Institud, 1971

[Γ] Α. Γιαννόπουλος, Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ, Πρόχειρες Σημειώσεις, Αθήνα, 2007

[D] J. Diestel, Sequences and Series in Banach spaces, GTM,92,Springer, 1984

[F-H-H-M-P-Z] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, J. Pelant, V. Montesinos and V. Zizler, Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry, CMSB in Mathematics, Springer, 2001

[F-H-H-M-Z] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos and V. Zizler Banach Space Theory. The basis for Linear and Nonlinear Analysis, CMSB in Mathematics, Springer, 2011

[L – T] J. Lindenstrauss and L. Tzatriri, Classical Banach Spaces I, Sequence Spaces, Springer, 1977

[M] R. E. Megginson, An introduction to Banach Space Theory GTM 183, Springer, 1998

[Με] Σ. Μερκουράκης, Μεταπτυχιακή Συναρτησιακή Ανάλυση, Χειρόγραφες Σημειώσεις Παραδόσεων, Αθήνα, 1997

[Μη] Θ. Μήτσης. Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης.

[Ν – Ζ – Κ – Φ] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1988

[R] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill, 1973

[Τ] Λ. Τσίτσας, Μαθήματα Συναρτησιακής Ανάλυσης, Αθήνα, 1984.

1 Χώροι πηλίκα

Έστω X διανυσματικός χώρος και Y διανυσματικός υπόχωρος του X. Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε το σύμπλοκο $\hat{x}$ σχετικά με τον Y,

$$\hat{x} \underset{o\rho}{=} \{x + y : y \in Y\} = x + Y$$

δηλαδή το $\hat{x}$ είναι η παράλληλη μεταφορά του Y κατά το διάνυσμα x. Παρατηρούμε ότι

$$\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x - y \in Y .$$

Ο χώρος X / Y (χώρος πηλίκο του X πάνω από τον Y) είναι ο χώρος όλων των συμπλόκων (όλων των παραλλήλων μεταφορών του Y), δηλαδή

$$X / Y = \left\{ \hat{x} : x \in X \right\}$$

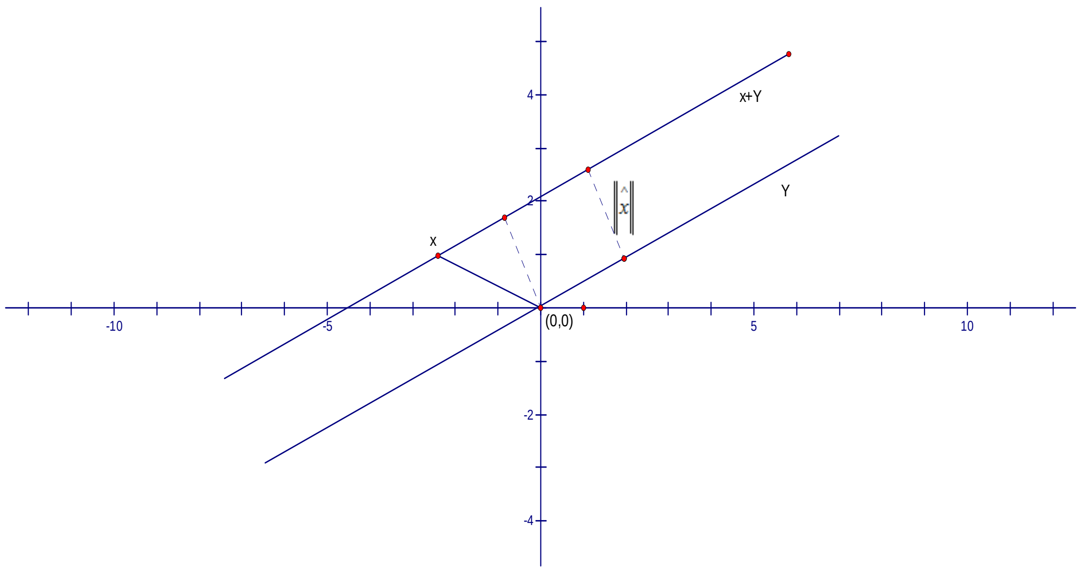
Με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού που ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο $\hat{x} + \hat{y} \underset{o\rho}{=} \widehat{x + y}$ και $\lambda \hat{x} = \widehat{\lambda x}$, $x, y \in X$, $\lambda \in K$ ($K = R$ ή C), ο X / Y γίνεται όπως εύκολα εξακριβώνεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα K με μηδέν το σύμπλοκο $\hat{0} = Y$.

Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι επί πλέον ένας (διανυσματικός) χώρος με νόρμα, ας την συμβολίσουμε με $\|\cdot\|$, και ότι ο Y είναι κλειστός (διανυσματικός) υπόχωρος του. Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια νόρμα στον χώρο πηλίκο X / Y ως εξής: Έστω

$$\hat{x} = x + Y \in X / Y ,$$

Θέτομε (1) $$\left\|\hat{x}\right\| \underset{o\rho}{=} \inf \left\{ \|x + y\| : y \in Y \right\} = \inf \left\{ \|x - y\| : y \in Y \right\} = d(x, Y).$$

Όπως παρατηρούμε από τις ισότητες στην (1) η νόρμα του συμπλόκου $\hat{x}$ ορίζεται να είναι η απόσταση του x από τον υποχώρο Y ή ακόμη η απόσταση του $0 \in X$ από το σύνολο



$x+Y$, (αφού $\left\|\hat{x}\right\| = \inf\left\{\left\|0-(x+y)\right\| : y\in Y\right\} = d\left(0, x+Y\right)$). Η νόρμα που ορίζεται από τις ισότητες στην (1) ονομάζεται <u>νόρμα πηλίκο</u>. Στο εξής οποτεδήποτε θεωρούμε έναν χώρο πηλίκο X/Y ενός χώρου με νόρμα $\left(X,\|\cdot\|\right)$, θα θεωρούμε τον X/Y εφοδιασμένο με την νόρμα πηλίκο.

Στο παράδειγμα του σχήματος ο X είναι το Ευκλείδειο επίπεδο R^2, ο Y ένας γνήσιος μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του (δηλαδή μία ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$) και ο χώρος πηλίκο X/Y είναι το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου που είναι παράλληλες με την ευθεία Y. Η νόρμα κάθε τέτοιας ευθείας είναι η απόστασή της από το σημείο $(0,0)$ του R^2.

<u>Πρόταση 1.1</u> Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υποχώρος του, τότε η νόρμα πηλίκο του X/Y είναι (πράγματι) μία νόρμα στον διανυσματικό χώρο X/Y.

<u>Απόδειξη</u>. Αν $x\in X$ τότε $\|x\| = d\left(x,Y\right)\geq 0$ και ακόμη ότι αν

$$\left\|\hat{x}\right\| = 0 \Leftrightarrow d(x,Y)=0 \Leftrightarrow x\in\overline{Y}=Y \Leftrightarrow \hat{x}=\hat{0}=Y .$$

Έστω $\lambda\in K$ με $\lambda\neq 0$ και $x\in X$. Τότε έχουμε, $\left\|\lambda\hat{x}\right\| = d\left(\lambda x, Y\right) =$

$$\inf\left\{\|\lambda x-y\| : y\in Y\right\} = \inf\left\{|\lambda|\cdot\left\|x-\frac{1}{\lambda}y\right\| : y\in Y\right\} = |\lambda|\inf\left\{\left\|x-\frac{1}{\lambda}y\right\| : y\in Y\right\}$$

$= |\lambda|\cdot\inf\left\{\|x-y\| : y\in Y\right\} = |\lambda|\cdot d\left(x,Y\right) = |\lambda|\cdot\left\|\hat{x}\right\|$. Αν $\lambda=0$ η αποδεικτέα σχέση είναι προφανής.

Αποδεικνύουμε τώρα την τριγωνική ανισότητα. Έστω $x,y\in X$. Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος $z_1,z_2\in Y$ ισχύει ότι: $\left\|(x+y)-(z_1+z_2)\right\| \leq \|x-z_1\|+\|y-z_2\|$, συνεπώς,

$$d\left(x+y,Y\right) \leq \left\|(x+y)-(z_1+z_2)\right\| \leq \|x-z_1\|+\|y-z_2\|, \forall z_1,z_2\in Y .$$

Έπεται ότι,

$$d\left(x+y,Y\right) \leq \inf\left\{\|x-z_1\|+\|y-z_2\| : z_1,z_2\in Y\right\}$$
$$= \inf\left\{\|x-z_1\| : z_1\in Y\right\} + \inf\left\{\|y-z_2\| : z_2\in Y\right\} = d\left(x,Y\right)+d\left(y,Y\right).$$

Ισοδύναμα, $\left\|\hat{x}+\hat{y}\right\| \leq \left\|\hat{x}\right\| + \left\|\hat{y}\right\|$.

Ορισμός 1.2 Έστω Y διανυσματικός υποχώρος του διανυσματικού χώρου X. Τότε η απεικόνιση πηλίκο η κανονική απεικόνιση του X επί του X/Y είναι η απεικόνιση π που ορίζεται από τον τύπο $\pi(x)=\hat{x}=x+Y$.

Παρατηρούμε ότι η π είναι μια γραμμική απεικόνιση, με $Ker\pi=Y$ και βέβαια $\pi(X)=X/Y$

Λήμμα 1.3 Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υποχώρος του X και $\pi : X \to X/Y$ η κανονική απεικόνιση. Τότε η εικόνα μέσω της π της ανοικτής μοναδιαίας σφαίρας του X είναι η ανοικτή μοναδιαία σφαίρα του X/Y. Δηλαδή $\pi(\mathrm{B}_X)=\mathrm{B}_{X/Y}$.

Απόδειξη Έστω $x \in X$ με $\|x\|<1$ τότε, $\|\pi(x)\|=\|x+Y\|=\inf\{\|x+y\| : y \in Y\} \le \|x\|<1$, αφού $0 \in Y$. Έπεται ότι $\pi(\mathrm{B}_X) \subseteq \mathrm{B}_{X/Y}$. Έστω τώρα $x \in X$ με $\|\pi(x)\|=\|x+Y\|=\inf\{\|x+y\| : y \in Y\}<1$. Θεωρούμε $y_0 \in Y$ ώστε $\|x+y_0\|<1$ και θέτομε $x_1=x+y_0$. Τότε έχουμε ότι, $\|x_1\|<1$ και $x_1+Y=(x+y_0)+Y=x+Y$. Επομένως $\hat{x}_1=\hat{x}$ ή $\pi(x_1)=\pi(x)$ με $\|x_1\|<1$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{B}_{X/Y} \subseteq \pi(\mathrm{B}_X)$ και η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 1.4 Σημειώνουμε ότι για τις κλειστές μοναδιαίες σφαίρες ισχύει ότι, $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) \subseteq \hat{\mathrm{B}}_{X/Y}$ και ότι εν γένει δεν ισχύει ισότητα. Αυτό σημαίνει ότι ενδέχεται να υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $d(x_0,Y)=1 \Leftrightarrow \|\pi(x_0)\|=1$ και $\|x_0-y\|>1, \forall y \in Y$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει $x_1 \in X$ με $\|x_1\| \le 1$ ώστε $\pi(x_1)=\pi(x_0)$. (Αν υπήρχε ένα τέτοιο x_1 τότε $x_1-x_0 \in Y$, άρα $x_1=x_0+y_0$ για κάποιο $y_0 \in Y$. Έπεται ότι $\|x_1\|=\|x_0+y_0\| \le 1$, άτοπο. Πρβλ επίσης τις ασκήσεις.)

Σημειώνουμε ότι σε κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις ισχύει ισότητα στην παραπάνω σχέση, όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα. (Πρβλ την παρατήρηση 1.6).

Θεώρημα 1.5 Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Τότε η κανονική απεικόνιση $\pi : X \to X/Y$ είναι συνεχής (με $\|\pi\| \le 1$) γραμμική και επί του Y, η οποία είναι επιπλέον και ανοικτή. Αν $Y \ne X$, τότε $\|\pi\|=1$.

Απόδειξη Η γραμμικότητα της π και το γεγονός ότι είναι επί του Y με $\ker\pi=Y$ είναι προφανείς. Η συνέχεια της π έπεται αμέσως από το Λήμμα 1.3 ή και απευθείας αφού αν $\|x\| \le 1$ τότε $\|x+Y\| \le \|x\| \le 1$, άρα $\|\pi\| \le 1$.

Η π είναι ανοικτή από το Λήμμα αφού αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε,

$$\pi\left(\mathrm{B}_X\left(x,\varepsilon\right)\right) = \pi\left(x + \varepsilon \mathrm{B}_X\right) = \pi\left(x\right) + \varepsilon\pi\left(\mathrm{B}_X\right) = \hat{x} + \varepsilon \mathrm{B}_{X/Y} = \mathrm{B}_{X/Y}\left(\hat{x},\varepsilon\right).$$

Επομένως η π απεικονίζει τις περιοχές του τυχόντος σημείου $x \in X$ σε περιοχές του $\pi\left(x\right)$ και είναι άρα ανοικτή απεικόνιση.

Αν ο υποχώρος Y του X είναι διαφορετικός του X, δηλαδή $X \neq Y$ τότε (και μόνο τότε) ο χώρος πηλίκο X/Y είναι μη τετριμμένος ($X \neq 0$). Επομένως $\mathrm{B}_{X/Y} \neq \{0\}$, και αν $y \in \mathrm{B}_{X/Y}$ με $y \neq 0$ τότε υπάρχει $x \in \mathrm{B}_X$ ώστε $\pi\left(x\right) = y$. Έπεται αμέσως από το Λήμμα 1.3 ότι $\|\pi\| = 1$.

Εύκολη συνέπεια του προηγουμένου θεωρήματος είναι και το γνωστό αποτέλεσμα του Riesz:

<u>Λήμμα </u>(Riesz). Έστω X χώρος με νόρμα και Y γνήσιος κλειστός υποχώρος του X.

Τότε : (α) Για κάθε $\theta > 0$ υπάρχει $x \equiv x_\theta \in S_X = \left\{x \in X : \|x\| = 1\right\}$ ώστε $d\left(x_\theta, Y\right) = \inf\left\{\|x_\theta - y\| : y \in Y\right\} \geq 1 - \theta$

(β) Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in S_X$ του οποίου η απόσταση από τον Y είναι η μέγιστη δυνατή, δηλαδή $d\left(x, Y\right) = 1$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Υποθέτουμε χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα ότι $\theta \in \left(0,1\right)$.

Θεωρούμε την κανονική απεικόνιση $\pi : X \to X/Y$. Επειδή ο Y είναι γνήσιος κλειστός υποχώρος του X έπεται ότι $\|\pi\| = 1$. Έτσι έχουμε,

$$1 = \|\pi\| = \sup\left\{\|\pi\left(x\right)\| : \|x\| = 1\right\} = \sup\left\{\left\|\hat{x}\right\| : \|x\| = 1\right\} = \sup\left\{d\left(x, Y\right) : \|x\| = 1\right\}.$$

Αν $0 < \theta < 1$, έπεται από τον χαρακτηρισμό του supremum (ενός φραγμένου συνόλου πραγματικών) ότι υπάρχει $x_\theta \in S_X$ ώστε $\left\|\hat{x}_\theta\right\| = d\left(x_\theta, Y\right) \geq 1 - \theta$.

(β) Έστω $z \in \mathrm{B}_{X/Y}$ με $\|z\| = 1$, υπάρχει τότε $x_0 \in X$ με $\pi\left(x_0\right) = z$. Έπεται ότι, $d\left(x_0, Y\right) = \|\pi\left(x_0\right)\| = \|z\| = 1$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\left(y_n\right) \subseteq Y$ ώστε $\|x_0 - y_n\| \to 1$, είναι σαφές ότι η $\left(y_n\right)$ είναι φραγμένη. Έτσι συμπεραίνουμε από την συμπάγεια των κλειστών σφαιρών του Y – αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης –ότι η $\left(y_n\right)$ έχει υπακολουθία συγκλίνουσα μέσα στον Y. Έστω $y_{k_n} \to y_0 \in Y$. Συνεπώς,

$\left\|x_0 - y_{k_n}\right\| \to \left\|x_0 - y_0\right\| = 1$. Θέτομε $x = x_0 - y_0$ και παρατηρούμε ότι, εφόσον $y_0 \in Y$, θα έχουμε ότι $\pi(x) = \pi(x_0)$ και $\|x\| = 1 = d(x_0, Y) = d(x, Y)$

Παρατήρηση 1.6 Παρατηρούμε ότι αυτό που στην πραγματικότητα αποδείξαμε στο δεύτερο μέρος του προηγούμενου Λήμματος είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα: Αν ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης υποχώρος του χώρου με νόρμα X και $\pi : X \to X/Y$ είναι η κανονική απεικόνιση, τότε $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) = \hat{\mathrm{B}}_{X/Y}$, (πρβλ και την παρατήρηση 1.4).

Υπενθυμίζουμε ακόμα ότι αν H είναι χώρος Hilbert και F γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε για κάθε $x \in \mathrm{H}$ με $x \notin F$ υπάρχει ακριβώς ένα $y \in F$ ώστε $\|x - y\| = d(x, F)$. Έτσι αν $d(x, F) = 1 = \|\pi(x)\|$, τότε θέτοντας $x_1 = x - y$ έχουμε ότι $\pi(x) = \pi(x_1)$ και $\|x_1\| = 1$. Συνεπώς και στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\right) = \hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}/F}$. (Πρβλ. τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.2 και την παρατήρηση 4.2.13.)

Πόρισμα 1.7 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης και $X_1 \underset{\neq}{\subset} X_2 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} X_n \underset{\neq}{\subset} \dots$, ακολουθία υποχώρων του X πεπερασμένης διάστασης.

Τότε : (α) Υπάρχει μία ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ έτσι ώστε, $1 = \|x_n\| = d(x_n, X_{n-1}), n \geq 2$.

(β) Ιδιαίτερα έχουμε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n \neq m$

Απόδειξη. (α) Έστω $x_1 \in X_1$ με $\|x_1\| = 1$. Προχωρώντας με επαγωγή και με την βοήθεια του ισχυρισμού (β) του Λήμματος Riesz για το ζεύγος X_{n-1}, X_n επιλέγομε την ακολουθία (x_n) με τις ζητούμενες ιδιότητες. Από αυτό που μόλις αποδείξαμε έπεται εύκολα και η ύπαρξη μιας ακολουθίας $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n, m \in N$ με $n \neq m$.

Παρόλα αυτά θα δώσουμε και μια απευθείας απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.

(β) Έστω λοιπόν $x_1 \in S_X$, θέτομε $X_1 = \langle x_1 \rangle \underset{\neq}{\subset} X$. Από το Λήμμα του Riesz υπάρχει $x_2 \in S_X : d(x_2, X_1) = 1$. Θέτομε $X_2 = \langle x_1, x_2 \rangle \underset{\neq}{\subset} X$ και συνεχίζουμε με επαγωγή. Αν τα $x_1, \dots, x_n \in S_X$ έχουν ορισθεί θέτομε $X_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ και επειδή $\dim X_n < \infty$ και $\dim X = \infty$ υπάρχει $x_{n+1} \in S_X$ ώστε $d(x_{n+1}, X_n) = 1$. Από την κατασκευή μας είναι φανερό ότι $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n \neq m$.

Παρατηρήσεις 1) Έστω X χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης (α) Είναι δυνατό να αποδειχθεί με χρήση του θεωρήματος Hahn-Banach ότι υπάρχει $(x_n) \subseteq X$ ώστε $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| > 1, \forall n \neq m$. (δες το [D] σελίδα7).

(β) Επίσης αποδεικνύεται (Θεώρημα των Odell-Elton, δες το [D] σελίδα 240) ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| \geq 1 + \delta, \forall n \neq m$

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται ένας σημαντικός χαρακτηρισμός των χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1.8 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο X είναι πεπερασμένης διάστασης

(ιι) Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{\mathrm{B}}_X$ του X είναι συμπαγές σύνολο

Απόδειξη (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Είναι γνωστό ότι αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε η $\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι συμπαγές σύνολο.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Αν ο X είχε άπειρη διάσταση τότε από το προηγούμενο αποτέλεσμα θα υπήρχε μία ακολουθία $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n, m \in N$ με $n \neq m$

Είναι σαφές ότι η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι η (x_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\hat{\mathrm{B}}_X$.

Παρατήρηση 1.9 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y κλειστός υποχώρος του X .
Θεωρούμε την κανονική απεικόνιση $\pi : X \to X / Y$

(α) Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x' \in X$ ώστε $\pi(x') = \pi(x)$ και $\|x'\| < \|\pi(x)\| + \varepsilon$.
Πράγματι, έστω $y_0 \in Y : \|x - y_0\| < d(x, Y) + \varepsilon = \|\pi(x)\| + \varepsilon$ θέτομε $x' = x - y_0$, τότε $x' - x = -y_0 \in Y$ και άρα $\pi(x) = \pi(x')$, επίσης $\|x'\| = \|x - y_0\| < \|\pi(x)\| + \varepsilon$.

(β) Αν $x_1, x_2 \in X$ και $z \in \pi(x_1) = x_1 + Y$ τότε, $d(z, \pi(x_2)) = \|\pi(x_1) - \pi(x_2)\|$.

Πράγματι, αν $z \in x_1 + Y$ τότε,

$$d(z, \pi(x_2)) = \inf\{\|z - (x_2 + y)\| : y \in Y\} = \inf\{\|(z - x_2) - y\| : y \in Y\} = \left\|z - \hat{x_2}\right\| = \left\|\hat{z} - \hat{x_2}\right\|$$

$$= \left\|\hat{x_1} - \hat{x_2}\right\| = \|\pi(x_1) - \pi(x_2)\|, \text{ εφόσον } z \in x_1 + Y \Leftrightarrow \hat{z} = \hat{x_1} .$$

Θεώρημα 1.10 Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υποχώρος του X , τότε ο χώρος πηλίκο X / Y είναι χώρος Banach.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\left(\hat{x}_n\right)$ ακολουθία Cauchy στον χώρο X/Y. Επιλέγομε με επαγωγή μια υπακολουθία $\left(\hat{x}_{n_k}\right)$ της $\left(\hat{x}_n\right)$ ώστε να ισχύει,

(1) $\left\|\hat{x}_{n_k}-\hat{x}_{n_{k+1}}\right\|<\frac{1}{2^k}, k=1,2,\ldots$

(Για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ υπάρχει $n_1\in N: n>m\geq n_1$ τότε $\left\|\hat{x}_n-\hat{x}_m\right\|<\frac{1}{2}$. Κατόπιν για $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$, επιλέγουμε $n_2>n_1: n>m\geq n_2$ τότε $\left\|\hat{x}_n-\hat{x}_m\right\|<\frac{1}{2^2}$. Συνεχίζουμε με επαγωγή και έτσι εντοπίζουμε μία υπακολουθία $\left(n_k\right)$ των φυσικών αριθμών ώστε να ισχύει η (1)).

Ακολούθως επιλέγομε με επαγωγή μία ακολουθία $z_{n_k}\in\hat{x}_{n_k}, k=1,2,\ldots$, ώστε $\left\|z_{n_k}-z_{n_{k+1}}\right\|<\frac{1}{2^k}, k=1,2,\ldots$

Έστω $z_{n_1}\in\hat{x}_{n_1}$, από την προηγούμενη παρατήρηση $d\left(z_{n_1},\hat{x}_{n_2}\right)=\left\|\hat{x}_{n_1}-\hat{x}_{n_2}\right\|<\frac{1}{2}$

Έπεται ότι υπάρχει $z_{n_2}\in\hat{x}_{n_2}$ ώστε $\left\|z_{n_1}-z_{n_2}\right\|<\frac{1}{2}$. Επειδή $z_{n_2}\in\hat{x}_{n_2}$ έπεται ότι $d\left(z_{n_2},\hat{x}_{n_3}\right)=\left\|\hat{x}_{n_2}-\hat{x}_{n_3}\right\|<\frac{1}{2^2}$ άρα υπάρχει $z_{n_3}\in\hat{x}_{n_3}$ ώστε $\left\|z_{n_2}-z_{n_3}\right\|<\frac{1}{2^2}$. Προχωρούμε με επαγωγή στην επιλογή της $\left(z_{n_n}\right)$. Η $\left(z_{n_n}\right)$ είναι μια ακολουθία Cauchy. Πράγματι, αν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $k_0\in N:\frac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$. Αν $\lambda>\mu\geq k_0+1$ τότε,

$\left\|z_{n_\lambda}-z_{n_\mu}\right\|\leq\left\|z_{n_\mu}-z_{n_{\mu+1}}\right\|+\ldots+\left\|z_{n_{\lambda-1}}-z_{n_\lambda}\right\|\leq\frac{1}{2^\mu}+\ldots+\frac{1}{2^{\lambda-1}}<\frac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$. Επειδή ο X είναι χώρος Banach υπάρχει $x\in X: z_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|}x$. Από τη συνέχεια της κανονικής απεικόνισης π, έπεται ότι $\pi\left(z_{n_k}\right)=\hat{x}_{n_k}\to\pi\left(x\right)=\hat{x}$ στον χώρο X/Y. Επειδή η $\left(\hat{x}_n\right)$ είναι ακολουθία Cauchy στον X/Y και έχει υπακολουθία συγκλίνουσα, έπεται ότι και η ίδια είναι συγκλίνουσα.

<u>Παράδειγμα </u>1.11 Θεωρούμε τον χώρο πηλίκο ℓ_∞/c_0 τότε η νόρμα πηλίκο δίνεται από τον τύπο, $\left\|\hat{x}\right\|=\limsup_{n\to\infty}\left|x_n\right|$, όπου $x\in\ell_\infty, x=\left(x_n\right)$.

Πράγματι, αν $x \in c_0 \Leftrightarrow \lim x_n = 0$ τότε, $\left\|\hat{x}\right\| = d\left(x, c_0\right) = 0 = \lim\left|x_n\right|$

Υποθέτουμε ότι $x = \left(x_n\right) \in \ell_\infty$ κα $x \notin c_0$ ι, ισοδύναμα ότι $x = \left(x_n\right)$ είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών η οποία <u>δεν</u> είναι μηδενική, δηλαδή ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left|x_n\right| = a > 0 \text{ και } \left(x_n\right) \text{ φραγμένη.}$$

Παρατηρούμε ότι: 1) Έστω $y = \left(y_n\right) \in c_0$ τότε

$\limsup\left|x_n - y_n\right| = \limsup\left|x_n\right| = a$ (Αν, $\left|x_{k_n} - y_{k_n}\right|, n \geq 1$, είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $\left|x_n - y_n\right|, n \geq 1$ τότε $y_{k_n} \to 0$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{k_n} - y_{k_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{k_n}\right| \leq a$. Επειδή υπάρχει υπακολουθία $\left(x_{m_n}\right)$ της $\left(x_n\right)$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{m_n}\right| = a$ έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{m_n} - y_{m_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{m_n}\right| = a$, άρα έχουμε το συμπέρασμα).

2) $$a \leq d\left(x, c_0\right) = \left\|\hat{x}\right\|$$

Πράγματι, αν $y = \left(y_n\right) \in c_0$ τότε από την (1) $a = \limsup\limits_n\left|x_n - y_n\right| \leq \sup\limits_{n\geq 1}\left|x_n - y_n\right|$ $= \left\|x - y\right\| \Rightarrow a \leq d\left(x, c_0\right)$.

Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότ ι $a < d\left(x, c_0\right)$.

Θέτομε $x^n = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots\right) \in c_0, n \geq 1$.

Έπεται ότι, $a < d\left(x, c_0\right) \leq \left\|x - x^n\right\| = \sup\left\{\left|x_k\right| : k \geq n+1\right\}, \forall n \geq 1$.

Συνεπώς, $a < d\left(x, c_0\right) \leq \lim\limits_n\left[\sup\left\{\left|x_k\right| : k \geq n+1\right\}\right] = \limsup\limits_n\left|x_n\right| = a$, έτσι έχουμε καταλήξει σε αντίφαση.

<u>Πρόταση</u> 1.12 Έστω X, Z χώροι Banach και $T : X \to Z$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του Z. Τότε ο χώρος πηλίκο $X / KerT$ είναι ισόμορφος του Z.

<u>Απόδειξη</u> Ορίζουμε $F : X / KerT \to Z$ με $F\left(x + KerT\right) = T\left(x\right)$. Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι ένας (καλά ορισμένος) γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι φραγμένος , $1-1$ και επί του Z. Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης θα έχουμε το συμπέρασμα.
Παρατηρούμε ακόμη ότι $T = Fo\pi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/KerT \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

(I) Ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής .

Έστω $x, x' \in X$ ώστε,
$x + KerT = x' + KerT \Leftrightarrow x - x' \in KerT \Leftrightarrow T(x - x') = 0 \Leftrightarrow T(x) = T(x')$. Άρα ο T είναι καλά ορισμένος. Ο T είναι επίσης γραμμικός αφού,
$F(\lambda(x + KerT) + \mu(y + KerT)) = F(\lambda x + \mu y + KerT) = T(\lambda x + \mu y) =$
$\lambda T(x) + \mu T(y) = \lambda F(x + KerT) + \mu(y + KerT)$.

(II) Ο T είναι $1-1$ και επί του Z . Έστω
$F(x + KerT) = F(y + KerT) \Leftrightarrow T(x) = T(y) \Leftrightarrow T(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in KerT$
$\Leftrightarrow x + KerT = y + KerT$. Ο T είναι επί, αφού αν $z \in Z$ τότε (ο T είναι επί) υπάρχει $x \in X = T(x) = z$, άρα $F(x + KerT) = z$.

(III) Ο T είναι φραγμένος, με $\|F\| = \|T\|$. Έστω $x + KerT \in X / KerT$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $y \in x + KerT$ με $\|y\| < \|x + KerT\| + \varepsilon$ (παρατήρηση 1.9).

Συνεπώς $\|F(x + KerT)\| = \|F(y + KerT)\| = \|T(y)\| \leq \|T\| \cdot \|y\| < \|T\|(\|x + KerT\| + \varepsilon)$.

Εφόσον η ανισότητα ισχύει για κάθε θετικό ε , έπεται ότι,

$$\|F(x + KerT)\| \leq \|T\| \cdot \|x + KerT\|.$$

Συνεπώς $\|F\| \leq \|T\|$ και ο F είναι φραγμένος. Επειδή δε,
$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F(x + KerT)\| \leq \sup_{\|x + KerT\| \leq 1} \|F(x + KerT)\| = \|F\|$, συμπεραίνουμε ότι, $\|F\| = \|T\|$

<u>Πόρισμα </u>1.13 Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X υπάρχει ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος Y του $\ell_1(N)$ ώστε ο χώρος πηλίκο $\ell_1(N)/Y$ να είναι ισόμορφος με τον X .

<u>Απόδειξη</u> Ως γνωστό επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : \ell_1(N) \to X$ ο οποίος είναι επί του X . Θέτομε $Y = KerT$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε το συμπέρασμα.

<u>Παρατήρηση</u> 1.14 Υπενθυμίζουμε εν συντομία το αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο Πόρισμα, δηλαδή ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach X είναι συνεχής γραμμική εικόνα του ℓ_1. Έστω $D = \{x_n, n \geq 1\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της B_X .

Ορίζουμε $T:\ell_1 \to X$ με $T\left(\left(\lambda_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$, επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα ο T είναι ένας καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι φραγμένος με $\|T\|\le 1$. Αποδεικνύεται ακόμη ότι ο T είναι και επί του Y. Έστω $x\in \mathrm{B}_X \Leftrightarrow \|x\|<1$, εφόσον το D είναι πυκνό υπάρχει στην B_X (η B_X δεν έχει μεμονωμένα σημεία) υπακολουθία $\left(x_{m_n}\right)$ της $\left(x_n\right)$ με $x_{m_n}\xrightarrow{\|\cdot\|}x$. Θέτομε $z_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)e_{m_n}, n\ge 1$ (όπου $\left(e_n\right)$ η συνήθης βάση του ℓ_1), τότε $z_n\in \mathrm{B}_{\ell_1}$ και $T\left(z_n\right)\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, άρα $x\in\overline{T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)}$. Έτσι αποδείξαμε ότι $\mathrm{B}_X\subseteq\overline{T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)}$. Από ένα γνωστό Λήμμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης έπεται ότι $\mathrm{B}_X\subseteq T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)$ από όπου συμπεραίνουμε ότι ο T είναι επί του X. Αξίζει να σημειωθεί ότι ισχύει προφανώς και η σχέση $T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)\subseteq \mathrm{B}_X$, και συνεπώς $\mathrm{B}_X=T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)$. Έπεται ότι αν $F:\ell_1/Y\to X$, όπου $Y=KerT$, είναι ο τελεστής του θεωρήματος 1.12, τότε $F\left(\mathrm{B}_{\ell_1/Y}\right)=T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)=\mathrm{B}_X$. Από όπου έπεται ότι ο F είναι μια ισομετρία (γιατί;) και άρα ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με ένα πηλίκο του χώρου ℓ_1.

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των χώρων πηλίκων είναι και η ακόλουθη.

<u>Πρόταση</u> 1.15 Έστω X χώρος με νόρμα, Z κλειστός υποχώρος του X και Y υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο $Y+Z$ είναι κλειστός υποχώρος του X .

<u>Απόδειξη</u> . Έστω $\pi:X\to X/Z$ η κανονική απεικόνιση. Ο $\pi\left(Y\right)$ είναι πεπερασμένης διάστασης υποχώρος του X/Z και άρα κλειστός υποχώρος του X/Z. Αφού η π είναι συνεχής ο $\pi^{-1}\left(\pi\left(Y\right)\right)$ είναι κλειστός υποχώρος του X . Παρατηρούμε ότι,

$$x\in\pi^{-1}\left(\pi\left(Y\right)\right)\Leftrightarrow\pi\left(x\right)\in\pi\left(Y\right)\Leftrightarrow\exists y\in Y:\pi\left(x\right)=\pi\left(y\right)\Leftrightarrow x-y\in Z\Leftrightarrow x\in Y+Z.$$

Έπεται ότι $Y+Z=\pi^{-1}\left(\pi\left(Y\right)\right)$ και ο $Y+Z$ είναι κλειστός υποχώρος του X .

2 Πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και προβολές σε χώρους με νόρμα.

Έστω $(X,\|\cdot\|)$ και $(Y,\|\cdot\|)$ χώροι με νόρμα. Τότε ο διανυσματικός χώρος $X\times Y=\{(x,y): x\in X \text{ και } y\in Y\}$ (με τις συνήθεις κατά σημείο πράξεις) γίνεται χώρος με νόρμα, με τις ακόλουθες νόρμες οι οποίες ορίζονται μέσω των νορμών των X και Y .

(α) $\|(x,y)\|_1=\|x\|+\|y\|$.

(β) $\|(x,y)\|_\infty=\max(\|x\|,\|y\|)$ και

(γ) $\|(x,y)\|_p=\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1\le p<+\infty$

Το γεγονός ότι οι παραπάνω τύποι ορίζουν νόρμες στον διανυσματικό χώρο $X\times Y$ έπεται εύκολα στις περιπτώσεις (α) και (β) και με την βοήθεια της ανισότητας Minkowski για τον R^2 (ή C^2) στην περίπτωση (γ), αν $p>1$.

Παρατηρούμε ότι: 1) Οι παραπάνω νόρμες είναι μεταξύ τους ισοδύναμες. Πράγματι, έστω $1\le p<+\infty$, τότε $(x_n,y_n)\xrightarrow{\|\cdot\|_p}(x,y)\Leftrightarrow \|x_n-x\|^p+\|y_n-y\|^p\to 0 \Leftrightarrow \|x_n-x\|\to 0$ και $\|y_n-y\|\to 0$. Αν $p=\infty$, τότε $(x_n,y_n)\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}(x,y)\Leftrightarrow \max(\|x_n-x\|,\|y_n-y\|)\to 0 \Leftrightarrow \|x_n-x\|\to 0$ και $\|y_n-y\|\to 0$.
Παρατηρούμε ότι οι $\|\cdot\|_p, 1\le p\le\infty$ επάγουν την τοπολογία γινόμενο στον χώρο $X\times Y$.

2) Αν οι $(X,\|\cdot\|)$ και $(Y,\|\cdot\|)$ είναι χώροι Banach τότε ο $X\times Y$ με την $\|\cdot\|_p$ νόρμα $(1\le p\le\infty)$ είναι επίσης χώρος Banach. Πράγματι, έστω $(x_n,y_n), n\ge 1$, ακολουθία Cauchy ως προς την $\|\cdot\|_1$ νόρμα. Αν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $N_0\in N$ ώστε

$$n>m\ge N_0 \Rightarrow \|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|_1=\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|<\varepsilon .$$

Συνεπώς, αν $n>m\ge N_0$ τότε $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ και $\|y_n-y_m\|<\varepsilon$, δηλαδή οι (x_n) και (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους X και Y αντίστοιχα, άρα συγκλίνουσες, έστω $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$ και $y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}y$. Είναι τότε σαφές από την προηγούμενη παρατήρηση ότι $(x_n,y_n)\xrightarrow{\|\cdot\|_1}(x,y)$.

Ο χώρος $X\times Y$ με την $\|\cdot\|_p$ νόρμα ($1\le p\le\infty$) συμβολίζεται με $(X\oplus Y)_p$. Τα παραπάνω γενικεύονται με τον προφανή τρόπο και για μια πεπερασμένη ακολουθία $(X_1,\|\cdot\|),\dots,(X_n,\|\cdot\|)$ χώρων με νόρμα και ο χώρος $X_1\times\dots\times X_n$ με την $\|\cdot\|_p$ νόρμα ονομάζεται το <u>ευθύ άθροισμα</u> των χώρων $X_1,\dots,X_n$ στην $\|\cdot\|_p$ και συμβολίζεται με

$\left(\sum_{k=1}^{n}\oplus X_k\right)_p$ ή με $\left(X_1\oplus\dots\oplus X_n\right)_p$.

Στο σημείο αυτό θα υπενθυμίσουμε κάποιες έννοιες από την Γραμμική Άλγεβρα. Ένας διανυσματικός χώρος X λέγεται ότι είναι το αλγεβρικό <u>ευθύ άθροισμα</u> των υποχώρων Y και Z αν $Y\bigcap Z=\{0\}$ και $Z+Y=X$. Ισοδύναμα αν κάθε $x\in X$ γράφεται μοναδικά ως $x=y+z$ με $y\in Y$ και $z\in Z$. Οι Y και Z λέγονται τότε <u>αλγεβρικά συμπληρωματικοί</u> στον X και αυτό το δηλώνουμε γράφοντας

$$X=Y\oplus Z.$$

Αν ο Y είναι (διανυσματικός) υποχώρος του X, μια γραμμική απεικόνιση $P:X\to X$ λέγεται <u>προβολή</u> του X επί του Y, αν $P(X)=Y$ και $P(y)=y,\forall y\in Y$. Δηλαδή, αν $P(X)=Y$ και $P(P(x))=P(x),\forall x\in X$. Παρατηρούμε ότι αν θέσωμε $Z=KerP$ τότε θα έχομε, $X=Y\oplus Z$.

Αντίστροφα, έστω ότι για ένα διανυσματικό χώρο X και για τους υποχώρους του Y και Z ισχύει ότι $X=Y\oplus Z$, δηλαδή ο X είναι το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα των Y και Z.

Έπεται τότε εύκολα ότι οι απεικονίσεις $P_1:X\to X$ και $P_2:X\to X$ ώστε $P_1(x)=x_1$ και $P_2(x)=x_2$, όπου $x\in X$ και $x=x_1+x_2$ με $x_1\in Y$ και $x_2\in Z$ είναι προβολές του X στους Y και Z αντίστοιχα, ώστε $KerP_1=Z$ και $KerP_2=Y$.

Σημειώνουμε ότι, αν ο X είναι διανυσματικός χώρος και ο Y διανυσματικός υποχώρος του τότε υπάρχει διανυσματικός υποχώρος Z του X ώστε $X=Y\oplus Z$. (Ο Z δεν είναι βέβαια μοναδικός). Για να το αποδείξετε θεωρείστε μια βάση Hamel του Y και επεκτείνετέ την με το Λήμμα του Zorn σε μια βάση Hamel του X.

Εμείς ενδιαφερόμαστε βέβαια για χώρους με νόρμα $\left(X,\|\cdot\|\right)$ και για <u>φραγμένες προβολές</u> $P:X\to X$.

<u>Πρόταση</u> 2.1 Έστω $\left(X,\|\cdot\|\right)$ χώρος με νόρμα και $P:X\to X$ προβολή με $P(X)=Y$ και $Z=KerP$, άρα $X=Y\oplus Z$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (ι) Η P είναι φραγμένη προβολή.

(ιι) Η « φυσιολογική» απεικόνιση, $\Phi:(x,y)\in Y\times Z\to x+y\in X$ είναι ομοιομορφισμός.

<u>Απόδειξη</u> Παρατηρούμε ότι η Φ είναι γραμμική $1-1$ και βέβαια επί του X (αλγεβρικός ισομορφισμός). Επίσης η Φ είναι συνεχής αφού είναι ο περιορισμός της πρόσθεσης $+:X\times X\to X$ στον υποχώρο $Y\times Z$ του $X\times X$. (Ο $X\times X$ θεωρείται βεβαίως με την τοπολογία γινόμενο, η οποία όπως είδαμε επάγεται από τις $\|\cdot\|_p$ νόρμες $1\le p\le\infty$).

(ι) $\Rightarrow$ (ιι) Εφόσον η προβολή $P: X \to X$ είναι φραγμένη, δηλαδή συνεχής, τότε και η προβολή $Q: X \to X : Q(x) = x - P(x)$ είναι συνεχής $(Q = I_x - P)$. Έπεται ότι και η αντίστροφη της Φ, δηλαδή η απεικόνιση, $F = \Phi^{-1} : X \to Y \times Z$ ώστε $F(x) = (P(x), Q(x)), x \in X$, είναι συνεχής

Έπεται προφανώς ότι η Φ είναι ομοιομορφισμός.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Αν η Φ είναι ομοιομορφισμός τότε (και μόνο τότε) η $F = \Phi^{-1} : X \to Y \times Z$ είναι συνεχής και κατά συνέπεια οι P και Q είναι συνεχείς απεικονίσεις, αφού $F(x) = (P(x), Q(x)), x \in X$.

Ορισμός 2.2 Έστω X χώρος με νόρμα. Ένας διανυσματικός υποχώρος Y του X λέγεται (τοπολογικά) συμπληρωματικός στον X, αν υπάρχει φραγμένη προβολή $P: X \to X$ με $P(X) = Y$.

Παράδειγμα 2.2 Έστω Y, Z χώροι με νόρμα και $1 \le p \le \infty$. Τότε κάθε ένας από τους Y και Z είναι (προφανώς) συμπληρωματικός υποχώρος του χώρου $X = (Y \oplus Z)_p$.

(Παρατηρούμε ότι η προβολή $P: X \to Y : P(y, z) = y$, ταυτίζεται ουσιαστικά με την κανονική απεικόνιση $\pi : X \to X / Z$ και επομένως $X / Z \cong Y$ (τοπολογικός ισομορφισμός))

Παρατηρούμε ότι όπως έπεται από την πρόταση 2.1 ο Y είναι συμπληρωματικός στον X, ακριβώς τότε αν η φυσιολογική απεικόνιση $\Phi : Y \times Z \to X : \Phi(x, y) = x + y$ είναι ομοιομορφισμός, όπου $Z = KerP$.

Επίσης σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή και ο Z είναι συμπληρωματικός στον X (αφού $Z = Q(X)$, όπου Q είναι η φραγμένη προβολή $Q = I_X - P$) και ακόμη ότι οι Y και Z είναι αναγκαία κλειστοί υποχώροι του X (γιατί;).

Ένα αλγεβρικό ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$ με την απεικόνιση Φ συνεχή (ισοδύναμα με τις P και Q φραγμένες) θα ονομάζεται τοπολογικό ευθύ άθροισμα των Y και Z. Σημειώνουμε ότι ένα αλγεβρικό ευθύ άθροισμα $X = Y \oplus Z$ με τους Y και Z κλειστούς υποχώρους του X δεν είναι αναγκαία και τοπολογικό (πρβλ. άσκηση 3). Αν όμως ο X είναι χώρος Banach αυτό ισχύει, όπως θα αποδείξουμε ευθύς αμέσως. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μια ωραία εφαρμογή του θεωρήματος του κλειστού γραφήματος.

Θεώρημα 2.3 Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υποχώρος του X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο Y είναι (τοπολογικά) συμπληρωματικός υποχώρος του X.

(ιι) Υπάρχει κλειστός υποχώρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$ (δηλαδή $Y \bigcap Z = \{0\}$ και $X = Y + Z$).

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $P : X \to X$ φραγμένη προβολή με $P(X) = Y$. Θέτομε $Z = KerP$ τότε (όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει) $X = Y \oplus Z$ και επειδή P συνεχής ο $Z = P^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστός υποχώρος του X .

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Έστω $X = Y \oplus Z$, όπου Y, Z είναι κλειστοί υπόχωροι του X . Όπως γνωρίζουμε ο τελεστής $P : X \to X : P(x) = y$ όπου $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$ είναι γραμμική προβολή με $P(X) = Y$ και $Z = KerP$, θα αποδείξουμε ότι η P είναι και φραγμένη. Όμως επειδή ο X είναι χώρος Banach αρκεί, από το θεώρημα κλειστού γραφήματος, να αποδείξουμε ότι η P έχει κλειστό γράφημα. Έστω $G_P = \{(x, P(x)) : x \in X\}$ το γράφημα της P. Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n, y_n), n \geq 1$ στοιχείων του G_P και $(x, y) \in X \times X$ ώστε$(x_n, y_n) \to (x, y)$. Τότε βέβαια $x_n \to x$ και $y_n = P(x_n) \to y$. Επειδή ο Y είναι κλειστός στον X έπεται ότι $y \in Y$ και άρα $P(y) = y$.

Παρατηρούμε ότι
$P(x_n - y_n) = P(x_n - P(x_n)) = P(x_n) - P(P(x_n)) = P(x_n) - P(x_n) = 0, n \geq 1$. Έπεται ότι, $x_n - y_n \in KerP = Z, n \geq 1$ και επειδή ο Z είναι κλειστός στον X , θα έχουμε ότι $x - y \in Z$, αφού $x_n - y_n \to x - y$.

Συνεπώς, $P(x - y) = 0 \Leftrightarrow P(x) = P(y) = y$ και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποιες συνέπειες του θεωρήματος 2.3.

<u>Πρόταση</u> 2.4 Έστω X χώρος Banach και Y <u>κλειστός</u> υποχώρος του X <u>πεπερασμένης συνδιάστασης</u>. Τότε κάθε αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y είναι και τοπολογικό συμπλήρωμα του Y . Ειδικότερα ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X .

<u>Απόδειξη</u> Έστω Z ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y , δηλαδή $X = Y \oplus Z$. Από την υπόθεσή μας ο Z είναι πεπερασμένης διάστασης και επομένως κλειστός υπόχωρος του X . Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται το συμπέρασμα.

<u>Παρατήρηση</u> 2.5 Έστω X χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης και Y ένας (διανυσματικός) υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης, τότε ο Y <u>δεν</u> είναι αναγκαία κλειστός. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : X \to K$ που δεν είναι φραγμένο (επειδή ο X έχει άπειρη διάσταση, υπάρχει πάντοτε ένα τέτοιο συναρτησοειδές). Τότε το υπερεπίπεδο $Y = Ker\Lambda$ είναι (ως γνωστόν) ένα <u>πυκνό</u> υποσύνολο του X .

Επομένως η υπόθεση ότι ο Y είναι κλειστός στην προηγούμενη πρόταση είναι αναγκαία.

Πρόταση 2.6 Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X

Απόδειξη Ο Y είναι βέβαια κλειστός στον X αφού έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω $\dim Y = n$ και $\{y_1,...,y_n\}$ μια αλγεβρική βάση του Y (μια βάση Hamel). Για κάθε $k = 1,2,...,n$, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές, $\Lambda_k : Y \to K : \Lambda_k\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\right) = \lambda_k$ και παρατηρούμε ότι, εφόσον ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, το Λ_k είναι φραγμένο συναρτησοειδές. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $F_k : X \to K$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $F_k\big|_Y = \Lambda_k, k = 1,2,...,n$. Θέτομε, $Z = \bigcap_{k=1}^{n} KerF_k$. Ο Z είναι κλειστός υπόχωρος του X θα αποδείξουμε ότι $X = Y \oplus Z$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι, $Y \bigcap Z = \{0\}$. Πράγματι, έστω $\omega \in Y \bigcap Z$, εφόσον $\omega \in Y$ θα έχουμε ότι, $\omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$, για κάποια $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$. Από την άλλη μεριά επειδή $\omega \in Z$ θα έχουμε ότι για κάθε $k = 1,2,...,n, \quad 0 = F_k(\omega) = \Lambda_k(\omega) = \lambda_k$, και συνεπώς $\omega = 0$. Έστω τώρα $x \in X$. Θέτομε $y = \sum_{j=1}^{n} F_j(x) y_j \in Y$ και παρατηρούμε ότι $x - y \in Z$. Πράγματι, για κάθε $k = 1,2,...,n$ έχουμε ότι

$$F_k(x-y) = F_k(x) - F_k(y) = F_k(x) - \sum_{j=1}^{n} F_j(x)\cdot F_k(y_j) = F_k(x) - \sum_{j=1}^{n} F_j(x)\cdot \Lambda_k(y_j) =$$
$$F_k(x) - F_k(x) = 0, \ \left(\Lambda_k(y_j) = \delta_{kj}, 1 \le k, j \le n\right).$$

Έπεται ότι, $x - y \in KerF_k, \forall k = 1,2,...n \Leftrightarrow x - y \in \bigcap_{k=1}^{n} KerF_k = Z$. Έτσι καταλήγουμε στο ότι, $X = Y \oplus Z$ με τους Y, Z να είναι κλειστοί υπόχωροι του X και συνεπώς από το θεώρημα 2.3 ο Y είναι συμπληρωματικός στον X.

Σημείωση Η υπόθεση ότι ο X είναι χώρος Banach στα προηγούμενα δύο αποτελέσματα δεν είναι απαραίτητη (αφήνεται ως άσκηση).

Παρατηρήσεις 2.7 1) Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Ένας απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος Y του X δεν είναι αναγκαία συμπληρωματικός στον X, δηλαδή, δεν υπάρχει πάντοτε ένας κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$. (Βέβαια ο Y έχει πάντοτε ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα). Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ζεύγος $Y = c_0$ και $X = \ell^\infty$ (θεώρημα Phillips, πρβλ το θεώρημα 5.15 του βιβλίου [F-H-H-M-P-Z]).

Σημειώνουμε ότι ο χώρος c_0 είναι συμπληρωματικός σε οποιονδήποτε διαχωρίσιμο χώρο Banach εμφυτεύεται ισομορφικά (θεώρημα Sobczyk, πρβλ το θεώρημα 5.14 του ίδιου βιβλίου).

2) Υπενθυμίζουμε ότι αν H είναι ένας χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $F^{\perp}$ του F ($F^{\perp}=\{x\in H : x\perp y, \forall y\in F\}$) είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H που είναι τοπολογικό συμπλήρωμα του F, δηλαδή, $H=F\oplus F^{\perp}$. Σημειώνουμε ακόμη ότι η ορθογώνια προβολή $P:H\to H$ με $P(H)=F$ και $KerP=F^{\perp}$ έχει νόρμα ίση με το ένα ($\|P\|=1$).

Σημειώνουμε ότι, αν ένας χώρος Banach X έχει την ιδιότητα ότι κάθε κλειστός υπόχωρος του είναι συμπληρωματικός στον X τότε ο X είναι ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert.

(Θεώρημα των Lindenstrauss και Tzatriri, πρβλ το θεώρημα 5.7)

3) Οι κλασικοί χώροι Banach $\ell_p, 1\le p<+\infty$, c_0 και $C[0,1]$ έχουν πολλούς απειροδιάστατους συμπληρωματικούς υποχώρους. Για παράδειγμα αν $X=\ell_p, 1\le p<+\infty$ ή $X=c_0$, τότε κάθε απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του X περιέχει ένα κλειστό υπόχωρο συμπληρωματικό στον X και ισομορφικό με τον X. [πρβλ. [L-T] ή [F-H-H-M-P-Z] θεώρημα 6.23 και 6.24).

Παρόλα αυτά υπάρχουν απειροδιάστατοι χώροι Banach που δεν είναι διασπάσιμοι, δηλαδή δεν υπάρχει ένα ζεύγος απειροδιάστατων κλειστών υποχώρων Y και Z του X ώστε $X=Y\oplus Z$.

Περαιτέρω υπάρχουν απειροδιάστατοι χώροι Banach που έχουν την ιδιότητα αυτή κληρονομικά, δηλαδή κάθε απειροδιάστατος κλειστός υποχώρος τους είναι μη διασπάσιμος (Gowers-Maurey 1992, πρβλ το [F-H-H-M-P-Z] και την βιβλιογραφία που παρατίθεται εκεί). Είναι σαφές ότι οι χώροι αυτού του είδους βρίσκονται στον αντίποδα των χώρων Hilbert.

4) Για μια άλλη απόδειξη της πρότασης 2.6 δες και το παράρτημα 1.

<u>Ασκήσεις</u>

1) Έστω Y,Z κλειστοί υπόχωροι του χώρου Banach X. Αν οι Y και Z είναι ισομορφικοί, είναι οι X/Y και X/Z ισομορφικοί;

[<u>Υπόδειξη</u> Όχι. Εξετάστε τους υποχώρους $Y=\{(0,x_2,x_3,...)\}$ και $Z=\{(0,0,x_3,x_4...)\}$ του $X=\ell_2$.]

2) Έστω $\Lambda : c_0\to R : \Lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n},\ \ x=(x_n)\in c_0$. Αποδείξτε ότι:

(α) Λ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\|\Lambda\|=1$ και $|\Lambda(x)|<1, \forall x\in c_0, \|x\|_{\infty}\le 1$.

(β) Έστω $H=Ker\Lambda$. Αν $a\in c_0-H$ τότε $d(a,H)<\|a-y\|,\ \forall y\in H$.

[<u>Υπόδειξη</u> Για τον ισχυρισμό (β), θεωρούμε το συναρτησοειδές $\Phi : c_0 / H \to R : \Phi(x+H) = \Lambda(x),\ x \in c_0$. Επειδή $\dim c_0 / H = 1$, αν $a \notin H$ και $\lambda = d(a,H)$ τότε $\left|\Phi\left(\frac{a}{\lambda}+H\right)\right| = \|\Phi\| = 1$.].

3) Έστω $X = \ell_2(N \bigcup \{0\})$ ο χώρος Hilbert. Θέτομε $Y = \overline{\langle e_{2n} : n \geq 0 \rangle} \subseteq X$, $Z = \overline{\langle e_{2n+1} + (n+1)e_{2n} : n \geq 0 \rangle}$ και $E = Y + Z$. Αποδείξτε ότι:

(α) $Y \bigcap Z = \{0\}$ και συνεπώς $E = Y \oplus Z$ (αλγεβρικό ευθύ άθροισμα).

(β) Ο E είναι πυκνός υπόχωρος του X και $E \neq X$.

(γ) Η προβολή $P : E \to Y : P(y+z) = y$ δεν είναι φραγμένη.

[<u>Υπόδειξη</u> Το σύνολο $\left\{ b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1} e_{2n+1} : n \geq 0 \right\}$ είναι ορθογώνιο και άρα το $\left\{ \frac{b_n}{\|b_n\|_2} : n \geq 1 \right\}$ ορθοκανονικό. Επίσης το σημείο $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - e_{2n}) \in X - E$.]

4) Έστω $T : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής μεταξύ των χώρων με νόρμα X, Y ο οποίος είναι $1-1$. Αποδείξτε ότι ο T είναι ισομετρία επι του Y αν και μόνο αν $T\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) = \hat{\mathrm{B}}_Y$, αν και μόνο αν $T(S_X) = S_Y$,αν και μόνο αν $T(\mathrm{B}_X) = \mathrm{B}_Y$.

5) Έστω X χώρος με νόρμα και $P : X \to X$ φραγμένη προβολή, τότε $\|P\| \geq 1$.

6) Έστω X χώρος με νόρμα, αποδείξτε ότι ο X^* είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X^{***}.

[<u>Υπόδειξη</u> Ορίζουμε $P : X^{***} \to X^* : f \to P(f) = f\big|_X$. Η προβολή αυτή ονομάζεται και προβολή του Dixmier].

7) Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X .

Αποδείξτε ότι:

α) Αν ο Y είναι κλειστός στον X και έχει πεπερασμένη συνδιάσταση στον X τότε είναι συμπληρωματικός στον X .

(β) Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση τότε είναι συμπληρωματικός στον X .

[<u>Υπόδειξη</u>. (α) Αν Z είναι ένα αλγεβρικό συμπλήρωμα του Y ως προς τον X τότε Z είναι πεπερασμένης διάστασης και άρα κλειστός υπόχωρος του X . Έστω $P : X \to Z \subseteq X$ η προβολή του X επί του Z . Παρατηρούμε ότι $P = j \circ \pi$, όπου $\pi : X \to X / Y$ η κανονική απεικόνιση και $j : X/Y \to Z : j(x+Y) = P(x)$. Η απεικόνιση j είναι ένας αλγεβρικός ισομορφισμός ο οποίος είναι (άρα) και ομοιομορφισμός. Για την απόδειξη του ισχυρισμού (β), χρησιμοποιείστε τον (α)].

8) Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί (μη τετριμμένοι) υπόχωροι του X ώστε $Y \bigcap Z = \{0\}$. Θέτομε $d = d(S_Y, S_Z)$.

Αποδείξτε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος $E = Y + Z$ του X είναι κλειστός στον X αν και μόνο αν $d > 0$.

[<u>Υπόδειξη</u> Έστω ότι ο E είναι κλειστός στον X. Τότε ο Y είναι συμπληρωματικός στον χώρο Banach E και συνεπώς υπάρχει μια φραγμένη προβολή, $P : E \to Y \subseteq E$. Αν $y \in S_Y$ και $z \in S_Z$, τότε $1 = \|y\| = \|P(y-z)\| \leq \|P\| \cdot \|y-z\| \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\|P\|} \leq d$.

Υποθέτομε τώρα ότι ο E δεν είναι κλειστός στον X. Έπεται τότε ότι δεν υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|y\| \leq c\|y-z\|, \forall y \in Y, \forall z \in Z$. (Πράγματι, αν υπήρχε τέτοια σταθερά τότε η προβολή $P : E \to Y$ θα ήταν φραγμένη, ισοδύναμα η απεικόνιση $\Phi : E \to Y \times Z$, $\Phi(y+z) = (y, z)$ θα ήταν ομοιομορφισμός και κατά συνέπεια ο E θα ήταν χώρος Banach, αφού ο $Y \times Z$ είναι χώρος Banach, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεσή μας.)

Ισοδύναμα, δεν υπάρχει $c > 0$ ώστε $1 = \|y\| \leq c\|y-z\|, \forall z \in Z, \forall y \in Y$ με $\|y\| = 1$.

Συνεπώς, $\forall n \geq 1\ \exists y_n \in Y$ με $\|y_n\| = 1$ και $z_n \in Z$ ώστε $\|y_n + z_n\| \leq \dfrac{1}{n}$. Έπεται ότι, $\|z_n\| \to 1$ και ακόμη ότι $\left\| y_n + \dfrac{z_n}{\|z_n\|} \right\| \to 0$.]

9) Έστω X χώρος με νόρμα και Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\forall x \in X - Y\ \ \exists y \in Y :\ \|x - y\| = d(x, Y)$.

(β) Αν $\pi : X \to X/Y$ είναι η κανονική απεικόνιση τότε $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) = \hat{\mathrm{B}}_{X/Y}$.

10) Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X ώστε $X = Y \oplus Z$

(τοπολογικό ευθύ άθροισμα).

(α) Αποδείξτε ότι, $X/Y \cong Z$ και $X/Z \cong Y$ (τοπολογικοί ισομορφισμοί) και

(β) Ισχύει το αποτέλεσμα χωρίς την υπόθεση ότι ο X είναι χώρος Banach;

[Υπόδειξη για το (β) Ναι , εφόσον η απεικόνιση $j : X/Y \to Z : j(x+Y) = P_Z(x)$ είναι ομοιομορφισμός].

3Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι

3.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί . Έστω E διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος K

$$\left(K = R \text{ ή } C\right) \text{ και } A \subseteq E.$$

(α) Το A λέγεται κυρτό αν, για κάθε $x, y \in A$, για κάθε $\lambda \in [0,1]$

ισχύει ότι $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$.

(β) Το A λέγεται ισορροπημένο αν, για κάθε $x \in A$ για κάθε $\lambda \in K$ με $|\lambda| \leq 1$ ισχύει ότι

$$\lambda x \in A, \text{ δηλαδή } A = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A.$$

Η κυρτή θήκη $co(A)$ ενός συνόλου ορίζεται ως η τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του E που περιέχουν το A.

Ανάλογα ορίζεται και η ισορροπημένη θήκη $b(A)$ του A. Οι ορισμοί αυτοί δικαιολογούνται από την παρατήρηση 3.1.1 (2) πιο κάτω.

(γ) Το A λέγεται απορροφούν αν για κάθε $x \in E$ υπάρχει $\lambda_x > 0$ ώστε, $t \in R$ και $0 \leq t \leq \lambda_x \Rightarrow tx \in A$

Παρατηρήσεις 3.1.1 Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες για τις έννοιες που ορίσαμε παραπάνω.

1) Αν A, B είναι κυρτά (αντιστοίχως ισορροπημένα) υποσύνολα του E και $\kappa, \lambda \in K$ τότε και το $\kappa A + \lambda B \subseteq E$ είναι κυρτό (αντιστοίχως ισορροπημένο).

2) Η τομή μιας οικογένειας κυρτών (αντιστοίχως ισορροπημένων) συνόλων είναι κυρτό

(αντιστοίχως ισορροπημένο) σύνολο. Εξάλλου η ένωση μιας οικογένειας ισορροπημένων συνόλων είναι ισορροπημένο σύνολο.

3) Αν $A \subseteq E$ είναι απορροφούν σύνολο τότε $0 \in A$ και $\langle A \rangle = E$, θα διαπιστώσουμε σύντομα ότι οι περιοχές του $0 \in E$ σε ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο είναι απορροφούσες. Από την άλλη μεριά ένα απορροφούν υποσύνολο $A \subseteq E$ περιέχει σε κάθε διεύθυνση $x \neq 0$ ένα διάστημα $[-\lambda_x x, \lambda_x x], (\lambda_x > 0)$. Παρατηρούμε ακόμη ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους απορροφούντων συνόλων είναι απορροφούν σύνολο.

4) Αν $A \neq \varnothing$, ισορροπημένο τότε $0 \in A$ και $A = -A$.

Επίσης ισχύουν τα ακόλουθα: (α) Αν $\lambda, \mu \in K$ ώστε $|\lambda| \leq |\mu|$ τότε $\lambda A \subseteq \mu A$ και άρα $\lambda A = |\lambda| A, \forall \lambda \in R$.

(β) Η κυρτή θήκη $co(A)$ είναι ισορροπημένο σύνολο.

<u>Παράδειγμα</u>. 1) Αν $E = C$ (ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος διάστασης ίσης με 1) τότε τα ισορροπημένα υποσύνολα του E είναι το $\varnothing$, το C και κάθε δίσκος (ανοικτός ή κλειστός) με κέντρο το 0. Αν $E = R^2$ (ένας διανυσματικός χώρος διάστασης ίσης με 2 επί του R) τότε υπάρχουν πολύ περισσότερα ισορροπημένα σύνολα. Για παράδειγμα, κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει μέσο το $(0,0)$ ή κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$, ή ακόμη κάθε κυρτή γωνία μαζί με την κατακορυφήν γωνία της (με κορυφή στο $(0,0)$) είναι ισορροπημένα σύνολα.

2) Αν $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ η ανοικτή (αντιστοίχως κλειστή) σφαίρα $B(x,\varepsilon)$ (αντιστοίχως $\hat{B}(x,\varepsilon)$) είναι κυρτό υποσύνολο του X . Οι σφαίρες $B(0,\varepsilon)$ και $\hat{B}(0,\varepsilon)$ είναι επιπλέον ισορροπημένα και απορροφούντα υποσύνολα του X .

<u>Ορισμός</u> 3.1.2 Έστω E διανυσματικός χώρος επί του σώματος K .

Υποθέτουμε ότι Τ είναι μια τοπολογία επί του E ώστε:

(ι) Η πράξη της πρόσθεσης $+: E \times E \ni (x,y) \to x+y \in E$ είναι συνεχής και

(ιι) Η πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$K \times E \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in E$

είναι συνεχής.

(Ο $E \times E$ και ο $K \times E$, θεωρούνται βέβαια με τις αντίστοιχες τοπολογίες γινόμενο).

Κάτω από αυτές τις συνθήκες λέμε ότι η τοπολογία Τ είναι <u>συμβατή</u> με τη δομή του διανυσματικού χώρου και ο (E, T) (ή για απλότητα ο E) είναι ένας <u>τοπολογικός διανυσματικός χώρος</u> (τ.δ.χ.) ή ένας <u>τοπολογικός γραμμικός χώρος</u> (τ.γ.χ.).

<u>Παρατηρήσεις</u> 3.1.3 1) Για κάθε $a \in E$ και κάθε $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$, οι απεικονίσεις

$\tau_a : E \to E : \tau_a(x) = a + x$ ο τελεστής της μεταφοράς,

$\sigma_\lambda : E \to E : \sigma_\lambda(x) = \lambda x$

είναι ομοιομορφισμοί του E επί του E . Ακόμη σημειώνουμε ότι, $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$ και $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{\frac{1}{\lambda}}$

(Άσκηση)

2) Από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται αμέσως ότι τοπολογία ενός τ.δ.χ. E είναι πλήρως ορισμένη, αν γνωρίζουμε μια βάση περιοχών B του $0 \in E$, διότι τότε η $x+\mathrm{B}=\{x+V : V \in \mathrm{B}\}$ είναι βάση περιοχών του $x \in E$.

<u>Πρόταση</u> 3.1.4 Έστω E τ.δ.χ. τότε ισχύουν:

(ι) $\overline{x+A}=x+\overline{A}, x \in E, A \subseteq E$.

(ιι) $\overline{(\lambda A)}=\lambda \cdot \overline{A}, \lambda \in K, \lambda \neq 0, A \subseteq E$.

(ιιι) $\overline{A}+\overline{B} \subseteq \overline{A+B}, A, B \subseteq E$.

(ιν) Αν, $A, G \subseteq E$ με G ανοικτό τότε $A+G$ ανοικτό στον E.

(ν) $A \ +B^{O} \subseteq (A+B)^{O}$.

(νι) Αν $A \subseteq E$ τότε $\overline{A}=\bigcap\{A+G : G \text{ ανοικτό και } 0 \in G\}$.

(νιι) Αν Y διανυσματικός υπόχωρος του E τότε και ο $\overline{Y}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του E.

(νιιι) Αν το $A \subseteq E$ είναι ισορροπημένο τότε και το $\overline{A}$ είναι ισορροπημένο.

(ιx) Αν το $A \subseteq E$ είναι ισορροπημένο και $0 \in A^{o}$ τότε και το A^{o} είναι ισορροπημένο.

(x) Αν το A είναι κυρτό τότε και τα A^{o} και $\overline{A}$ είναι κυρτά. Αν το A είναι ανοικτό τότε η $co(A)$ είναι ανοικτό σύνολο

(xι) Αν το A είναι ανοικτό (και κυρτό) και $0 \in A$, τότε υπάρχει ανοικτό ισορροπημένο (και κυρτό) C ώστε $0 \in C \subseteq A$.

<u>Απόδειξη</u> Αποδεικνύουμε ενδεικτικά κάποιους από τους ισχυρισμούς της πρότασης και τους υπόλοιπους τους αφήνουμε ως άσκηση.

(ιιι) Επειδή η πρόσθεση $f : E \times E \ni (x, y) \rightarrow f(x, y)=x+y \in E$ είναι συνεχής θα έχουμε.

$$\overline{A}+\overline{B}=f(\overline{A} \times \overline{B})=f(\overline{A \times B}) \subseteq \overline{f(A \times B)}=\overline{A+B}$$

(ιν) $A+G=\bigcup\{x+G : x \in A\}$. Επειδή κάθε $x+G$ είναι ανοικτό (ο τελεστής της μεταφοράς τ_x είναι ομοιομορφισμός) έπεται το συμπέρασμα.

(νιιι) Έστω $|\lambda| \leq 1$, τότε από την (ιι) έχουμε $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$. Εφόσον το A είναι ισορροπημένο έπεται ότι $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A} \subseteq \overline{A}$.

(ιx) Έστω $|\lambda| \leq 1$ με $\lambda \neq 0$. Επειδή η απεικόνιση $\sigma_\lambda : E \to E : \sigma_\lambda(x) = \lambda x$ είναι ομοιομορφισμός και το A^o είναι μη κενό αφού $0 \in A^o$, έπεται ότι

$$\lambda A^o = (\lambda A)^o \subseteq A^o$$

Επειδή το 0 ∈ A^0 έπεται ότι $\lambda A^o \subseteq A^o$ ακόμη και αν λ=0.

(x) Αποδεικνύουμε το δεύτερο μέρος του ισχυρισμού. Υποθέτουμε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in co(A)$, όπου $x_1, \ldots, x_n \in A$ και $\lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 > 0$. Αν V είναι ανοικτή περιοχή του x_1 ώστε $V \subseteq A$ τότε το ανοικτό σύνολο $U = \lambda_1 V + (\lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)$ περιέχεται προφανώς στην $co(A)$ και $x \in U$. Επομένως ή $co(A)$ είναι ανοικτό σύνολο.

(xι) Από την συνέχεια του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο $(0,0)$ υπάρχουν $G \subseteq E$ ανοικτό με $0 \in G$ και $\delta > 0$, ώστε $\lambda G \subseteq A$ για κάθε $\lambda \in K$ με $|\lambda| \leq \delta$ θέτομε $H = \delta G$ (προφανώς H ανοικτό και $0 \in H$) και $C = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda H$. Πρέπει να είναι σαφές ότι το C είναι ανοικτό και ισορροπημένο σύνολο και άρα $0 \in C \subseteq A$. (Το C είναι η ισορροπημένη θήκη του H) Ας υποθέσουμε τώρα ότι το A είναι επί πλέον και κυρτό.

Θέτουμε $L = co(C)$, επειδή το A κυρτό το $L \subseteq A$. Από την Παρατήρηση 3.1.1(4) το L είναι ισορροπημένο και από τον ισχυρισμό (x) είναι ανοικτό (και κυρτό) σύνολο.

<u>Θεώρημα</u> 3.1.5 Έστω E τ.δ.χ. Τότε υπάρχει μια βάση περιοχών B του $0 \in E$ τέτοια ώστε:

(ι) Κάθε $U \in \mathrm{B}$ είναι (κλειστό) ισορροπημένο και απορροφούν.

(ιι) Για κάθε $U \in \mathrm{B}$ υπάρχει $W \in \mathrm{B}$: $W + W \subseteq U$.

(ιιι) Αν $U \in \mathrm{B}$ και $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, τότε $\lambda U \in \mathrm{B}$.

<u>Απόδειξη</u> Παρατηρούμε καταρχήν ότι κάθε περιοχή V του $0 \in E$ είναι απορροφούν σύνολο. Έστω $x_0 \in E$, επειδή η απεικόνιση $\varphi : \lambda \in K \to \varphi(x) = \lambda x_0 \in E$ είναι συνεχής

(στο K και άρα) στο $0 \in K$ και $\varphi(0) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\lambda \in K$ και

$$|\lambda| \leq \delta \Rightarrow \varphi(\lambda) = \lambda x_0 \in V$$

(Ουσιαστικά εδώ ταυτίζουμε τον χώρο K με τον χώρο $K \times \{x_0\}$.)

Από τον ισχυρισμό (x ι) της πρότασης 3.1.4 συμπεραίνουμε αμέσως ότι οι ισορροπημένες και απορροφούσες περιοχές του $0 \in E$ συνιστούν μια βάση περιοχών έστω B του $0 \in E$. Είναι τώρα σαφές ότι από την συνέχεια της πρόσθεσης στο $(0,0)$ ισχύει η (ιι) και από το γεγονός ότι ο τελεστής $\sigma_\lambda : E \to E$ είναι ομοιομορφισμός έπεται η (ιιι).

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε μέλος της B είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω $U \in \mathrm{B}$, θα δείξουμε ότι υπάρχει μια κλειστή και ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ που περιέχεται στην U. Έστω $W \in \mathrm{B}$ ώστε $W + W \subseteq U$, τότε ισχύει ότι $\overline{W} \subseteq U$. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε $x \in \overline{W}$, τότε $(x+W) \bigcap W \neq \varnothing$.

Έστω $y \in E$, ώστε $y \in x+W$ και $y \in W$, τότε έχομε ότι, $x+y \in x+W$ και άρα, $x \in x+W-y \subseteq (x+W)-(x+W) = W-W = W+W \subseteq U$.

($W = -W$, αφού το W είναι ισορροπημένο σύνολο).

Έπεται προφανώς ότι η $\mathrm{B}' = \{\overline{W} : W \in \mathrm{B}\}$ είναι μια βάση κλειστών ισορροπημένων περιοχών του $0 \in E$ που ικανοποιεί τους ισχυρισμούς (ιι) και (ιιι).

<u>Πρόταση</u> 3.1.6 Έστω E τ.δ.χ.. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο E είναι Hausdorff.

(ιι) Το $\{0\}$ είναι κλειστό (άρα τα μονοσύνολα του E είναι κλειστά).

(ιιι) Ισχύει ότι, $\{0\} = \bigcap \{U : U \text{ περιοχή του } 0 \in E\}$

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι). Σε κάθε χώρο Hausdorff τα μονοσύνολα είναι κλειστά.

(ιι) $\Rightarrow$ (ιιι) Το σύνολο $E \setminus \{0\}$ είναι ανοικτό, άρα αν $x \neq 0$ τότε υπάρχει V περιοχή του x της μορφής $V = x+W$, για κάποια ισορροπημένη περιοχή W του $0 \in E$, ώστε $V \subseteq E \setminus \{0\}$ και άρα $0 \notin V = x+W$. Έπεται ότι $-x \notin -x+x+W = -W$ το οποίο σημαίνει ότι $x \notin W$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το x δεν μπορεί να ανήκει στην τομή όλων των περιοχών του $0 \in E$, συνεπώς η τομή αυτή ισούται αναγκαία με το $\{0\}$.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ι). Έστω $x, y \in E$ με $x \neq y$. Τότε υπάρχει περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $x - y \notin U$. Έστω W ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ ώστε $W + W \subseteq U$. Τότε ισχύει ότι $(x+W) \bigcap (y+W) = \varnothing$. Πράγματι, αν υπήρχε $z \in E$ ώστε $z \in x+W$ και $z \in y+W$, τότε $x - y = (z-y)-(z-x) \in W - W = W + W \subseteq U$, άτοπο.

<u>Παρατηρήσεις</u> 3.1.7. 1) Έστω E Hausdorff τ.δ.χ. Έπεται τότε από το θεώρημα 3.1.5 ότι ο E είναι <u>κανονικός</u> (δηλαδή T_3) τοπολογικός χώρος, αφού σε κάθε σημείο $x \in E$ έχει μια βάση περιοχών που αποτελείται από κλειστά σύνολα. Επιπροσθέτως μπορεί να αποδειχθεί

ότι κάθε Hausdorff τ.δ.χ. είναι τελείως κανονικός $(T_{3\frac{1}{2}})$. (Πρβλ. το βιβλίο [M], θεώρημα 2.2.14, σελίδα 174)

2) Έστω E (Hausdorff) τ.δ.χ., $(x_a) \subseteq E$ ένα δίκτυο στον E και $x \in E$. Τότε αποδεικνύεται, εύκολα ότι,

$$x_a \to x \Leftrightarrow x_a - x \to 0 .$$

Παραδείγματα 3.1.8. 1) Έστω $(E, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε ο E με την τοπολογία που ορίζει η νόρμα (μετρικοποιήσιμη τοπολογία) είναι ένας Hausdorff τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Πράγματι, έστω $(x_n, y_n), n \geq 1$, ακολουθία στον $E \times E$ και $(x, y) \in E \times E$ ώστε $(x_n, y_n) \to (x, y) \Leftrightarrow x_n \to x$ και $y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$. Άρα η πρόσθεση του χώρου E είναι συνεχής.

Έστω $(\lambda_n, x_n), n \geq 1$, ακολουθία στον $K \times E$ και $(\lambda, x) \in K \times E$ ώστε $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda, x) \Leftrightarrow \lambda_n \to \lambda$ και $x_n \to x \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda x$.

Έτσι και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι συνεχής και ο $(E, \|\cdot\|)$ είναι τ.δ.χ.

2) Έστω $E = R^N =$ ο χώρος των ακολουθιών πραγματικών αριθμών με την τοπολογία γινόμενο (τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο) T. Τότε ο (E, T) είναι τ.δ.χ. Hausdorff.

Πράγματι, καταρχήν η τοπολογία γινόμενο T στον E είναι μετρικοποιήσιμη και μια ακολουθία $(f_n) \subseteq E$ συγκλίνει στην $f \in E$ ως προς T αν και μόνο αν η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο (επί του N) δηλαδή $f_n(k) \to f(k), \forall k \in N$. Έστω $(f_n, g_n), n \geq 1$ ακολουθία στον $E \times E$ και $(f, g) \in E \times E$ ώστε $(f_n, g_n) \to (f, g)$ στον τοπολογικό χώρο $E \times E$, τότε $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά σημείο και επομένως $f_n + g_n \to f + g$ κατά σημείο. Έπεται ότι η πρόσθεση στον χώρο E είναι συνεχής συνάρτηση. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στον χώρο E είναι συνεχής συνάρτηση και ο χώρος (E, T) είναι τ.δ.χ.

Σημειώνουμε ότι όπως θα αποδείξουμε αργότερα η τοπολογία T του χώρου E δεν επάγεται από μια νόρμα.

3) Έστω E ένας (μη τετριμμένος) διανυσματικός χώρος επί του σώματος K. Τότε η τοπολογία $T = \{\varnothing, E\}$ είναι συμβατή με τη διανυσματική δομή του E και επομένως κάνει τον E έναν τ.δ.χ., αλλά βέβαια δεν είναι Hausdorff.

Από την άλλη μεριά η διακριτή τοπολογία $T = P(E)$ (κάθε υποσύνολο του E θεωρείται ως ανοικτό) δεν είναι συμβατή με τη διανυσματική δομή του E. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ο (E,T) είναι ένας τ.δ.χ., θεωρούμε ένα $x \in E$ με $x \neq 0$, τότε από το πόρισμα 3.1.12 παρακάτω η απεικόνιση $\lambda \in K \to \lambda x \in E$ είναι ένας ομοιομορφισμός (η διακριτή τοπολογία είναι Hausdorff) , επομένως το σώμα K $(= R$ ή $C)$ θα ήταν ομοιομορφικό με έναν υπόχωρο του E και η τοπολογία του K θα ήταν διακριτή, άτοπο.

4) Έστω (E,T) τ.δ.χ.. Τότε κάθε διανυσματικός υπόχωρος F του E είναι με την σχετική τοπολογία που επάγεται από τον (E,T) είναι τ.δ.χ..

5) Έστω $(E_i)_{i\in I}$ οικογένεια τ.δ.χ. επί του ιδίου σώματος K. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $E = \prod_{i\in I} E_i$ είναι (όπως εύκολα αποδεικνύεται) με την τοπολογία γινόμενο και τις συνήθεις κατά συντεταγμένες πράξεις ένας τ.δ.χ. επί του K. Ιδιαίτερα ο $K^n, n \geq 1$ είναι με την τοπολογία γινόμενο ένας τ.δ.χ.. Η τοπολογία γινόμενο βέβαια συμπίπτει με την τοπολογία της (οποιαδήποτε) νόρμας επί του K^n (γιατί;).

Στο εξής θα υποθέτομε ότι όλοι οι τοπολογικοί γραμμικοί χώροι που θεωρούμε είναι Hausdorff.

<u>Πρόταση</u> 3.1.9 Έστω E,F τ.δ.χ. και $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Η T είναι συνεχής.

(ιι) Η T είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in E$

(ιιι) Η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.

<u>Απόδειξη</u>. (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Προφανές.

(ιι) $\Rightarrow$ (ιιι) Έστω V περιοχή του $0 \in F$. Τότε το $T(x_0)+V$ είναι περιοχή του $T(x_0)$ και συνεπώς υπάρχει U περιοχή του $0 \in E$ ώστε $T(x_0+U) = T(x_0)+T(U) \subseteq T(x_0)+V$, συνεπώς, $T(U) \subseteq V$ και άρα η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ι) Έστω $x_0 \in E$ και V περιοχή του $0 \in F$. Τότε υπάρχει περιοχή του U του $0 \in E$ τέτοια ώστε $T(U) \subseteq V$, οπότε $T(x_0)+T(U) \subseteq T(x_0)+V$ ή $T(x_0+U) \subseteq T(x_0)+V$. Άρα η T είναι συνεχής στο τυχόν $x_0 \in E$, και έτσι είναι συνεχής επί του χώρου E.

<u>Πρόταση</u> 3.1.10 Έστω E τ.δ.χ. και $f : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) Το f είναι συνεχής συνάρτηση.

(ιι) Το f είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in E$.

(ιιι) Το f είναι φραγμένο σε μια περιοχή του $0 \in E$ (δηλαδή υπάρχει U περιοχή του $0 \in E$: $f(U)$ φραγμένο υποσύνολο του K).

(ιν) Ο $Kerf$ είναι κλειστός υπόχωρος του E.

(ν) Ο $Kerf$ δεν είναι γνήσιος πυκνός υπόχωρος του E.

Απόδειξη Η πρόταση ισχύει κατά τρόπο τετριμμένο αν το f είναι η σταθερά συνάρτηση μηδέν. Έτσι υποθέτομε ότι $f \neq 0$. Η ισοδυναμία των (ι) και (ιι) έπεται από την πρόταση 3.1.9. (ιι) $\Rightarrow$ (ιιι) Εφόσον το f είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in E$ υπάρχει περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $f(U) \subseteq \mathrm{B}(0,1) = \{z \in K : |z| < 1\}$, δηλαδή, $|f(x)| < 1, \forall x \in U$.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω ότι υπάρχουν $M > 0$ και μια περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $|f(x)| < M, \forall x \in U$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε $\left| f\left(\frac{\varepsilon}{M} x\right) \right| < \varepsilon, \forall x \in U$ ή $f\left(\frac{\varepsilon}{M} U\right) \subseteq \mathrm{B}(0,\varepsilon)$, και άρα το f είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in E$.

Έτσι οι ισχυρισμοί (ι)-(ιιι) είναι ισοδύναμοι. Επίσης είναι σαφές ότι (ι) $\Rightarrow$ (ιν) $\Rightarrow$ (ν).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, (ν) $\Rightarrow$ (ιιι)

Θέτομε $H = Kerf$, τότε $H \neq E$. Επειδή το υπερεπίπεδο H δεν είναι πυκνό υποσύνολο του E, υπάρχουν $x_0 \in E$ και μια ανοικτή ισορροπημένη περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $(x_0 + U) \cap H = \varnothing$. Τότε $f(x_0) \neq 0$ και χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_0) = 1$. Επειδή το U είναι ισορροπημένο προκύπτει εύκολα ότι $|f(x)| < 1, \forall x \in U$.

(Πράγματι, έστω $x_1 \in U$ τέτοιο ώστε $|f(x_1)| \geq 1$. Θέτομε $y = -\frac{x_1}{f(x_1)}$. Τότε $f(y) = -1$ και $y \in U$, διότι το U είναι ισορροπημένο. Επομένως, $f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = 0$, οπότε $x_0 + y \in H$, άτοπο, εφόσον $x_0 + y \in x_0 + U$). Συνεπώς το f είναι φραγμένο στην περιοχή U του $0 \in E$.

Πόρισμα 3.1.11. Έστω E τ.δ.χ.. Τότε κάθε υπερεπίπεδο H του E είναι είτε κλειστό στον E ή πυκνό στον E.

Απόδειξη Έστω $f : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές με $Kerf = H$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε αμέσως το συμπέρασμα. (Υπενθυμίζουμε ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με $Kerf = H$ ορίζεται ως εξής: Αν $a \in E \setminus H$ τότε $E = H \oplus \langle a \rangle$ και έτσι θέτομε $f(x) = f(y + \lambda a) = \lambda$, όπου $x = y + \lambda a$ με $y \in H$ και $\lambda \in K$).

<u>Πόρισμα</u> 3.1.12. Έστω E τ.δ.χ. και $x_0 \in E$ με $x_0 \neq 0$. Θέτομε $F = \langle x_0 \rangle$ και $\varphi : \lambda \in K \to F \subseteq E : \varphi(\lambda) = \lambda x_0$. Τότε η φ είναι τοπολογικός ισομορφισμός του K επί του μονοδιάστατου υποχώρου F του E. (Επι πλέον ο F είναι κλειστός υπόχωρος του E. Πρβλ. την άσκηση 7.)

<u>Απόδειξη</u>. Η φ είναι προφανώς αλγεβρικός ισομορφισμός και συνεχής. Για την αντίστροφή της ισχύει ότι $Ker\varphi^{-1} = \{0\}$ και άρα κλειστό υποσύνολο του F. (E είναι Hausdorff). Από την πρόταση 3.1.10 έπεται το συμπέρασμα.

<u>Ασκήσεις</u>

1) Ένα υποσύνολο A ενός διανυσματικού χώρου E λέγεται <u>απόλυτα κυρτό</u> αν $\forall x, y \in A, \forall \lambda, \mu \in K$ με $|\mu| + |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in A$.

(ι) Δείξτε ότι η τομή μιας οικογένειας απόλυτα κυρτών συνόλων είναι απόλυτα κυρτό σύνολο.

(ιι) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq E$ είναι απόλυτα κυρτό αν και μόνο αν είναι κυρτό και ισορροπημένο.

(ιιι) Αν $A \subseteq E$ απόλυτα κυρτό, τότε A απορροφούν αν και μόνο αν $\langle A \rangle = E$.

2) Έστω E διανυσματικός χώρος και $A \subseteq E$. Η τομή των ισορροπημένων (αντιστοίχως των κυρτών ή των απόλυτα κυρτών) υποσυνόλων του E που περιέχουν το A ονομάζεται η <u>ισορροπημένη</u> (αντιστοίχως <u>κυρτή</u> ή <u>απόλυτα κυρτή</u>) <u>θήκη</u> του A και συμβολίζεται με $b(A)$ (αντιστοίχως $co(A)$ ή $aco(A)$). Αποδείξτε ότι:

(ι) $b(A) = \{\lambda A : \lambda \in K, |\lambda| \leq 1\}$ $\left(= \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \right)$.

(ιι) $co(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, n \in N \right\}$.

(ιιι) $aco(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \in K, \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1, n \in N \right\}$.

(ιv) Αν A ισορροπημένο, τότε $co(A)$ ισορροπημένο.

(v) Ισχύει ότι $aco(A) = co(b(A))$.

3) Έστω E, F διανυσματικοί χώροι, $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση, $A \subseteq E$ και $B \subseteq F$. Αποδείξτε ότι:

(ι) Αν A και B απορροφούντα τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ είναι απορροφούντα υποσύνολα των $T(E)$ και E αντίστοιχα

(ιι) Αν τα A και B ισορροπημένα, τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ ισορροπημένα.

(ιιι) Αν τα A και B κυρτά (αντιστοίχως απόλυτα κυρτά), τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ κυρτά (αντιστοίχως απόλυτα κυρτά).

4) Αποδείξτε ότι ένα απορροφούν υποσύνολο του χώρου R^2 δεν είναι κατ' ανάγκη περιοχή του $(0,0)\in R^2$.

[Υπόδειξη. Θεωρούμε την απλή καμπύλη $\gamma(t)=\dfrac{t}{2\pi}e^{it}, t\in[0,2\pi]$ του R^2 και θέτομε $D=\{\lambda\gamma(t):\lambda\in[0,1], t\in[0,2\pi]\}$. Τότε, το $(0,0)$ ανήκει στο σύνορο ∂D του D (άρα)δεν ανήκει στο εσωτερικό D^o του D και το D είναι απορροφούν υποσύνολο του R^2].

5) Έστω $B=\{(z,w)\in C^2:|z|\le|w|\}$. Αποδείξτε ότι το B είναι ισορροπημένο υποσύνολο του C^2 αλλά το εσωτερικό του δεν είναι.(Πρβλ. την Προταση 3.14 (ιχ) .)

6) Έστω E,F τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι και $T:E\to F$ γραμμική και συνεχής απεικόνιση.
(ι) Αποδείξτε ότι η T είναι ομοιόμορφα συνεχής υπό την ακόλουθη έννοια: Για κάθε περιοχή V του $0\in F$ υπάρχει περιοχή U του $0\in E$ ώστε, $T(y)-T(x)\in V, \forall x,y\in E$ με $y-x\in U$.
(ιι) Ένα δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ στον τ.δ.χ. E λέγεται δίκτυο Cauchy, αν για κάθε περιοχή U του $0\in E$ υπάρχει $i_0\in I$ τέτοιο ώστε $x_i-x_j\in U$ για κάθε $i,j\ge i_0$. Αποδείξτε ότι η εικόνα $(T(x_i))_{i\in I}$ ενός δικτύου Cauchy $(x_i)_{i\in I}$ στον τ.δ.χ. E μέσω μιας συνεχούς και γραμμικής απεικόνισης $T:E\to F$ είναι δίκτυο Cauchy στον F . Επίσης αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνον δίκτυο στον E είναι δίκτυο Cauchy.

7) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff). Αποδείξτε τα ακόλουθα.
(ι) Κάθε μονοδιάστατος υπόχωρος του E είναι κλειστός στον E .
(ιι) Αν F είναι διανυσματικός υπόχωρος του E με $\dim F=n\in N$, τότε κάθε αλγεβρικός ισομορφισμός Λ του K^n επί του F (ο K^n με την τοπολογία της νόρμας) είναι και ομοιομορφισμός. Περαιτέρω αποδείξτε ότι ο F είναι κλειστός στον E .
(ιιι) Αν E είναι διανυσματικός χώρος με $\dim E<\infty$, τότε υπάρχει μοναδική Hausdorff τοπολογία επί του E συμβατή με την διανυσματική δομή του.
[Υπόδειξη. (ι) Έστω F διανυσματικός υπόχωρος του E με $\dim F=1$. Τότε $F=\langle a\rangle=\{\lambda a:\lambda\in K\}$ για κάποιο $a\in E$ με $a\neq 0$. Η απεικόνιση $\varphi:K\to F:\varphi(\lambda)=\lambda a$ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός ο οποίος είναι και ομοιομορφισμός σύμφωνα με το πόρισμα 3.1.12. …….
Δείξτε ότι ο F είναι κλειστός χρησιμοποιώντας την έννοια του δικτύου Cauchy της άσκησης 6. Για το (ιι) προχωρήστε με επαγωγή στο $n=\dim F$.]

8) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff) F διανυσματικός υπόχωρος του E και $\pi: E \to E/F$ η κανονική απεικόνιση. Θεωρούμε στον χώρο πηλίκο E/F την τοπολογία πηλίκο T (αν $U \subseteq E/F$ τότε $U \in T \Leftrightarrow$ το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον E). Αποδείξτε ότι:

(ι) Η π είναι συνεχής και ανοικτή.
(ιι) Ο χώρος πηλίκο E/F είναι με την τοπολογία T τ.δ.χ.
(ιιι) Ο χώρος πηλίκο είναι Hausdorff αν και μόνο αν ο F είναι κλειστός στον E.
(ιν) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα τότε η T ταυτίζεται με την τοπολογία της νόρμας πηλίκο του χώρου E/F.

9) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff), M κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του E και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E. Αποδείξτε ότι:
(α) Ο υπόχωρος $F+M$ είναι κλειστός στον E.
(β) Το άθροισμα $K+F$ ενός συμπαγούς K και ενός κλειστού F υποσυνόλου του E είναι κλειστό υποσύνολο του E.

10) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff) και F διανυσματικός υπόχωρος του E. Λέμε ότι ο F είναι (τοπολογικά) συμπληρωματικός στον E αν υπάρχει συνεχής προβολή $P: E \to E$ ώστε $P(E) = F$.

(ι) Αποδείξτε ότι αν ο F είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του E τότε ο F είναι κλειστός στον E.
(ιι) Έστω $P: E \to E$ προβολή με $P(E) = F$ και $G = KerP$, άρα $E = F \oplus G$. Αποδείξτε ότι η P είναι συνεχής αν και μόνο αν η φυσιολογική απεικόνιση $F \times G \ni (x, y) \to x + y \in E$ είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν η απεικόνιση $j: E/G \to F: j(x+G) = P(x)$ είναι συνεχής (παρατηρούμε ότι $P = jo\pi$, όπου $\pi: E \to E/G$ η κανονική απεικόνιση).
(ιιι) Υποθέτομε ότι ο F είναι κλειστός υπόχωρος του E πεπερασμένης συνδιάστασης. Αποδείξτε ότι ο F είναι (τοπολογικά) συμπληρωματικός στον E.
(ιν) Αν ο E είναι επί πλέον τοπικά κυρτός τ.δ.χ. ,τότε κάθε διανυσματικός υπόχωρος του E πεπερασμένης διάστασης είναι συμπληρωματικός στον E. (Η έννοια της τοπικής κυρτότητας για ένα τ.δ.χ. θα ορισθεί στην επόμενη παράγραφο).

11) Έστω E τ.δ.χ. και $A \subseteq E$ κυρτό. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν $x \in A^o$ και $y \in \overline{A}$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y) \subseteq A^o$ (όπου $[x, y) = \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 < \lambda \leq 1\}$)
(β) Αν $A^o \neq \varnothing$, τότε $\overline{A} = \overline{A^O}$ και $A^o = \left(\overline{A}\right)^o$.

[<u>Υπόδειξη για το</u> (α): Έστω $z = (1-\lambda) y + \lambda x$ με $0 < \lambda < 1$. Υπάρχει τότε U ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ ώστε $x + U \subseteq A$. Υποθέτομε πρώτα ότι $y \in A$. Έστω $w \in \lambda U + z$, επομένως $w = \lambda u + z$ με $u \in U$. Τότε $x + u \in A$, επομένως $w = (1-\lambda) y + \lambda(x+u) \in A$. Έτσι έχουμε $\lambda U + z \subseteq A$ και άρα $z \in A^o$. Ας υποθέσομε τώρα ότι $y \in \overline{A}$. Θέτομε $V = \mu U + y$, όπου $\mu = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. Έστω $a \in A \bigcap V$. Έχομε τότε $a = \mu u + y$ με $u \in U$ και επομένως $z=(1-\lambda)a+\lambda(x-u)\in A$. Έτσι έχομε ότι $[x,y)\subseteq A$, το οποίο μαζί με το πρώτο μέρος συμπεραίνει ότι $[x,y)\subseteq A^{o}$].

<u>Σημείωση.</u> Το δεύτερο μέρος της άσκησης 11 δεν ισχύει αν το κυρτό σύνολο A έχει κενό εσωτερικό. Για παράδειγμα έστω E χώρος Banach και A γνήσιος πυκνός διανυσματικός υποχώρος του E, είναι τότε σαφές ότι το A δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα της 11) (β).

3.2 Τοπικά κυρτοί χώροι-Βασικές ιδιότητες.

Στην παράγραφο αυτή πρόκειται να εισαγάγουμε μια σημαντική, ίσως την σημαντικότερη, κλάση τοπολογικών γραμμικών χώρων. Αυτή είναι η κλάση των τοπικά κυρτών χώρων

Ορισμός 3.2.1 Έστω E διανυσματικός χώρος. Μια ημινόρμα στον E είναι μια απεικόνιση $p:E\to R$ ώστε:

(ι) $p(x)\geq 0,\forall x\in E$

(ιι) $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x),\lambda\in K,x\in E$.

(ιιι) $p(x+y)\leq p(x)+p(y),\forall x,y\in E$.

Η ιδιότητα (ιιι) ονομάζεται υποπροσθετικότητα .

Παρατηρήσεις 3.2.2 (1) Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (ιι) και (ιιι) έχουν σαν συνέπεια την (ι). (Πράγματι, $p(0)=p(2\cdot 0)=2p(0)$, άρα $p(0)=0$. Επίσης $0=p(x+(-x))\leq p(x)+p(-x)\Rightarrow -p(-x)\leq p(x)$. Επειδή $p(-x)=p(x)$, έπεται ότι $p(x)\geq 0,\forall x\in E$.)

(2) $|p(x)-p(y)|\leq p(x-y),\forall x,y\in E$, (Αν $x,y\in E$ τότε $p(x)=p((x-y)+y)\leq p(x-y)+p(y)\Rightarrow p(x)-p(y)\leq p(x-y)$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των x και y έχομε ότι $p(y)-p(x)\leq p(x-y)$. Έτσι έχουμε το συμπέρασμα.)

(3) Αν $\{p_i : i\in I\}$ οικογένεια ημινορμών επί του διανυσματικού χώρου E και $\sup\{p_i(x): i\in I\}<+\infty,\forall x\in E$ τότε η απεικόνιση $p:E\to R: p(x)=\sup\{p_i(x): i\in I\}, x\in E$ είναι μια ημινόρμα επί του E. Ιδιαίτερα αν η οικογένεια είναι πεπερασμένη, έστω $\{p_1,\ldots,p_n\}$, τότε η $p(x)=\max\{p_1(x),\ldots,p_n(x)\}$ είναι πάντοτε ημινόρμα. (Άσκηση).

(4) Είναι προφανές ότι μια ημινόρμα είναι νόρμα αν και μόνο αν $p(x)>0,\forall x\in E$ με $x\neq 0$.

Παραδείγματα 3.2.3 (1) Έστω E διανυσματικός χώρος και $\Lambda: E\to K$ γραμμικό συναρτησοειδές, τότε η απεικόνιση $p(x)=|\Lambda(x)|, x\in E$, είναι μια ημινόρμα επί του E.

(Πότε η $p(x)=|\Lambda(x)|$ γίνεται νόρμα;)

(2) Έστω $p:\ell^\infty \to R: p(x)=\lim_{n\to\infty}\sup|x_n|$, όπου $x=(x_n)\in\ell^\infty$. Τότε η p είναι μια ημινόρμα επί του χώρου Banach ℓ^∞. (Πρβλ. το παράδειγμα 1.11).

<u>Πρόταση</u> 3.2.4 Έστω E διανυσματικός χώρος και $p:E\to R$ ημινόρμα επί του E. Τότε ισχύουν:

(ι) Το σύνολο $F=p^{-1}(\{0\})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του E.

(ιι) Για κάθε $\varepsilon>0$, τα σύνολα $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)=\{x\in E: p(x)<\varepsilon\}$ και $\hat{\mathrm{B}}_p(0,\varepsilon)=\{x\in E: p(x)\le\varepsilon\}$ είναι κυρτά ισορροπημένα και απορροφούντα υποσύνολα του E.

<u>Απόδειξη</u>: Αποδεικνύουμε μόνο ότι το $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ είναι απορροφούν και αφήνουμε τους υπόλοιπους ισχυρισμούς ως άσκηση. Έστω $x\in E$. Αν $0\le t\le \dfrac{\varepsilon}{p(x)+2}$,

τότε $p(tx)=tp(x)\le \dfrac{\varepsilon}{p(x)+2}\cdot p(x)<\varepsilon$ και άρα $tx\in\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$.

Αν $p:E\to R$ είναι μια ημινόρμα επί του διανυσματικού χώρου E τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η οικογένεια των συνόλων της μορφής $\mathrm{B}_p(x,\varepsilon)=\{y\in E: p(x-y)<\varepsilon\}=x+\mathrm{B}_p(0,\varepsilon), x\in E, \varepsilon>0$ συνιστούν μια βάση για μια τοπολογία T επί του E η οποία είναι συμβατή με την αλγεβρική δομή του E και έτσι ο (E,T) γίνεται τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Εντούτοις οι τοπικά κυρτές τοπολογίες ορίζονται από μια ολόκληρη οικογένεια ημινορμών επί του E με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω E διανυσματικός χώρος και $\mathcal{P}$ μια οικογένεια ημινορμών επί του E. Αν $\Delta=\{p_1,\dots,p_n\}\subseteq \mathcal{P}$, $x\in E$ και $\varepsilon>0$ θέτομε

$$\mathrm{B}_\Delta(x,\varepsilon)=\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{B}_{p_k}(x,\varepsilon)=\{y\in E: p_k(y-x)<\varepsilon, k=1,2,\dots,n\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε εκείνη την τοπολογία $T=T(\mathcal{P})$ η οποία έχει ως <u>υποβάση</u> τα σύνολα της μορφής $\mathrm{B}_p(x,\varepsilon), p\in\mathcal{P}$, $x\in E, \varepsilon>0$

Ένα τυπικό μέλος της βάσης που παράγει η παραπάνω υποβάση είναι επομένως της μορφής

Έστω $\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{B}_{p_k}(x_k,\varepsilon_k)$ όπου $x_1,\dots,x_n\in E, p_1,\dots,p_n\in\mathcal{P}$ και $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n>0$

Έστω $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x_k, \varepsilon_k\right)$, θέτομε $\varepsilon = \min\left\{\varepsilon_k - p_k\left(x - x_k\right) : 1 \le k \le n\right\}$ συνεπώς $\varepsilon > 0$.

Παρατηρούμε ότι $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x, \varepsilon\right) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x_k, \varepsilon_k\right)$.

Πράγματι, αν $y \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x, \varepsilon\right)$, τότε $p_k\left(y - x\right) \le \varepsilon \le \varepsilon_k - p_k\left(x - x_k\right), k = 1, 2, ..., n$. Έτσι έχομε, $p_k\left(y - x_k\right) \le p_k\left(y - x\right) + p_k\left(x_k - x\right) < \varepsilon_k, \forall k = 1, 2, ...n$ από όπου έπεται ότι $y \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x_k, \varepsilon_k\right)$. Από την παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι η κλάση των συνόλων της μορφής $\left\{\mathrm{B}_{\Delta}\left(x, \varepsilon\right) : x \in E, \varepsilon > 0\right.$ και $\Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο $\left.\right\}$ είναι και αυτή μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T} = \mathcal{T}\left(\mathcal{P}\right)$ που ορίσθηκε παραπάνω.

Ειδικότερα τα σύνολα της μορφής $\mathrm{B}_{\Delta}\left(0, \varepsilon\right) = \left\{x \in E : p\left(x\right) < \varepsilon, p \in \Delta\right\}$, όπου $\Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο είναι μια <u>βάση περιοχών</u> του $0 \in E$ η οποία αποτελείται από <u>κυρτά</u> και <u>ισορροπημένα</u> (και απορροφούντα) σύνολα. (Πρβλ την πρόταση 3.2.4).

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1) Έστω $\left(z_a\right)_{a \in A}$ δίκτυο στον E και $z \in E$. Τότε

(α) $z_a \xrightarrow{\mathcal{T}} z \Leftrightarrow p\left(z_a - z\right) \to 0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$

Πράγματι, $z_a \xrightarrow{\mathcal{T}} z \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \forall \Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο υπάρχει $a_0 \in \mathrm{A} : a \ge a_0 \Rightarrow z_a \in \mathrm{B}_{\Delta}\left(z, \varepsilon\right)] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο υπάρχει $a_0 \in \mathrm{A} : a \ge a_0 \Rightarrow p\left(z_a - z\right) < \varepsilon, \forall p \in \Delta \Leftrightarrow p\left(z_a - z\right) \to 0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$.

(β) Αν $z_a \xrightarrow{\mathcal{T}} z$ τότε $p\left(z_a\right) \to p\left(z\right)$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$.

Το συμπέρασμα προκύπτει αμέσως από την ανισότητα

$$\left|p\left(z_a\right) - p\left(z\right)\right| \le p\left(z_a - z\right), a \in \mathrm{A}.$$

Έπεται ιδιαίτερα κάθε ημινόρμα $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής συνάρτηση επί του χώρου $\left(E, \mathcal{T}\left(\mathcal{P}\right)\right)$

2) Η τοπολογία $\mathcal{T} = \mathcal{T}\left(\mathcal{P}\right)$ είναι <u>συμβατή</u> με την αλγεβρική δομή του E και έτσι ο $\left(E, \mathcal{T}\right)$ είναι ένας <u>τοπολογικός γραμμικός</u> χώρος.

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού θεωρούμε ένα δίκτυο $(x_a, y_a)_{a\in A}$ στον $E\times E$ (με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$) και $(x,y)\in E\times E$ ώστε $(x_a,y_a)\to(x,y)$ και ακόμη ένα δίκτυο $(\lambda_a, x_a)_{a\in A}$ στον χώρο $K\times E$ (με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_{|\cdot|}\times\mathcal{T}$) και $(\lambda,x)\in K\times E$ ώστε $(\lambda_a,x_a)\to(\lambda,x)$.

Έπεται τότε από τις ανισότητες ότι $x_a + y_a \xrightarrow{\mathcal{T}} x+y$ και $\lambda_a x_a \xrightarrow{\mathcal{T}} \lambda x$ $p\big((x_a+y_a)-(x+y)\big)\le p(x_a-x)+p(y_a-y)$ και $p(\lambda_a x_a-\lambda x)\le|\lambda_a-\lambda|\,p(x_a)+|\lambda|\,p(x_a-x)$, $p\in\mathcal{P}$

ότι $x_a + y_a \xrightarrow{\mathcal{T}} x+y$ και $\lambda_a x_a \xrightarrow{\mathcal{T}} \lambda x$.

Έτσι οι πράξεις του E είναι συνεχείς και ο $(E,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

3) Ο τ.δ.χ. $(E,\mathcal{T}(\mathcal{P}))$ είναι Hausdorff αν και μόνο αν η οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ διαχωρίζει τα σημεία του E, δηλαδή αν, για κάθε $x,y\in E$ με $x\neq y$ υπάρχει $p\in\mathcal{P}$ ώστε $p(x-y)>0$. (Ισοδύναμα, για κάθε $x\in E$ με $x\neq 0$ υπάρχει $p\in\mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $p(x)>0$). Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού προκύπτει εύκολα από την πρόταση 3.1.6.

Ορισμός 3.2.5 Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος λέγεται ότι είναι τοπικά κυρτός (τ.κ.), αν η τοπολογία του $\mathcal{T}$ ορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ δηλαδή $\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{P})$, όπως παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι αν $(E,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ., τότε: 1) Ο E έχει μια βάση περιοχών του $0\in E$ που αποτελείται από (κλειστά) κυρτά και ισορροπημένα σύνολα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος 3.1.5.

2) Κάθε διανυσματικός υπόχωρος F του E είναι με τη σχετική τοπολογία ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ. (η σχετική τοπολογία επί του F συμπίπτει με την τοπικά κυρτή τοπολογία που ορίζουν οι ημινόρμες της οικογένειας $\mathcal{P}$ αν περιορισθούν στον F .)

Παραδείγματα 3.2.6. 1) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι ένας Hausdorff τοπικά κυρτός χώρος με την τοπολογία $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ που ορίζει η νόρμα. Πράγματι η οικογένεια των ανοικτών σφαιρών $\{B(x,\varepsilon): x\in X, \varepsilon>0\}$ αποτελεί μια βάση της $\mathcal{T}$ έτσι σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.5, ο $(X,\mathcal{T})$ είναι τοπικά κυρτός

(μετρικοποιήσιμος) χώρος .

2) Έστω $\Gamma \neq \emptyset$ σύνολο. Θέτομε $E = K^{\Gamma} \left(K = R \text{ ή } C \right)$. Δηλαδή ο E είναι ο διανυσματικός χώρος (με τις συνήθεις κατά σημείο πράξεις) όλων των συναρτήσεων $f : \Gamma \to K$. Για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ορίζουμε την ημινόρμα $p_{\gamma} : E \to R : p_{\gamma}\left(f \right) = \left| f\left(\gamma \right) \right|$. Έστω $\mathcal{P} = \left\{ p_{\gamma} : \gamma \in \Gamma \right\}$

Η τοπικά κυρτή τοπολογία $T_p = T$ ($\mathcal{P}$) που ορίζει η $\mathcal{P}$ επί του E σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.5 έχει ως βάση περιοχών του $0 \in E$ (της σταθεράς συνάρτησης ίσης με μηδέν) τα σύνολα της μορφής $V_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon} = \left\{ f \in E : \left| f\left(\gamma_k \right) \right| < \varepsilon, \forall k = 1,2,\ldots,n \right\}$, όπου $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in \Gamma, n \in N$ και $\varepsilon > 0$.

Αν $f \in E$, τότε μια βάση περιοχών του f αποτελείται από τα σύνολα της μορφής $V_{f,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon} = \left\{ g \in E : \left| g\left(\gamma_k \right) - f\left(\gamma_k \right) \right|, \forall k = 1,2,\ldots,n \right\}$

Έστω $\left(f_a \right)_{a \in A}$ δίκτυο στον E και $f \in E$ τότε είναι προφανές ότι

$$f_a \xrightarrow{T_p} f \Leftrightarrow f_a\left(\gamma \right) \to f\left(\gamma \right), \forall \gamma \in \Gamma .$$

Η τοπολογία $T_p = T\left(\mathcal{P} \right)$ ονομάζεται η <u>τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο</u> επί του E και βέβαια <u>συμπίπτει</u> με τη γνωστή μας <u>τοπολογία γινόμενο</u> επί του E. Ακόμη σημειώνουμε ότι ο $\left(E, T_p \right)$ είναι χώρος Hausdorff αφού αν $f, g \in E$ με $f \neq g$ τότε υπάρχει $\gamma_0 \in \Gamma : f\left(\gamma_0 \right) \neq g\left(\gamma_0 \right)$, δηλαδή $p_{\gamma_0}\left(f - g \right) > 0$.

3)Έστω $\left(X, \left\| \cdot \right\| \right)$ χώρος με νόρμα, και X^* ο συζυγής του. Θα ορίσουμε τώρα δύο ενδιαφέρουσες τοπικά κυρτές τοπολογίες, την <u>ασθενή τοπολογία</u> επί του X και την <u>ασθενή * τοπολογία</u> του X^*.

(α) <u>Η ασθενής τοπολογία του X</u>. Για κάθε $x^* \in X^*$ θέτομε $p_{x^*} : X \to R : p_{x^*}\left(x \right) = \left| x^*\left(x \right) \right|, x \in X$. Η τοπικά κυρτή τοπολογία που ορίζει η οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \left\{ p_{x^*} : x^* \in X^* \right\}$ επί του X ονομάζεται η ασθενής (weak) τοπολογία του X και συμβολίζεται με T_w.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(ι) Η οικογένεια $\mathcal{P}$ <u>διαχωρίζει</u> τα σημεία του X και έτσι ο X με την ασθενή τοπολογία είναι χώρος Hausdorff .

Ο ισχυρισμός αυτός είναι συνέπεια του θεωρήματος Hahn- Banach, αφού αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε το $z = x - y \neq 0$ και συνεπώς υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\left\| x^* \right\| = 1$ ώστε $x^*\left(z \right) = \left\| z \right\| > 0$.

(ιι) Ένα δίκτυο $\left(x_a\right)_{a\in A} \subseteq X$ συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$, δηλαδή, $x_a \xrightarrow{T_w} x$ αν και μόνο αν $x^*\left(x_a\right) \to x^*\left(x\right), \forall x^* \in X^*$.

(ιιι) Μια βάση (ανοικτών) περιοχών του $0 \in X$ αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $V_{x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon} = \left\{x \in X : \left|x_k^*\left(x\right)\right| < \varepsilon,\ \forall k = 1,2,\dots,n\right\}$

όπου $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in X^*, n \in N$ και $\varepsilon > 0$.

Επειδή κάθε ένα από τα σύνολα $V_{x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon}$ είναι και ανοικτό στην τοπολογία της νόρμας στον X (γιατί;), έπεται ότι η ασθενής τοπολογία T_w του X είναι <u>ασθενέστερη</u> (μικρότερη) της τοπολογίας της νόρμας $T_{\|\cdot\|}$ του X , δηλαδή $T_w \subseteq T_{\|\cdot\|}$.

Σημειώνουμε ότι, ένας ισοδύναμος τρόπος να ορίσουμε την ασθενή τοπολογία του X προκύπτει από την παρατήρηση ότι ο X μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικός υπόχωρος του χώρου K^{X^*} , ο οποίος σύμφωνα με το παράδειγμα (2) είναι τοπικά κυρτός με την τοπολογία T_p σύγκλισης κατά σημείο. Έτσι η ασθενής τοπολογία του X μπορεί να ορισθεί ως η σχετική τοπολογία που επάγεται από τον $\left(K^{X^*}, T_p\right)$ στον X . Πράγματι, από το θεώρημα Hahn-Banach (αν $X \neq \{0\}$ τότε) $X^* \neq \{0\}$ και η εμφύτευση του X στον K^{X^*} ορίζεται από την απεικόνιση $\varphi : X \to X^{**} \subseteq K^{X^*} : \varphi\left(x\right)\left(x^*\right) = x^*\left(x\right), x \in X, x^* \in X^*$
(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

(β) Η <u>ασθενής * τοπολογία του X^*</u>. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε μια ημινόρμα $p_x : X^* \to R : p_x\left(x^*\right) = \left|x^*\left(x\right)\right|, x^* \in X^*$.

Η οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \left\{p_x : x \in X\right\}$ ορίζει τότε μια τοπικά κυρτή τοπολογία στον X^* , η οποία ονομάζεται η ασθενής* (weak *) τοπολογία του X^* και συμβολίζεται με T_{w^*}

Παρατηρούμε ότι:

(ι) Ο $\left(X^*, T_{w^*}\right)$ είναι χώρος Hausdorff, αφού αν $x^*, y^* \in X^*$ με $x^* \neq y^*$ τότε βέβαια υπάρχει $x \in X$ με $x^*\left(x\right) \neq x^*\left(y\right) \Leftrightarrow p_x\left(x^* - y^*\right) > 0$.

(ιι) Ένα δίκτυο $\left(x_a^*\right)_{a\in A} \subseteq X^*$ συγκλίνει ασθενώς * στο $x^* \in X^*$, δηλαδή, $x_a^* \xrightarrow{T_{w^*}} x^*$ αν και μόνο αν $x_a^*\left(x\right) \to x^*\left(x\right), \forall x \in X$.

(ιιι) Μια βάση ανοικτών περιοχών του $0 \in X^*$ αποτελείται από τα σύνολα της μορφής $V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \left\{ x^* \in X^* : \left| x^*(x_k) \right| < \varepsilon, \forall k = 1,2,\dots,n \right\}$, όπου $x_1,\dots,x_n \in X, n \in N, \varepsilon > 0$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι, $T_{w^*} \subseteq T_{\|\cdot\|}$, δηλαδή, η ασθενής * τοπολογία είναι <u>ασθενέστερη</u> της τοπολογίας της νόρμας του χώρου X^*.

Σημειώνουμε ότι (όπως και η ασθενής τοπολογία) η ασθενής * τοπολογία μπορεί να ορισθεί και με τη βοήθεια του παραδείγματος (2). Πράγματι η απεικόνιση $\tau : X^* \to K^X : \tau(x^*)(x) = x^*(x), x \in X, x^* \in X^*$ είναι μια (αλγεβρική) εμφύτευση του X^* στον διανυσματικό χώρο K^X. Έτσι η T_{w^*} τοπολογία μπορεί να ορισθεί ως η σχετική τοπολογία που επάγεται από τον τοπικά κυρτό χώρο $\left(K^X, T_p\right)$ στον διανυσματικό υπόχωρο του X^* (ακριβέστερα στον $\tau\left(X^*\right)$).

4) Έστω M μετρικός χώρος ή γενικότερα ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff, ας συμβολίσουμε με $C(M) \equiv C_K(M)$ τον χώρο των <u>συνεχών</u> συναρτήσεων $f : M \to K$ ο οποίος είναι βέβαια με τις συνήθεις πράξεις (της πρόσθεσης βαθμωτών συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού συνάρτησης με βαθμωτό) ένας διανυσματικός χώρος επί του K. Για κάθε $\mathrm{K} \subseteq M$ συμπαγές μη κενό σύνολο θέτομε,

$$p_{\mathrm{K}}(f) = \sup\left\{ \left| f(x) \right| : x \in \mathrm{K} \right\}.$$

Η τοπικά κυρτή τοπολογία τ_C που καθορίζει η οικογένεια ημινορμών

$p = \left\{ p_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \subseteq M \text{ συμπαγές} \right\}$ ονομάζεται τοπολογία της <u>ομοιόμορφης σύγκλισης</u> στα <u>συμπαγή</u> υποσύνολα του M.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(ι) Η τοπολογία τ_C είναι Hausdorff, αφού αν $f, g \in C(M)$ με $f \neq g$ τότε υπάρχει $x \in M : f(x) \neq g(x)$ και συνεπώς $p_{\mathrm{K}}(f - g) > 0$, όπου $\mathrm{K} = \{x\}$. (Ουσιαστικά η τ_C είναι Hausdorff αφού είναι λεπτότερη της τοπολογίας T_p της κατά σημείο σύγκλισης επί του $C(M)$.).

(ΙΙ) Ένα δίκτυο $(f_a)_{a \in A} \subseteq C(M)$ συγκλίνει ως προς την τ_C στην συνάρτηση $f \in C(M)$ (γράφουμε τότε $f_a \xrightarrow{\tau_C} f$) αν και μόνο αν $f_a\big|_{\mathrm{K}} \to f\big|_{\mathrm{K}}$ ομοιόμορφα επί του K, για κάθε συμπαγές $\mathrm{K} \subseteq M$.

(ιιι) Οι βασικές περιοχές του $0 \in C(M)$ στην τοπολογία τ_C είναι της μορφής,
$V_{\mathrm{K},\varepsilon} = \left\{ f \in C(M) : \sup\left\{ \left| f(x) \right| : x \in \mathrm{K} \right\} < \varepsilon \right\}$, $\mathrm{K} \subseteq M$ συμπαγές και $\varepsilon > 0$.

5) Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό μη κενό σύνολο. Ας συμβολίσουμε με $\mathrm{H}(\Omega)$ τον χώρο των <u>ολομόρφων</u> συναρτήσεων $f : \Omega \to C$, ο οποίος είναι βέβαια ένας διανυσματικός υπόχωρος του χώρου $C_C(\Omega)$. Έτσι η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή (η οποία ορίσθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα) καθιστά τον $\mathrm{H}(\Omega)$ ένα Hausdorff τοπικά κυρτό υπόχωρο του $C_C(\Omega)$.

3.3 Το συναρτησοειδές του Minkowski και μετρικοποιησιμότητα σε τοπικά κυρτούς χώρους.

Υπενθυμίζουμε ότι αν E διανυσματικός χώρος, μια συνάρτηση $p : E \to R$ λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές αν

(ι) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda \geq 0$ και $x \in E$ (θετική ομογένεια)

(ιι) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in E$ (υποπροσθετικότητα)

Παρατηρούμε ότι για ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές ισχύουν:

$p(0) = 0$ (αφού $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2p(0)$) και $-p(-x) \leq p(x)$ (αφού $0 = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x)$).

Παραδείγματα 3.3.1 (1) Κάθε ημινόρμα ή γραμμικό συναρτησοειδές είναι προφανώς υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(2) Έστω $\Gamma \neq \varnothing$ σύνολο τότε η συνάρτηση $p : \ell_\infty(\Gamma) \to R : p(f) = \sup\{ f(\gamma) : \gamma \in \Gamma \}$ είναι ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές (στον χώρο $\ell_\infty(\Gamma)$ των φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων επί του Γ, που δεν είναι ημινόρμα.

(3) Οι συναρτήσεις $p, q : \ell_\infty \to R : p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n$ και

$q(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$, $x = (x_n) \in \ell_\infty$, είναι επίσης υπογραμμικά συναρτησοειδή

(στον χώρο των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών ℓ_∞) και δεν είναι ημινόρμες.

Πρόταση 3.3.2 Έστω E διανυσματικός χώρος και $p : E \to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Για κάθε $\varepsilon > 0$ τα σύνολα $B_p(0,\varepsilon) = \{ x \in E : p(x) < \varepsilon \}$ και $\hat{B}_p(0,\varepsilon) = \{ x \in E : p(x) \leq \varepsilon \}$ είναι κυρτά.

(ιι) Αν επί πλέον $p \geq 0$, τότε τα $B_p(0,\varepsilon)$ και $\hat{B}_p(0,\varepsilon)$ είναι και απορροφούντα.

Απόδειξη (ι) Έστω $x, y \in B_p(0,\varepsilon)$ και $\lambda \in [0,1]$. Τότε έχουμε, $p(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda) y < \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon$, συνεπώς το σημείο $\lambda x + (1-\lambda) y \in B_p(0,\varepsilon)$ και το $B_p(0,\varepsilon)$ είναι κυρτό. Η απόδειξη για την κυρτότητα του $\hat{B}_p(0,\varepsilon)$ είναι όμοια.

(ιι) Έστω τώρα ότι ισχύει $p \geq 0$. Αν $x \in E$ και $0 \leq t \leq \dfrac{\varepsilon}{p(x)+2}$ τότε

$p(tx) = tp(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{p(x)+2} \cdot p(x) < \varepsilon$. Άρα $tx \in \mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ και έτσι τα σύνολα $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ και

$\hat{\mathrm{B}}_p(0,\varepsilon)$ είναι απορροφούντα.

<u>Πρόταση</u> 3.3.3 Έστω E τ.γ.χ. και $p : E \to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(ι) Το p είναι συνεχής συνάρτηση.

(ιι) Το p είναι συνεχής στο $0 \in E$.

(ιιι) Το p είναι φραγμένο σε μια περιοχή του $0 \in E$.

(ιν) Το σύνολο $\mathrm{B}_p(0,1) = \{x \in E : p(x) < 1\}$ είναι (ανοικτή) περιοχή του $0 \in E$.

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Προφανές

(ιι) $\Rightarrow$ (ιιι) Επειδή p συνεχής στο 0 και $p(0) = 0$ υπάρχει περιοχή V του $0 \in E$ ώστε $p(V) \subseteq (-1,1) \Leftrightarrow |p(x)| < 1, \forall x \in V$.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ιν) Έστω $\mathrm{M} > 0$ και V περιοχή του $0 \in E$ ώστε $|p(x)| < \mathrm{M}$ για κάθε $x \in V \Rightarrow p\left(\dfrac{1}{\mathrm{M}}V\right) \subseteq (-1,1)$. Επειδή το $\dfrac{1}{\mathrm{M}}V$ είναι περιοχή του $0 \in E$ και $\dfrac{1}{\mathrm{M}}V \subseteq \mathrm{B}_p(0,1)$ έχουμε το συμπέρασμα.

(ιν) $\Rightarrow$ (ιιι) Έστω V ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ ώστε $V \subseteq B_p(0,1)$. Αν $x \in V$ τότε $-x \in V$ άρα $p(-x) < 1$ και $p(x) < 1$. Επειδή $-p(-x) \leq p(x)$ έπεται ότι $-1 < -p(-x) \leq p(x) < 1$. Συνεπώς $p(V) \subseteq (-1,1)$.

(ιιι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεσή μας υπάρχουν $\mathrm{M} > 0$ και V περιοχή του 0 ώστε $|p(x)| < \mathrm{M}$ για κάθε $x \in V$, ισοδύναμα, $p(V) \subseteq (-\mathrm{M},\mathrm{M})$. Συνεπώς $p\left(\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{M}}V\right) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)$ και η p είναι συνεχής στο 0.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Έστω $(x_a)_{a \in A}$ δίκτυο στον E ώστε $x_a \to x \in E$, τότε $x_a - x \to 0$ και $x - x_a \to 0$. Έπεται ότι $p(x_a - x) \to 0$ και $p(x - x_a) \to 0$. Από την υποπροσθετικότητα της p προκύπτει εύκολα ότι, $p(x) - p(x - x_a) \leq p(x_a) \leq p(x_a - x) + p(x)$ (1).

Πράγματι, $p(x_a)=p((x_a-x)+x)\le p(x_a-x)+p(x)$ και
$p(x)=p((x-x_a)+x_a)\le p(x-x_a)+p(x_a)$. Από όπου έπεται η (1).

Από την (1) έπεται προφανώς ότι $p(x_a)\to p(x)$ και η p είναι συνεχής στο (τυχόν) $x\in E$.

<u>Πόρισμα</u>3.3.4 Έστω E τ.δ.χ. , $T:E\to K$ γραμμικό συναρτησοειδές και $p:E\to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές (ιδιαίτερα το p είναι ημινόρμα) ώστε
$|T(x)|\le p(x), x\in E$

Αν το p είναι συνεχής συνάρτηση τότε και το T είναι συνεχής συνάρτηση.

<u>Απόδειξη</u>. Από την πρόταση 3.3.3 το p είναι φραγμένο σε μια περιοχή V του $0\in E$. Επομένως και το γραμμικό συναρτησοειδές T είναι φραγμένο στην V , έτσι από την πρόταση 3.1.8 έχουμε το συμπέρασμα.

<u>Παρατήρηση</u> 3.3.5 Αν ο τ.δ.χ. E είναι πραγματικός (δηλαδή $K=R$) τότε η υπόθεση
$|T(x)|\le p(x), x\in E$ (1)

του προηγούμενου πορίσματος μπορεί να αντικατασταθεί από την

$T(x)\le p(x), x\in E$ (2).

Πράγματι, από την ανισότητα (2) έπεται ότι $T(-x)\le p(-x), x\in E$, επομένως
$-p(-x)\le -T(-x)=T(x)\le p(x),\ x\in E$ (3).

Έστω V ισορροπημένη περιοχή του $0\in E$ και $\mathrm{M}>0$ ώστε

$|p(x)|<\mathrm{M}, \forall x\in V$ (4).

Έπεται τότε από τις (3) και (4) ότι

$|T(x)|<\mathrm{M}, \forall x\in V$

και έτσι το T είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Θα ορίσουμε τώρα μια πολύ σημαντική έννοια για την μελέτη των τοπικά κυρτών χώρων, την έννοια του συναρτησοειδούς του Minkowski . Αυτή ορίζεται για κάθε κυρτό

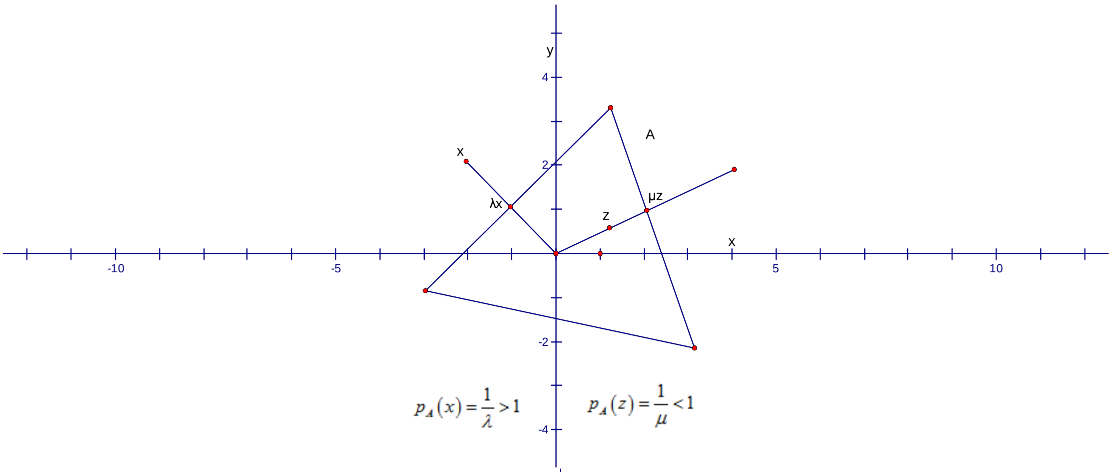
(ισορροπημένο) και απορροφούν υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου. Όπως θα διαπιστώσουμε οι ημινόρμες είναι ακριβώς τα συναρτησοειδή του Minkowski των κυρτών ισορροπημένων και απορροφούντων συνόλων.

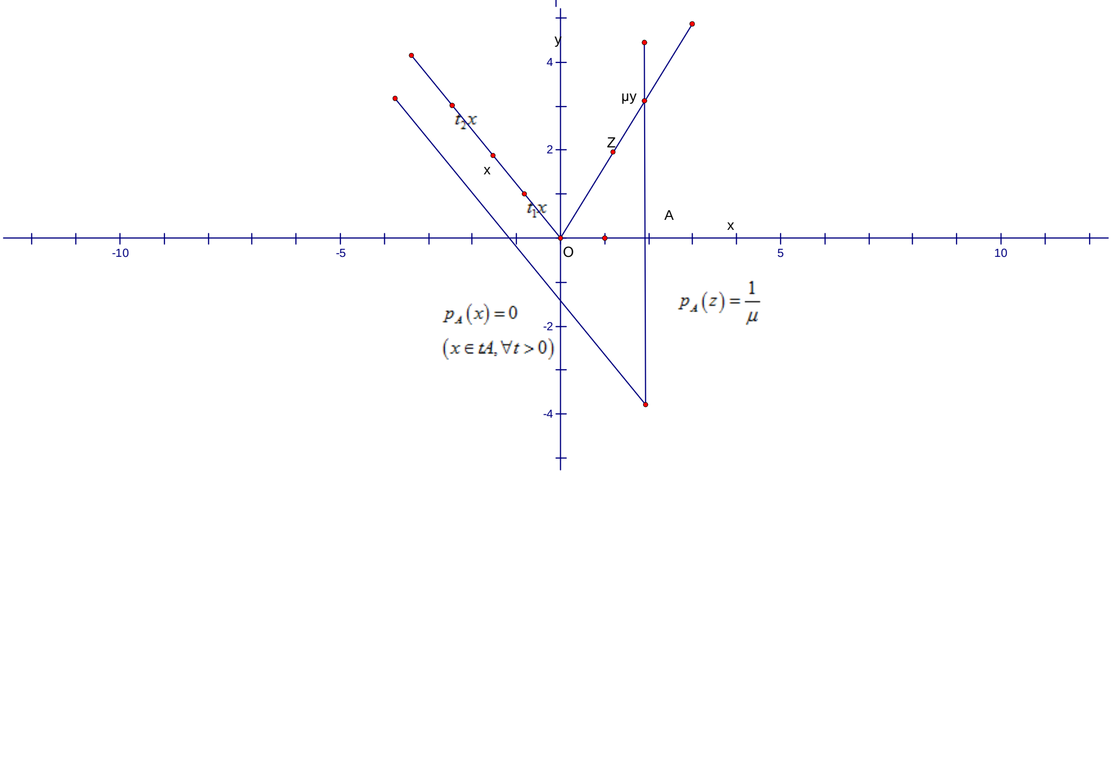
<u>Ορισμός</u> 3.3.6 Έστω E διανυσματικός χώρος και $A\subseteq E$ κυρτό και απορροφούν υποσύνολο του E . Για κάθε $x\in E$ θέτομε

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\} \quad \left(= \inf\left\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\right\}\right)$$

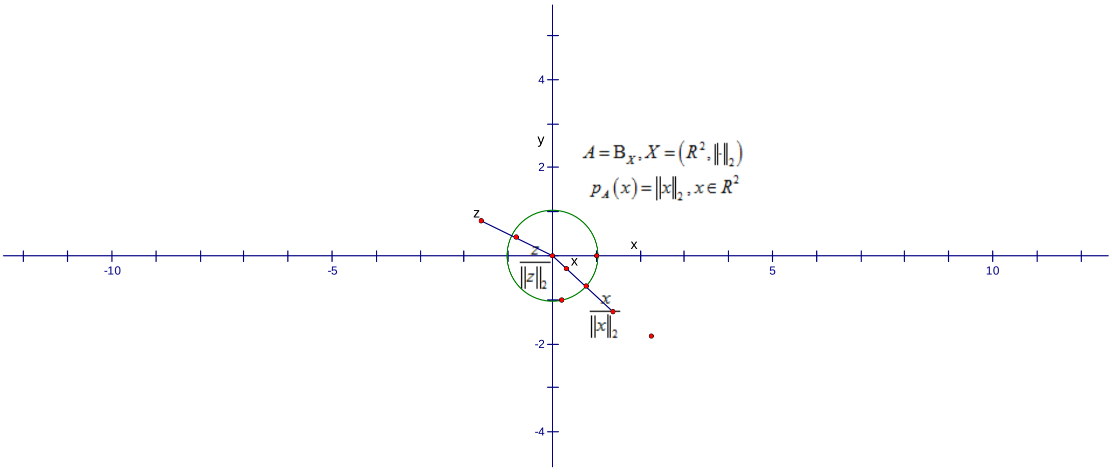
Η συνάρτηση $p_A : E \to [0, +\infty)$ είναι καλά ορισμένη αφού το A είναι απορροφούν υποσύνολο του E και ονομάζεται το <u>συναρτησοειδές του Minkowski</u> του συνόλου A.

Σε αδρές γραμμές, αν $x \neq 0$ ο αριθμός $p_A(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει τον λόγο της απόστασης του x από το 0 προς την απόσταση από το 0 του πιο απομακρυσμένου σημείου του A στην διεύθυνση του x, όπου αυτή η δεύτερη απόσταση μπορεί να είναι και άπειρη.





Σημειώνουμε ότι αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $A = \mathrm{B}_X$ ή $\hat{\mathrm{B}}_X$ τότε $p_A(x) = \|x\|, x \in X$ (Άσκηση).



<u>Θεώρημα</u> 3.3.7 Έστω E διανυσματικός χώρος και $A \subseteq E$ κυρτό και απορροφούν σύνολο. Τότε,

(ι) Το p_A είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές (με $p_A \geq 0$).

(ιι) Αν $\mathrm{B} = \{x : p_A(x) < 1\}$ και $C = \{x : p_A(x) \leq 1\}$, τότε $\mathrm{B} \subseteq A \subseteq C$ και $p_{\mathrm{B}} = p_A = p_C$

(ιιι) Αν το A είναι επιπλέον ισορροπημένο τότε το p_A είναι μια ημινόρμα.

<u>Απόδειξη</u> Για κάθε $x \in E$ θέτομε $H_A(x) = \{t > 0 : x \in tA\}$, τότε ισχύει ότι, $(p_A(x), +\infty) \subseteq H_A(x) \subseteq [p_A(x), +\infty), x \in E$. Ισοδύναμα για κάθε $t > 0$ ισχύει, $p_A(x) < t \Rightarrow x \in tA \Rightarrow p_A(x) \leq t$ (1).

Η σχέση αυτή προκύπτει εύκολα από την παρατήρηση ότι αν A κυρτό με $0 \in A$ τότε, $0 \leq \lambda < \mu \Rightarrow \lambda A \subseteq \mu A$, καθώς και από τον ορισμό του $p_A(x)$. Παρατηρούμε ότι $p_A(x) = \inf H_A(x)$.

(ι) Έστω $x, y \in E$. Αν $t_1 > 0, t_2 > 0$ ώστε $x \in t_1 A$ και $y \in t_2 A$ τότε ,

$$x + y \in t_1 A + t_2 A = (t_1 + t_2)\left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} A + \frac{t_2}{t_1 + t_2} A\right) \subseteq (t_1 + t_2) A$$, αφού το A είναι κυρτό.

Έπεται ότι $p_A(x + y) \leq t_1 + t_2$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

Έστω $s > 0$ και $x \in E$, τότε

$$p_A(sx) = \inf\{t > 0 : sx \in tA\} = \inf\left\{t > 0 : x \in \frac{t}{s} A\right\} = \inf\{t's : t' > 0 \text{ και } x \in t'A\}$$

$= s\cdot \inf\{t' : x \in t'A\} = s \cdot p_A(x)$. Αν $s=0$ τότε $p_A(0\cdot x) = p_A(0) = 0 = 0\cdot p_A(x)$. Έτσι έχουμε τον ισχυρισμό (ι).

(ιι) Η σχέση $B \subseteq A \subseteq C$ έπεται αμέσως από την (1) Από τη σχέση $B \subseteq A \subseteq C$ έπεται εύκολα ότι $p_C \leq p_A \leq p_B$. Πράγματι αν $x \in E$ και $x \in H_B(x) \Leftrightarrow x \in tB$

τότε $x \in tA \Leftrightarrow t \in H_A(x)$, δηλαδή $H_B(x) \leq H_A(x)$ από όπου έπεται ότι $p_A(x) \leq p_B(x)$, έτσι συμπεραίνουμε ότι $p_A \leq p_B$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $p_C \leq p_A$.

Για να αποδείξουμε την ισότητα, ας υποθέσουμε ότι $p_C(x) < s < t$. Τότε $x \in sC \Leftrightarrow \dfrac{x}{s} \in C$ και άρα $p_A\left(\dfrac{x}{s}\right) \leq 1$ δηλαδή, $p_A(x) \leq s$. Έπεται ότι $p_A\left(\dfrac{x}{t}\right) \leq \dfrac{s}{t} < 1$, οπότε $\dfrac{x}{t} \in B \Leftrightarrow x \in tB$ και έτσι $p_B(x) \leq t$. Επειδή $p_C \leq p_B$ έπεται ότι $p_C(x) = p_B(x)$. Έτσι έχουμε ότι $p_C = p_B = p_A$.

(ιιι) Υποθέτομε τώρα ότι το A είναι επί πλέον και ισορροπημένο σύνολο. Για κάθε $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ και $x \in E$ έχουμε,

$$p_A(\lambda x) = \inf\{t>0 : \lambda x \in tA\} = \inf\left\{t>0 : x \in \frac{t}{|\lambda|}\cdot\left(\frac{|\lambda|}{\lambda}A\right)\right\} = \inf\left\{t>0 : x \in \frac{t}{|\lambda|}A\right\}$$
$$= \inf\{|\lambda| t' : t'>0 \text{ και } x \in t'A\} = |\lambda|\, p_A(x).$$

(Το $\mu = \dfrac{|\lambda|}{\lambda}$ έχει απόλυτη τιμή $|\mu| = 1$, επειδή το A είναι ισορροπημένο, έπεται ότι $A = \mu A$.)

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Σημειώνουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τα συναρτησοειδή Minkowski των συνόλων B και C, εφόσον από την πρόταση 3.3.2 τα σύνολα αυτά (θυμίζουμε ότι το p_A είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές) είναι κυρτά και απορροφούντα.

2) Για τα σύνολα A, B, C του ισχυρισμού (ιι) του θεωρήματος 3.3.7 ενδέχεται να ισχύει $B \underset{\neq}{\subset} A \underset{\neq}{\subset} C$. Πράγματι, έστω $\hat{B}(0,1)$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος και S_1 ο κλειστός μοναδιαίος κύκλος του Ευκλείδειου επιπέδου R^2. Θεωρούμε τυχόν υποσύνολο X του S_1 με $\varnothing \neq X \underset{\neq}{\subset} S_1$. Θέτομε $A = \hat{B}(0,1) \setminus X$. Τότε ισχύει ότι $B = \{x : p_A(x) < 1\} = B(0,1)$, $C = \{x : p_A(x) \leq 1\} = \hat{B}(0,1)$ (γιατί;) και συνεπώς $B \underset{\neq}{\subset} A \underset{\neq}{\subset} C$.

3) Αν το p είναι ημινόρμα τότε ισχύει ότι $p = p_B = p_C$ όπου $B = B_p(0,1)$ και $C = \hat{B}_p(0,1)$ (γιατί;). Επομένως οι ημινόρμες ταυτίζονται με τα συναρτησοειδή Minkowski των κυρτών ισορροπημένων και απορροφούντων συνόλων.

<u>Πρόταση</u> 3.3.8 Έστω E τ.δ.χ. και $U \subseteq E$ ανοικτό και κυρτό με $0 \in U$. Τότε ισχύουν :

(ι) Το U είναι απορροφούν και άρα το p_U είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(ιι) $U = \{x \in E : p_U(x) < 1\}$

<u>Απόδειξη</u>. (ι) Όπως έχουμε αποδείξει κάθε περιοχή του 0 σ' ένα τ.δ.χ. E είναι απορροφούσα (πρβλ. θεώρημα 3.1.3). Έτσι το U είναι κυρτό και απορροφούν και άρα μπορεί να ορισθεί το συναρτησοειδές Minkowski του U το οποίο από το θεώρημα 3.3.7 είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(ιι) Από τον ισχυρισμό (ιι) του θεωρήματος 3.3.7 έχουμε ότι $\{x \in E : p_U(x) < 1\} \subseteq U$. Έστω $x \in U$. Από την συνέχεια της απεικόνισης $\varphi : \lambda \in K \to \varphi(x) = \lambda x \in E$ στο $\lambda = 1$ και επειδή $\varphi(1) = x \in U$ με U ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $t \in K, \quad |t-1| \leq \delta$ τότε $tx \in U$. Ιδιαίτερα έπεται ότι $(1+\delta)x \in U$. Άρα $x \in \frac{1}{1+\delta}U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{1+\delta} < 1$.

Έτσι αποδείξαμε την ισότητα μεταξύ των δύο συνόλων.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε έναν ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό των τοπικά κυρτών τ.δ.χ. ο οποίος μεταξύ άλλων δικαιολογεί και την ορολογία ' τοπικά κυρτός' χώρος.

<u>Θεώρημα</u> 3.3.9 Έστω (E,T) τ.δ.χ. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο (E,T) είναι τοπικά κυρτός.

(ιι) Ο (E,T) έχει μια βάση περιοχών του $0 \in E$ που αποτελείται από (ανοικτά) <u>κυρτά</u> (και ισορροπημένα) σύνολα.

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έπεται αμέσως από τον ορισμό του τοπικά κυρτού χώρου.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \subseteq E$ ανοικτό και κυρτό με $0 \in A$ τότε υπάρχει ανοικτό κυρτό και ισορροπημένο B με $0 \in B \subseteq A$ (πρβλ. Πρόταση 3.1.2 (χι)).

Έπεται προφανώς ότι ο E έχει μια βάση περιοχών έστω $\mathcal{B}$ αποτελούμενη από ανοικτά κυρτά και ισορροπημένα σύνολα. Από το θεώρημα 3.3.7 κάθε $U \in \mathcal{B}$ ορίζει μια ημινόρμα $p_U : E \to R$.

<u>Ισχυρισμός</u>. Η τοπολογία T_B που καθορίζει η οικογένεια ημινορμών $p = \{ p_U : U \in B \}$ ταυτίζεται με την T .

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u> Παρατηρούμε ότι αν $p = p_U$ για κάποιο $U \in B$ τότε από την πρόταση 3.3.8 ισχύει ότι, $B_p(0,1) = \{ x \in E : p(x) < 1 \} = U$.

Έπεται ότι οι δύο τοπολογίες επάγουν την <u>ίδια</u> βάση περιοχών για το $0 \in E$, από όπου έχουμε το συμπέρασμα.

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τώρα μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας τοπικά κυρτός χώρος <u>μετρικοποιήσιμος</u> .

<u>Θεώρημα </u>3.3.10 Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος (Hausdorff)και p μια οικογένεια ημινορμών που καθορίζει την τοπολογία του E $(T = T(p))$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο (E,T) είναι μετρικοποιήσιμος.

(ιι) Υπάρχει μια <u>αριθμήσιμη</u> υποοικογένεια $p' \subseteq p$ ώστε η τοπολογία του E να καθορίζεται από την p' $(T = T(p'))$.

<u>Απόδειξη</u> (ι) $\Rightarrow$ (ιι) . Έστω d μια μετρική επί του E η οποία επάγει την τοπολογία T του E . Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του $0 \in E$ από ανοικτές σφαίρες ως προς την d , π.χ. $\left\{ B_d\left(0, \frac{1}{n}\right) : n \geq 1 \right\}$. Για κάθε $n \in N$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο ημινορμών $F_n \subseteq p$ και $\varepsilon_n > 0$ ώστε $B_{F_n}(0, \varepsilon_n) \subseteq B_d\left(0, \frac{1}{n}\right)$, όπου $B_{F_n}(0, \varepsilon_n) = \{ x \in E : p(x) < \varepsilon_n, \forall p \in F_n \}$.

Θέτομε $p' = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq p$. Το p' είναι βέβαια ένα αριθμήσιμο σύνολο ημινορμών και ότι η τοπολογία $T(p')$ που καθορίζει η p' επί του E ταυτίζεται με την $T = T(p)$.

(Η ακολουθία $\{ B_{F_n}(0, \varepsilon_n) : n \geq 1 \}$ είναι και αυτή μια βάση περιοχών του $0 \in E$ ως προς την $T = T(p)$.)

(ιι) $\Rightarrow$ (ι). Έστω $p' = \{ p_n : n \geq 1 \} \subseteq p$ μια ακολουθία ημινορμών ώστε $T = T(p')$ σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.5.

Επειδή ο χώρος (E,T) είναι Hausdorff η ακολουθία $p'=\{p_n : n\geq 1\}$ διαχωρίζει τα σημεία του E. Ορίζουμε μια μετρική $d: E\times E \to R$ με τον ακόλουθο τρόπο,

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \quad (1)$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η d είναι πράγματι μια μετρική επί του E η οποία επιπλέον είναι <u>αναλλοίωτη για τις μεταφορές</u>, δηλαδή
$d(x+a,y+a)=d(x,y), \forall x,y,a\in E$.

Έστω T_d η τοπολογία η οποία επάγεται από την μετρική d επί του E. Ας συμβολίσουμε με $B_d(x,\varepsilon)$ την ανοικτή σφαίρα με κέντρο $x\in E$ και ακτίνα $\varepsilon>0$ ως προς την d. Επειδή η d είναι αναλλοίωτη για τις μεταφορές έχομε ότι $B_d(x,\varepsilon)=x+B_d(0,\varepsilon)$. Έπεται ότι για να συγκρίνουμε τις τοπολογίες T και T_d αρκεί να τις συγκρίνουμε « γύρω» από το $0\in E$.

Επειδή κάθε p_n είναι συνεχής (ως προς την T) και επειδή η σειρά (1) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $E\times E$ η d είναι συνεχής και έτσι κάθε σφαίρα $B_d(0,\varepsilon)$ είναι $T-$ανοικτό σύνολο. Έπεται ότι $T_d\subseteq T$.

Για να αποδείξουμε ότι $T\subseteq T_d$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $n\geq 1$ και για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $B_d\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}\right)\subseteq B_{p_n}(0,\varepsilon)$ (2) ισοδύναμα,

$$d(x,0)<\frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}\Rightarrow p_n(x)<\varepsilon \quad (3).$$

Πράγματι, έστω N φυσικός και $x\in E$ ώστε, $d(x,0)<\frac{\varepsilon}{2^N(1+\varepsilon)}$.

Ας υποθέσουμε ότι $p_N(x)\geq\varepsilon$. Τότε $^{(1)}$, $\frac{p_N(x)}{1+p_N(x)}\geq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{2^N}\frac{p_N(x)}{1+p_N(x)}\geq\frac{1}{2^N}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Κατά συνέπεια, $d(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}\geq\frac{1}{2^N}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ όμως η τελευταία ανισότητα αντιφάσκει με την υπόθεσή μας. Έπεται ότι η συνεπαγωγή (3) ισχύει άρα και η (2) ισχύει.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

(1) Η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}, x\geq 0$ είναι γνήσια αύξουσα, εφόσον,
$\varphi'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}, x\geq 0$.

<u>Παρατήρηση</u> 3.3.11 Έστω E διανυσματικός χώρος και $\mathcal{P}=\{p_n, n\geq 1\}$ μια ακολουθία ημινορμών επί του E η οποία διαχωρίζει τα σημεία του E. Θεωρούμε την τοπικά κυρτή τοπολογία $T=T(p_n)$ η οποία μετρικοποιείται από την μετρική d του προηγούμενου θεωρήματος, δηλαδή $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}, x,y\in E$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(1) Οι σφαίρες που ορίζει η d δεν είναι κατ' ανάγκη κυρτά σύνολα (βέβαια κάθε σφαίρα $B_d(x,\varepsilon)$ περιέχει μια ανοικτή και κυρτή περιοχή V του x, αφού ο (E,T) είναι τοπικά κυρτός χώρος.). Ένα τέτοιο παράδειγμα περιγράφεται στις ασκήσεις στο τέλος της παραγράφου.

2) Έστω (x_n) ακολουθία στον E. Τότε η (x_n) είναι $d-Cauchy \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε N φυσικό υπάρχει $n_N\equiv n(N,\varepsilon)$ φυσικός τέτοιος ώστε
$n>m\geq n_N \Rightarrow p_N(x_n-x_m)<\varepsilon$.

Απόδειξη '$\Rightarrow$' Έστω ότι η (x_n) είναι $d-Cauchy$. Αν $\varepsilon>0$ και N φυσικός τότε υπάρχει $n(N,\varepsilon)$ φυσικός τέτοιος ώστε $n>m\geq n(N,\varepsilon)$ τότε $d(x_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2^N(1+\varepsilon)}$

$$\Leftrightarrow d(x_n-y_m,0)<\frac{\varepsilon}{2^N(1+\varepsilon)}.$$

Έπεται αμέσως από την (3) του προηγούμενου θεωρήματος
ότι $p_N(x_n-y_m)<\varepsilon, \forall n>m\geq n(N,\varepsilon)$

'' $\Leftarrow$'' Έστω $\varepsilon>0$. Θεωρούμε n_0 φυσικό αριθμό ώστε, $\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε ισχύει, $\bigcap_{k=1}^{n_0}B_{p_k}\left(0,\frac{\varepsilon}{2n_0}\right)\subseteq B_d(0,\varepsilon)$ (4)

Πράγματι, αν $x\in E$ ώστε $p_k(x)<\frac{\varepsilon}{2n_0}, k=1,2,\ldots,n_0$ τότε,

$$d(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}$$
$$<\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\left(\frac{\varepsilon}{2n_0}\right)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2n_0}\left(\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2n_0}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Θεωρούμε τώρα τους θετικούς ακέραιους $\left\{ n\left(k, \frac{\varepsilon}{2n_0} \right) : k = 1, 2, ..., n_0 \right\}$ που προκύπτουν από την υπόθεσή μας και θέτομε $n_1 = \max \left\{ n\left(k, \frac{\varepsilon}{2n_0} \right) : k = 1, 2, ..., n_0 \right\}$. Έστω $n > m \geq n_1$, τότε έχουμε ότι, $p_k \left(x_n - x_m \right) < \frac{\varepsilon}{2n_0}$ για κάθε $k = 1, 2, ..., n_0$. Έτσι από την (4) συμπεραίνουμε ότι, $d\left(x_n, x_m \right) < \varepsilon$ και η $\left(x_n \right)$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς την d.

Σημειώνουμε ότι η (4) μας δίνει μια άλλη απόδειξη του γεγονότος ότι $T_d \subseteq T$ (πρβλ την απόδειξη της κατεύθυνσης (ι) $\Rightarrow$ (ιι) του θεωρήματος 3.3.10).

Για να χαρακτηρίσουμε τους χώρους με νόρμα μέσα στην πολύ ευρύτερη κλάση των τοπολογικών διανυσματικών χώρων χρειαζόμαστε μια έννοια φραγμένου συνόλου για τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

<u>Ορισμός</u> 3.3.12 Έστω E τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq E$ λέγεται φραγμένο αν για κάθε U περιοχή του $0 \in E$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\delta A \subseteq U \Leftrightarrow A \subseteq \frac{1}{\delta} U$.

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός τ.δ.χ. είναι φραγμένο αφού οι περιοχές του $0 \in E$ είναι απορροφούσες. Γενικότερα όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός τ.δ.χ. είναι φραγμένο.

2) Αν $A \subseteq B \subseteq E$ και το B είναι φραγμένο υποσύνολο του τ.δ.χ. E τότε προφανώς και το A είναι φραγμένο.

3) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα έστω $\|\cdot\|$, τότε οι δύο έννοιες φραγμένου συνόλου- εύκολα διαπιστώνουμε ότι συμπίπτουν. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι γενικά σε έναν τ.δ.χ. $\left(E, T \right)$ του οποίου η τοπολογία επάγεται από μια μετρική έστω d (μετρικοποιήσιμος τ.δ.χ.) οι δύο έννοιες δεν συμπίπτουν πάντοτε, ακόμα και αν η d είναι αναλλοίωτη για τις μεταφορές. Για παράδειγμα αν ο $\left(E, \|\cdot\| \right)$ είναι (μη τετριμμένος) χώρος με νόρμα και d είναι η μετρική που ορίζει η νόρμα τότε ο E δεν είναι βέβαια φραγμένος ως προς την d και συνεπώς ως προς την έννοια του φραγμένου συνόλου που περιγράφεται στον ορισμό 3.3.12. Από την άλλη μεριά αν $d_1 = \frac{d}{1+d}$ τότε η d_1 είναι μια μετρική ισοδύναμη με την d (αναλλοίωτη για τις μεταφορές) και βέβαια ο E είναι φραγμένος για την d_1 με $d_1\left(x, y \right) \leq 1$ για κάθε $x, y \in E$. Ανάλογες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε και για την μετρική d που ορίζεται στο θεώρημα 3.3.10

Πρόταση 3.3.13 Έστω V περιοχή του 0 σε έναν τ.δ.χ. E. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(α) Αν $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ και $\lambda_n\to+\infty$ τότε $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n V$

(b) Αν K συμπαγές υποσύνολο του E τότε το K είναι φραγμένο.

Απόδειξη (α) Έστω $x\in E$ με $x\neq 0$. Επειδή η απεικόνιση $\varphi:\lambda\in K\to\varphi(\lambda)=\lambda x\in E$ είναι συνεχής, το σύνολο $\varphi^{-1}(V)=\{\lambda\in K:\lambda x\in V\}$ είναι περιοχή του $0\in K$. Έτσι υπάρχει n_0 φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $n\geq n_0\Rightarrow\frac{1}{\lambda_n}\in\varphi^{-1}(V)$. Επομένως, αν $n\geq n_0$ τότε $\frac{1}{\lambda_n}x\in V$ ή $x\in\lambda_n V$.

Έτσι ο ισχυρισμός (α) έχει αποδειχθεί.

(b) Έστω W ισορροπημένη περιοχή του $0\in E$. Από τον ισχυρισμό (α) έχομε ότι $K\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}nW=E$. Από την συμπάγεια του K θα υπάρχουν $n_1<\ldots<n_m\in N$ ώστε $K\subseteq\bigcup_{\lambda=1}^{m}n_\lambda W$. Επειδή το W είναι ισορροπημένο σύνολο, έπεται ότι $n_\lambda W\subseteq n_m W,\lambda=1,2,\ldots,m$. Συνεπώς $K\subseteq n_m W$ και το K είναι φραγμένο.

……………………………………………………………………….

Σε τοπικά κυρτούς χώρους τα φραγμένα σύνολα χαρακτηρίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

Πρόταση 3.3.14 Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος, $\mathcal{P}$ μια οικογένεια ημινορμών που καθορίζει την τοπολογία του E $\left(T=T(\mathcal{P})\right)$ και $A\subseteq E$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Το A είναι φραγμένο.

(ιι) Το σύνολο $p(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του R για κάθε $p\in\mathcal{P}$.

Απόδειξη (ι) $\Rightarrow$ (ιι). Έστω $p\in\mathcal{P}$. Επειδή η $B_p(0,1)=\{x\in E:p(x)<1\}$ είναι περιοχή του $0\in E$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε $A\subseteq\delta\cdot B_p(0,1)$, δηλαδή $0\leq p(x)<\delta,\forall x\in A$ και άρα το $p(A)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του R.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι). Έστω $B_\Delta(0,\varepsilon)$ μια βασική περιοχή του $0\in E$, όπου $\varepsilon>0$ και $\Delta=\{p_1,\ldots,p_n\}\subseteq\mathcal{P}$. Έστω $m_1,\ldots,m_n$ θετικοί πραγματικοί ώστε $p_k(x)<m_k$ για κάθε

$x \in A$ και για κάθε $k = 1, 2, ..., n$. Αν $\delta \geq \max\left\{\frac{m_1}{\varepsilon}, ..., \frac{m_n}{\varepsilon}\right\}$, τότε

$A \subseteq \delta \cdot B_\Delta(0, \varepsilon) = B_\Delta(0, \delta \cdot \varepsilon)$ και έτσι το A είναι φραγμένο στον τ.δ.χ. E.

Θεώρημα 3.3.15 Έστω (E, T) (Hausdorff) τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(ι) Η τοπολογία του E επάγεται από μια νόρμα (ιδιαίτερα, ο (E, T) είναι τοπικά κυρτός.)

(ιι) Υπάρχει μια φραγμένη κυρτή περιοχή του $0 \in E$ (Ισοδύναμα ο E έχει ένα μη κενό ανοικτό κυρτό και φραγμένο σύνολο)

Απόδειξη (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα επί του E ώστε $T = T_{\|\cdot\|}$, τότε βέβαια η ανοικτή σφαίρα $B(0,1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ είναι μια ανοικτή κυρτή και φραγμένη περιοχή του $0 \in E$. (πρβλ. και την παρατήρηση (3) μετά τον ορισμό 3.3.12.).

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Έστω U κυρτή φραγμένη περιοχή του $0 \in E$. Από την πρόταση 3.1.2 (χι) υπάρχει μια ανοικτή κυρτή και ισορροπημένη περιοχή V του $0 \in E$ ώστε $V \subseteq U$. Έστω $p = p_V$ το συναρτησοειδές του Minkowski της V.

Ισχυρισμός. Το p_V είναι νόρμα η οποία επάγει την τοπολογία του E.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Το $p = p_V$ είναι βέβαια από το θεώρημα 3.3.7 μια ημινόρμα. Έστω $x \in E$ με $x \neq 0$. Εφόσον ο E είναι Hausdorff υπάρχουν περιοχές W_0 και W_x των 0 και x αντίστοιχα ώστε $W_0 \cap W_x = \varnothing$. Από την υπόθεσή μας η U είναι φραγμένη επομένως υπάρχει $\varepsilon_0 > 0 : \varepsilon_0 V \subseteq \varepsilon_0 U \subseteq W_0$. Όμως ισχύει ότι,
$\varepsilon_0 V = \varepsilon_0 \{y : p(y) < 1\} = \{z : p(z) < \varepsilon_0\}$ (πρβλ. Πρόταση 3.3.8).

Έπεται ότι, $p(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ και η $p = p_V$ είναι μια νόρμα.

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή $\varepsilon V = \varepsilon\{y : p(y) < 1\} = B_p(0, \varepsilon)$, έπεται ότι κάθε ανοικτή σφαίρα ως προς την νόρμα p είναι ανοικτό σύνολο ως προς την T και άρα $T_p \subseteq T$, όπου T_p είναι η τοπολογία που επάγει η νόρμα p επί του E.

Έστω τώρα W τυχούσα περιοχή του $0 \in E$ ως προς την T. Εφόσον η U είναι φραγμένη υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, $B_p(0, \delta) = \{x : p(x) < \delta\} = \delta V \subseteq \delta U \subseteq W$.

Έπεται αμέσως ότι $T \subseteq T_p$ και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

....

Υπενθυμίζουμε τώρα από την τοπολογία την έννοια του τοπικά συμπαγούς χώρου. Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X λέγεται <u>τοπικά συμπαγής</u>, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια βάση περιοχών του x η οποία αποτελείται από συμπαγή σύνολα. Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια συμπαγής περιοχή V του x (γιατί;).

<u>Παραδείγματα</u>: 1) Ο Ευκλείδειος χώρος $\left(R^n, \|\cdot\|_2\right)$ είναι τοπικά συμπαγής (και όχι συμπαγής).

2) Κάθε ανοικτό υποσύνολο τοπικά συμπαγούς (ιδιαίτερα συμπαγούς) χώρου είναι τοπικά συμπαγής (γιατί;)

3) Αν X είναι μη κενό σύνολο και d είναι η διακριτή μετρική επί του X , τότε ο (X,d) είναι τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος (γιατί;). Παρατηρούμε ότι αν το X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε ο (X,d) δεν είναι διαχωρίσιμος.

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει γνωστό αποτέλεσμα για χώρους με νόρμα.

<u>Θεώρημα</u> 3.3.16 Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος. Αν ο (E,T) είναι τοπικά συμπαγής τότε η τοπολογία του επάγεται από μια νόρμα και συνεπώς είναι <u>πεπερασμένης</u> διάστασης.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω V περιοχή του $0 \in E$ ώστε η $\overline{V}$ είναι συμπαγές σύνολο. Τότε η $\overline{V}$ και άρα η ίδια η V είναι φραγμένη. Έστω $W \subseteq V$ ανοικτή κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ (πρβλ. θεώρημα 3.3.9).Έπεται από το θεώρημα 3.3.15 ότι το συναρτησοειδές του Minkowski $p = p_W$ του W είναι μια νόρμα η οποία επάγει την τοπολογία του E , ώστε $B_p(0,1) = W$. Έτσι ο E είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος με νόρμα και άρα ο E έχει πεπερασμένη διάσταση.

…………………………………………….

<u>Παρατήρηση</u>. Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει χωρίς την υπόθεση της τοπικής κυρτότητας του E (πρβλ. [R] θεώρημα 1.22).

<u>Παράδειγμα</u> 3.3.17 Έστω $E = K^{\Gamma} =$ χώρος των συναρτήσεων $f : \Gamma \to R$ με την τοπικά κυρτή τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο T_p (πρβλ. το παράδειγμα 3.2.6 (2)).

(α) Αν το σύνολο Γ είναι άπειρο τότε η T_p δεν επάγεται από μια νόρμα.

(β) Αν το Γ είναι υπεραριθμήσιμο τότε η T_p δεν είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία.

<u>Απόδειξη</u> Υπενθυμίζουμε ότι η τοπολογία T_p του E ορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ όπου $p_\gamma(f) = |f(\gamma)|, \gamma \in \Gamma, f \in E$

(α) Ας υποθέσομε ότι η τοπολογία T_p επάγεται από κάποια νόρμα. Τότε από το θεώρημα 3.3.15 ο E θα είχε μια φραγμένη περιοχή έστω V του $0 \in E$. Έστω $F \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ ώστε $B_F(0,\varepsilon) \subseteq V$, όπου, $B_F(0,\varepsilon) = \{ f \in E : |f(\gamma)| < \varepsilon, \forall \gamma \in F \}$.

Επειδή η περιοχή $B_F(0,\varepsilon)$ θα είναι και αυτή φραγμένη από την πρόταση 3.3.14 θα υπάρχει για κάθε $\gamma \in \Gamma$, $m_\gamma > 0$ ώστε, $f \in B_F(0,\varepsilon) \Rightarrow |f(\gamma)| \le m_\gamma$ (1).

Επειδή το Γ είναι άπειρο υπάρχει $\gamma_0 \in \Gamma \setminus F$ (το F είναι πεπερασμένο). Ορίζουμε μια συνάρτηση $f_0 : \Gamma \to K$ με τον ακόλουθο τρόπο, $f_0(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0\} \\ m_{\gamma_0} + 1, & \gamma = \gamma_0 \end{cases}$.

Τότε $F \subseteq \Gamma \setminus \{\gamma_0\}$, άρα $f_0(\gamma) = 0, \forall \gamma \in F$ και $f_0 \in B_F(0,\varepsilon)$. Όμως $|f_0(\gamma_0)| = m_{\gamma_0} + 1 > m_{\gamma_0}$ και η ανισότητα αυτή αντιφάσκει με την (1). Επομένως η τοπολογία του E δεν επάγεται από κάποια νόρμα.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι το Γ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και ότι η T_p είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία.

Από το θεώρημα 3.3.10 υπάρχει $\Delta \subseteq \Gamma$ το πολύ αριθμήσιμο ώστε η οικογένεια ημινορμών $\{ p_\gamma : \gamma \in \Delta \}$ να καθορίζει την τοπολογία T_p. Επομένως τα σύνολα $\{ B_F(0,\varepsilon) : F \subseteq \Delta \text{ πεπερασμένο και } \varepsilon > 0 \}$ συνιστούν μια βάση περιοχών του $0 \in \mathrm{E}$.

Έστω $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \Delta$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $g_0 : \Gamma \to K$ ώστε $g_0(\gamma) = 0, \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0\}$ και $g_0(\gamma_0) = 1$. Παρατηρούμε ότι, $g_0 \in B_F(0,\varepsilon)$ για κάθε $F \subseteq \Delta$ πεπερασμένο για κάθε $\varepsilon > 0$, αφού $F \subseteq \Delta \subseteq \Gamma \setminus \{\gamma_0\}$, επομένως $g_0 \in \bigcap \{ B_F(0,\varepsilon) : F \subseteq \Delta \text{ πεπερασμένο, } \varepsilon > 0 \} = \{0\}$ άτοπο εφόσον $g_0(\gamma_0) \ne 0$.

Συμπεραίνουμε ιδιαίτερα από το προηγηθέν παράδειγμα και το θεώρημα 3.3.10 ότι :

1) ο χώρος R^N (και ο C^N) με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο είναι <u>μετρικοποιήσιμος </u>αλλά η τοπολογία του <u>δεν</u> επάγεται από κάποια νόρμα.

2) Οι χώροι $R^{[0,1]}, R^R.C^R, C^C$ κτλ ο καθένας με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο, δεν είναι μετρικοποιήσιμοι.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με ένα χρήσιμο αποτέλεσμα από την Γραμμική Άλγεβρα.

<u>Πρόταση</u> 3.3.18 Έστω E διανυσματικός χώρος, $\Lambda, \Lambda_1, \ldots \Lambda_n$ γραμμικά συναρτησοειδή επί του E και $N = \bigcap_{k=1}^{n} Ker\Lambda_k$. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

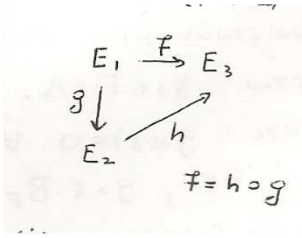
(ι) Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in K$ ώστε $\Lambda = a_1\Lambda_1 + \ldots + a_n\Lambda_n$.

(ιι) $\Lambda(x) = 0, \forall x \in N$, δηλαδή $\bigcap_{k=1}^{n} Ker\Lambda_k \subseteq Ker\Lambda$.

<u>Απόδειξη</u> Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα .

<u>Ισχυρισμός</u>. Έστω E_1, E_2, E_3 διανυσματικοί χώροι και $f : E_1 \to E_3, g : E_1 \to E_2$ γραμμικές απεικονίσεις. Τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $h : E_2 \to E_3$ ώστε $f = hog$ αν και μόνο αν $Kerg \subseteq Kerf$.

<u>Απόδειξη</u> του ισχυρισμού. Υποθέτομε ότι $Kerg \subseteq Kerf$. Ορίζουμε $h : g(E_1) \to E_3$ ως εξής, $h\big(g(x)\big) = f(x), x \in E_1$. Έστω ότι $g(x_1) = g(x_2)$. Τότε $x_1 - x_2 \in Kerg \subseteq Kerf$, άρα $f(x_1) = f(x_2)$ και έτσι η h είναι καλά ορισμένη.



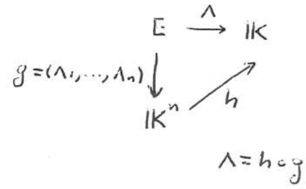
Επεκτείνουμε την h σε μια γραμμική απεικόνιση επί του E_2 και παρατηρούμε ότι $f = hog$. Η άλλη συνεπαγωγή του ισχυρισμού είναι προφανής.

Αποδεικνύουμε τώρα την συνεπαγωγή (ιι) $\Rightarrow$ (ι).

Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για $E_1 = E, E_2 = K^n, E_3 = K, f = \Lambda$ και την $g = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, έτσι βρίσκουμε μια γραμμική απεικόνιση $h : K^n \to K$ ώστε $f(x) = h\big(g(x)\big), x \in E_1 = E$.
Η απεικόνιση h μπορεί βέβαια να γραφεί ως

$h(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$, για κάποιες σταθερές $a_1, \ldots, a_n \in K$ και κάθε $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$. Επομένως

$\Lambda(x) = a_1\Lambda_1(x) + \ldots + a_n\Lambda_n(x)$, για κάθε $x \in E$



Η συνεπαγωγή (ι) $\Rightarrow$ (ιι) είναι προφανής.

<u>Ασκήσεις</u>

1) Έστω E τ.δ.χ., αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε κυρτό υποσύνολο A του E είναι συνεκτικό. Ιδιαίτερα ο E είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος.

(b) Κάθε ισορροπημένο υποσύνολο A του E είναι συνεκτικό. Ιδιαίτερα ο E είναι τοπικά συνεκτικός (δηλαδή, κάθε $x \in E$ έχει μια βάση περιοχών από συνεκτικά σύνολα).

[<u>Υπόδειξη</u> (α) Αν $a \in A$ τότε $A = \bigcup_{x \in A} [a, x]$. Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα$[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}$ σε ένα τ.δ.χ. είναι συνεκτικό. (b) Αν A ισορροπημένο $\neq \varnothing$ τότε $A = \bigcup_{x \in A} [0, x]$].

2) Έστω (E,T) τ.δ.χ. και d μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική η οποία μετρικοποιεί τον (E,T).

Αποδείξτε ότι : (α) $d(nx,0) = nd(x,0), x \in E, n \geq 1$.

(b) Αν $(x_n) \subseteq E$ ώστε $x_n \to 0$ τότε υπάρχουν θετικοί πραγματικοί $\lambda_n > 0, n \geq 1$, ώστε $\lambda_n \to +\infty$ και $\lambda_n x_n \to 0$.

[<u>Υπόδειξη</u> (α) $d(nx,0) \leq \sum_{k=1}^{n} d(kx,(k-1)x) = nd(x,0)$

(b) $d(x_n,0) \to 0$, άρα υπάρχει μια υπακολουθία $(n_k) \subseteq N$ ώστε $d(x_n,0) < \frac{1}{k^2}, n \geq n_k$.
Θέτομε $\lambda_n = 1$ αν $n < n_1$ και $\lambda_n = k$ αν $n_k \leq n < n_{k+1}$. Τότε
$d(\lambda_n x_n,0) = d(kx_n,0) \leq kd(x_n,0) < \frac{1}{k}$]

3) (α) Έστω E διανυσματικός χώρος και $p : E \to R$ ημινόρμα. Θέτομε $F = p^{-1}(\{0\})$. Αποδείξτε ότι ο F είναι διανυσματικός υπόχωρος του E και αν $\pi : E \to E/F$ είναι η κανονική απεικόνιση τότε η απεικόνιση $\tilde{p} : E/F \to R : \tilde{p}(\pi(x)) = p(x), x \in E$, είναι μια νόρμα επί του E/F .

(b) Έστω E ο χώρος των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to R$. Αν $p(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$, ποιος είναι ο χώρος πηλίκο $(E/F, \tilde{p})$;

4) Έστω $\{p_i, i \in I\}$ οικογένεια ημινορμών επί του διανυσματικού χώρου E. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\sup\{p_i(x) : i \in I\} < +\infty, \forall x \in E$ τότε η $p(x) = \sup\{p_i(x) : i \in I\}, x \in E$ είναι ημινόρμα.

(b) Αν $\{p_1,..., p_n\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο ημινορμών επί του E τότε η $p(x) = \max\{p_k(x) : 1 \leq k \leq n\}, x \in E$ είναι ημινόρμα.

5) Έστω p οικογένεια ημινορμών επί του διανυσματικού χώρου E. Συμβολίζουμε με $\Delta = \Delta(p)$ την μικρότερη οικογένεια ημινορμών επί του E, η οποία περιέχει την p και είναι κλειστή για την πράξη max (αν $p_1, p_2 \in \Delta$ τότε $p = \max(p_1, p_2) \in \Delta$).

α) Αποδείξτε ότι οι τοπολογίες $T(p)$ και $T(\Delta)$ συμπίπτουν επί του E.

b) Έστω $\Lambda : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι Λ είναι συνεχής απεικόνιση αν και μόνο αν υπάρχει $p \in \Delta$ και $M > 0$ ώστε $|\Lambda(x)| \le Mp(x), \forall x \in E$.

6) Μια ακολουθία (x_n) σ' ένα τ.δ.χ. (E,T) λέγεται T-Cauchy αν για κάθε περιοχή U του $0 \in E$ υπάρχει $n_0 \in N : n > m \ge n_0 \Rightarrow x_n - x_m \in U$. Υποθέτομε ότι η τοπολογία του E μετρικοποιείται από μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική d. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία $(x_n) \subseteq E$ είναι T-Cauchy $\Leftrightarrow$ η (x_n) είναι d – Cauchy.

7) Έστω (E,T) τ.δ.χ. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $(x_n) \subseteq E$ είναι T-Cauchy ακολουθία τότε το σύνολο $\{x_n : n \ge 1\}$ είναι φραγμένο.

(β) Ένα υποσύνολο $A \subseteq E$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $(x_n) \subseteq A$ για κάθε $(a_n) \subseteq K$ με $a_n \to 0$ συνεπάγεται $a_n x_n \to 0$.

(γ) Ένα υποσύνολο $A \subseteq E$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο B του A είναι φραγμένο.

8) Αποδείξτε ότι κάθε Hausdorff τοπικά κυρτός χώρος (E,T) είναι τελείως κανονικός $\left(\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}\right)$.

[<u>Υπόδειξη</u>. Έστω $T = T(p)$, όπου p είναι μια οικογένεια ημινορμών που διαχωρίζει τα σημεία του E. Έστω $x \in E$ και $U \subseteq E$ ανοικτή περιοχή του x. Έστω $\Delta \subseteq p$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\Delta(x,\varepsilon) \subseteq U$. Θέτομε $q = \max \Delta$ τότε q συνεχής ημινόρμα και η συνάρτηση $f(y) = \min\{1, \varepsilon^{-1} q(y-x)\}$ είναι συνεχής ώστε $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $x \in E \setminus U$].

9) Οι ημινόρμες $p_n(f) = \sup\{|f(t)| : t \le n\}, n \ge 1$, ορίζουν την μετρική,

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

, η οποία μετρικοποιεί την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του R στον χώρο $C(R)$ των συνεχών συναρτήσεων

$f: R \to R$. Ορίζουμε, $f(x) = \max\{0, 1-|x|\}$, $g(x) = 100 f(x-2)$ και $2h = f + g$.
Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες:

$d(f,0) = \frac{1}{2}, d(g,0) = \frac{50}{101}$ και $d(h,0) = \frac{1}{6} + \frac{50}{102}$.

Συμπεράνατε ότι η $d-$ σφαίρα $\hat{B}_d\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left\{\varphi \in C(R) : d(\varphi, 0) \leq \frac{1}{2}\right\}$ δεν είναι κυρτό σύνολο. Υπάρχει $0 < r < 1$ ώστε η σφαίρα $\hat{B}_d(0, r)$ να είναι κυρτό σύνολο;

10) Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος και $(x_n) \subseteq E$ με $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι, η ακολουθία $y_n = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \to 0$.

11) Έστω $C[0,1]$ ο χώρος Banach των συνεχών συναρτήσεων $f: [0,1] \to C$ με την sup-norm. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\Lambda \in C[0,1]^*$ ώστε $\Lambda(B)$ ανοικτό υποσύνολο του C, όπου B = η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του $C[0,1]$.

[<u>Υπόδειξη</u>: Έστω $\Lambda : C[0,1] \to C$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές με $\Lambda \neq 0$. Τότε το $\Lambda(B)$ είναι ισορροπημένο και φραγμένο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου C και άρα είναι ένας δίσκος (ανοικτός ή κλειστός) με κέντρο το $0 \in C$ και ακτίνα $r = \|\Lambda\|$

Αν το Λ δεν επιτυγχάνει την νόρμα του επί του B, δηλαδή $|\Lambda(f)| < \|\Lambda\|, \forall f \in B$ τότε $\Lambda(B) = B(0, \|\Lambda\|) = \{z \in C : |z| < \|\Lambda\|\}$. Ένα παράδειγμα τέτοιου συναρτησοειδούς είναι το ακόλουθο: Έστω (t_n) μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$, θέτομε $\Lambda(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(t_n) - f(0)}{2^{n+1}}, f \in C[0,1]$. [Πρβλ. επίσης και την άσκηση (2) μετά την παράγραφο 2.]

12) Έστω $K \subseteq R^n$ κυρτό και απορροφούν σύνολο. Αποδείξτε ότι το K είναι περιοχή του $0 \in R^n$, όπου ο R^n θεωρείται με την τοπολογία της (Ευκλείδειας) νόρμας.

[<u>Υπόδειξη</u>. Αποδείξτε πρώτα το αποτέλεσμα για $n \leq 2$. Αν $n = 2$ τότε υπάρχει $\lambda > 0$, ώστε $\lambda \cdot co(\pm e_1, \pm e_2) \subseteq K$, όπου $e_1 = (1,0)$ και $e_2 (0,1)$.]

13) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αν $B, \hat{B}$ είναι η ανοικτή και η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του X αποδείξτε ότι $p_B = p_{\hat{B}} = \|\cdot\|$.

(β) Αν $U \subseteq X$ ανοικτό κυρτό ισορροπημένο και φραγμένο τότε το συναρτησοειδές του Minkowski p_U είναι μια ισοδύναμη νόρμα επί του X .

14) Έστω $\left(X, \|\cdot\|\right)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία T_W του X δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

(β) Αποδείξτε ότι η ασθενής * τοπολογία T_{W^*} του X^* είναι μετρικοποιήσιμη αν και μόνο αν ο X έχει αριθμήσιμη αλγεβρική διάσταση (έχει μια αριθμήσιμη βάση Hamel).

Συμπεράνατε ότι αν ο X είναι χώρος Banach τότε η ασθενής * τοπολογία του X^* δεν είναι μετρικοποιήσιμη. Δώστε ένα παράδειγμα χώρου με νόρμα με αριθμήσιμη αλγεβρική διάσταση.

[Υπόδειξη: Για το (α) : Έστω $\left(x_n\right)$ ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον X με $\|x_n\| = 1, n \geq 1$. Θέτομε $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ και $F_0 = \{0\}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, προχωρώντας με επαγωγή βρίσκουμε μια ακολουθία $\left(f_n\right) \subseteq X^*$ ώστε $\|f_n\| = 1,\ f_n|_{F_{n-1}} = 0$ και $f_n\left(x_n\right) = d\left(x_n, F_{n-1}\right) > 0, n = 1, \ldots, n$. Η ακολουθία $\left(f_n\right)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη στο χώρο Banach X^* και συνεπώς από το θεώρημα του Baire ο X^* έχει υπεραριθμήσιμη αλγεβρική διάσταση. Η απόδειξη του γεγονότος ότι ο $\left(X, T_W\right)$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος είναι ανάλογη με την απόδειξη του αντίστοιχου αποτελέσματος που περιγράφεται στο παράδειγμα 3.3.17 και χρησιμοποιεί την πρόταση 3.3.18. Η απόδειξη του ισχυρισμού (β) κινείται σε ανάλογες γραμμές.]

15) Έστω $C[0,1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f:[0,1] \to R$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο T_p . Αποδείξτε ότι ο $\left(C[0,1], T_p\right)$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος

16) Στον διανυσματικό χώρο $E = K^{\Gamma}$ ορίζουμε την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης T_u που έχει ως βάση B τα σύνολα της μορφής $V_{f,\varepsilon} = \left\{g \in E : \sup_{x \in \Gamma} \left|f(x) - g(x)\right| < \varepsilon\right\}$, $f \in E, \varepsilon > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η B είναι πράγματι μια βάση για την T_u και δικαιολογείστε την ορολογία « τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης».

(β) Είναι η τοπολογία T_u συμβατή με την διανυσματική δομή του E ;

[<u>Υπόδειξη:</u> Παρατηρούμε ότι αν το $f \in E$ τότε $V_{f,\varepsilon} = f + B(0,\varepsilon)$ όπου $B(0,\varepsilon) = \{g \in \ell_\infty(\Gamma) : \|g\|_\infty < \varepsilon\}$ και ακόμη ότι οι περιοχές του $0 \in E$ δεν είναι απορροφούσες , αν το Γ είναι άπειρο σύνολο.]

17) Έστω E διανυσματικός χώρος F διανυσματικός υπόχωρος του E και $\pi : E \to E/F$ η κανονική απεικόνιση.

(α) Αν p ημινόρμα επί του E και θέσομε για κάθε $\hat{x} \in E/F$,

$\hat{p}\left(\hat{x}\right) = \inf\left\{p(z) : \pi(z) = \hat{x}\right\}$ τότε η $\hat{p}$ είναι ημινόρμα επί του E/F .

(β) Έστω (E,τ) τοπικά κυρτός χώρος και P οικογένεια ημινορμών επί του E η οποία ορίζει την τοπολογία του E ($\tau = \tau(p)$). Αποδείξτε ότι η τοπολογία πηλίκο επί του χώρου E/F ορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\hat{p} = \left\{\hat{p} : p \in P\right\}$.

[Υπόδειξη Πρβλ. την άσκηση 8 της παραγράφου 3.1]

ι3.4 Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε κάποια σημαντικά παραδείγματα, για τις εφαρμογές, χώρων συναρτήσεων οι οποίοι είναι τοπικά κυρτοί και μετρικοποιήσιμοι αλλά η τοπολογία τους δεν επάγεται από νόρμα. Επίσης θα εξετάσουμε παραδείγματα τοπολογικών διανυσματικών χώρων (Hausdorff) οι οποίοι δεν είναι τοπικά κυρτοί.

Έστω (E,T) ένας τ.δ.χ.

1) Ο (E,T) έχει την ιδιότητα Heine-Borel, αν κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές.

2) Ο (E,T) λέγεται ότι είναι Frechet αν είναι τοπικά κυρτός και η τοπολογία του επάγεται από κάποια πλήρη και αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική.

Είναι προφανές ότι κάθε Ευκλείδειος χώρος R^d έχει την ιδιότητα Heine-Borel και ότι κάθε χώρος Banach $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος Frechet.

3.4.1 Ο χώρος $C(\Omega)$. Έστω Ω ανοικτό μη κενό υποσύνολο κάποιου Ευκλείδειου χώρου R^d. Θεωρούμε τον χώρο $C(\Omega)$ των συνεχών συναρτήσεων $f:\Omega\to K$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή T_C (πρβλ. το παράδειγμα 3.2.6 (4)).Τότε ο τοπικά κυρτός χώρος $(C(\Omega),T_C)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Frechet του οποίου η τοπολογία δεν επάγεται από νόρμα.

Πράγματι, θέτομε για κάθε $n\geq 1$

$$\mathrm{K}_n=\left\{x\in\Omega:\|x\|_2\leq n \text{ και } d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)\geq\frac{1}{n}\right\}.$$

Ισχυρισμός 1. Το K_n είναι συμπαγές σύνολο, η ακολουθία (K_n) κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του Ω και επιπλέον $\mathrm{K}_n\subseteq\operatorname{int}(\mathrm{K}_{n+1}), n\geq 1$. Ιδιαίτερα ισχύει, $\mathrm{K}_1\subseteq\mathrm{K}_2\subseteq\ldots\subseteq\mathrm{K}_n\subseteq\ldots$.

Απόδειξη του ισχυρισμού 1. Επειδή οι κλειστές σφαίρες του Ευκλειδείου χώρου είναι συμπαγή σύνολα και η απεικόνιση $x\in R^d\to d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)$ συνεχής έπεται αμέσως ότι κάθε K_n είναι συμπαγές. Έστω $\mathrm{K}\subseteq\Omega$ τυχόν συμπαγές, επειδή το K είναι φραγμένο υπάρχει $n_1\in N:\|x\|_2\leq n_1,\forall x\in\mathrm{K}$. Επειδή $\mathrm{K}\subseteq\Omega$ έπεται ότι $d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)>0,\forall x\in\mathrm{K}$ και επειδή η $x\in R^d\to d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)$ συνεχής και K συμπαγές έπεται ότι

$\inf\left\{d\left(x,R^d\setminus\Omega\right): x\in \mathrm{K}\right\}>0$. Συνεπώς υπάρχει $n_2\in N: d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)\geq\frac{1}{n_2}, \forall x\in\mathrm{K}$. Αν $n_0\geq\max\left\{n_1,n_2\right\}$ τότε $\mathrm{K}\subseteq\mathrm{K}_{n_0}$.

Έστω τώρα $n\in N$ και $x\in\mathrm{K}_n$. Τότε $\|x\|_2\leq n<n+1$ και $d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)\geq\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$.

Συνεπώς $x\in\mathrm{K}_n\subseteq\operatorname{int}\left(\mathrm{K}_{n+1}\right)$, εφόσον το σύνολο

$\left\{x\in\Omega:\|x\|_2<n+1 \text{ και } d\left(x,R^d\setminus\Omega\right)>\frac{1}{n+1}\right\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του K_{n+1}.

Προφανώς ισχύει $\mathrm{K}_1\subseteq\mathrm{K}_2\subseteq\ldots\subseteq\mathrm{K}_n\subseteq\ldots$ και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Έστω τώρα $B_{\mathrm{K}}\left(0,\varepsilon\right)$ βασική περιοχή του $0\in C\left(\Omega\right)$ στην τοπολογία T_C, όπου $\mathrm{K}\subseteq\Omega$ συμπαγές. Αν $n\in N$ ώστε $\mathrm{K}\subseteq\mathrm{K}_n$ έπεται αμέσως ότι $B_{\mathrm{K}_n}\left(0,\varepsilon\right)\subseteq B_{\mathrm{K}}\left(0,\varepsilon\right)$. Κατά συνέπεια η τοπολογία T_C καθορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $p_n=p_{\mathrm{K}_n}, n\geq 1$, όπου $p_n\left(f\right)=\sup\left\{\left|f\left(x\right)\right|: x\in\mathrm{K}_n\right\}, n\geq 1, f\in C\left(\Omega\right)$ και είναι άρα μετρικοποιήσιμη.

(Πρβλ. θεώρημα 3.3.10).

Παρατηρούμε ότι επειδή, $\mathrm{K}_1\subseteq\mathrm{K}_2\subseteq\ldots\subseteq\mathrm{K}_n\subseteq\ldots$, θα ισχύει ότι, $p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_n\leq\ldots$, απ' όπου έπεται ότι η ακολουθία $V_n=\left\{f\in C\left(\Omega\right): p_n\left(f\right)<\frac{1}{n}\right\}=B_{\mathrm{K}_n}\left(0,\frac{1}{n}\right), n\geq 1$, είναι μια <u>φθίνουσα βάση περιοχών</u> του $0\in C\left(\Omega\right)$ στην τοπολογία T_C, αποτελούμενη από ανοικτά κυρτά και ισορροπημένα σύνολα.

<u>Ισχυρισμός 2</u>. Δεν υπάρχει περιοχή του $0\in C\left(\Omega\right)$ η οποία να είναι φραγμένο σύνολο.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού 2</u>. Υποθέτομε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\mathrm{K}_n\neq\varnothing, \forall n\geq 1$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{K}_n\setminus\operatorname{int}\mathrm{K}_n\neq\varnothing$, $\forall n\geq 1$. (Αν $\operatorname{int}\mathrm{K}_n=\varnothing$ τότε προφανώς $\mathrm{K}_n\neq\varnothing$. Αν $\operatorname{int}\mathrm{K}_n\neq\varnothing$ τότε $\mathrm{K}_n\setminus\operatorname{int}\mathrm{K}_n\neq\varnothing$, γιατί διαφορετικά $\mathrm{K}_n=\operatorname{int}\mathrm{K}_n$ και το K_n θα ήταν ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του R^d με $\varnothing\neq\mathrm{K}_n\underset{\neq}{\subset}R^d$ το οποίο αντιφάσκει στην συνεκτικότητα του R^d). Έστω V μια φραγμένη περιοχή του $0\in C\left(\Omega\right)$. Υπάρχει τότε $n_0\in N: n\geq n_0\Rightarrow V_n\subseteq V$ και έτσι οι περιοχές $V_n, n\geq n_0$ είναι φραγμένα σύνολα. Επειδή η V είναι φραγμένη από την Πρόταση 3.3.14 υπάρχουν $M_n>0, n\geq 1$, ώστε

$$p_n\left(f\right)\leq M_n, \forall n\geq 1, \forall f\in V \quad (1)$$

Έστω $n\geq n_0$ και M τυχόν θετικός με $M>M_{n+1}$. Επειδή τα σύνολα K_n και $\mathrm{K}_{n+1}\setminus\operatorname{int}\mathrm{K}_{n+1}$ είναι ξένα μη κενά και σχετικά κλειστά υποσύνολα του (μετρικού) χώρου Ω μπορούμε να ορίσουμε μια (συνεχή) συνάρτηση Urysohn $\varphi:\Omega\to\left[0,1\right]$, ώστε $\varphi\left(\mathrm{K}_n\right)=\left\{0\right\}$ και

$\varphi(\mathrm{K}_{n+1} \setminus \operatorname{int} \mathrm{K}_{n+1}) = \{1\}$. Έστω $f = M \cdot \varphi$, τότε $p_n(f) = M \cdot p_n(\varphi) = 0$ και άρα $f \in V_n \subseteq V$. Όμως $p_{n+1}(f) = M \cdot p_{n+1}(\varphi) = M \cdot 1 = M > M_{n+1}$. Η τελευταία ανισότητα αντιφάσκει με την (1). (Ουσιαστικά αποδείξαμε ότι οι περιοχές V_n περιέχουν συναρτήσεις f ώστε το $p_{n+1}(f)$ να είναι οσοδήποτε μεγάλο). Έτσι η απόδειξη του ισχυρισμού 2 είναι πλήρης.

Από τον ισχυρισμό 2 και το θεώρημα 3.3.15 έπεται ότι η τοπολογία T_C του $C(\Omega)$ δεν επάγεται από νόρμα.

Από την μέθοδο απόδειξης του θεωρήματος 3.3.10 μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές μετρική d που επάγει την τοπολογία T_C του χώρου $C(\Omega)$ είναι η ακόλουθη

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Έστω $(f_i) \subseteq C(\Omega)$ ακολουθία η οποία είναι $d-$ Cauchy. Έπεται τότε ότι για κάθε $n \geq 1, \lim\limits_{j,i\to\infty} p_n(f_i - f_j) = 0$, δηλαδή η $\left(f_i|_{\mathrm{K}_n}\right)$ είναι Cauchy στον χώρο Banach $C(\mathrm{K}_n)$, (πρβλ. την παρατήρηση3.3.11 (2)) και έτσι συγκλίνει ομοιόμορφα επί του K_n σε μια συνεχή συνάρτηση $g_n : \mathrm{K}_n \to K$. Επειδή η ακολουθία (K_n) είναι αύξουσα έπεται εύκολα ότι η g_{n+1} επεκτείνει την g_n για κάθε $n \geq 1$, ούτως ώστε ορίζεται μια (συνεχής) συνάρτηση $g : \Omega \to K$ για την οποία ισχύει, $f_i \xrightarrow{T_C} g \Leftrightarrow d(f_i, g) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. Έτσι η d είναι μια πλήρης μετρική και ο χώρος $C(\Omega)$ είναι χώρος Frechet.

Αποδεικνύουμε τέλος ότι ο $(C(\Omega), T_C)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος. Για κάθε $n \geq 1$, θεωρούμε ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο $\{f_i^n : i \in N\}$ του χώρου Banach $C(\mathrm{K}_n)$ (Ο K_n είναι συμπαγής μετρικός χώρος και άρα ο $\left(C(\mathrm{K}_n), \|\cdot\|_\infty\right)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach). Επειδή ο Ω είναι μετρικός χώρος μπορούμε να επεκτείνουμε την κάθε συνάρτηση $f_i^n : \mathrm{K}_n \to K$ σε μια συνεχή συνάρτηση $g_i^n : \Omega \to K$, με χρήση του θεωρήματος του Tietze. Θέτομε $D = \{g_i^n : i, n \in N\}$ και παρατηρούμε ότι το D είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του χώρου $(C(\Omega), T_C)$ και συνεπώς ο χώρος $(C(\Omega), T_C)$ είναι διαχωρίσιμος.

…………………………………….

<u>Παρατήρηση.</u> Το θεώρημα του Tietze για μετρικούς χώρους ισχυρίζεται ότι: Αν A είναι κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X και $f : A \to R$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε

η f έχει μια συνεχή επέκταση $F : X \to R$. Μάλιστα, αν $\left|f(x)\right| < c$ επί του A τότε η F μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\left|F(x)\right| < c$ επί του X.

3.4.2 Ο χώρος $H(\Omega)$. Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό σύνολο. Όπως γνωρίζουμε από το παράδειγμα 3.2.6 (5), ο $H(\Omega)$ είναι ο χώρος των ολομόρφων συναρτήσεων $f : \Omega \to C$ ο οποίος θεωρούμενος ως διανυσματικός υπόχωρος του $C(\Omega)$ είναι, με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Ω όσο ένας τοπικά κυρτός χώρος.

Από το προηγούμενο παράδειγμα ο $\left(H(\Omega), T_C\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος και διαχωρίσιμος χώρος.

(I) Ο $H(\Omega)$ είναι <u>κλειστός</u> υπόχωρος του $\left(C(\Omega), T_C\right)$.

Έστω $(f_n) \subseteq H(\Omega)$ και $f : \Omega \to C$ ώστε $f_n \xrightarrow{T_C} f$. Από το <u>θεώρημα του weierstrass</u> της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων έπεται ότι η f είναι ολόμορφη και άρα $f \in H(\Omega)$. Έτσι ο $H(\Omega)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\left(C(\Omega), T_C\right)$. Έπεται ότι ο $\left(H(\Omega), T_C\right)$ είναι ένας (διαχωρίσιμος) χώρος Frechet ως κλειστός υπόχωρος του πλήρους μετρικού χώρου $\left(C(\Omega), d\right)$, όπου η d είναι η μετρική του παραδείγματος 3.4.1.

(II) Ο $\left(H(\Omega), T_C\right)$ έχει την <u>ιδιότητα Heine- Borel</u>.

Έστω $E \subseteq H(\Omega)$ φραγμένο σύνολο. Από την Πρόταση 3.3.14 υπάρχει οικογένεια θετικών αριθμών $M_K, K \subseteq \Omega$ συμπαγές ώστε

$$\left|f(z)\right| \le M_K, z \in K, f \in E.$$

Από το <u>θεώρημα Montel</u> της θεωρίας των Μιγαδικών συναρτήσεων το σύνολο E είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του χώρου $\left(H(\Omega), T_C\right)$. Αν το E είναι επί πλέον κλειστό τότε βέβαια το E είναι συμπαγές στον $\left(H(\Omega), T_C\right)$.

(III) Η τοπολογία T_C του $H(\Omega)$ <u>δεν</u> επάγεται από μια νόρμα.

Πράγματι, ο $\left(H(\Omega), T_C\right)$ δεν έχει φραγμένη περιοχή του $0 \in H(\Omega)$ διότι διαφορετικά, από την ιδιότητα Heine-Borel , ο $H(\Omega)$ θα είχε μια συμπαγή περιοχή του μηδενός και έτσι ο $H(\Omega)$ θα είχε πεπερασμένη διάσταση. (Πρβλ. Θεώρημα 3.3.16).

Είναι βέβαια σαφές ότι ο διανυσματικός χώρος $H(\Omega)$ είναι απειροδιάστατος, εφόσον η ακολουθία των μονωνύμων $1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Παρατήρηση Το θεώρημα Montel λέει ότι: Ένα υποσύνολο του χώρου $H(\Omega)$ είναι σχετικά συμπαγές στην τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Ω αν και μόνο αν υπάρχουν θετικές σταθερές $M_{\mathrm{K}}, \mathrm{K} \subseteq \Omega$, ώστε

$$\left|f(z)\right| \leq M_{\mathrm{K}}, z \in \mathrm{K}, f \in E \quad (1).$$

Τα υποσύνολα του $H(\Omega)$ που ικανοποιούν την (1) ονομάζονται στην ορολογία της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων « φυσιολογικές οικογένειες» (normal families).

Οι φυσιολογικές οικογένειες $F \subseteq H(\Omega)$ είναι στην δική μας ορολογία τα φραγμένα υποσύνολα του τοπικά κυρτού χώρου $H(\Omega)$.

2) Το θεώρημα Weierstrass που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα λέει ότι: Αν $f_n : \Omega \to C$ ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων και $f : \Omega \to C$ συνάρτηση ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω τότε f ολόμορφη στο Ω και επιπλέον $f_n^{'} \to f\,'$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Έπεται με επαγωγή ότι για κάθε $k = 0,1,2,\ldots$,

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)}$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

3.4.3 Ο χώρος $C^{\infty}(I)$. Έστω $I = (a,b), -\infty \leq a < b \leq +\infty$ ανοικτό διάστημα στο R. Ο χώρος $C^{\infty}(I)$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $f : I \to R$ που έχουν παραγώγους κάθε τάξης.

Ο $C^{\infty}(I)$, με μια κατάλληλη τοπικά κυρτή τοπολογία, είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Frechet με την ιδιότητα Heine-Borel και συνεπώς η τοπολογία του δεν επάγεται από νόρμα.

Έστω (K_n) ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων (διαστημάτων) του I ώστε, $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_n$ και $\mathrm{K}_n \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{K}_{n+1})$. Συνεπώς η (K_n) κυριαρχεί τα συμπαγή υποσύνολα του I (Πρβλ Παράδειγμα 3.4.1).

Είναι σαφές ότι τα $\mathrm{K}_n, n \geq 1$, μπορούν να επιλεγούν να είναι συμπαγή διαστήματα. Ορίζουμε τώρα μια ακολουθία ημινορμών $p_1, \ldots, p_N, \ldots$, επί του $C^{\infty}(I)$ ως εξής,

$$p_N(f) = \sup\left\{\left|f^{(m)}(t)\right| : t \in \mathrm{K}_N, 0 \leq m \leq N\right\}, N \geq 1.$$

Είναι σαφές ότι η τοπικά κυρτή τοπολογία $T = T(p_N : N \geq 1)$ είναι λεπτότερη της τοπολογίας T_C της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του I και ότι είναι

μετρικοποιήσιμη. Μια μετρική η οποία επάγει την T είναι βέβαια η
$d(f,g)=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{2^N}\frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)},\ f,g\in C^{\infty}(I)$.

Επειδή $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_N \le \ldots$, τα σύνολα
$V_N = B_{p_N}\left(0,\frac{1}{N}\right)=\left\{f\in C^{\infty}(I): p_N(f)<\frac{1}{N}\right\}, N\ge 1$, ορίζουν μια φθίνουσα βάση περιοχών του $0\in C^{\infty}(I)$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1) Μια ακολουθία $(f_i)\subseteq C^{\infty}(I)$ συγκλίνει ως προς την μετρική d στην συνάρτηση $f\in C^{\infty}(I)$ ($f_i \xrightarrow{d} f$) αν και μόνο αν για κάθε $m\ge 0,\ f_i^{(m)} \xrightarrow[i\to\infty]{} f^{(m)}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του I (δηλαδή, για κάθε $\mathrm{m}\ge 0, \forall n\ge 1$, η $\left(f_i^{(m)}|_{\mathrm{K}_n}\right)_{i\ge 1}$ συγκλίνει στον χώρο Banach $C(\mathrm{K}_n)$ στην συνάρτηση $f^{(m)}|_{\mathrm{K}_n}$.

2)Έστω$(f_i)\subseteq C^{\infty}(I)$ μια d-Cauchy ακολουθία. Τότε $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}} p_N(f_i-f_j)=0, \forall N\ge 1$.

Ιδιαίτερα έπεται ότι $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}} q_N(f_i-f_j)=0$ όπου $q_N(f)=\sup\left\{|f(t)|: t\in \mathrm{K}_N\right\}, N\ge 1$. Άρα υπάρχει $f\in C(I)$ ώστε $f_i\to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του I (Πρβλ. το Παράδειγμα 3.4.1). Έπεται από γνωστά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού [1] ότι $f\in C^{\infty}(I)$ και ακόμη ότι $f_i \xrightarrow{d} f$, δηλαδή η d είναι πλήρης μετρική και ο $\left(C^{\infty}(I),d\right)$ είναι ένας χώρος Frechet.

<u>Ισχυρισμός</u> Έστω E φραγμένο υποσύνολο του $C^{\infty}(I)$. Αν $N\ge 2$ τότε το σύνολο, $\left\{f^{(m)}: f\in E, 0\le m\le N-1\right\}$ είναι <u>ισοσυνεχές</u> επί του συμπαγούς συνόλου K_{N-1}.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u>. Εφόσον το E είναι φραγμένο υπάρχουν θετικές σταθερές $M_N>0, N\ge 1$, ώστε $p_N(f)\le M_N,\ f\in E, N\ge 1$. Ισοδύναμα, $\left|f^{(m)}(t)\right|\le M_N,\ f\in E, t\in \mathrm{K}_N, 0\le m\le N, N\ge 1$. Για λόγους απλότητας, αποδεικνύουμε τον Ισχυρισμό για $N=2$. Έστω $x,y\in \mathrm{K}_2$ με $x\ne y$. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού και την υπόθεσή μας θα έχουμε, $|f(x)-f(y)|\le M_2|x-y|$ και $|f'(x)-f'(y)|\le M_2|x-y|,\ f\in E$. Έπεται ότι ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz επί του K_2 και άρα επί του K_1 για το σύνολο $\left\{f^{(m)}: f\in E, m=0,1\right\}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν το $\delta > 0$ επιλεγεί έτσι ώστε $\delta < \frac{\varepsilon}{M_2}$, τότε έχομε το συμπέρασμα.

(Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\left\{ f^{(m)} : f \in E, 0 \le m \le N-1 \right\}$ είναι, από το θεώρημα του Ascoli, σχετικά συμπαγές υποσύνολο του χώρου Banach $C\left(\mathrm{K}_{N-1}\right)$.)

Αποδεικνύουμε τώρα ότι ο $C^{\infty}\left(I\right)$ έχει την ιδιότητα Heine-Borel. Έστω E κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $C^{\infty}\left(I\right)$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\left(f_i\right) \subseteq E$.

Προχωρούμε με επαγωγή με την βοήθεια του ισχυρισμού (και του θεωρήματος Ascoli) και βρίσκουμε μια ακολουθία απείρων υποσυνόλων $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ του N και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : \mathrm{K}_n \to R, n \ge 1$, ώστε για κάθε $n \ge 1$ και για κάθε $k = 0,1,\ldots,n$ ισχύει ότι, $f_i^{(k)} \xrightarrow[i \in M_n]{} g_n^{(k)}$ ομοιόμορφα επί του K_n (2)

Είναι τότε σαφές ότι $g_{n+1}|_{\mathrm{K}_n} = g_n, n \ge 1$ Έστω $m_n \in M_n, n \ge 1$ ώστε $m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$.

Θέτομε $M = \left\{m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots\right\}$ και ορίζουμε μια συνάρτηση $f : I \to R$ ώστε $f\left(t\right) = g_n\left(t\right)$, αν $t \in \mathrm{K}_n$. Έπεται τότε από την κατασκευή μας και τα « γνωστά Αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού» που χρησιμοποιήσαμε πριν ότι $f \in C^{\infty}\left(I\right)$ και ότι για κάθε $n \ge 1$ και κάθε $m \ge 0$ ισχύει, $f_i^{(m)} \xrightarrow[i \in M]{} f^{(m)}$, ομοιόμορφα επί του K_n.

Ισοδύναμα, $f_i \xrightarrow[i \in M]{d} f$. Έπεται ότι το E είναι συμπαγές υποσύνολο του $\left(C^{\infty}\left(I\right), d\right)$, αφού είναι και κλειστό. Έτσι ο χώρος έχει την ιδιότητα Heine-Borel.

Επειδή ο $C^{\infty}\left(I\right)$ είναι (προφανώς) απειροδιάστατος και έχει την ιδιότητα Heine-Borel, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει φραγμένη περιοχή του $0 \in C^{\infty}\left(I\right)$. Συνεπώς η τοπολογία του χώρου δεν επάγεται από νόρμα.

Το γεγονός ότι ο $\left(C^{\infty}\left(I\right), d\right)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος αφήνεται ως άσκηση. (Πρβλ. και το παράδειγμα 3.4.1 .)

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Υπενθυμίζουμε ένα αποτέλεσμα του Απειροστικού Λογισμού το οποίο χρησιμοποιήσαμε στην μελέτη μας του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω $f_n : \left[a,b\right] \subseteq R \to R, n \ge 1$ ακολουθία διαφορίσιμων συναρτήσεων και $f, g : \left[a,b\right] \to R$ συναρτήσεις ώστε g συνεχής. Υποθέτουμε ότι,

(α) $f_n \to f$ κατά σημείο επί του $\left[a,b\right]$ και

(β) $f_n^{'} \to g$ ομοιόμορφα επί του $\left[a,b\right]$.

Τότε η f είναι διαφορίσιμη και $\lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x) = f'(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$ (Πρβλ. το βιβλίο, Calculus του M. Spivak, ch.23)

2) Το θεώρημα του Ascoli είναι το ακόλουθο. Έστω K συμπαγής (μετρικός) χώρος και E φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach $C(\mathrm{K})$, (εφοδιασμένο με την sup-norm $\|\cdot\|_\infty$). Τότε, το E είναι σχετικά συμπαγές στον $C(\mathrm{K})$ αν και μόνο αν είναι ισοσυνεχές σύνολο.

3) Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να ορισθεί και στις παραπάνω διαστάσεις. Δηλαδή, αν $\Omega \subseteq R^m$ ανοικτό σύνολο και $C^\infty(\Omega)$ είναι ο χώρος των C^∞ – διαφορισίμων συναρτήσεων $f:\Omega \to R$, τότε με ανάλογο τρόπο ορίζεται μια μετρική d στον $C^\infty(\Omega)$ η οποία τον καθιστά διαχωρίσιμο χώρο Frechet. Έτσι για κάθε $a = (a_1,...,a_m)$, όπου a_k, $k = 1,2,...,m$ μη αρνητικοί ακέραιοι, θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή $D^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{a_m}$, του οποίου η τάξη είναι, $|a| = a_1 + ... + a_m$. Αν $|a| = 0$ θέτομε $D^a(f) = f$. Οι ημινόρμες που καθορίζουν την τοπολογία του $C^\infty(\Omega)$ ορίζονται ως εξής:

$p_N(f) = \sup\left\{\left|D^a f(x)\right| : x \in \mathrm{K}_N, |a| \le N\right\}, N \ge 1$, όπου (K_n) είναι μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του Ω με $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_n$ και $\mathrm{K}_n \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{K}_{n+1}), n \ge 1$.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων του χώρου $C^\infty(\Omega)$ ακολουθεί τις γραμμές της απόδειξης του παραδείγματος 3.4.3.

……………………………………………………………….

3.4.4 Οι χώροι $L_p[0,1], 0 < p < 1$: Αποδεικνύουμε καταρχήν την ακόλουθη ανισότητα: Αν $a > 0, b > 0$ και $0 < p < 1$ τότε

$$(a+b)^p \le a^p + b^p \quad (1)$$

Πράγματι, η (1) ισοδυναμεί με την ακόλουθη ανισότητα

$$\frac{a^p + b^p}{(a+b)^p} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \ge 1 \quad (2)$$

Είναι σαφές ότι για να αποδείξουμε την (2) είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι:

Αν $A > 0, B > 0, A + B = 1$ και $0 < p < 1$ τότε $A^p + B^p \ge 1$. Θέτομε $F(t) = A^t + B^t - 1, t \in (0,+\infty)$. Τότε $F'(t) = \log A \cdot A^t + \log B \cdot B^t < 0, t > 0$, εφόσον

$0 < A, B < 1$. Κατά συνέπεια η F είναι γνήσια φθίνουσα στο $\left(0,+\infty\right)$ και έτσι
$F\left(1\right) < F\left(t\right), 0 < t < 1$ ή $0 = F\left(1\right) < A^t + B^t - 1, 0 < t < 1$ ή $A^t + B^t > 1, 0 < t < 1$.

Ορίζουμε τώρα τους χώρους $L_p\left[0,1\right]$ με $0 < p < 1$. Δοθέντος του $p \in \left(0,1\right)$ συμβολίζουμε με $L_p \equiv L_p\left[0,1\right]$ τον χώρο (των κλάσεων ισοδυναμίας) των Lebesgue μετρησίμων συναρτήσεων $f : \left[0,1\right] \to R$ ώστε $q\left(f\right) = \int_0^1 \left|f\left(t\right)\right|^p dt < +\infty$.

Από την ανισότητα (1) έπεται αμέσως ότι, $q\left(f+g\right) \le q\left(f\right) + q\left(g\right), f, g \in L_p$. Επίσης, αν $f \in L_p$ και $\lambda \in R$ τότε $q\left(\lambda f\right) = \left|\lambda\right|^p q\left(f\right) < +\infty$. Συνεπώς ο L_p είναι γραμμικός χώρος επί του R. Έπεται εύκολα ότι ο τύπος

$$d\left(f,g\right) = q\left(f-g\right), \qquad f, g \in L_p$$

ορίζει μια αναλλοίωτη για τις μεταφορές <u>μετρική</u> επί του L_p.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η τοπολογία $T = T_d$ που ορίζει η d επί του L_p είναι <u>συμβατή</u> με την δομή του γραμμικού χώρου και συνεπώς ο $\left(L_p, d\right)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος. Περαιτέρω αποδεικνύεται όπως και στην περίπτωση των χώρων L_p με $p \ge 1$, ότι ο $\left(L_p, d\right)$ είναι <u>πλήρης</u> μετρικός χώρος. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

<u>Ισχυρισμός.</u> Αν V είναι ανοικτό κυρτό μη κενό υποσύνολο του χώρου $\left(L_p, d\right)$ τότε $V = L$.

<u>Απόδειξη</u>. Ας υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $0 \in V$. Έστω $f \in L_p$, θα αποδείξουμε ότι $f \in V$. Έστω $r > 0 : B_d\left(0,r\right) = \left\{g \in L_p : d\left(g,o\right) = q\left(g\right) < r\right\} \subseteq V$. Μπορούμε να υποθέσουμε για την f ότι $q\left(f\right) > 0$ (αν $q\left(f\right) = 0$ τότε $f \in B_d\left(0,r\right) \subseteq V$). Επιλέγομε $n \in N : \frac{1}{n^{1-p}} \cdot q\left(f\right) < r$. Επειδή η συνάρτηση
$F : \left[0,1\right] \to \left[0,+\infty\right) : F\left(x\right) = \int_0^x \left|f\left(t\right)\right|^p dt, x \in \left[0,1\right]$, είναι συνεχής και αύξουσα, υπάρχουν σημεία $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, ώστε $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|f\left(t\right)\right|^p dt = \frac{q\left(f\right)}{n}, i = 1, 2, \ldots, n$.

($F\left(0\right) = 0 \le F\left(x\right) \le F\left(1\right) = q\left(f\right), x \in \left[0,1\right]$.)

Για κάθε $i=1,2,...,n$, ορίζουμε μια συνάρτηση g_i επί του $[0,1]$ με τον τύπο

$$g_i(t)=\begin{cases} nf(t), & \text{αν } x_{i-1}<t\le x_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Οι συναρτήσεις g_i, $1\le i\le n$, είναι μετρήσιμες και επειδή

$$q(g_i)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}|nf(t)|^p dt=n^p\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|^p dt=n^p\cdot\frac{q(f)}{n}=n^{p-1}\cdot q(f)<r.$$

Έπεται ότι $g_i\in B_d(0,r)\subseteq V, \forall i=1,2,...,n$.

Επειδή το V είναι κυρτό και $f=\dfrac{g_1+...+g_n}{n}$, έπεται ότι $f\in V$ και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Από τον ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι οι μόνες κυρτές περιοχές του $0\in L_p$ είναι ολόκληρος ο χώρος L_p και έτσι ο (L_p,d) δεν μπορεί να είναι τοπικά κυρτός χώρος

………………………………………………………

Παρατηρήσεις. Ο (τοπολογικός) συζυγής ή δυϊκός ενός τ.δ.χ. (E,T) ορίζεται- όπως και στην περίπτωση των χώρων με νόρμα- να είναι το σύνολο των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f:E\to K$. Ο συζυγής ενός τ.δ.χ. E συμβολίζεται με E^* και είναι με τις συνήθεις πράξεις ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος K. Όπως θα αποδείξουμε λίγο αργότερα με την βοήθεια του θεωρήματος Hahn-Banach ο συζυγής ενός Hausdorff τοπικά κυρτού χώρου $E\neq\{0\}$ είναι μη τετριμμένος, μάλιστα διαχωρίζει τα σημεία του E

($\forall x,y\in E$ με $x\neq y, \exists f\in E^*$ ώστε $f(x)\neq f(y)$). Παρατηρούμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ο συζυγής του L_p είναι ο τετριμμένος χώρος $\{0\}$. Πράγματι, έστω $f:L_p\to R$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Επειδή για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ είναι ανοικτή και κυρτή περιοχή του $0\in L_p$, έπεται ότι $Kerf=L$, δηλαδή $f=0$ και άρα $L_p^*=\{0\}$. Στις ασκήσεις πρόκειται να περιγράψουμε ένα παράδειγμα ενός μη τοπικά κυρτού τοπολογικού διανυσματικού χώρου E, ο οποίος όμως έχει αρκετά ανοικτά και κυρτά σύνολα ούτως ώστε ο συζυγής του E^* να διαχωρίζει τα σημεία του E και επομένως είναι μη τετριμμένος.

3.5 Το θεώρημα Hahn-Banach σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Εξετάζουμε καταρχήν τη σχέση μεταξύ ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου E και του υποκείμενου πραγματικού χώρου E_R.

Έστω E μιγαδικός διανυσματικός χώρος $(K=C)$ και $f:E\to C$ γραμμικό συναρτησοειδές. Αν u είναι το πραγματικό μέρος του f (δηλαδή, $u(x)=\operatorname{Re} f(x), x\in E$) τότε το u είναι $R-$γραμμικό επί του E (δηλαδή, $u(x+y)=u(x)+u(y)$ και $u(\lambda x)=\lambda u(x), x,y\in E, \lambda\in R$) και ισχύει ότι

$$f(x)=u(x)-iu(ix), x\in E \quad (1)$$

(Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $z\in C$ τότε, $z=\operatorname{Re} z-i\operatorname{Re}(iz)$.)

Αντίστροφα, αν $u:E\to R$ είναι $R-$γραμμικό συναρτησοειδές και το f ορίζεται από την (1) τότε το f είναι $C-$γραμμικό (δηλαδή, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ και $f(\lambda x)=\lambda f(x)$, $x,y\in E$, $\lambda\in C$).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο μιγαδικός χώρος E είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Οι παραπάνω παρατηρήσεις έχουν ως συνέπεια ότι αν $f:E\to C$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές τότε το f είναι συνεχής συνάρτηση ($f\in E^*$) αν και μόνο αν το πραγματικό του μέρος $u:E\to R$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Επίσης ότι κάθε συνεχές $R-$ γραμμικό συναρτησοειδές $u:E\to R$ είναι το πραγματικό μέρος ενός (μοναδικού) συνεχούς συναρτησοειδούς $f:E\to C$.

Παρατηρούμε ότι κάθε μιγαδικός χώρος E μπορεί να θεωρηθεί ως πραγματικός χώρος, συμβολιζόμενος συνήθως με E_R, περιορίζοντας τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό στο $R\times E$.

Έτσι στον τ.δ.χ. (E,T) επί του σώματος των μιγαδικών C αντιστοιχούμε τον τ.δ.χ. (E_R,T) επί του σώματος των πραγματικών R. Σημειώνουμε ότι ως τοπολογικοί χώροι

(τοπολογικές ομάδες) οι δομές (E,T) και (E_R,T) ταυτίζονται. Για παράδειγμα αν K είναι συμπαγής και Hausdorff τότε ο χώρος Banach $\left(C_C(\mathrm{K}),\|\cdot\|_\infty\right)$ έχει ως υποκείμενο πραγματικό χώρο το τοπολογικό ευθύ άθροισμα

$$E_R=C_R(\mathrm{K})\oplus C_R(\mathrm{K}),$$

δηλαδή τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f:\mathrm{K}\to R^2$, με νόρμα $\|f\|=\sqrt{\|f_1\|_\infty^2+\|f_2\|_\infty^2}$, όπου $f=(f_1,f_2)$. Προφανώς οι μετρικοί χώροι $\left(C_C(\mathrm{K}),\|\cdot\|_\infty\right)$ και $(E,\|\cdot\|)$ είναι ισομετρικοί. Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι υπάρχει μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των (συνεχών) γραμμικών συναρτησοειδών $f : E \to C$ και των (συνεχών) γραμμικών συναρτησοειδών $u = \mathrm{Re}\, f : E_R \to R$.

Υπενθυμίζουμε την αναλυτική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach για πραγματικούς διανυσματικούς χώρους.

<u>Θεώρημα (Hahn-Banach) 3.5.1</u> Έστω E διανυσματικός χώρος επί του R και M διανυσματικός υπόχωρος του E . Έστω $p : E \to R$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αν $f : M \to R$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $f(x) \le p(x),\ x \in M$, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : E \to R$ ώστε, $\Lambda(x) = f(x)$, $x \in M$ και $\Lambda(x) \le p(x)$, $x \in E$.

Η αναλυτική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach ούτως ώστε να συμπεριλαμβάνει τους μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους είναι η ακόλουθη.

<u>Θεώρημα 3.5.2</u> (Hahn-Banach-Αναλυτική μορφή). Έστω E διανυσματικός χώρος επί του K , M διανυσματικός υπόχωρος του E , $p : E \to R$ ημινόρμα και $f : M \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $|f(x)| \le p(x),\ x \in M$.

Τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές Λ ώστε $\Lambda(x) = f(x)$, $x \in M$ και $|\Lambda(x)| \le p(x)$, $x \in E$.

<u>Απόδειξη</u> (I) Έστω $K = R$. Από το θεώρημα Hahn-Banach (θεώρημα 3.5.1) υπάρχει γραμμική επέκταση $\Lambda : E \to R$ ώστε $\Lambda(x) \le p(x),\ x \in E$. Συνεπώς $\Lambda(-x) \le p(-x) = p(x),\ x \in E$. Έπεται ότι $-p(x) \le -\Lambda(-x) = \Lambda(x) \le p(x), x \in E \Leftrightarrow |\Lambda(x)| \le p(x),\ x \in E$.

(I I) Έστω $K = C$. Η συνάρτηση $u = \mathrm{Re}\, f$ είναι $R-$γραμμικό συναρτησοειδές επί του M με $u(x) \le |f(x)| \le p(x),\ x \in M$. Από το θεώρημα 3.5.1 υπάρχει $R-$γραμμικό συναρτησοειδές $U : E \to R$ που επεκτείνει το u ώστε $U(x) \le p(x),\ x \in E$.

Θεωρούμε το $C-$γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : E \to C$ ώστε, $\Lambda(x) = U(x) - iU(ix)$, $x \in E$. Τότε το Λ επεκτείνει το f και αν $x \in E$ τότε υπάρχει $a \in C$ με $|a| = 1$ ώστε $|\Lambda(x)| = a\Lambda(x) = \Lambda(ax)$. Επειδή $\Lambda(ax) = U(ax) - iU(iax) \ge 0$ θα έχουμε ότι $\Lambda(ax) = U(ax)$. Επομένως $|\Lambda(x)| = \Lambda(ax) = U(ax) \le p(ax) = p(x)$.

<u>Πόρισμα 3.5.3</u> Έστω E διανυσματικός χώρος, $x_0 \in E$ και $p : E \to R$ ημινόρμα με $p(x_0) \ne 0$. Τότε υπάρχει $\Lambda : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές με $\Lambda(x_0) = p(x_0)$ και $|\Lambda(x)| \le p(x)$, $x \in E$.

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο $M=\{\lambda x_0 : \lambda \in K\}$ του E και το γραμμικό συναρτησοειδές $f : M \to K : f(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$. Παρατηρούμε ότι $|f(\lambda x_0)|=|\lambda| p(x_0)=p(\lambda x_0)$. Από το θεώρημα 3.5.2 υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : E \to K$ που επεκτείνει το f ώστε $|\Lambda(x)| \le p(x)$, $x \in E$. Προφανώς $\Lambda(x_0)=f(x_0)=p(x_0)$.

………………………………………………………………

<u>Πόρισμα 3.5.4</u> Έστω $E(\neq\{0\})$ Hausdorff τοπικά κυρτός χώρος. Τότε ο E^* διαχωρίζει τα σημεία του E, δηλαδή για κάθε $x,y \in E$ με $x \neq y$ υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\Lambda(x) \neq \Lambda(y)$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x,y \in E$ με $x \neq y$, θέτομε $x_0 = x-y \neq 0$. Η τοπολογία του E ορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ σε τρόπο ώστε οι ημινόρμες της $\mathcal{P}$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις επί του E και να διαχωρίζουν τα σημεία του E (αφού ο E είναι Hausdorff). Έστω $p \in \mathcal{P}$ ώστε $p(x_0) \neq 0$. Από το πόρισμα 3.5.3 υπάρχει $\Lambda : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $\Lambda(x_0)=p(x_0)$ και $|\Lambda(x)| \le p(x)$, $x \in E$. Επειδή η p είναι συνεχής ημινόρμα έπεται από το πόρισμα 3.3.4 ότι το Λ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές και έτσι το αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί.

……………………………………………………….

Πρόκειται στη συνέχεια να αποδείξουμε την <u>γεωμετρική μορφή</u> του θεωρήματος Hahn-Banach η οποία μας λέει ότι, σε ένα τοπικά κυρτό χώρο ένα κλειστό και κυρτό σύνολο A μπορεί να διαχωριστεί από ένα εξωτερικό σημείο (γενικότερα από ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο που δεν τέμνει το A) με ένα κλειστό υπερεπίπεδο.

Θα χρειαστούμε για την απόδειξη αυτού του σημαντικού αποτελέσματος δύο λήμματα.

<u>Λήμμα 3.5.6</u> Έστω E τ.δ.χ. και $\Lambda : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές με $\Lambda \neq 0$. Τότε το Λ είναι <u>ανοικτή</u> απεικόνιση επί του K ($\Lambda(E)=K$).

<u>Απόδειξη</u> Εφόσον η Λ είναι γραμμική απεικόνιση αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε περιοχή U του $0 \in E$ το $\Lambda(U)$ είναι περιοχή του $0 \in K$. Έστω U ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$, τότε το $\Lambda(U)$ είναι ισορροπημένο υποσύνολο του σώματος K και επειδή ($E=\bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ και) $\Lambda \neq 0$ θα υπάρχει $x_0 \in U$ ώστε $\Lambda(x_0) \neq 0$. Έπεται ότι αν $K=R$ τότε το $\Lambda(U)$ είναι ένα μη τετριμμένο συμμετρικό περί το 0 διάστημα και αν $K=C$ ένας δίσκος κέντρου 0 με θετική ακτίνα. Σε κάθε περίπτωση το $\Lambda(U)$ είναι περιοχή του $0 \in K$. Όσον αφορά το δεύτερο συμπέρασμα έπεται αμέσως από το γεγονός ότι το $\Lambda(E)$ είναι μη τετριμμένος (αφού $\Lambda \neq 0$) διανυσματικός υπόχωρος του K.

<u>Λήμμα 3.5.7</u>. Έστω E τοπικά κυρτός χώρος Hausdorff. Αν A και B είναι ξένα μη κενά κλειστά υποσύνολα του E ώστε το A είναι συμπαγές, τότε υπάρχει ανοικτή και κυρτή περιοχή V του $0 \in E$ ώστε $\left(A+V\right)\bigcap B=\varnothing$.

<u>Απόδειξη</u> Αν $x \in A$ τότε το $x \in E \setminus B$ το οποίο είναι ανοικτό σύνολο, συνεπώς υπάρχει περιοχή U_x του $0 \in E$ ώστε $x+U_x \subseteq E \setminus B \Leftrightarrow \left(x+U_x\right)\bigcap B=\varnothing$. Από την τοπική κυρτότητα του E και την συνέχεια της πρόσθεσης υπάρχει ανοικτή και κυρτή περιοχή V_x του 0 ώστε $V_x+V_x \subseteq U_x$. Η οικογένεια $\left\{x+V_x : x \in A\right\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς A, άρα υπάρχουν $x_1,...,x_n$ σημεία του A ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}\left\{x_k+V_{x_k} : k=1,2,...,n\right\}$.

Παρατηρούμε ότι η ανοικτή και κυρτή περιοχή $V=\bigcap_{k=1}^{n}V_{x_k}$ του 0 ικανοποιεί το συμπέρασμα. Πράγματι, έστω $a \in A$ και $x \in V$, τότε υπάρχει $k_0 \le n$ ώστε $a=x_{k_0}+y$ με $y \in V_{x_{k_0}}$. Έπεται ότι, $a+x=x_{k_0}+x+y \in x_{k_0}+V_{x_{k_0}}+V_{x_{k_0}} \subseteq x_{k_0}+U_{x_{k_0}}$.

Επομένως $a+x \notin B$.

<u>Θεώρημα 3.5.8</u> (Διαχωριστικό θεώρημα Hahn – Banach).

Έστω E τοπολογικός διανυσματικός χώρος Hausdorff και A, B ξένα <u>κυρτά</u> μη κενά υποσύνολα του E.

(α) Αν το A είναι <u>ανοικτό</u>, τότε υπάρχουν $\Lambda \in E^*$ και $\gamma \in R$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{Re}\Lambda\left(x\right)<\gamma \le \operatorname{Re}\Lambda\left(y\right)$$

για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$.

(β) Αν το A είναι <u>συμπαγές</u>, το B είναι <u>κλειστό</u> και ο E <u>τοπικά κυρτός</u> τότε υπάρχουν $\Lambda \in E^*$ και $\gamma_1,\gamma_2 \in R$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{Re}\Lambda\left(x\right)<\gamma_1<\gamma_2<\Lambda\left(y\right)$$

για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. (Αν $K=R$ τότε $\operatorname{Re}\Lambda=\Lambda$.)

<u>Απόδειξη.</u> Είναι αρκετό να αποδείξουμε το θεώρημα για $K=R$. Αν $K=C$ και η περίπτωση $K=R$ έχει αποδειχθεί, τότε υπάρχει ένα συνεχές $R-$γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda_1 : E \to R$ το οποίο ικανοποιεί τους ισχυρισμούς (α) ή (β). Αν Λ είναι το (μοναδικό) $C-$γραμμικό συναρτησοειδές επί του E ώστε $\Lambda_1=\operatorname{Re}\Lambda$, τότε $\Lambda \in E^*$. Έτσι στην συνέχεια υποθέτομε ότι $K=R$.

(α) Υποθέτομε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $0 \in A$. Θεωρούμε το συναρτησοειδές του Minkowski $p = p_U$ του ανοικτού και κυρτού συνόλου $U = A - B + y_0$ όπου y_0 κάποιο στοιχείο του B και παρατηρούμε ότι $0 \in U$. Ως γνωστόν έχουμε ότι $U = \{x \in E : p(x) < 1\}$ και αφού $y_0 \notin U$ έπεται ότι $p(y_0) \geq 1$ ($y_0 \notin U$ αφού $A \bigcap B = \varnothing$).

Έστω M ο υπόχωρος του E που ορίζεται ως (η ευθεία) $M = \{\lambda y_0 : \lambda \in R\}$. Ορίζουμε $f : M \to R$ ώστε, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0)$ και παρατηρούμε ότι, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0) \leq p(\lambda y_0)$, $\lambda \in R$ (αν $\lambda \geq 0$ τότε, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0) = p(\lambda y_0)$, αν $\lambda < 0$ τότε, $f(\lambda y_0) = \lambda p(y_0) < 0 \leq p(\lambda y_0)$). Από το θεώρημα Hahn-Banach (θεώρημα 3.5.1)υπάρχει $\Lambda : E \to R$ γραμμικό συναρτησοειδές που επεκτείνει το f ώστε $\Lambda(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in E$. Επειδή το p είναι φραγμένο στην περιοχή U του μηδενός έπεται από την πρόταση 3.3.3 ότι είναι συνεχής απεικόνιση. Από το πόρισμα 3.3.4 έπεται ότι και το Λ είναι συνεχής απεικόνιση. (Πρβλ. και την παρατήρηση 3.3.5 .)

Επίσης αν $a \in A$ και $b \in B$ τότε $\Lambda(a-b)+1 \leq \Lambda(a-b) + p(y_0) = \Lambda(a-b) + \Lambda(y_0)$ $\leq p(a-b+y_0) < 1$, συνεπώς $\Lambda(a-b) = \Lambda(a) - \Lambda(b) < 0 \Rightarrow \Lambda(a) < \Lambda(b)$.

Έπεται ότι τα $\Lambda(A)$ και $\Lambda(B)$ είναι (ξένα κυρτά υποσύνολα του R και συνεπώς) ξένα <u>διαστήματα</u> με το $\Lambda(A)$ αριστερά του $\Lambda(B)$. Σημειώνουμε ότι επειδή Λ ανοικτή απεικόνιση το $\Lambda(A)$ είναι ανοικτό διάστημα. Θέτομε γ να είναι το δεξί άκρο του $\Lambda(A)$ και παρατηρούμε ότι ο αριθμός γ ικανοποιεί τον ισχυρισμό (α).

Αποδεικνύουμε τώρα τον ισχυρισμό (β) .

Αντικαθιστούμε το κυρτό και συμπαγές σύνολο A με το ανοικτό και κυρτό σύνολο $A+V$, όπου V είναι ανοικτή και κυρτή περιοχή του 0 ώστε $(A+V) \bigcap B = \varnothing$, τέτοια περιοχή V του 0 υπάρχει από το Λήμμα 3.5.7. Από τον ισχυρισμό (α), υπάρχει $\Lambda \in E^*$, $\Lambda \neq 0$, ώστε

$$\Lambda(A+V) \bigcap \Lambda(B) = \varnothing .$$

Τα σύνολα $\Lambda(A+V)$ και $\Lambda(B)$ είναι ξένα διαστήματα του R με το $\Lambda(A+V)$ ανοικτό και αριστερά του $\Lambda(B)$.

Επειδή το $\Lambda(A)$ είναι συμπαγές διάστημα με $\Lambda(A) \subseteq \Lambda(A+V)$ έπεται το συμπέρασμα.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

……………………………………………

<u>Πόρισμα 3.5.9</u> Έστω E τοπικά κυρτός χώρος, M διανυσματικός υπόχωρος του E και $x_0 \in E$ ώστε $x_0 \notin \overline{M}$. Τότε υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\Lambda(x_0)=1$ και $\Lambda(x)=0$ για κάθε $x \in M$.

<u>Απόδειξη</u> Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό (β) του θεωρήματος 3.5.8 με $A=\{x_0\}$ και $B=\overline{M}$, επομένως υπάρχει $\Lambda_1 \in E^*$ ώστε τα $\{\Lambda_1(x_0)\}$ και $\Lambda_1(M)$ είναι ξένα σύνολα. Αυτό επιβάλλει ο $\Lambda_1(M)$ να είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του σώματος K και επομένως $\Lambda_1(M)=\{0\}$ και $\Lambda_1(x_0)\neq 0$.

Θέτομε $\Lambda = \dfrac{\Lambda}{\Lambda_1(x_0)}$ και έχουμε το συμπέρασμα.

…………………………………….

<u>Παρατήρηση</u> Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει μια μέθοδο διαπραγμάτευσης κάποιων προβλημάτων προσέγγισης:

Για να αποδείξουμε ότι ένα $x_0 \in E$ βρίσκεται στην κλειστότητα κάποιου υποχώρου M του τοπικά κυρτού χώρου E , είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\Lambda(x_0)=0$ για κάθε $\Lambda \in E^*$ για το οποίο ισχύει ότι $\Lambda|_M = 0$

<u>Πόρισμα 3.5.10</u> Έστω E τοπικά κυρτός χώρος, M διανυσματικός υπόχωρος του E και $f: M \to K$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\Lambda|_M = f$.

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $f \neq 0$. Θέτομε $M_0 = \{x \in M : f(x)=0\}$ και επιλέγομε ένα $x_0 \in M$ ώστε $f(x_0)=1$. Επειδή η f είναι συνεχής απεικόνιση το x_0 δεν ανήκει στην $M-$ κλειστότητα του M_0 ($x_0 \notin cl_M M_0$) και επομένως το x_0 δεν ανήκει στην E κλειστότητα του M_0 ($x_0 \notin \overline{M_0}$).

Από το πόρισμα 3.5.9 υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\Lambda(x_0)=1$ και $\Lambda|_{M_0}=0$. Αν $x \in M$, τότε $x - f(x)x_0 \in M_0$, επειδή $f(x_0)=1$. Επομένως, $\Lambda(x) - f(x) = \Lambda(x) - f(x)\Lambda(x_0) = \Lambda(x - f(x)x_0) = 0$. Από όπου συμπεραίνουμε ότι $\Lambda|_M = f$.(Πρβλ. και την Πρόταση 3.3.18 .)

Σημειώνουμε ότι μια άλλη απόδειξη του Πορ. 3.5.10, η οποία χρησιμοποιεί την αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn -Banach (Θεωρ.3.5.2), έπεται και από την άσκηση 5 της παραγρ. 3.3 .

Ασκήσεις

1) Έστω X τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος διαχωρίσιμος χώρος. Υποθέτομε ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Αποδείξτε ότι ο χώρος $C(X)$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή T_C είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Frechet του οποίου η τοπολογία δεν επάγεται από μια νόρμα.

[Υπόδειξη Ο X έχει μια αριθμήσιμη βάση (U_n) από σχετικά συμπαγή ανοικτά σύνολα. Έπεται ότι υπάρχει μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων (K_n) του X ώστε $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$, $n \geq 1$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Έτσι ο $C(X)$ μετρικοποιείται από την ακολουθία ημινορμών $p_n(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}$, $n \geq 1$. Έστω $V_n = \left\{ f \in C(X) : p_n(f) < \frac{1}{n} \right\}$, η (V_n) είναι βάση περιοχών του $0 \in C(X)$ και αν υποθέσομε ότι V είναι μια φραγμένη περιοχή του $0 \in C(X)$ τότε $V_n \subseteq V$, $n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in N$. Διακρίνετε τις περιπτώσεις: (α) Υπάρχει $n \geq n_0$ ώστε $K_{n+1} \setminus \operatorname{int} K_{n+1} \neq \varnothing$ και προχωρήστε όπως στο παράδειγμα 3.4.1 και (β) $K_{n+1} = \operatorname{int} K_{n+1}$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε τα σύνολα K_n, $n \geq n_0 + 1$ είναι ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του X και επειδή X δεν είναι συμπαγής υπάρχει $n_1 \geq n_0 : K_{n_0+1} \neq K_{n_1}$ θέτομε $W = K_{n_1+1} \setminus K_{n_1}$ και έστω $f = x_W$ τότε $\varphi \in V_{n_1} \subseteq V_{n_0} \subseteq V$ και $p_{n_1+1}(\varphi) = 1$]

2) Έστω $0 < p < 1$. Θεωρούμε το χώρο ℓ_p των ακολουθιών πραγματικών $x = (x_k)$ ώστε, $q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $d(x, y) = q(x - y)$ είναι μια πλήρης μετρική και ότι ο (ℓ_p, d) είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος ο οποίος δεν είναι τοπικά κυρτός. Αποδείξτε ότι ο $\ell_p^* = \ell_\infty$ και επομένως ο συζυγής του ℓ_p διαχωρίζει τα σημεία του ℓ_p.

[Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ και ότι $q(\lambda x) = |\lambda|^p q(x)$, $x, y \in \ell_p$, $\lambda \in R$, από όπου έπεται ότι ο ℓ_p είναι διανυσματικός χώρος και η d μετρική. Η πληρότητα της d αποδεικνύεται όπως και για τους ℓ_p με $p \geq 1$. Για να δείξουμε ότι $\ell_p^* = \ell_\infty$, παρατηρούμε ότι $\ell_p \subseteq \ell_1$ και ότι η τοπολογία του ℓ_p είναι λεπτότερη από την τοπολογία του ℓ_1, επομένως κάθε στοιχείο του ℓ_∞ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί του ℓ_p. Αν $f \in \ell_p^*$ τότε το f καθορίζεται από την φραγμένη ακολουθία $a_k = f(e_k)$, $k \in N$, όπου $e_k = \delta_{nk}$, ώστε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, $x = (x_k) \in \ell_p$. Συνεπώς $\ell_p^* = \ell_\infty$. Για να αποδείξουμε ότι ο ℓ_p δεν είναι τοπικά κυρτός, θεωρούμε την ακολουθία $\left(x^n\right) \subseteq \ell_p$ ώστε $x_k^n = n^{p-1}$ αν $n = k$ και $x_k^n = 0$ αν $n \neq k$.

Παρατηρούμε ότι $\left(x^n\right) \subseteq \hat{B}_d\left(0,1\right)$ και ότι $d\left(x^n, 0\right) \to 0$.

Δείξτε ότι η ακολουθία, $y^n = \dfrac{x^{n+1} + \ldots + x^{2n}}{n}$, δεν είναι φραγμένη στον ℓ_p, παρατηρώντας ότι $d\left(y^n, 0\right) = q\left(y^n\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\dfrac{k^{p-1}}{n}\right)^p \geq \dfrac{n\left(2n\right)^{p(p-1)}}{n^p} = 2^{p(p-1)} \cdot n^{(1-p)^2} \to +\infty$.

Έπεται ότι η $B_d\left(0,1\right)$ δεν μπορεί να περιέχει κυρτή περιοχή του $0 \in \ell_p$.]

3) Έστω $\left(E, \|\cdot\|\right)$ μιγαδικός χώρος με νόρμα και $f \in E^*$. Αποδείξτε ότι αν $u = \mathrm{Re}\, f$ τότε $\|f\| = \|u\|$, δηλαδή, $\sup_{\|x\| \leq 1} \left|f\left(x\right)\right| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left|\mathrm{Re}\left(f\left(x\right)\right)\right|$.

4) Έστω $\left(E, \|\cdot\|\right)$ πραγματικός χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο $E \times E$ γίνεται ένας μιγαδικός χώρος με νόρμα E_C με πράξεις και νόρμα που ορίζονται ως εξής: $\left(x, y\right) + \left(u, v\right) = \left(x+u, y+v\right)$, $\left(a+ib\right)\left(x, y\right) = \left(ax - by, bx + ay\right)$, $\left\|\left(x, y\right)\right\|_C = \sup\left\{\left\|\cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y\right\| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$, $x, y, u, v \in E$, $a, b \in R$.

(β) Το σύνολο $E \times \left\{0\right\}$ είναι ένας κλειστός $R-$ γραμμικός υπόχωρος του E_C ισομετρικός με τον E μέσω της $x \to \left(x, 0\right)$. Αντιστρόφως, $E_C = \left\{h + ik : h, k \in E \times \left\{0\right\}\right\}$.

(γ) Η τοπολογία που επάγεται στον $E_C = E \times E$ από την $\|\cdot\|_C$ ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο που επάγεται στον $E \times E$ από την $\|\cdot\|$.

5) Έστω B κυρτό ισορροπημένο και κλειστό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E και $x_0 \in E$ με $x_0 \notin B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\Lambda \in E^*$ ώστε $\left|\Lambda\left(x\right)\right| \leq 1$, $x \in B$, αλλά $\Lambda\left(x_0\right) > 1$.

6)Έστω E διανυσματικός χώρος επί του K και $p_1, p_2 : E \to R$ ημινόρμες. Αν $f : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $\left|f\left(x\right)\right| \leq p_1\left(x\right) + p_2\left(x\right)$, $x \in E$, τότε υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : E \to K$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και $\left|f_i\left(x\right)\right| \leq p_i\left(x\right)$, $x \in E$, $i = 1, 2$.

[<u>Υπόδειξη</u> Βρείτε γραμμικό συναρτησοειδές $\varphi : E \times E \to K$ ώστε $\left|\varphi\left(x_1, x_2\right)\right| \leq p_1\left(x_1\right) + p_2\left(x_2\right)$ και $\varphi\left(x, x\right) = f\left(x\right)$].

7) Έστω E πραγματικός χώρος με νόρμα και A,B μη κενά ξένα κυρτά υποσύνολα του E ώστε $0 \notin \overline{A-B}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in E^*$ ώστε

$$\sup\{f(x): x \in B\} < \inf\{f(x): x \in A\}.$$

Ισχύει το αποτέλεσμα αυτό σε ένα πραγματικό τοπικά κυρτό χώρο;

8)Για κάθε $a \in R$, θέτομε $E_a = \{f \in C[-1,1]: f(0) = a\}$.

Αποδείξτε ότι κάθε E_a είναι κυρτό και πυκνό υποσύνολο του $L^2[-1,1]$. Αν $a \neq b$, αποδείξτε ότι τα E_a και E_b δεν διαχωρίζονται από κανένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $F: L^2[-1,1] \to R$.

[<u>Υπόδειξη</u>. Ο χώρος $C[-1,1]$ είναι πυκνός στον $L^2[-1,1]$. Αποδείξτε ότι αν $a \in R$, $\varepsilon > 0$ και $g \in C[-1,1]$ τότε υπάρχει $h \in C[-1,1]$ με $h(0) = a$ και $\int_{-1}^{1} |g-h|^2 \, dt < \varepsilon^2$. Αν $g(0) = \beta$, βρείτε $\varphi \in C[-1,1]$ ώστε, $\varphi(0) = a - \beta$ και $\int_{-1}^{1} \varphi^2 dt \leq \varepsilon^2$. Κατόπιν θέσατε $h = g + \varphi$.]

9) Έστω ℓ_∞ ο χώρος Banach των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών. <u>Ένα όριο Banach</u> είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές $L: \ell_\infty \to R$ ώστε: (α) $L(x) \geq 0$, αν $x = (x_n)$ με $x_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$.

(β) $L(x) = L(\sigma(x))$, όπου $\sigma: \ell_\infty \to \ell_\infty$ ο τελεστής της μεταφοράς (shift operator), δηλαδή $\sigma(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ και

(γ) $L(1,1,...,1,...) = 1$. Αποδείξτε ότι:

(ι) Αν L είναι ένα όριο Banach και $x = (x_n) \in \ell_\infty$ τότε

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq L(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

(ιι) Όρια Banach υπάρχουν.

[Υπόδειξη Για το (ι): Επειδή $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\inf\{x_k : k \geq n\})$

και $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\{x_k : k \geq n\}\right)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι,

$\inf\{x_n : n \geq 1\} \leq L(x) \leq \sup\{x_n : n \geq 1\}$.

Για το (ιι): Έστω c ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞ των συγκλινουσών ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\ell : c \to R$ ώστε $\ell(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x = (x_n) \in c$ και το υπογραμμικό συναρτησοειδές $p : \ell_\infty \to R$ ώστε

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \; x = (x_n) \in \ell_\infty .$$

Εφαρμόστε το θεώρημα Hahn- Banach για το ζεύγος ℓ, p .]

10) Αποδείξτε ότι ο χώρος $C^\infty(I)$ του παραδείγματος 3.4.3 είναι διαχωρίσιμος

[<u>Υπόδειξη</u> . Εξετάστε τα πολυώνυμα]

4 Ασθενείς τοπολογίες σε χώρους με νόρμα

4.1 θεωρήματα Mazur, Alaoglou, Goldstine ….

Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Υπενθυμίζουμε ότι η ασθενής τοπολογία T_w του X έχει ως βάση (ανοικτών) περιοχών του $0\in X$ όλα τα σύνολα της μορφής
$V_{x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon}=\left\{x\in X:\left|x_k^*(x)\right|<\varepsilon, k=1,2,\dots,n\right\}$, ($=B_{\{x_1^*,\dots,x_n^*\}}(0,\varepsilon)$) όπου
$x_1^*,\dots,x_n^*\in X^*, n\in N,\varepsilon>0$.

Ένα δίκτυο σημείων του X , $(x_i)_{i\in I}$ συγκλίνει ασθενώς στο $x\in X$, δηλαδή $x_i \xrightarrow{w} x$ αν και μόνο αν $x^*(x_i)\to x^*(x)$ για κάθε $x^*\in X^*$.

Η ασθενής* τοπολογία T_{w^*} του X^* έχει ως βάση περιοχών του $0\in X^*$ όλα τα σύνολα της μορφής $V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon}=\left\{x^*\in X^*:\left|x^*(x_k)\right|<\varepsilon, k=1,2,\dots,n\right\}$, ($=B_{\{x_1,\dots,x_n\}}(0,\varepsilon)$) όπου
$x_1,\dots,x_n\in X$, $n\in N$, $\varepsilon>0$.

Ένα δίκτυο σημείων του X^*, $(x_i^*)_{i\in I}$ συγκλίνει ασθενώς * στο $x^*\in X^*$, δηλαδή
$x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν και μόνο αν $x_i^*(x)\to x^*(x)$ για κάθε $x\in X$. Επίσης παρατηρούμε ότι:

1) Από τον ορισμό τους τόσο η ασθενής τοπολογία του X όσο και ασθενής* τοπολογία του X^* είναι μικρότερες των αντιστοίχων norm τοπολογιών .

Δηλαδή $T_w\subseteq T_{\|\cdot\|}$ και $T_{w^*}\subseteq T_{\|\cdot\|}$.

2) Ο X ταυτίζεται ισομετρικά με έναν υπόχωρο του X^{**} μέσω της φυσιολογικής απεικόνισης

$$\varphi: X\to X^{**}:\varphi(x)(x^*)=x^*(x),\ x\in X .$$

3) Έστω $(x_n)\subseteq X$ και $x\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη.

Πράγματι $\sup\limits_{n\in N}\left|x^*(x_n)\right|<+\infty$ για κάθε $x^*\in X^*$, επομένως από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος έχουμε το συμπέρασμα.

4) Έστω $(x_n^*)\subseteq X^*$ και $x^*\in X^*$. Αν ο X είναι χώρος Banach και $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε η ακολουθία (x_n^*) είναι φραγμένη. Το συμπέρασμα έπεται όπως προηγουμένως από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος.

5) Αν X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα τότε οι περιοχές του $0\in X$ στην ασθενή τοπολογία, δεν είναι φραγμένα σύνολα αφού $\bigcap_{k=1}^{n} Kerx_k^* \subseteq V_{x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon}$. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για την ασθενή * τοπολογία.

4.1.1Παραδείγματα. 1) Έστω $X=c_0$ ή ℓ_p $(1<p<+\infty)$ και έστω (e_n) η ακολουθία που ορίζεται ως $e_n(k)=1$ αν $n=k$ και 0 αν $n\neq k$. Τότε $e_n \xrightarrow{w} 0$ αλλά η (e_n) δεν είναι norm-συγκλίνουσα. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για $X=\ell_p$, η απόδειξη για το c_0 είναι ανάλογη. Έστω $x^*\in X^*=\ell_q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, τότε $x^*=\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ και βέβαια $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q<+\infty$. Επομένως $x^*(e_n)=x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Για το δεύτερο συμπέρασμα, παρατηρούμε ότι αν μια ακολουθία είναι norm-συγκλίνουσα τότε είναι και ασθενώς συγκλίνουσα στο ίδιο όριο (γιατί;). Επομένως η (e_n) δεν είναι norm συγκλίνουσα, αφού $\|e_n\|_p=1$, $n\in N$. Σημειώνουμε ότι η ακολουθία (e_n) ονομάζεται η « συνήθης βάση» των χώρων ℓ_p ή c_0.

2) Η ιδιότητα Schur στον ℓ_1. Στον χώρο Banach ℓ^1, μια ακολουθία συγκλίνει ασθενώς αν και μόνο αν είναι norm – συγκλίνουσα. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής, κάθε norm – συγκλίνουσα ακολουθία είναι και ασθενώς συγκλίνουσα στο ίδιο όριο (η τοπολογία της νόρμας είναι λεπτότερη της ασθενούς). Έστω (x_n) ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία.

Υποθέτομε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_n \xrightarrow{w} 0$. Ας υποθέσομε ότι $\|x_n\|_1$ δεν συγκλίνει στο 0. Θεωρώντας εν ανάγκη μια υπακολουθία της (x_n) και κανονικοποιώντας μπορούμε να υποθέσομε ότι $\|x_n\|_1=1$ για κάθε $n\geq 1$. Παρατηρούμε ότι

$$x_n(j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ j\in N \qquad (1)$$

(Η ακολουθία $(e_n)\subseteq \ell_\infty=\ell_1^*$, άρα $e_j(x_n)=x_n(j)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.)

Επιλέγομε με επαγωγή ακολουθίες μη αρνητικών ακεραίων $1=n_1<n_2<\dots<n_k<\dots$ και $0<N_0<N_1<\dots<N_k<\dots$ έτσι ώστε:

$$\sum_{j=1}^{N_{k-1}}|x_{n_k}(j)|<\frac{1}{100} \text{ και } \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k}|x_{n_k}(j)|\geq\frac{9}{10} \qquad (2)$$

Η επαγωγή έχει ως εξής: Θέτομε $N_0=0$, $n_1=1$ και επιλέγομε $N_1>1$ ώστε η δεύτερη από τις ανισότητες (2) να ισχύει (η πρώτη ισχύει τετριμμένα αφού το άθροισμα σε αυτήν είναι το κενό).

Κατόπιν επιλέγομε $n_2 > n_1$ ώστε η πρώτη από τις (2) να ισχύει και μετά $N_2 > N_1$ ώστε η δεύτερη από τις (2) να ικανοποιείται.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο σημειώνοντας ότι στην επιλογή των n_k χρησιμοποιούμε την (1) ενώ στην επιλογή των N_k ότι $\|x_{n_k}\|_1 = 1$. (Πρβλ. και την παρατήρηση μετά το παράδειγμα (2)) .

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $a \in \ell_\infty = \ell_1^*$ με

$$a(j) = \operatorname{sgn}\left(x_{n_k}(j)\right),\ j \in \left[N_{k-1}+1, N_k\right],\ k = 1,2,\ldots$$

Τότε έχουμε,

$$a\left(x_{n_k}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_{n_k}(j) a(j) = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} \pm x_{n_k}(j) + \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} \left|x_{n_k}(j)\right| + \sum_{j=N_k+1}^{\infty} \pm x_{n_k}(j)$$

$\geq \dfrac{9}{10} - \dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{10}$, άτοπο διότι $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{w} 0$ και συνεπώς, $a\left(x_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

<u>Παρατηρήσεις</u>. 1) Τα δύο πρώτα βήματα της επαγωγής στο απόδειξη της ιδιότητας Schur του ℓ_1 είναι τα ακόλουθα:

Θέτομε $N_0 = 0$ και $n_1 = 1$. Επειδή $\|x_1\|_1 = 1$, υπάρχει $N_1 > N_0 = 0$ ώστε

$$\sum_{j=0}^{N_1} \left|x_1(j)\right| \geq \frac{9}{10}$$

Έστω $n_2 > n_1$ ώστε $\displaystyle\sum_{j=1}^{N_1} \left|x_{n_2}(j)\right| < \frac{1}{100}$ $\quad \left(\max\left\{\left|x_n(j)\right| : 1 \leq j \leq N_1\right\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Επιλέγομε τώρα $N_2 > N_1$ ώστε, $\displaystyle\sum_{j=N_1+1}^{N_2} \left|x_{n_2}(j)\right| \geq \frac{9}{10}$ $\qquad$ ($\|x_{n_2}\|_1 = 1$)

2) Καθώς- όπως θα αποδείξουμε αργότερα- τα ασθενώς συμπαγή υποσύνολα ενός διαχωρίσιμου χώρου με νόρμα είναι μετρικοποιήσιμα, το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι τα ασθενώς συμπαγή και τα norm συμπαγή υποσύνολα του ℓ_1 συμπίπτουν .

3) Αποδεικτικές τεχνικές ως η παραπάνω ονομάζονται «slinding hump arguments».

<u>Θεώρημα</u> 4.1.2 Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ισχύουν

(1) $\quad X^* = (X, w)^*$ $\quad$ και $\quad$ (2) $\quad \left(X^*, w^*\right)^* = X$

<u>Απόδειξη</u> (1) Αν $\Lambda:(X,w)\to K$ συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές τότε, επειδή η norm τοπολογία είναι λεπτότερη της ασθενούς τοπολογίας, το $\Lambda\in X^*$. Έστω τώρα $\Lambda\in X^*$, αν $\varepsilon>0$ τότε το Λ είναι βέβαια φραγμένο στην ασθενώς ανοικτή περιοχή $V_{\Lambda,\varepsilon}$ του $0\in X$, επομένως από την πρόταση 3.1.10 το Λ είναι συνεχής συνάρτηση όταν ο X έχει την ασθενή τοπολογία, δηλαδή $\Lambda\in(X,w)^*$.

(2) Έστω $x\in X$ τότε το x μπορεί να θεωρηθεί ως (φραγμένο) γραμμικό συναρτησοειδές επί του X^* μέσω της φυσιολογικής ταύτισης του X με έναν υπόχωρο του X^{**}

($\varphi(x)(x^*)=x^*(x), x^*\in X^*$). Αν $\varepsilon>0$ τότε η $V_{x,\varepsilon}$ είναι ασθενώς * ανοικτή περιοχή του $0\in X^*$ και βέβαια το $x=\varphi(x)$ είναι φραγμένο στην $V_{x,\varepsilon}$, επομένως από την πρόταση 3.1.10 το $x=\varphi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση όταν ο X^* έχει την ασθενή * τοπολογία, συνεπώς $X\subseteq(X^*,w^*)$. Έστω τώρα $\Lambda\in(X^*,w^*)^*$, από την πρόταση 3.1.10 το Λ είναι φραγμένο σε μια ασθενώς * ανοικτή περιοχή του $0\in X^*$, δηλαδή υπάρχουν $x_1,\dots,x_n\in X$ και $\varepsilon>0$ ώστε $\qquad x^*\in V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon}\Rightarrow\left|\Lambda(x^*)\right|<1$.

Αν $x^*\in\bigcap_{k=1}^{n}Kerx_k$ και $m\in N$ τότε $mx^*\in\bigcap_{k=1}^{m}Kerx_k\subseteq V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon}$.

Έπεται ότι $\left|\Lambda(x^*)\right|<\dfrac{1}{m}$ για κάθε $m\in N$ και άρα $x^*\in Ker\Lambda$. Τελικά έχουμε,

$\bigcap_{k=1}^{n}Kerx_k\subseteq Ker\Lambda$. Έτσι από την πρόταση 3.3.18 το Λ είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1,\dots,x_n$ και άρα $\Lambda\in X$.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Σχόλιο</u> Παρατηρούμε ότι η ασθενής τοπολογία επί του X είναι η μικρότερη τοπολογία η οποία κάνει όλα τα συναρτησοειδή $x^*\in X^*$ συνεχείς συναρτήσεις. Αντίστοιχα η ασθενής * τοπολογία επί του X^* είναι η μικρότερη τοπολογία η οποία κάνει όλα τα συναρτησοειδή της μορφής $\{\varphi(x):x\in X\}$ (πρβλ. την απόδειξη του θεωρήματος 4.1.2 (2)) συνεχείς συναρτήσεις επί του X^*.

……………………………………………….

Αποδεικνύουμε στην συνέχεια το σημαντικό θεώρημα του Mazur και εξετάζουμε κάποιες συνέπειές του.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.3 (Mazur)Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $\mathrm{K}\subseteq X$ <u>κυρτό</u> σύνολο. Τότε, μ

$$c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}=c\ell_{w}\mathrm{K}.$$

(Η ασθενής και η norm κλειστότητα ενός κυρτού συνόλου σε ένα χώρο με νόρμα ταυτίζονται.)

<u>Απόδειξη</u> Επειδή $T_w \subseteq T_{\|\cdot\|}$, έπεται ότι $c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K} \subseteq c\ell_w \mathrm{K}$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in c\ell_w \mathrm{K} \setminus c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}$. Εφαρμόζοντας το διαχωριστικό θεώρημα Hahn – Banach (θεώρημα 3.5.8) στα ξένα κλειστά κυρτά σύνολα $\{x_0\}$ και $c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}$ του $(X, \|\cdot\|)$ (το $\{x_0\}$ είναι συμπαγές), βρίσκουμε $\Lambda \in X^*$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ ώστε

$$\operatorname{Re}\Lambda(x_0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \operatorname{Re}\Lambda(x), \text{ για κάθε } x \in c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}.$$

Επειδή, από το θεώρημα 4.1.2, ισχύει ότι $X^* = (X, w)^*$ το σύνολο $U = \{x \in X : \operatorname{Re}\Lambda(x) < \lambda_1\}$ είναι ασθενώς ανοικτή περιοχή του x_0 τέτοια ώστε $U \bigcap \mathrm{K} = \varnothing$, άτοπο αφού $x_0 \in c\ell_w \mathrm{K}$.

....

<u>Πόρισμα</u> 4.1.4 Έστω X χώρος με νόρμα και $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό. Τότε έχουμε:

(α) Το K είναι ασθενώς κλειστό αν και μόνο αν είναι norm κλειστό.

(β) Το K είναι ασθενώς πυκνό στον X αν και μόνο αν είναι norm πυκνό στον X

(Ιδιαίτερα, το K μπορεί να είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του X .)

<u>Απόδειξη</u>: Προφανής συνέπεια του θεωρήματος του Mazur.

Μια άλλη αξιοσημείωτη συνέπεια του θεωρήματος του Mazur είναι η ακόλουθη.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.5 Έστω X χώρος με νόρμα, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(y_n) \subseteq X$ ώστε:

(α) Κάθε y_n είναι κυρτός συνδυασμός μελών της (x_n) και

(β) $\quad y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

(Το (α) μας λέει ότι, υπάρχουν αριθμοί $a_{nm} \geq 0$ ώστε $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$, $y_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$ και για κάθε $n \geq 1$, μόνο πεπερασμένα a_{nm} είναι $1 \neq 0$.)

<u>Απόδειξη</u> Έστω $H = co(\{x_n : n \geq 1\})$ (= η κυρτή θήκη του K) και $\mathrm{K} = c\ell_w H$. Τότε $x \in \mathrm{K}$. Από το θεώρημα του Mazur συμπεραίνουμε ότι $x \in c\ell_{\|\cdot\|}\mathrm{K}$. Έπεται προφανώς ότι υπάρχει ακολουθία $(y_n) \subseteq H$ ώστε $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

……………………………………….

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την σημασία του προηγούμενου αποτελέσματος ας το εξετάσουμε στην περίπτωση ενός χώρου Banach της μορφής $C(\mathrm{K})$ με K συμπαγή χώρο. Θα χρειαστούμε πρώτα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.1.6 Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff $f_n : \mathrm{K} \to K$, $n \geq 1$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε $\|f_n\|_\infty \leq \mathrm{M} < +\infty$, $n \geq 1$, και $f : \mathrm{K} \to K$ συνεχής συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(ι) $f_n \to f$ κατά σημείο επί του K.

(ιι) $f_n \xrightarrow{w} f$ στον χώρο Banach $C(\mathrm{K})$.

Απόδειξη Είναι αρκετό να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για τον χώρο $C(\mathrm{K})$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του K.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Αν $t \in \mathrm{K}$ τότε η απεικόνιση $\delta_t : \mathrm{K} \to R : \delta_t(f) = f(t)$, είναι ένα φραγμένο $(\|\delta_t\| = 1)$ γραμμικό συναρτησοειδές επί του K. Τα συναρτησοειδή $\delta_t, t \in \mathrm{K}$, ονομάζονται μέτρα Dirac επί του K. Επειδή $f_n \xrightarrow{w} f$ έπεται ότι

$$\delta_t(f_n) = f_n(t) \to \delta_t(f) = f(t), \text{ για κάθε } t \in \mathrm{K}.$$

(ι) $\Rightarrow$ (ιι) θα χρησιμοποιήσουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα από τη θεωρία μέτρου, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και το θεώρημα αναπαράστασης μέτρων του Riesz

Έστω $\Lambda : C(\mathrm{K}) \to R$ θετικό γραμμικό συναρτησοειδές επί του $C(\mathrm{K})$ (δηλαδή, $f \in C(\mathrm{K})$ και $f \geq 0$ τότε $\Lambda(f) \geq 0$). Το Λ αναπαριστάνεται από ένα (μοναδικό) κανονικό θετικό μέτρο Borel μ επί του K έτσι ώστε, $\Lambda(f) = \int_{\mathrm{K}} f d\mu$, $f \in C(\mathrm{K})$.

(Θεώρημα Riesz).

Επειδή η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη, $f_n \to f$ κατά σημείο επί του K και το μ είναι (αναγκαία) φραγμένο μέτρο επί του K, έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue ότι

$$\Lambda(f_n) = \int_{\mathrm{K}} f_n d\mu \to \int_{\mathrm{K}} f d\mu = \Lambda(f)$$

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το γεγονός ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda : C(\mathrm{K}) \to R$ είναι ίσο με την διαφορά δύο θετικών γραμμικών συναρτησοειδών $\Lambda_1, \Lambda_2 : C(\mathrm{K}) \to R$, (δηλαδή $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$).

Σχόλιο Έπεται από το θεώρημα 4.1.5 και το Λήμμα 4.1.6 ότι αν $f_n : \mathrm{K} \to K$, $n \geq 1$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων επί του συμπαγούς χώρου K, η οποία συγκλίνει κατά σημείο επί του K στην συνεχή συνάρτηση f τότε υπάρχει ακολουθία (g_n) κυρτών συνδυασμών μελών της ακολουθίας (f_n) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα επί του K στην f.

……………………………………

Θεώρημα 4.1.7 (Alaoglou). Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{\mathrm{B}}_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ του συζυγούς X^* του X είναι ασθενώς * συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ θέτομε

$$A_x = \{\lambda \in K : |\lambda| \leq \|x\|\},$$

προφανώς κάθε A_x είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του K.

Επίσης θέτομε

$$\Omega = \prod_{x \in X} A_x$$

και θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο Ω με την τοπολογία γινόμενο έστω τ. Από το θεώρημα Tychonoff της τοπολογίας ο χώρος (Ω, τ) είναι συμπαγής.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi : \hat{\mathrm{B}}_{X^*} \to \Omega : \Phi(x^*) = (x^*(x))_{x \in X}$$

και παρατηρούμε ότι η Φ είναι * καλά ορισμένη, αφού $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $x^* \in \hat{\mathrm{B}}_{X^*}$.

Περαιτέρω παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(1) Η Φ είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των χώρων $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}, w^*\right)$ και του $\Phi\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}\right)$ με την σχετική τοπολογία από τον συμπαγή χώρο (Ω, τ). Πράγματι, είναι σαφές ότι η Φ είναι

$1-1$. Έστω $\left(x_i^*\right)$ δίκτυο στον $\hat{B}_{X^*}$ και $x^* \in X^*$ τότε έχουμε ότι,

$x_i^* \xrightarrow{w^*} x^* \Leftrightarrow x_i^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$ $\Leftrightarrow \Phi\left(x_i^*\right) \xrightarrow{\tau} \Phi\left(x^*\right)$.

Έτσι έχουμε το συμπέρασμα.

(2) Το $\Phi\left(\hat{B}_{X^*}\right)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (Ω, τ).

Πράγματι, έστω $\Lambda = (\Lambda_x)_{x\in X} \in c\ell_{\Omega}\Phi\left(\hat{B}_{X^*}\right)$. Τότε υπάρχει δίκτυο $\left(x_i^*\right)_{i\in I} \subseteq \hat{B}_{X^*}$ ώστε $\Phi\left(x_i^*\right) \xrightarrow{\tau} \Lambda \Leftrightarrow x_i^*(x) \to \Lambda_x$ για κάθε $x \in X$.

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι:

(α) $\Lambda_{x+y} = \Lambda_x + \Lambda_y$ και (β) $\Lambda_{cx} = c\Lambda_x$, $c \in K$, $x, y \in X$.

Επειδή $|\Lambda_x| \le \|x\|$, $x \in X$, έπεται από τις (α) και (β) ότι η απεικόνιση $x \in X \to \Lambda_x \in K$, ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του X. Άρα, θέτοντας $x^*(x) = \Lambda_x$, $x \in X$, έχουμε ότι $\Phi\left(x^*\right) = \Lambda$ και έτσι το $\Phi\left(\hat{B}_{X^*}\right)$ είναι κλειστό στον χώρο (Ω, τ).

Είναι τώρα προφανές από τους ισχυρισμούς (1) και (2) ότι ο χώρος $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής.

………………………………………………

Ειδικότερα αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος, το θεώρημα Alaoglou δίνει ένα ισχυρότερο συμπέρασμα.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.8 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Τότε η $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής <u>μετρικοποιήσιμος</u> χώρος.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $D = \{x_n : n \ge 1\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Θέτομε

$$\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} A_{x_n}$$

όπου $A_x = \{\lambda \in K : |\lambda| \le \|x\|\}$, $x \in X$.

Παρατηρούμε ότι ο χώρος Ω με την τοπολογία γινόμενο είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος ως αριθμήσιμο καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών μετρικοποιήσιμων χώρων.

Από το θεώρημα 3.3.10 (πρβλ. και το παράδειγμα 3.3.17) έπεται ότι μια μετρική η οποία επάγει την τοπολογία του Ω είναι η ακόλουθη

$$d(a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|a(n)-b(n)|}{1+|a(n)-b(n)|} \text{ , όπου } a=(a(n)),b=(b(n))\in\Omega$$

Ορίζουμε όπως πριν την απεικόνιση $\Phi:\hat{B}_{X^*}\to\Omega$ με $\Phi(x^*)=(x^*(x_n))_{n\geq1}$ και παρατηρούμε ότι η Φ είναι καλά ορισμένη, $1-1$ (αφού το D είναι πυκνό στον X) και συνεχής. Από το θεώρημα Alaoglou (θεώρημα 4.5) ο $\left(\hat{B}_{X^*},w^*\right)$ είναι συμπαγής χώρος, συνεπώς και ο $\Phi\left(\hat{B}_{X^*}\right)$ είναι με την τοπολογία γινόμενο συμπαγής χώρος ομοιομορφικός με τον $\left(\hat{B}_{X^*},w^*\right)$. Επειδή ο Ω είναι μετρικοποιήσιμος έχουμε το συμπέρασμα.

…………………………………………..

Σημείωση. Έστω X χώρος Banach. Ένα υποσύνολο $K\subseteq X^*$ είναι ασθενώς* συμπαγές αν και μόνο αν είναι ασθενώς* κλειστό και φραγμένο (Άσκηση).

Πόρισμα 4.1.9 Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι ο συζυγής X^* του X είναι διαχωρίσιμος τότε η $\left(\hat{B}_X,w\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος. (Έπεται προφανώς ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι με την ασθενή τοπολογία μετρικοποιήσιμος χώρος.)

Απόδειξη Από την Παρατήρηση που ακολουθεί έχουμε ότι $\hat{B}_X\subseteq\hat{B}_{X^{**}}$ και ότι η ασθενής* τοπολογία της $\hat{B}_{X^{**}}$ επάγει στην $\hat{B}_X$ την ασθενή τοπολογία. Επειδή ο χώρος $\left(\hat{B}_{X^{**}},w^*\right)$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος έπεται το συμπέρασμα.

Σημείωση Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος (Άσκηση) .

Παρατήρηση 4.1.10 Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $\varphi:X\to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**} (δηλαδή $\varphi(x)(x^*)=x^*(x)$, $x\in X$, $x^{**}\in X^{**}$). Υπενθυμίζουμε ότι (όπως έπεται από το θεώρημα Hahn-Banach) η φ είναι γραμμική ισομετρία.

Τότε η ασθενής* σχετική τοπολογία επί του X θεωρούμενου ως υποχώρου του X^{**}

(μέσω της φ) <u>συμπίπτει</u> με την ασθενή τοπολογία του X . Έτσι μπορούμε να γράφουμε $(X,w)\approx(\varphi(X),w^*)$.

Πράγματι, έστω $(x_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον X και $x\in X$.

Παρατηρούμε ότι, $x_i \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x^*(x_i)\to x^*(x)$ για κάθε $x\in X^* \Leftrightarrow \varphi(x_i)(x^*)\to\varphi(x)(x^*)$ για κάθε $x^*\in X^*$ $\Leftrightarrow \varphi(x_i)\xrightarrow{w^*}\varphi(x)$.

Με άλλα λόγια η φ είναι επί πλέον ένας ομοιομορφισμός του (X,w) επί του $(\varphi(X).w^*)$

Έχοντας υπόψη την προηγούμενη παρατήρηση διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα Goldstine.

<u>Θεώρημα 4.1.11 (Goldstine</u>) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε η κλειστή σφαίρα $\hat{\mathrm{B}}_X$ του X είναι πυκνή στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$ του X^{**} θεωρούμενη με την ασθενή * τοπολογία. Δηλαδή έχουμε

$$c\ell_{w^*}\hat{\mathrm{B}}_X=\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$$

<u>Απόδειξη</u> Επειδή η φ είναι ισομετρία έχουμε ότι $\hat{\mathrm{B}}_X\subseteq\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$. Συνεπώς, $c\ell_{w^*}\hat{\mathrm{B}}_X\subseteq\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$.
Έστω ότι υπάρχει $x_0^{**}\in\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}\setminus c\ell_{w^*}\hat{\mathrm{B}}_X$. Από το θεώρημα Alaoglou η σφαίρα $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}},w^*\right)$ είναι συμπαγής χώρος, άρα και το $c\ell_{w^*}\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι με την ασθενή * τοπολογία συμπαγές και κυρτό σύνολο. Από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn- Banach (θεώρημα 3.5.8) υπάρχουν $x_0^*\in(X^{**},w^*)^*=X^*$ και $\lambda_1,\lambda_2\in R$ ώστε,

$$\operatorname{Re}x^{**}(x_0^*)<\lambda_1<\lambda_2<\operatorname{Re}x_0^{**}(x_0^*) \text{ για κάθε } x^{**}\in c\ell_{w^*}\hat{\mathrm{B}}_X .$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι $\operatorname{Re}x_0^*(x)<\lambda_1<\lambda_2<\operatorname{Re}x_0^{**}(x_0^*)$ για κάθε $x\in\hat{\mathrm{B}}_X$.

Έστω $x\in X$ με $\|x\|=1$. Από το αριστερό μέλος της ανισότητας έχουμε ότι, $|x_0^*(x)|=ax_0^*(x)$ για κάποιο $|a|=1$. Άρα $|x_0^*(x)|=x_0^*(ax)=\operatorname{Re}x_0^*(ax)<\lambda_1$, από όπου έπεται ότι $\|x_0^*\|\le\lambda_1$.

Από το δεξί μέλος έχουμε ότι, $\lambda_2<\operatorname{Re}x_0^{**}(x_0^*)\le|x_0^{**}(x_0^*)|\le\|x_0^{**}\|\cdot\|x_0^*\|\le\|x_0^*\|$.

Έτσι καταλήγουμε σε αντίφαση και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Παρατήρηση</u> 4.1.12 Έστω $\left(X,\|\cdot\|\right)$ χώρος με νόρμα. Έπεται αμέσως από το θεώρημα Golsdstine ότι $c\ell_{w^*}X = X^{**}$.

Επίσης αποδεικνύεται με την υπόθεση ο X είναι απειροδιάστατος ότι: $c\ell_{w^*}S_X = \hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$, όπου $S_X = \left\{x \in X : \|x\| = 1\right\}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $x^{**} \in X^{**}$ ώστε $\left\|x^{**}\right\| \le 1$ τότε υπάρχει δίκτυο $\left(x_i\right)_{i\in I} \subseteq S_X : x_i \xrightarrow{w^*} x^{**}$. (Πρβλ. τις ασκήσεις.)

Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, όπου X και Y χώροι με νόρμα. Θα λέμε ότι ο T είναι <u>ασθενώς συνεχής</u>, αν είναι συνεχής συνάρτησης ως προς τις ασθενείς τοπολογίες των X και Y.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο ενδιαφέρον αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.13 Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο T είναι φραγμένος

(β) Ο T είναι ασθενώς συνεχής.

<u>Απόδειξη</u> (α) $\Rightarrow$ (β) . Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T είναι ασθενώς συνεχής στο $0 \in X$. Έστω U μια βασική περιοχή του $0 \in Y$ στην ασθενή τοπολογία, δηλαδή $U = \left\{y \in Y : \left|y_k^*\left(y\right)\right| < \varepsilon, k = 1,2,...,n\right\}$ όπου $y_1^*,....,y_n^* \in Y^*$ και $\varepsilon > 0$.

Θέτομε, $x_k^* = y_k^* oT, k = 1,2,...,n$. Κάθε x_k^* είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του X, αφού $\left\|x_k^*\right\| \le \left\|y_k^*\right\| \cdot \|T\|$. Ορίζουμε, $V = \left\{x \in X : \left|x_k^*\left(x\right)\right| < \varepsilon, k = 1,2,...,n\right\}$.

Η V είναι ασθενής περιοχή του $0 \in X$ και αν $x \in V$ τότε $\left|y_k^*\left(T\left(x\right)\right)\right| = \left|x_k^*\left(x\right)\right| < \varepsilon, k = 1,2,...,n$, δηλαδή $T\left(x\right) \in U$.

Άρα $T\left(V\right) \subseteq U$ και ο T είναι ασθενώς συνεχής στο $0 \in X$.

(β) $\Rightarrow$ (α). Θα αποδείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα, έτσι από το ομώνυμο θεώρημα ο T θα είναι φραγμένος.

Παρατηρούμε ότι επειδή ο T είναι ασθενώς συνεχής αν $y^* \in Y^* = \left(Y,w\right)^*$, τότε $y^* oT \in \left(X,w\right)^* = X^*$ (πρβλ. το θεώρημα 4.2). Κατά συνέπεια,

$$y^* \in Y^* \Rightarrow y^* oT \in X^* \quad (1).$$

Έστω $\left(x_n, T\left(x_n\right)\right), n \geq 1$, ακολουθία στο γράφημα $G(T)$ του T , ώστε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και $T\left(x_n\right) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε

$$\left(y^* oT\right)\left(x_n\right) = y^*\left(T\left(x_n\right)\right) \to y^*(y)$$

Αφού $T\left(x_n\right) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ και

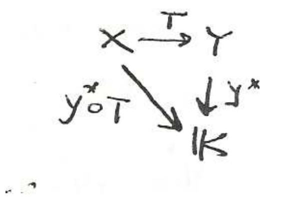
$$\left(y^* oT\right)\left(x_n\right) \to \left(y^* oT\right)(x) = y^*\left(T(x)\right)$$

Αφού $y^* oT \in X^*$ και $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Έπεται ότι, για κάθε $y^* \in Y^*$ ισχύει ότι $y^*\left(T(x)\right) = y^*(y)$. Επειδή ο Y^* διαχωρίζει τα σημεία του Y (πρβλ. θεώρημα 3.5.4) συμπεραίνουμε ότι $y = T(x)$ και έτσι το γράφημα του T είναι κλειστό.

……………………………………………

Από την μέθοδο απόδειξης του προηγουμένου θεωρήματος, συμπεραίνουμε ότι αν $T: X \to Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής μεταξύ των χώρων με νόρμα X και Y τότε η απεικόνιση

$$y^* \in Y^* \to y^* oT \in X^*$$



Είναι καλά ορισμένη και προφανώς γραμμική

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται ο <u>συζυγής</u> τελεστής του T και συμβολίζεται με T^* . Έχομε δηλαδή

$$T^*\left(y^*\right) \underset{o\rho}{=} y^* oT,\ y^* \in Y^*$$

<u>Πρόταση</u> 4.1.14 Έστω X , Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ο T^* είναι επίσης φραγμένος και $\left\|T^*\right\| = \|T\|$.

<u>Απόδειξη</u> Παρατηρούμε ότι $\left\|T^*\right\| = \sup\limits_{\left\|y^*\right\| \leq 1} \left\|T^*\left(y^*\right)\right\| = \sup\limits_{\left\|y^*\right\| \leq 1} \left(\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \left| y^*\left(T(x)\right) \right| \right) =$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sup_{\left\|y^*\right\| \leq 1} \left| y^*\left(T(x)\right) \right| \right) = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\|T(x)\right\| = \|T\| .$$

<u>Παρατήρηση</u> Το θεώρημα 4.1.13 ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι οι X και Y είναι χώροι Banach. Η απόδειξη αυτή αφήνεται ως άσκηση. (Πρβλ. επίσης το [M], Th 2.5.11 , p.214 .)

Αποδεικνύεται επίσης ότι ο συζυγής τελεστής T^* ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή $T: X \to Y$ είναι συνεχής και για τις αντίστοιχες ασθενώς* τοπολογίες. (Άσκηση.)

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $D \subseteq X$ ενός χώρου με νόρμα λέγεται <u>ολικό</u> στον X αν η κλειστή γραμμική θήκη του D ισούται με το X , δηλαδή $X = \overline{\langle D \rangle}$.

<u>Θεώρημα</u> 4.1.15. Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(ι) Ένα φραγμένο δίκτυο $(x_a)_{a\in A} \subseteq X$ συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ αν και μόνο αν ισχύει $x^*(x_a) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in D$, όπου D ένα ολικό υποσύνολο του X^*.

(ιι) Αν D είναι ένα ολικό υποσύνολο του X τότε, ένα φραγμένο δίκτυο $(x_a^*)_{a\in A} \subseteq X^*$ συγκλίνει ασθενώς* στο $x^* \in X^*$ αν και μόνο αν ισχύει $x_a^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in D$.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $M > 0$ ώστε, $\|x\| \leq M$ και $\|x_a\| \leq M$ για κάθε $a \in A$. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x^* \in X^*$ και έστω (x_k^*) μια ακολουθία γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του D η οποία συγκλίνει ως προς την νόρμα στο x^* (το $\langle D \rangle$ είναι πυκνό υποσύνολο του X^*).

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός τότε υπάρχει $k_0 \in N$ ώστε $\|x_k^* - x^*\| < \varepsilon$ για κάθε $k \geq k_0$.

Έπεται ότι αν $a \in A$ τότε έχουμε,

$$\left|x^*(x_a) - x^*(x)\right| \leq \left|x^*(x_a) - x_{k_0}^*(x_a)\right| + \left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| + \left|x_{k_0}^*(x) - x^*(x)\right|$$
$$\leq M\varepsilon + M\varepsilon + \left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| \qquad (1)$$

Επειδή το $x_{k_0}^*$ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του D ισχύει ότι, $\lim\limits_{a\in A}\left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| = 0$. Έτσι αν επιλέξουμε (το ε αρκετά μικρό και) $a_0 \in A$ ώστε $\left|x_{k_0}^*(x_a) - x_{k_0}^*(x)\right| < \varepsilon$ για κάθε $a \geq a_0$, το δεξί μέλος της (1) γίνεται όσο μικρό επιθυμούμε. Έπεται ότι, $\lim\limits_{a\in A}\left|x^*(x_a) - x^*(x)\right| = 0$, δηλαδή

$$x_a^* \xrightarrow{w} x$$

(ιι) Η απόδειξη αυτή είναι ανάλογη και έτσι παραλείπεται.

4.2 Αυτοπάθεια και ασθενής συμπάγεια

Ένας χώρος με νόρμα $(X,\|\cdot\|)$ λέγεται αυτοπαθής (reflexive), αν η κανονική εμφύτευση $\varphi : X \to X^{**} : \varphi(x)(x^*) = x^*(x)$, $x^* \in X^*$, $x \in X$, είναι επί του X^{**}, δηλαδή $\varphi(X) = X^{**}$. Παρατηρούμε ότι ένας αυτοπαθής χώρος X είναι αναγκαία χώρος Banach εφόσον ταυτίζεται ισομετρικά με τον X^{**}. Σημειώνουμε ότι υπάρχουν παραδείγματα μη αυτοπαθών χώρων X έτσι ώστε ο X να είναι γραμμικά ισομετρικός με τον X^{**} (όχι φυσικά μέσω της κανονικής απεικόνισης φ).

Ένα τέτοιο παράδειγμα (ο χώρος του James J) μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [F-H-H-M-P-Z] και [M].

Θεώρημα 4.2.1 Έστω X χώρος Banach. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1) Ο X είναι αυτοπαθής

2) Η $\left(\hat{B}_X, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος.

3) Ο X^* είναι αυτοπαθής

4) $(X^*, w) = (X^*, w^*)$.

Απόδειξη (1) $\Rightarrow$(2). Εφόσον ο X είναι αυτοπαθής έχουμε ότι $(X, w) = (X^{**}, w^*)$ και άρα $\left(\hat{B}_X, w\right) = \left(\hat{B}_{X^{**}}, w^*\right)$. Από το θεώρημα Alaoglou έχομε το συμπέρασμα.

(2) $\Rightarrow$(1) Εφόσον η $\left(\hat{B}_X, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος είναι και ασθενώς* συμπαγές υποσύνολο της $\hat{B}_{X^{**}}$.

Από το θεώρημα Goldstine η $\hat{B}_X$ είναι και ασθενώς* πυκνό υποσύνολο του $\hat{B}_{X^{**}}$, συνεπώς $\hat{B}_X = \hat{B}_{X^{**}}$. Άρα $X = X^{**}$.

(1) $\Rightarrow$(4) Η ασθενής τοπολογία επί του X^* επάγεται από τον συζυγή του που είναι ο $X^{**} = X$. Επίσης η ασθενής* τοπολογία επί του X^* επάγεται από τον προσυζυγή του που είναι πάλι ο X , έτσι οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται.

(4) $\Rightarrow$ (3). Από την υπόθεσή μας, έπεται αμέσως ότι $\left(\hat{B}_{X^*}, w\right) = \left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$. Από το θεώρημα Alaoglou η $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής χώρος. Άρα η $\left(\hat{B}_{X^*}, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος και από την (2) $\Rightarrow$ (1) έπεται το συμπέρασμα.

(3) $\Rightarrow$ (1). Εφόσον ο X^* είναι αυτοπαθής από την (1) $\Rightarrow$ (4) θα έχουμε ότι $\left(X^{**}, w\right) = \left(X^{**}, w^*\right)$. Η $\left(\hat{B}_X \ , w\right)$ είναι norm κλειστό και κυρτό υποσύνολο του (X και άρα και του) X^{**}, έπεται από το θεώρημα του Mazur ότι είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του X^{**}. Αλλά τότε από την υπόθεσή μας είναι ασθενώς* κλειστό υποσύνολο του X^{**}. Από το θεώρημα Goldstine έπεται ότι $\hat{B}_X = \hat{B}_{X^{**}}$. Κατά συνέπεια $X = X^{**}$.

<u>Πόρισμα</u> 4.2.2 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι επίσης αυτοπαθής.

<u>Απόδειξη</u>: Παρατηρούμε ότι $\hat{B}_Y = Y \bigcap \hat{B}_X$. Επειδή από το θεώρημα του Mazur ο Y είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του X και από το θεώρημα 4.2.1 η $\hat{B}_X$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X, έπεται ότι η $\hat{B}_Y$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο. Έτσι πάλι από το θεώρημα 4.2.1 ο Y είναι αυτοπαθής χώρος.

<u>Πόρισμα</u> 4.2.3 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Αν $x^* \in X^*$, τότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0\| = 1$ ώστε $\|x^*\| = x^*(x_0)$.

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτομε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x^* \neq 0$. Το x^* είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την ασθενή τοπολογία του X και η $\hat{B}_X$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, αφού ο X είναι αυτοπαθής. Έπεται ότι υπάρχει $y_0 \in \hat{B}_X$ ώστε

$$\left|x^*(y_0)\right| = \sup\left\{\left|x^*(x)\right| : \|x\| \le 1\right\} = \left\|x^*\right\|$$

Παρατηρούμε ότι, $\left\|x^*\right\| = \left\|x^*(y_0)\right\| \le \left\|x^*\right\| \cdot \left\|y_0\right\| \Rightarrow \left\|y_0\right\| = 1$ Επίσης έχομε ότι υπάρχει $a \in K$ με $|a| = 1$ ώστε $\left|x^*(y_0)\right| = ax^*(y_0) = x^*(ay_0)$. Έτσι θέτομε $x = ay_0$ και έχομε $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει πάντοτε χωρίς την υπόθεση της αυτοπάθειας. Για παράδειγμα αν $\Lambda : c_0 \to R : \Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}, x = \left(x(n)\right) \in c_0$ (=ο χώρος των μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών) τότε ισχύουν:

(α) Το Λ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\|\Lambda\| = 1$

(β) Για κάθε $x \in c_0$ με $\|x\|_\infty \leq 1 \Rightarrow |\Lambda(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{2^n} < 1$

(Πρβλ. την άσκηση (2) της παραγράφου 2).

2) Αν X είναι χώρος με νόρμα τότε από το θεώρημα Hahn-Banach (αλλά και από το θεώρημα Alaoglou) έχομε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $x^*(x) = \|x\|$. Έτσι το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει θεωρώντας τον X ως συζυγή του X^* ($X^{**} = X$)

<u>Θεώρημα</u> 4.2.4 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και $\mathrm{K} \subseteq X$. Τότε το K είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν το K είναι ασθενώς κλειστό και norm φραγμένο.

<u>Απόδειξη</u> « $\Rightarrow$ » Έστω ότι το K είναι ασθενώς συμπαγές. Τότε βέβαια το K είναι ασθενώς κλειστό. Αν $x^* \in X^*$ τότε επειδή το x^* είναι ασθενώς συνεχές και το K ασθενώς συμπαγές, έχομε ότι $\sup\left\{|x^*(x)| : x \in \mathrm{K}\right\} < +\infty$. Από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι το K είναι norm φραγμένο.

« $\Leftarrow$ » Έστω $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathrm{K} \subseteq \hat{\mathrm{B}}(0,\varepsilon)$. Από την αυτοπάθεια του X η $\hat{\mathrm{B}}_X(0,\varepsilon)$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο. Επειδή το K είναι ασθενώς κλειστό συμπεραίνουμε ότι είναι ασθενώς συμπαγές.

……………………………………………

<u>Παρατηρήσεις</u> 4.2.5 1) Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται ακολουθιακά συμπαγής, αν κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ έχει κάποια υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$.

Ένα ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο K ενός χώρου Banach είναι αναγκαία <u>norm φραγμένο</u>. Πράγματι, αν το K δεν ήταν φραγμένο τότε θα υπήρχε μια ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathrm{K}$ ώστε $\|x_n\| \geq n$ για κάθε $n \geq 1$. Έστω (x_{k_n}) μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n), τότε βέβαια η (x_{k_n}) θα ήταν φραγμένη άτοπο.

2) Το θεώρημα 4.2.4 είναι συνέπεια ενός γενικότερου αποτελέσματος: Αν X χώρος Banach και $\mathrm{K} \subseteq X^*$ τότε το K είναι ασθενώς* συμπαγές αν και μόνο αν είναι ασθενώς* κλειστό και norm φραγμένο (πρβλ. τις ασκήσεις). Έπεται ιδιαίτερα από το αποτέλεσμα αυτό ότι κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι norm φραγμένο (γιατί;).

<u>Λήμμα</u> 4.2.6 Κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach X είναι μετρικοποιήσιμο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω K ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X . Από το θεώρημα 4.1.8 η $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος επομένως διαχωρίσιμος. Έστω $D=\left\{x_n^*: n \geq 1\right\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο της $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}, w^*\right)$. Παρατηρούμε ότι το D διαχωρίζει τα σημεία του X . Πράγματι, έστω $x \in X$ ώστε $x_n^*(x)=0$ για κάθε $n \geq 1$. Επειδή το $x=\varphi(x)$ είναι ένα ασθενώς * συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί του X^* ($\left(X^*, w^*\right)^*=X^*$), είναι και συνεχής συνάρτηση αν περιορισθεί στην $\left(\mathrm{B}_{X^*}, w^*\right)$ έπεται ότι $x^*(x)=0$ για κάθε $x^* \in \mathrm{B}_{X^*}$ και άρα $x^*(x)=0$ για κάθε $x \in X$.Έτσι έχομε ότι $x=0$.

Ορίζουμε τον τελεστή $T: X \rightarrow c_0$ ώστε $T(x)=\left(\dfrac{x_n^*(x)}{n}\right)_{n \geq 1}$ Εύκολα ελέγχεται ότι ο T είναι καλά ορισμένος, γραμμικός $1-1$ (το D διαχωρίζει τα σημεία του X) και φραγμένος με$\|T\| \leq 1$. [Επειδή από το θεώρημα 4.1.13 ο T είναι ασθενώς συνεχής, έπεται ότι το ασθενώς συμπαγές υποσύνολοK του X είναι ομοιομορφικό με το ασθενώς συμπαγές υποσύνολο $T(\mathrm{K})$ του c_0. Όμως το $T(\mathrm{K})$ είναι norm φραγμένο από την παρατήρηση 4.2.5 (2) και όπως γνωρίζουμε από το πόρισμα 4.1.9 η ασθενής τοπολογία στα φραγμένα υποσύνολα ενός χώρου με διαχωρίσιμο συζυγή ($c_0^*=\ell_1$) είναι μετρικοποιήσιμη. Έτσι το $(T(\mathrm{K}), w)$ είναι μετρικοποιήσιμο και συνεπώς και το (K, w) είναι μετρικοποιήσιμο.

Από το προηγούμενο Λήμμα έπεται εύκολα το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.7 Κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K ενός χώρου Banach X είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές.

<u>Απόδειξη</u> Έστω (x_n) τυχούσα ακολουθία σημείων του K. Θέτομε $\Omega=cl_w\left\{x_n, n \geq 1\right\} \subseteq \mathrm{K}$ και$Y=cl_{\|\cdot\|}\left\langle x_n, n \geq 1\right\rangle$ (=η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\left\{x_n, n \geq 1\right\}$). Προφανώς ο Y είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach και το Ω είναι ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Y. Από το Λήμμα 4.2.6 ο χώρος (Ω, w) είναι μετρικοποιήσιμος και συνεπώς η (x_n) έχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο $\Omega \subseteq \mathrm{K}$.

……………………………………………

Το αντίστροφο του προηγουμένου αποτελέσματος ισχύει και είναι ένα βαθύ αποτέλεσμα που ανήκει στον Eberlein . Διατυπώνουμε το θεώρημα του Eberlein και για την απόδειξή του παραπέμπουμε στα βιβλία [F-H-H-M-P-Z] , [M] και [D].

<u>Θεώρημα</u> 4.2.8 (Eberlein) Ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι ασθενώς συμπαγές (αν και μόνο) αν είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές.

Η ακόλουθη εφαρμογή του θεωρήματος 4.2.7 μας λέει ότι, λόγω της ιδιότητας Schur, ο χώρος ℓ_1 βρίσκεται στον αντίποδα των αυτοπαθών χώρων.

<u>Πρόταση</u> 4.2.9 Ένα υποσύνολο K του χώρου ℓ_1 είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν είναι norm συμπαγές.

<u>Απόδειξη</u> Αν το K είναι norm συμπαγές τότε το K προφανώς είναι ασθενώς συμπαγές. Έστω ότι το K είναι ασθενώς συμπαγές. Από το θεώρημα 4.2.7 κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathrm{K}$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα και συνεπώς - από την ιδιότητα Schur του ℓ_1 - norm συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο K. Έτσι το K είναι norm συμπαγές υποσύνολο του ℓ_1.

Από το θεώρημα του Eberlein έπεται και ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των αυτοπαθών χώρων.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.10 Έστω X χώρος Banach. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Ο X είναι αυτοπαθής

(β) Κάθε φραγμένη ακολουθία στον X έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>Απόδειξη</u> (α) $\Rightarrow$ (β) Η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, έτσι από το θεώρημα 4.2.7 έπεται το συμπέρασμα.

(β) $\Rightarrow$ (α) Από το θεώρημα 4.2.8 (Eberlein) έπεται ότι η (B_X, w) είναι συμπαγές σύνολο και έτσι ο X είναι αυτοπαθής.

<u>Παραδείγματα</u>. (1) Οι χώροι ℓ_p και $L_p = L_p[0,1]$, για $1 < p < +\infty$ είναι αυτοπαθείς.

Πράγματι, αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε ισχύει $\ell_p^{**} = \ell_q^{*} = \ell_p$, υπό την έννοια ότι για κάθε $f \in \ell_q^{*}$ υπάρχει $g \in \ell_p$ ώστε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k g(k)$ για κάθε $x = (x_k) \in \ell_q$. Η δράση του f επί του x είναι ίδια με την δράση του g επί του x. Έπεται ότι η κανονική απεικόνιση $\varphi : \ell_p \to \ell_p^{**}$ είναι <u>επί</u> του ℓ_p^{**}. Για τον L_p ο έλεγχος ότι η φ είναι επί του L_p^{**} είναι ανάλογος.

(2) Ο χώρος c_0 δεν είναι αυτοπαθής επειδή $c_0^{**} = \ell_\infty$ και ο ℓ_∞ ως γνωστόν δεν είναι διαχωρίσιμος. Ο χώρος ℓ_1 επίσης δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, τότε ο ℓ_1^{**} θα ήταν διαχωρίσιμος και συνεπώς ο $\ell_1^{*} = \ell_\infty$ θα ήταν επίσης διαχωρίσιμος, άτοπο.

3) Αποδεικνύεται ότι κανένας χώρος από την οικογένεια c_0 και $\ell_p, 1 \leq p < +\infty$, δεν είναι ισομορφικός με υπόχωρο κάποιου άλλου μέλους της οικογένειας. Έτσι για παράδειγμα αν $1 \leq p \neq q < +\infty$ τότε ο ℓ_p δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον ℓ_q . (Πρβλ. [L-T] σελ. 53-4).

<u>Ορισμός</u> 4.2.11 Έστω (M, d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του M . Το A λέγεται <u>προσεγγίσιμο</u> (proximal)αν , για $x \in M$ υπάρχει $y \in A$ ώστε

$$d(x, y) = d(x, A) \ (= \inf \{d(x, z) : z \in A\}).$$

<u>Σχόλιο</u>. Όπως γνωρίζουμε αν H είναι χώρος Hilbert και $A \subseteq H$ κλειστό κυρτό τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει $y \in A$ έτσι ώστε $d(x, y) = d(x, A)$ (και το A είναι συνεπώς προσεγγίσιμο). Η ιδιότητα αυτή των χώρων Hilbert , όχι στην πλήρη της μορφή, κληροδοτείται στους αυτοπαθείς χώρους.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.12 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και $A \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Τότε το A είναι προσεγγίσιμο.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x_0 \in X$ με $x_0 \notin A$. Θέτομε $d = d(x_0, A)$ και επιλέγομε μια ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ ώστε $\|x_n - x_0\| \to d$. Η (x_n) είναι βέβαια φραγμένη ακολουθία και επειδή ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} x \in X$. Επειδή το A είναι κλειστό κυρτό από το θεώρημα Mazur to $x \in A$. Έστω $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)|$. Τότε έχομε $\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)| \leq |x^*(x - x_{k_n})| + |x^*(x_{k_n} - x_0)|$ $\leq |x^*(x - x_{k_n})| + \|x_{k_n} - x_0\|$

Παίρνοντας όρια, συμπεραίνουμε ότι $\|x - x_0\| \leq d$ και έτσι έχομε $\|x - x_0\| = d = d(x_0, A)$.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.13 Έστω X χώρος με νόρμα και $x^* \in X^*$ με $x^* \neq 0$. Τότε ο πυρήνας $Kerx^*$ του x^* είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $|x^*(x)| = \|x^*\|$.

<u>Απόδειξη</u> «$\Rightarrow$» Η απεικόνιση $\Lambda : X / Kerx^* \to K : \Lambda(x + Kerx^*) = x^*(x)$ είναι γραμμική φραγμένη $1-1$ και επί του K με $\|\Lambda\| = \|x^*\|$ (Πρβλ. την απόδειξη της πρότασης1.12). Επομένως είναι ένας ισομορφισμός μονοδιάστατων χώρων Banach, έτσι υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0 + Kerx^*\| = 1$ και $|\Lambda(x_0 + Kerx^*)| = \|\Lambda\|$. Εφόσον ο $Kerx^*$ είναι προσεγγίσιμος, υπάρχει $y \in Kerx^*$ ώστε $\|x_0 - y\| = d(x_0, Kerx^*) = \|x_0 + Kerx^*\| = 1$.

Έπεται ότι, $|x^*(x_0 - y)| = |x^*(x_0)| = |\Lambda(x_0 + Kerx^*)| = \|\Lambda\| = \|x^*\|$.

Το ζητούμενο x είναι το $x = x_0 - y$.

«$\Leftarrow$» Έστω $x_0 \in X$ με $x_0 \notin Kerx^*$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ ώστε $\left|x^*(x)\right| = \left\|x^*\right\|$. Επειδή $\dim\left(X / Kerx^*\right) = 1$, υπάρχουν $y \in Kerx^*$ και $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ ώστε $x = y + \lambda x_0$. Αν z είναι τυχόν στοιχείο του $Kerx^*$ θα έχουμε

$$\left\|z - x_0\right\| \geq \frac{\left\|x^*(z - x_0)\right\|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{\left|x^*(x_0)\right|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{\left|x^*(y + \lambda x_0)\right|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{1}{|\lambda|} = \left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|.$$

Έπεται ότι, $d\left(x_0, Kerx^*\right) = \left\|\dfrac{y}{\lambda} + x_0\right\|$. Άρα ο $Kerx^*$ είναι προσεγγίσιμος.

<u>Παρατήρηση</u> 4.2.14 1) Ο πυρήνας του συναρτησοειδούς $\Lambda : c_0 \to R$, $\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x(n)}{2^n}$, $x = \left(x(n)\right) \in c_0$, δεν είναι προσεγγίσιμος εφόσον η νόρμα του Λ δεν επιτυγχάνεται σε κανένα σημείο της μοναδιαίας σφαίρας του c_0. (Πρβλ. την παρατήρηση (1) μετά το πόρισμα 4.2.3 .)

2) Αν ο χώρος X είναι αυτοπαθής τότε όπως έπεται από το θεώρημα 4.2.13 και το πόρισμα4.2.2- ο πυρήνας κάθε συναρτησοειδούς $x^* \in X^*$ με $x^* \neq 0$ είναι προσεγγίσιμος.

3) Αποδεικνύεται ότι και το αντίστροφο του θεωρήματος 4.2.12 ισχύει: Αν κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι προσεγγιστικό τότε ο χώρος είναι αυτοπαθής

(Πρβλ. το [Μ] σελ 435-6)

4) Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $\pi : X \to X / Y$ η κανονική απεικόνιση. Αποδεικνύεται τότε ότι ο Y είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν

$$\pi\left(\hat{B}_X\right) = \hat{B}_{X/Y}.$$

(Πρβλ. και τις παρατηρήσεις 1.4 και 1.6 της παραγράφου 1, την παρατήρηση (1) μετά το πόρισμα 4.2.3 καθώς και τις ασκήσεις που ακολουθούν.)

<u>Ασκήσεις</u>

1) Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη και $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(β) Αν η (x_n^*) είναι ακολουθία στον X^* και $x^* \in X^*$ ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε η (x_n^*) είναι φραγμένη και $\left\|x^*\right\| \leq \liminf \left\|x_n^*\right\|$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Για το (α): Από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος η (x_n) είναι φραγμένη. Έστω $c=\liminf\|x_n\|$. Αν $\|x^*\|\le 1$ τότε $|x^*(x)|=\lim|x^*(x_n)|\le\liminf(\|x^*\|\cdot\|x_n\|)$ $=\|x^*\|\cdot\liminf\|x_n\|\le\liminf\|x_n\|=c$. Η απόδειξη για το (β) είναι παρόμοια]

2)Έστω X χώρος με νόρμα. Αν η ακολουθία (x_n) είναι norm Cauchy και $x_n\xrightarrow{w}x$ τότε $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$.

[<u>Υπόδειξη</u> $x_n\in x_m+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$ και το σύνολο $x_m+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι ασθενώς κλειστό.]

3) Έστω (x_n) ακολουθία στον χώρο Banach X, όπου $X=\ell_p$ ή c_0 ($1\le p<+\infty$). Έστω $x_n=(x_{nk})_{k\ge 1}$, $n\in N$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $X=\ell_p$, $1<p<+\infty$ ή c_0 τότε: $x_n\xrightarrow{w}0$ αν και μόνο αν υπάρχει $\mathrm{M}>0$ ώστε $\|x_n\|\le\mathrm{M}, n\ge 1$ και $x_{nk}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ για κάθε $k\in N$.

(β) Αν $X=\ell_1=c_0^*$ τότε: $x_n\xrightarrow{w^*}0$ αν και μόνο αν υπάρχει $\mathrm{M}>0$ ώστε $\|x_n\|_1\le\mathrm{M}$, $n\ge 1$ και $x_{nk}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ για κάθε $k\in N$.

[<u>Υπόδειξη</u> Η ακολουθία $e_n, n\ge 1$ είναι ολικό υποσύνολο του X].

4) Έστω $X=\ell_1\cong c_0^*$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (e_n) ικανοποιεί την $e_n\xrightarrow{w^*}0$ αλλά όχι την $e_n\xrightarrow{w}0$

[<u>Υπόδειξη</u> Για το δεύτερο ερώτημα αποδείξτε πρώτα ότι $0\notin\overline{co}\{e_n, n\ge 1\}$]

5) Αποδείξτε ότι στον χώρο Banach ℓ_∞ το σύνολο $\mathrm{K}=\{e_n:n\ge 1\}\cup\{0\}$ είναι ασθενώς συμπαγές αλλά όχι norm συμπαγές.

[<u>Υπόδειξη</u> $\{e_n:n\ge 1\}\subseteq c_0\subseteq\ell_\infty$].

6) Έστω $X=c_0$ ή ℓ_p ($1<p<+\infty$). Αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία στην $\hat{\mathrm{B}}_X=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$ είναι μετρικοποιήσιμη και ότι συμπίπτει με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο επί του N. Επίσης αποδείξτε ότι $e_n\xrightarrow{w}0$.

7) Έστω $F:\ell_1\to R$ ώστε $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$, $x=(x_k)\in\ell_1$. Αποδείξτε ότι η F είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του ℓ_1 και ακόμη ότι δεν είναι ασθενώς* συνεχές επί του $\ell_1\cong c_0^*$ (δηλαδή ότι $F\in\ell_\infty\setminus c_0$).

[<u>Υπόδειξη</u> Από την άσκηση (4) έχουμε ότι $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ στον ℓ_1)]

8) Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η S_X είναι πυκνό υποσύνολο της $\left(\hat{B}_X, w\right)$ άρα και ασθενώς* πυκνό υποσύνολο της $\hat{B}_{X^{**}}$

(β) Η νόρμα του X δεν είναι ασθενώς συνεχής σε κανένα σημείο του X.

[<u>Υπόδειξη</u> Για το (α): Έστω $\|x_0\| < 1$ και έστω $B_F(x_0, \varepsilon)$ μια ασθενώς ανοικτή βασική περιοχή του x_0, όπου $F \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$. Τότε $x_0 + \bigcap_{x^* \in F} Kerx^* \subseteq B_F(x_0, \varepsilon)$.

Ο διανυσματικός υπόχωρος $M = \bigcap_{x^* \in F} Kerx^*$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση και συνεπώς $M \neq \{0\}$. Έστω $x_1, x_2 \in M$ ώστε $\|x_0 + x_1\| < 1$ και $\|x_0 + x_2\| > 1$. Παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[x_0 + x_1, x_0 + x_2] \subseteq x_0 + M \subseteq B_F(x_0, \varepsilon)$ και ότι τέμνει την S_X

Για το (β): Από το (α) υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στην S_X ώστε $x_\delta \xrightarrow{w} 0$. Άρα η $\|\cdot\|$ δεν είναι ασθενώς συνεχής στο 0. Αν $x \neq 0$, τότε το $y = \dfrac{x}{1 + \|x\|}$ έχει $\|y\| < 1$. Αν $\lambda = 1 + \|x\|$ τότε από το (α) υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στην S_X ώστε $x_\delta \to y = \dfrac{x}{\lambda} \Rightarrow \lambda x_\delta \xrightarrow{w} x$. Από όπου συμπεραίνουμε ότι η $\|\cdot\|$ δεν είναι ασθενώς συνεχής στο x.]

9) Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι: (α) Αν $K \subseteq X$, τότε το K είναι norm φραγμένο αν και μόνο αν το K είναι ασθενώς φραγμένο.

(β) Αν ο X είναι χώρος Banach και $K \subseteq X^*$, τότε το K είναι norm φραγμένο αν και μόνο αν είναι ασθενώς * φραγμένο.

[<u>Υπόδειξη</u>. Χρησιμοποιείστε την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος].

10) Έστω X χώρος Banach και $K \subseteq X^*$, αποδείξτε ότι το K είναι ασθενώς συμπαγές* αν και μόνο αν είναι ασθενώς* κλειστό και norm φραγμένο.

11) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα . Αποδείξτε ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά σ' ένα χώρο Banach της μορφής $C(\Omega)$ όπου Ω συμπαγής χώρος.

[<u>Υπόδειξη</u> Έστω $\Omega = \left(\overset{\wedge}{\mathrm{B}}_{X^*}, w^*\right)$. Ορίζουμε $T : X \to C(\Omega)$ ώστε $T(x)(x^*) = x^*(x), x \in X, x^* \in \Omega$. Αποδείξτε ότι η T είναι γραμμική ισομετρία.]

12) Έστω X χώρος με νόρμα και $\mathrm{K} \subseteq X$ φραγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι το K είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν η ασθενής* κλειστότητα του στον X^{**} περιέχεται στον X (δηλαδή $c\ell_{w^*}\mathrm{K} \subseteq X$).

13) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος Banach και (x_n) πυκνή ακολουθία στην $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Ορίζουμε $T : X^* \to \ell_2 : T(x^*) = \left(\dfrac{x^*(x_n)}{2^n}\right)_{n\geq 1}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι ένας γραμμικός φραγμένος και $1-1$ τελεστής ο οποίος είναι ασθενώς *-ασθενώς συνεχής όταν περιορισθεί στην $\overset{\wedge}{\mathrm{B}}_{X^*}$.

14) (α) Έστω X, Y χώροι Banach και $1 \leq p < +\infty$. Θέτομε $Z = (X \oplus Y)_p$ (= το ευθύ άθροισμα των X και Y στην $p-$νόρμα). Αποδείξτε ότι $Z^* \cong (X^* \oplus Y^*)_q$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach ώστε ο X να είναι ισομορφικός με τον συζυγή του X^*. Είναι τότε ο X ισομορφικός με κάποιο χώρο Hilbert;

[<u>Υπόδειξη</u>. Η απόδειξη του (α) είναι παρόμοια με την απόδειξη του δυϊσμού των χώρων ℓ_p, δηλαδή $\ell_p^* = \ell_q$, $\ell_1^* = \ell_\infty$. Για το (β) παρατηρούμε ότι αν X είναι αυτοπαθής χώρος Banach (μη ισομορφικός με χώρο Hilbert) και $Y = (X \oplus X^*)_2$, τότε από το (α) έχουμε ότι $Y^* \cong (X^* \oplus X^{**})_2 = (X^* \oplus X)_2 \cong Y$.]

15) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε $\left(\overset{\wedge}{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος (διαχωρίσιμος) χώρος αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

[<u>Υπόδειξη</u>. Έχουμε ήδη αποδείξει την κατεύθυνση, X^* διαχωρίσιμος τότε $\left(\overset{\wedge}{\mathrm{B}}_X, w\right)$ μετρικοποιήσιμος (και διαχωρίσιμος) χώρος. (πρβλ. Πόρισμα 4.1.9). Έστω ότι η $\left(\overset{\wedge}{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος. Θεωρούμε μια ακολουθία $\mathrm{B}_{F_n}(0, \varepsilon_n), n \geq 1$ ασθενώς ανοικτών βασικών περιοχών του $0 \in X$ (F_n πεπερασμένο υποσύνολο του X^* και $\varepsilon_n > 0, n \in N$) ώστε η ακολουθία $U_n = \mathrm{B}_{F_n}(0, \varepsilon_n) \cap \overset{\wedge}{\mathrm{B}}_X, n \geq 1$, να είναι βάση περιοχών του 0 στον χώρο $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$. Χωρίς περιορισμό, της γενικότητας υποθέτομε ότι $\varepsilon_n = 1, n \geq 1$ και θέτομε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, Y = c\ell_{\|\cdot\|}\langle F \rangle$ (= η κλειστή γραμμική θήκη του F στον X^*). Θα αποδείξουμε ότι $Y = X^*$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$ με $\|x^{**}\| \leq 1$ ώστε το x^{**} να μηδενίζεται επί του F. Από το θεώρημα Goldstine υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta\in\Delta} \subseteq \hat{\mathrm{B}}_X$ ώστε $x_\delta \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Έστω ότι δίδεται $n \in N$. Τότε υπάρχει $\delta_0 \in \Delta$ ώστε $\left|x^*(x_\delta)\right| = \left|x^*\left(x_\delta - x^{**}\right)\right| < \varepsilon_n = 1$ για κάθε $\delta \geq \delta_0$ για κάθε $x^* \in F_n$. Έπεται ότι $x_\delta \in U_n$ για κάθε $\delta \geq \delta_0$. Επειδή αυτό γίνεται για κάθε $n \in N$, συμπεραίνουμε ότι $x_\delta \xrightarrow{w} 0$, επομένως $x^{**} = 0$.]

16) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach.

(α) Αποδείξτε ότι νόρμα $\|\cdot\|$ του X είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής συνάρτηση επί του X.

(β) Αποδείξτε ότι αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε κάθε υποσύνολο A του X είναι με την ασθενή (σχετική) τοπολογία διαχωρίσιμος χώρος.

(γ) Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για τον X : (ι) $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι διαχωρίσιμος, (ιι) (S_X, w) είναι διαχωρίσιμος και (ιιι) X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

[<u>Υπόδειξη</u>. Για το (α). Κάθε κλειστή σφαίρα του X είναι από το θεώρημα Mazur ασθενώς κλειστό σύνολο. Για το (β). Η ταυτοτική απεικόνιση $I:(X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ είναι συνεχής. Για το (γ). (ι) $\Rightarrow$ (ιι). Έστω D αριθμήσιμο ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ και $x \in S_X$, τότε υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta\in\Delta} \subseteq D : x_\delta \xrightarrow{w} x$. Επειδή από το (α) η νόρμα είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής $1 = \|x\| \leq \liminf_{\delta\in\Delta} \|x_\delta\|$, άρα $\|x_\delta\| \to 1$ (πρβλ και την άσκηση 1 (α)).

Έπεται ότι, $\dfrac{x_\delta}{\|x_\delta\|} \xrightarrow{w} x$. Άρα το σύνολο $\left\{\dfrac{x}{\|x\|} : x \in D, x \neq 0\right\}$ είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό στην S_X. Η κατεύθυνση (ιι) $\Rightarrow$ (ι) έπεται από το γεγονός ότι η S_X είναι ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ (πρβλ. άσκηση (8)). Για το (ι) $\Rightarrow$ (ιιι) παρατηρούμε ότι αν D είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ τότε το $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} nD$ είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό υποσύνολο του X και έτσι ο X είναι ασθενώς διαχωρίσιμος. Έστω $D_1 = \langle L \rangle$ η γραμμική θήκη του L τότε το σύνολο S των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του L με ρητούς συντελεστές είναι norm πυκνό στο D_1, επομένως το D_1 είναι norm διαχωρίσιμο. Επειδή το D_1 είναι ασθενώς πυκνό κυρτό σύνολο (ως γραμμικός υπόχωρος) έπεται από τις συνέπειες του θεωρήματος Mazur ότι είναι και norm πυκνό στο X . Η κατεύθυνση (ιιι) $\Rightarrow$ (ι) είναι συνέπεια του (β).]

17) Στον χώρο Hilbert $L_2\left[0,2\pi\right]$, θεωρούμε την ακολουθία $f_N\left(t\right)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N^2}e^{\text{int}}, N\geq 1$.

Αποδείξτε ότι: (α) $f_N \xrightarrow{w} 0$ και (β) $\left\|g_N\right\|_2$ δεν τείνει στο 0, όπου $g_N=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f_n, N\geq 1$.

Συγκρίνετε αυτά τα αποτελέσματα με το θεώρημα Mazur.

[Περιγραφή της απόδειξης: Έστω $u_k\left(t\right)=e^{ikt}, t\in\left[0,2\pi\right], k\in Z$. Τότε $\left\|u_k\right\|_2^2=2\pi, k\in Z$ και $\left\langle u_n,u_m\right\rangle=\int\limits_0^{2\pi}e^{i(n-m)t}dt=\begin{cases}2\pi, n=m\\ 0, \quad n\neq m\end{cases}$. Έτσι το σύνολο $\left\{\dfrac{u_k}{\sqrt{2\pi}}:k\in Z\right\}$ είναι ορθοκανονικό. Από το θεώρημα Weierstrass (ή Fejer) το σύνολο $\left\{u_k:k\in Z\right\}$ είναι ολικό υποσύνολο του χώρου Banach $C\left(T\right)$, όπου $\mathrm{T}=\left\{z\in C:\left|z\right|=1\right\}$. Επειδή ο χώρος $C\left(T\right)$ είναι πυκνός στον χώρο Hilbert $L_2\left[0,2\pi\right]$ έπεται ότι το $\left\{u_k:k\in Z\right\}$ είναι ολικό στον $L_2\left[0,2\pi\right]$. Επομένως μια φραγμένη ακολουθία $\left(f_N\right)\subseteq L_2\left[0,2\pi\right]$ είναι ασθενώς μηδενική ακριβώς όταν $\left\langle f_N,u_k\right\rangle\xrightarrow[N\to\infty]{}0$ για κάθε $k\in Z$. Η δοσμένη $\left(f_N\right)$ είναι βέβαια φραγμένη αφού, ($f_N\left(t\right)=\dfrac{1}{N}e^{it}\cdot\dfrac{e^{iN^2t}-1}{e^{it}-1}, t\in\left[0,2\pi\right)$, $f_N\left(0\right)=f_N\left(2\pi\right)=N$ και)

$$\| f_N\|_2^2=\int\limits_0^{2\pi}| f_N|^2\,dt=\frac{1}{N^2}\int\limits_0^{2\pi}\left|u_1+u_2+\ldots+u_{N^2}\right|^2dt=\frac{1}{N^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left|u_1\right|^2+\ldots+\left|u_{N^2}\right|^2\right)dt=$$

$\dfrac{1}{N^2}\int\limits_0^{2\pi}N^2dt=2\pi$, χρησιμοποιώντας ότι το $\left\{\dfrac{u_k}{\sqrt{2\pi}}:k\in Z\right\}$ είναι ορθοκανονικό.

Παρατηρούμε ότι αν $k\in Z$ τότε για κάθε $N\geq k$, $\left\langle f_N,u_k\right\rangle=\dfrac{1}{N}\left\langle u_k,u_N\right\rangle=\dfrac{2\pi}{N}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$.

Άρα $f_N\xrightarrow[N\to\infty]{w}0$.

Για το (β) παρατηρούμε τα ακόλουθα: $\left\|g_N\right\|_2^2=\dfrac{1}{N^2}\int\limits_0^{2\pi}\left| f_1+\ldots+ f_N\right|^2dt\Rightarrow$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left| f_1+\ldots+ f_N\right|^2dt=N^2.\left\|g_N\right\|_2^2 \qquad (1)$$

Επίσης έχουμε: $\left| f_1+\ldots+f_N \right|^2 = \left(f_1+\ldots+f_N\right)\cdot\overline{\left(f_1+\ldots+f_N\right)} =$

$$\left(f_1+\ldots+f_N\right)\cdot\left(\overline{f_1}+\ldots+\overline{f_N}\right)=\sum_{k=1}^{N}\left|f_k\right|^2+\sum_{\substack{1\le k,\lambda\le N\\ k\ne\lambda}} f_k\cdot\overline{f_\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left|f_k\right|^2+\sum_{1\le k<\lambda\le N} f_k\cdot\overline{f_\lambda}+\sum_{1\le k<\lambda\le N}\overline{f_k}\cdot f_\lambda \qquad (2)$$

Αν $1\le k\le\lambda\le N$, τότε $f_k\cdot\overline{f_\lambda}=\dfrac{\left(u_1+\ldots+u_{k^2}\right)}{k}\cdot\dfrac{\overline{\left(u_1+\ldots+u_{\lambda^2}\right)}}{\lambda}$

$=\dfrac{1}{k\lambda}\left(u_1+\ldots+u_{k^2}\right)\cdot\left(\overline{u_1}+\ldots+\overline{u_{\lambda^2}}\right)$. Λαμβάνοντας υπόψη την καθετότητα των u_i,u_j με $1\le i\ne j\le\lambda^2$ συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{1}{k\lambda}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\left|u_1\right|^2+\ldots+\left|u_{k^2}\right|^2\right)dt=2\pi\frac{k^2}{k\lambda}=2\pi\frac{k}{\lambda}$

$$\left\langle f_k,f_\lambda\right\rangle=\int_0^{2\pi} f_k\cdot\overline{f_\lambda}dt= \text{, άρα και} \int_0^{2\pi} f_\lambda\,\overline{f_k}dt=\left\langle f_\lambda,f_k\right\rangle=\overline{\left\langle f_k,f_\lambda\right\rangle}=2\pi\frac{k}{\lambda} \qquad (3)$$

Έπεται από τις (1), (2) και (3) ότι $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f_1+\ldots+f_N\right|^2dt=$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi}\left|f_k\right|^2dt+2\sum\left\{\int_0^{2\pi} f_k\,\overline{f_\lambda}:1\le k<\lambda\le n\right\}=2\pi N+4\pi\sum\left\{\frac{k}{\lambda}:1\le k<\lambda\le N\right\} \quad (4).$$

Θέτομε $I_N=\sum\left\{\dfrac{k}{\lambda}:1\le k<\lambda\le N\right\}, N\ge 2$ και παρατηρούμε ότι,

$$I_N=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{N}\right)+\ldots+\left(\frac{N-2}{N-1}+\frac{N-2}{N}\right)+\frac{N-1}{N}.$$

Επομένως $I_{2N}=A+B$, όπου $A=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2N}\right)+\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{4}+\ldots+\dfrac{2}{2N}\right)+\ldots+$

$\left(\dfrac{N}{N+1}+\dfrac{N}{N+2}+\ldots+\dfrac{N}{2N}\right)$ και $B=\left(\dfrac{N+1}{N+2}+\dfrac{N+1}{N+3}+\ldots+\dfrac{N+1}{2N}\right)+\ldots+\dfrac{2N-1}{2N}$.

Αν $k\le N$, τότε $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\ldots+\dfrac{1}{2N}\ge\dfrac{N}{2N}=\dfrac{1}{2}$.

Κατά συνέπεια , $I_{2N}>A\ge\dfrac{1+2+\ldots+N}{2}=\dfrac{N\left(N+1\right)}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{N\left(N+1\right)}{4}$ (5).

Έπεται από τις (4) και (5) ότι $\left\|g_{2N}\right\|_2^2=\dfrac{1}{4N^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f_1+\ldots+f_{2N}\right|^2dt=\frac{1}{4N^2}\left(4\pi N+4\pi I_{2N}\right)$

$$=\frac{\pi N+\pi I_{2N}}{N^2}>\frac{1}{N^2}\cdot I_{2N}>\frac{1}{N^2}\cdot\frac{N\left(N+1\right)}{4}=\frac{1}{4}\frac{N\left(N+1\right)}{N^2}\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{1}{4}.$$

Έπεται ότι $\|g_{2N}\|_2$ δεν συγκλίνει στο 0 και συνεπώς $\|g_N\|_2$ δεν συγκλίνει στο 0.

Επειδή $f_N \xrightarrow{w} 0$, από το θεώρημα του Mazur υπάρχει ακολουθία κυρτών συνδυασμών μελών της (f_N) η οποία συγκλίνει norm στο 0. Από το (β) όμως συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (g_N) των μέσων όρων της (f_N) δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

18) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι: (α) Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ του T είναι συνεχής και για τις ασθενείς* τοπολογίες των Y^* και X^*.

(β) Αν ο T είναι ισομορφισμός μεταξύ των X και Y τότε και ο T^* είναι ισομορφισμός μεταξύ των X^* και Y^*.

(γ) Η προβολή $P : X^{***} \to X^* : P(f) = f|_X$, είναι συζυγής τελεστής.

[<u>Υπόδειξη</u> Για το (γ). Η P είναι η προβολή Dixmier (πρβλ. την άσκηση (6) της παραγράφου (2)). Δείξτε ότι $P = \varphi^*$, όπου $\varphi : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}].

19) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι η

(α) Η νόρμα $\|\cdot\|$ του X^* είναι ασθενώς* κάτω ημισυνεχής.

(β) Αν $(x_i^*)_{i\in I}$ είναι φραγμένο δίκτυο στον X^* και $x^* \in X^*$ ώστε $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε $\|x^*\| \leq \liminf \|x_i^*\|$.

20) Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε μη κενό ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X είναι προσεγγίσιμο. Ιδιαίτερα κάθε αυτοπαθής υπόχωρος του X είναι προσεγγίσιμος.

(β) Κάθε μη κενό ασθενώς* συμπαγές υποσύνολο του X^* είναι προσεγγίσιμο.

(γ) Αν Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και $\pi : X \to X/Y$ η κανονική απεικόνιση τότε, ο Y είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν ισχύει ότι, $\pi\left(\hat{B}_X\right) = \hat{B}_{X/Y}$.

5 Το θεώρημα Krein-Milman –Βασικές ιδιότητες συμπαγών και κυρτών συνόλων.

Ορισμός 5.1 Έστω X διανυσματικός χώρος και $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό σύνολο. Ένα σημείο $x \in \mathrm{K}$ λέγεται ακραίο (extreme) σημείο του K, αν δεν είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο άλλων σημείων του K. Δηλαδή, αν $0 < \lambda < 1, y, z \in \mathrm{K}$ και

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z \text{ τότε } y = z = x .$$

Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζεται με $ex(\mathrm{K})$.

Παρατηρούμε ότι: Αν $x \in \mathrm{K}$ τότε, $x \in ex(\mathrm{K})$ αν και μόνο αν το $\mathrm{K} \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.

Παραδείγματα 5.2 1) Έστω $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου $R^2 = \ell_2^2$ που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Θεωρούμε το κλειστό τρίγωνο Δ με κορυφές τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$

($\Delta = co\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\} = \{\lambda \mathrm{A} + \mu \mathrm{B} + \nu \Gamma : \lambda + \mu + \nu = 1, \lambda, \mu, \nu \geq 0\}$). Τα ακραία σημεία του Δ είναι οι κορυφές του, δηλαδή $ex(\Delta) = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\}$. Γενικότερα αν K είναι ένα (κλειστό) κυρτό πολύγωνο στο R^2, όπου με τον όρο κυρτό πολύγωνο εννοούμε την κυρτή θήκη $co(F)$ ενός πεπερασμένου υποσυνόλου F του R^2, τότε τα ακραία σημεία του K είναι οι κορυφές του.

2) Έστω $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του επιπέδου. Τα ακραία σημεία του D είναι τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $\mathrm{T} = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = 1\}$, δηλαδή $ex(D) = \mathrm{T}$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται σε κάθε Ευκλείδειο χώρο $R^n = \ell_2^n, n \geq 1$. (Άσκηση.)

3) Ένα κυρτό σύνολο δεν έχει κατ' ανάγκη ακραία σημεία. Για παράδειγμα αν K είναι μια ευθεία ή ένα ημιεπίπεδο (κλειστό ή ανοικτό) ή ακόμη ένας ανοικτός δίσκος του Ευκλείδειου επιπέδου, τότε το K δεν έχει ακραία σημεία.

Η έννοια του ακραίου σημείου έχει την ακόλουθη χρήσιμη γενίκευση.

Ορισμός 5.3 Έστω X διανυσματικός χώρος και $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό. Ένα υποσύνολο $A \neq \varnothing$ του K λέγεται ακραίο υποσύνολο του K αν , οποτεδήποτε ένα σημείο του A είναι εσωτερικό ενός ευθύγραμμου τμήματος του K, τότε αναγκαία τα άκρα του τμήματος ανήκουν στο A. Αναλυτικά η συνθήκη εκφράζεται ως εξής:

Αν $x, y \in \mathrm{K}, 0 < \lambda < 1$ και $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$ τότε $x, y \in A$.

Παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathrm{K}$, τότε το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ακραίο σύνολο του K ακριβώς όταν το x είναι ακραίο σημείο του K . Έτσι τα ακραία σημεία ενός κυρτού συνόλου είναι τα ακραία μονοσύνολα του.

<u>Παραδείγματα</u> 5.4 1) Έστω K ένα κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X , τότε το ίδιο το K είναι ακραίο υποσύνολο του K . Επίσης κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου $ex(\mathrm{K})$ είναι ακραίο υποσύνολο του K (βέβαια ενδέχεται- όπως διαπιστώσαμε – να ισχύει $ex(\mathrm{K}) = \varnothing$.). Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έστω $\varnothing \neq A \subseteq ex(\mathrm{K})$ και $x \in A$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ με $0 < \lambda < 1$ και $y, z \in \mathrm{K}$, επειδή $x \in ex(\mathrm{K})$ έπεται ότι $x = y = z \in A$, συνεπώς το A είναι ακραίο υποσύνολο του K .

2) Έστω $\mathrm{K} = [a, b]$ ένα ευθύγραμμο τμήμα στον διανυσματικό χώρο X

($\mathrm{K} = \{\lambda a + (1-\lambda) b : \lambda \in [0,1]\}$). Τότε τα ακραία υποσύνολα του K είναι βέβαια το ίδιο το K και κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου $ex(\mathrm{K}) = \{a, b\}$.

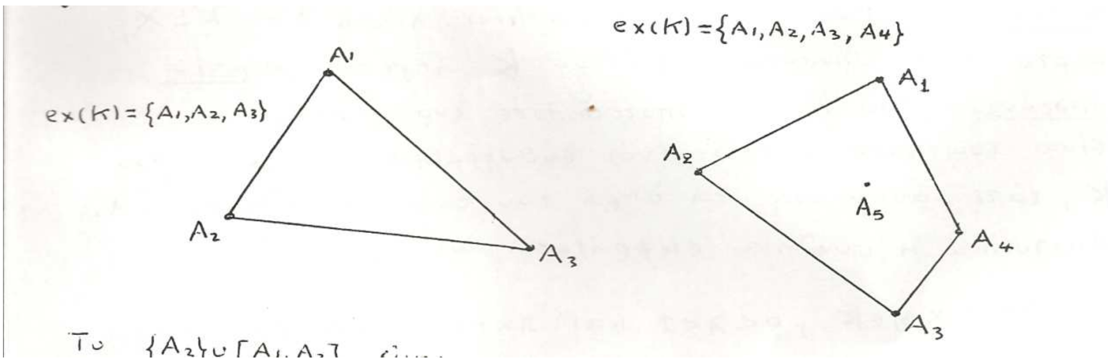
3) Έστω K ένα κλειστό κυρτό πολύγωνο του Ευκλείδειου επιπέδου R^2 , (π.χ. K είναι ένα τρίγωνο). Τα ακραία υποσύνολα του K είναι τα ακόλουθα:

(α) Το ίδιο το K .

(β) Οι κορυφές του K και κάθε υποσύνολο των κορυφών του.

(γ) Κάθε πλευρά του K (η οποία περιέχει τα άκρα της) και κάθε υποσύνολο του K το οποίο είναι ένωση πλευρών είτε κορυφών του K .

$ex(\mathrm{K}) = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\}$ $\qquad\qquad$ $ex(\mathrm{K}) = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4\}$



Το $\{\mathrm{A}_2\} \cup [\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_3]$ είναι ακραίο υποσύνολο του $\mathrm{K} = co\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\}$ Το $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ δεν είναι ακραίο υποσύνολο του K .	Το $[\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_4] \cup [\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3]$ είναι ακραίο υποσύνολο του $\mathrm{K} = co\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5\}$ $= co\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4\}$

4) Έστω $\left(X,\|\cdot\|\right)$ χώρος με νόρμα. Τότε η $S_X=\left\{x\in X:\|x\|=1\right\}$ είναι ακραίο υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$. Πράγματι, έστω $\|x\|=1$. Αν $x=\lambda y+\left(1-\lambda\right)z$ με $0<\lambda<1$ και $y,z\in\hat{\mathrm{B}}_X$, τότε

$1=\|x\|=\|\lambda y+\left(1-\lambda\right)z\|\leq\lambda\|y\|+\left(1-\lambda\right)\|z\|\leq\lambda+1-\lambda=1$. Κατά συνέπεια $\lambda\|y\|+\left(1-\lambda\right)\|z\|=1$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $\|y\|=\|z\|=1$.

Σημείωση 5.4.1 Στο παράδειγμα (4) χρησιμοποιήσαμε την απλή παρατήρηση ότι:

Αν $a,b\in C,\quad |a|,|b|\leq 1,\quad 0<\lambda<1$ και $1=\left|\lambda\alpha+\left(1-\lambda\right)b\right|$ τότε $|a|=|b|=1$ και $a=b$.

(Άσκηση) (Πρβλ. επίσης και το παράδειγμα 5.11 (3).)

Πρόταση 5.5 Έστω X διανυσματικός χώρος και $\mathrm{K}\subseteq X$ κυρτό σύνολο. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Αν $x\in\mathrm{K}$ τότε το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K αν και μόνο αν το x είναι ακραίο σημείο του K.

(β) Αν A ακραίο και κυρτό υποσύνολο του K και B ακραίο υποσύνολο του A, τότε το B είναι ακραίο υποσύνολο του K. Ειδικότερα, αν το x είναι ακραίο σημείο του A τότε το x είναι ακραίο σημείο του K.

(γ) Αν $\left(A_i\right)_{i\in I}$ είναι οικογένεια ακραίων υποσυνόλων του K τότε και η ένωση $\bigcup_{i\in I}A_i$ είναι ακραίο υποσύνολο του K. Επίσης, αν $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$, τότε και η τομή $\bigcap_{i\in I}A_i$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

(δ) Αν $\Lambda:X\to R$ ¨είναι $R-$γραμμικό συναρτησοειδές και υπάρχει $x_0\in\mathrm{K}$ ώστε $\Lambda\left(x_0\right)=\sup\left\{\Lambda\left(x\right):x\in\mathrm{K}\right\}$, τότε τα σύνολο $A=\left\{y\in\mathrm{K}:\Lambda\left(y\right)=\Lambda\left(x_0\right)\right\}$ είναι ακραίο και κυρτό υποσύνολο του K.

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί (α) – (γ) αφήνονται ως άσκηση. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό (δ). Προφανώς το A είναι κυρτό ως τομή της μεταφοράς κατά x_0 του υπερεπιπέδου $Ker\Lambda$ με το K, δηλ., $A=\left(x_0+Ker\Lambda\right)\bigcap\mathrm{K}$. Έστω $y,z\in\mathrm{K}$ και $0<\lambda<1$ ώστε $\lambda y+\left(1-\lambda\right)z\in A$ τότε $\Lambda\left(x_0\right)=\Lambda\left(\lambda y+\left(1-\lambda\right)z\right)=\lambda\Lambda\left(y\right)+\left(1-\lambda\right)\Lambda\left(z\right)$.

Ας υποθέσουμε ότι $\{y,z\}\underset{\neq}{\not\subset}A$ και έστω ότι π.χ. το $y\notin A$. Τότε $\Lambda\left(y\right)\neq\Lambda\left(x_0\right)$ συνεπώς $\Lambda\left(y\right)<\Lambda\left(x_0\right)$ και επειδή $\Lambda\left(z\right)\leq\Lambda\left(x_0\right)$ θα έχουμε ότι

$\Lambda\left(x_0\right)=\lambda\Lambda\left(y\right)+\left(1-\lambda\right)\Lambda\left(z\right)<\lambda\Lambda\left(x_0\right)+\left(1-\lambda\right)\Lambda\left(x_0\right)=\Lambda\left(x_0\right)$, άτοπο.

…………………………………………….

<u>Σημείωση</u>. Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου και A ένα ακραίο και κυρτό υποσύνολο του K, τότε το A ονομάζεται και έδρα ή (face) του K. Για παράδειγμα οι «έδρες» ενός τριγώνου στο R^2 είναι οι πλευρές του και οι κορυφές του. Η έννοια της έδρας ενός κυρτού συνόλου είναι ποιο φυσιολογική στην περίπτωση του $R^3\left(=\ell_2^3\right)$ όπου οι «έδρες» ενός κυρτού πολύεδρου(π.χ. ενός τετραέδρου) είναι οι συνήθεις έδρες, οι ακμές του αλλά και οι κορυφές του.

…………………………………………..

Αν το K είναι ένα κυρτό πολύγωνο στο Ευκλείδειο επίπεδο R^2 (π.χ. τρίγωνο, παραλληλόγραμμο η γενικότερα κυρτό $n-$γωνο, $n\geq 3$) τότε είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το $ex(\mathrm{K})$ είναι το σύνολο των κορυφών του και περαιτέρω ότι ισχύει $\mathrm{K}=co\big(ex(\mathrm{K})\big)$

(πρβλ. το παράδειγμα 5.4 (3)).

Πρόκειται στη συνέχεια να αποδείξουμε ένα πολύ γενικότερο και σημαντικό αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα</u> 5.6 (Krein-Milman) Έστω X ένας (Hausdorff) τοπικά κυρτός χώρος. Αν το K είναι μη κενό κυρτό και <u>συμπαγές</u> υποσύνολο του X τότε το K είναι η κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων του. Δηλαδή

$$\mathrm{K}=c\ell co\big(ex(\mathrm{K})\big)$$

(Ιδιαίτερα το K <u>έχει</u> ακραία σημεία.)

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτομε (για απλότητα) ότι ο X είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. Θα μας χρειασθεί ο ακόλουθος ισχυρισμός ο οποίος είναι συνέπεια του Λήμματος του Zorn.

<u>Ισχυρισμός</u>. Για κάθε μη κενό ακραίο, κυρτό και κλειστό υποσύνολο $S\subseteq\mathrm{K}$ ισχύει ότι, $S\bigcap ex(\mathrm{K})\neq\varnothing$.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u>. Έστω $\mathcal{P}$ η οικογένεια όλων των μη κενών ακραίων κλειστών και κυρτών υποσυνόλων του K. Επειδή $\mathrm{K}\in\mathcal{P}$ έχουμε ότι $\mathcal{P}\neq\varnothing$. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(α) Η τομή S των μελών κάθε μη κενής υποοικογένειας της $\mathcal{P}$ ανήκει στην $\mathcal{P}$ εκτός αν $S=\varnothing$.

(β) Αν $S\in\mathcal{P}$, $\Lambda\in X^*$ και $\mu=\max\{\Lambda(x):x\in S\}$ τότε το $S_\Lambda=\{x\in S:\Lambda(x)=\mu\}$ ανήκει στην $\mathcal{P}$.

Το (α) έπεται εύκολα από τον ισχυρισμό (γ) της Πρότασης 5.5. Για το (β) παρατηρούμε ότι επειδή το S συμπαγές και η Λ συνεχής συνάρτηση υπάρχει $x_0\in S$ ώστε $\Lambda(x_0)=\mu$, από τον ισχυρισμό (δ) της ίδιας Πρότασης έχουμε το συμπέρασμα.

Επιλέγομε τώρα κάποιο μέλος S της p , και θέτομε

$$p' = \{S' \in p : S' \subseteq S\}.$$

Επειδή $S \in p'$ το $S \neq \varnothing$. Ορίζουμε μια σχέση (μερικής) διάταξης στο p' ως εξής

$$S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow S_2 \subseteq S_1$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το μερικά διατεταγμένο σύνολο (p' , $\leq$) είναι επαγωγικό (αν C είναι αλυσίδα στο p' τότε η C έχει προφανώς την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, επειδή τα μέλη της C είναι κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς K, έπεται ότι $\mathrm{M} = \bigcap C \neq \varnothing$. Έτσι το M είναι ένα άνω φράγμα της C). Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο έστω M_0 στο p' δηλαδή, αν $S' \in p'$ και $\mathrm{M}_0 \leq S'$ τότε $S' = \mathrm{M}_0$

Έπεται τότε ότι δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του M_0 που να ανήκει στην p . Από το γεγονός αυτό και το (β) συμπεραίνουμε ότι κάθε $f \in X^*$ είναι σταθερή συνάρτηση επί του M_0. Επειδή ο X είναι τοπικά κυρτός και άρα ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X , το M_0 θα έχει μόνο ένα σημείο. Έτσι από τον ισχυρισμό (α) της πρότασης 5.5 αν $\mathrm{M}_0 = \{x\}$ τότε το x θα είναι ένα ακραίο σημείο του K, το οποίο ανήκει στο S .

Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος. Θέτομε $\mathrm{H} = co(ex(\mathrm{K}))$. Είναι σαφές ότι το $\mathrm{H} \neq \varnothing$ και ότι $\overline{\mathrm{H}}$ κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του K. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathrm{K}$ ώστε $x_0 \notin \overline{\mathrm{H}}$. Από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $\Lambda \in X^*$ ώστε $\Lambda(x) < \Lambda(x_0)$ για κάθε $x \in \overline{\mathrm{H}}$. Θέτομε

$\mathrm{K}_\Lambda = \{x \in \mathrm{K} : \Lambda(x) = \mu\}$, όπου $\mu = \max\{\Lambda(x) : x \in \mathrm{K}\} \geq \Lambda(x_0)$.

Έπεται τότε από το (β) ότι $\mathrm{K}_\Lambda \in p$.Επειδή το K_Λ δεν τέμνει (προφανώς) το $\overline{\mathrm{H}}$, οπότε ούτε το $ex(\mathrm{K}) \subseteq \overline{\mathrm{H}}$, καταλήγουμε σε αντίφαση.

……………………………………………..

Παρατήρηση 5.7 1) Το θεώρημα Krein – Milman ισχύει και με την ασθενέστερη υπόθεση ότι ο X είναι ένας Hausdorff τ.δ.χ. ώστε ο συζυγής του X^* διαχωρίζει τα σημεία του (πρβλ. [R] σελίδα 70-71).

2) Αν $0 < p < 1$, τότε στον χώρο L_p, ο οποίος μελετήθηκε στο παράδειγμα 3.4.4, υπάρχει συμπαγές και κυρτό σύνολο το οποίο δεν έχει ακραία σημεία ([F-H-H-M-Z] σελίδα 110). Βέβαια αυτό δεν αντιφάσκει με το θεώρημα Krein- Milman αφού $L_p^* = \{0\}$.

Άμεση συνέπεια των θεωρημάτων Krein- Milman και Alaoglou είναι και το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα</u> 5.8 Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε

$$\hat{B}_{X^*} = c\ell_{w^*} co\left(ex \hat{B}_{X^*} \right).$$

Δηλαδή, η $\hat{B}_{X^*}$ ισούται με την ασθενώς* κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων της.

<u>Απόδειξη</u> Η $\hat{B}_{X^*}$ είναι από το θεώρημα του Alaoglou ένα συμπαγές και βέβαια κυρτό σύνολο. Έτσι το συμπέρασμα έπεται αμέσως από το θεώρημα Krein- Milman.

<u>Πόρισμα</u> 5.9 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Τότε

$$\hat{B}_X = c\ell_w co\left(ex \hat{B}_X \right)$$

<u>Απόδειξη</u> Η $\hat{B}_X$ είναι ένα ασθενώς συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Από το θεώρημα Krein- Milman έπεται το συμπέρασμα.

…………………………………………..

Στις ασκήσεις (θα διατυπώσουμε και) θα περιγράψουμε την απόδειξη κάποιων χρήσιμων αποτελεσμάτων σχετικών με το θεώρημα Krein- Milman όπως ένα είδος μερικού αντιστρόφου του θεωρήματος Krein- Milman (άσκηση 5), καθώς και την (ισχυροποιημένη) μορφή του θεωρήματος στην περίπτωση των πεπερασμένων διαστάσεων που είναι το θεώρημα Καραθεοδωρή (άσκηση 7).

Ακολουθούν μια βοηθητική Πρόταση και μια σειρά παραδειγμάτων υπολογισμού των ακραίων σημείων σφαιρών κλασσικών χώρων Banach.

<u>Πρόταση</u> 5.10 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε, (α) $ex\left(\hat{B}_X \right) \subseteq S_X$ και

(β) Αν $x \in ex\left(\hat{B}_X \right)$ τότε $cx \in ex\left(\hat{B}_X \right)$ για κάθε $c \in K$ με $|c| = 1$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω $\|x\|<1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (ι) $x=0$, τότε,

$0=x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}(-y)$ για κάθε $y\in X$ με $\|y\|\leq 1$.

(ιι) $x\neq 0$, τότε $x=\lambda y+(1-\lambda)0$, όπου $y=\frac{x}{\|x\|}$ και $\lambda=\|x\|$. Έπεται ότι το x δεν μπορεί να είναι ακραίο σημείο της $\hat{B}_X$.

(β) Έστω $x\in ex\left(\hat{B}_X\right)$ και $c\in K$ με $|c|=1$. Αν το cx δεν ήταν ακραίο σημείο της $\hat{B}_X$ τότε, $cx=\lambda z+(1-\lambda)y$ για $0<\lambda<1$ και $z,y\in\hat{B}_X$. Κατά συνέπεια, $x=\lambda\frac{z}{c}+(1-\lambda)\frac{y}{c}$ και επειδή $\frac{z}{c},\frac{y}{c}\in\hat{B}_X$ έπεται ότι $x\notin ex\left(\hat{B}_X\right)$, άτοπο.

<u>Παραδείγματα</u> 5.11 1) $ex\left(\hat{B}_{c_0}\right)=\varnothing$.

Έστω $x=(x(n))\in c_0$ με $\|x\|=1$. Επειδή $x(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ υπάρχει $n_0\in N:|x(n_0)|<\frac{1}{4}$.

Θέτομε, $y(n)=\begin{cases}x(n), & n\neq n_0\\ x(n)+\frac{1}{4}, & n=n_0\end{cases}$ και $z(n)=\begin{cases}x(n), & n\neq n_0\\ x(n)-\frac{1}{4}, & n=n_0\end{cases}$.

Οι ακολουθίες, $y=(y(n))$ και $z=(z(n))$ είναι βέβαια μηδενικές και $\|z\|=\|y\|=1$. Επι πλέον $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$ με $y\neq z$. Επομένως το x δεν μπορεί να είναι ακραίο σημείο της $\hat{B}_{c_0}$.

2) $ex\left(\hat{B}_{\ell_1}\right)=\{\lambda e_n:|\lambda|=1,n\in N\}$.

Υποθέτομε (για απλότητα) ότι ο ℓ_1 είναι διανυσματικός χώρος επί του R, δηλαδή,

$\ell_1=\left\{(a_n)\subseteq R:\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty\right\}$.

(Ι) $\{\pm e_n:n\in N\}\subseteq ex\left(\hat{B}_{\ell_1}\right)$.

Αρκεί από την πρόταση 5.10 να αποδείξουμε ότι $e_n \in ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_1}\right)$ για κάθε $n \geq 1$. Έστω

$n_0 \in N$, $x = \left(x(n)\right), y = \left(y(n)\right)$ στοιχεία της $\hat{\mathrm{B}}_{\ell_1}$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $e_{n_0} = \lambda x + (1-\lambda) y$

Θα αποδείξουμε ότι $e_{n_0} = x = y$ και άρα το e_{n_0} θα είναι ακραίο σημείο της $\hat{\mathrm{B}}_{\ell_1}$.

Παρατηρούμε ότι $\lambda x(n) + (1-\lambda) y(n) = \begin{cases} 0, & n \neq n_0 \\ 1, & n = n_0 \end{cases}$.

Επειδή $\left|x(n_0)\right| \leq \|x\|_1 \leq 1$, $\left|y(n_0)\right| \leq \|y\|_1 \leq 1$ και $\lambda x(n_0) + (1-\lambda) y(n_0) = 1$, έπεται ότι $x(n_0) = y(n_0) = 1$. (Πρβλ. την Σημείωση 5.4.1). Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty}\left|x(n)\right| = \|x\|_1 \leq 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\left|y(n)\right| = \|y\|_1 \leq 1$, έπεται ότι $x(n) = 0 = y(n)$ για κάθε $n \neq n_0$. Κατά συνέπεια $e_{n_0} = x = y$.

(ΙΙ) $ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_1}\right) \subseteq \left\{\pm e_n : n \in N\right\}$

Υποθέτομε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχει $x \in ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_1}\right)$ με $x \neq \pm e_n$ για κάθε $n \geq 1$. Όπως γνωρίζουμε $\|x\|_1 = 1$ (Πρόταση 5.10). Έστω $x = \left(x(n)\right)$, θέτομε $n_0 = \min\left\{n \in N : x(n) \neq 0\right\}$. Συνεπώς $x(n) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$. Επειδή $x \neq \pm e_n$ για κάθε $n \geq 1$ έχουμε ότι $0 < \left|x(n_0)\right| < 1$ (αν $\left|x(n_0)\right| = 1$ τότε κατ' ανάγκη $x = e_{n_0}$ ή $x = -e_{n_0}$, άτοπο). Θέτομε $\lambda = \left|x(n_0)\right|$ και ορίζουμε $y = \left(y(n)\right)$ με

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n \leq n_0 \\ x(n), & n > n_0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι, $\dfrac{\|y\|}{1-\lambda} = \dfrac{1}{1-\lambda}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|x(n)\right| = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1$.

Θέτομε τώρα, $y_1 = e_{n_0}$ αν $x(n_0) > 0$ ή $y_1 = -e_{n_0}$ αν $x(n_0) < 0$ και $y_2 = \dfrac{y}{1-\lambda}$. Τότε $x = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$ με $0 < \lambda < 1$, άτοπο.

3) Αν $1 < p < +\infty$, τότε $ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_p}\right) = S_{\ell_p}$.

Έστω $x \in \ell_p$ με $\|x\|_p = 1$. Υποθέτομε ότι υπάρχουν $y, z \in \hat{\mathrm{B}}_{\ell_p}$ και $t \in (0,1)$ ώστε $x = ty + (1-t)z$. Είναι βέβαια τότε σαφές ότι $\|y\|_p = \|z\|_p = 1$.

Επίσης έχουμε ότι

$1 = \|x\|_p = \|ty + (1-t)z\|_p \le t\|y\|_p + (1-t)\|z\|_p \le t + (1-t) = 1$, συνεπώς $\|ty + (1-t)z\|_p = \|ty\|_p + \|(1-t)z\|_p$.

Επειδή έχουμε ισότητα στην ανισότητα Minkowski, έπεται ότι τα διανύσματα $(1-t)z$ και ty είναι ομόρροπα, δηλαδή υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $(1-t)z = \lambda(ty) = (\lambda t)y$. Έπεται ότι $1 - t = \lambda t$ και συνεπώς $z = y$.

4) $ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}\right) = \left\{x \in \ell_\infty : |x(n)| = 1, n \ge 1\right\}$.

Υποθέτουμε για απλότητα ότι $K = R$.

(I) $ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}\right) \subseteq \left\{x \in \hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty} : |x(n)| = 1, n \ge 1\right\}$.

Έστω $x = (x(n))$ ακραίο σημείο της $\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}$. Ας υποθέσομε ότι υπάρχει $n_0 \in N$ ώστε $|x(n_0)| < 1$. Τότε υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x(n_0) = \lambda(-1) + (1-\lambda)1 = 1 - 2\lambda$.

Θέτομε $y(n) = \begin{cases} x(n), n \ne n_0 \\ -1, \quad n = n_0 \end{cases}$ και $z(n) = \begin{cases} x(n), n \ne n_0 \\ 1, \qquad n = n_0 \end{cases}$.

Προφανώς τα διανύσματα $y = y(n)$ και $z = z(n)$ ανήκουν στην $\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda y(n) + (1-\lambda)z(n) = \begin{cases} \lambda x(n) + (1-\lambda)x(n) = x(n), & n \ne n_0 \\ \lambda(-1) + (1-\lambda)1 = 1 - 2\lambda = x(n_0), & n = n_0 \end{cases}.$$

Κατά συνέπεια $x(n) = \lambda y(n) + (1-\lambda)z(n), \quad n \ge 1$. Άρα $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ με $\lambda \in (0,1)$ και $y, z \in \hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}$, άτοπο. Έπεται ότι, $|x(n)| = 1$ για κάθε $n \ge 1$

(II) $\left\{x \in \ell_\infty : |x(n)| = 1, n \ge 1\right\} \subseteq ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}\right)$

Έστω $x=(x(n))\in\ell_\infty$ ώστε $|x(n)|=1$ για κάθε $n\geq 1$. Ας υποθέσουμε ότι

$x=\lambda y+(1-\lambda)z$, όπου $y,z\in\hat{B}_{\ell_\infty}$ και $\lambda\in(0,1)$. Τότε έχουμε για κάθε $n\geq 1$,

$1=|x(n)|=|\lambda y(n)+(1-\lambda)z(n)|$.

Επειδή $0\leq |y(n)|,|z(n)|\leq 1$, έπεται από την Σημείωση 5.4.1 ότι $y(n)=z(n)$ για κάθε $n\geq 1$. Άρα $x=y=z$ και το x είναι ακραίο σημείο της $\hat{B}_{\ell_\infty}$.

5) $ex\left(\hat{B}_{L_1}\right)=\varnothing$.

Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι κάθε $f\in L_1=L_1[0,1]$ με $\|f\|_1=1$ μπορεί να γραφεί ως $f=\dfrac{g+h}{2}$, όπου $\|g\|_1=\|h\|_1=1$ και $g\neq h$.

Έστω λοιπόν $f\in L_1$ με $\|f\|_1=1$. Θεωρούμε $x\in(0,1)$ ώστε $\int\limits_0^x |f(t)dt|=\dfrac{1}{2}$ και θέτομε

$h=2f\cdot x_{[0,x]}$, $g=2f\cdot x_{(x,1]}$.

Παρατηρούμε ότι $\int\limits_0^1 |g(t)|dt=\int\limits_0^1 |h(t)|dt=1$, δηλαδή $\|g\|_1=\|h\|_1=1$ και $f=\dfrac{g+h}{2}$.

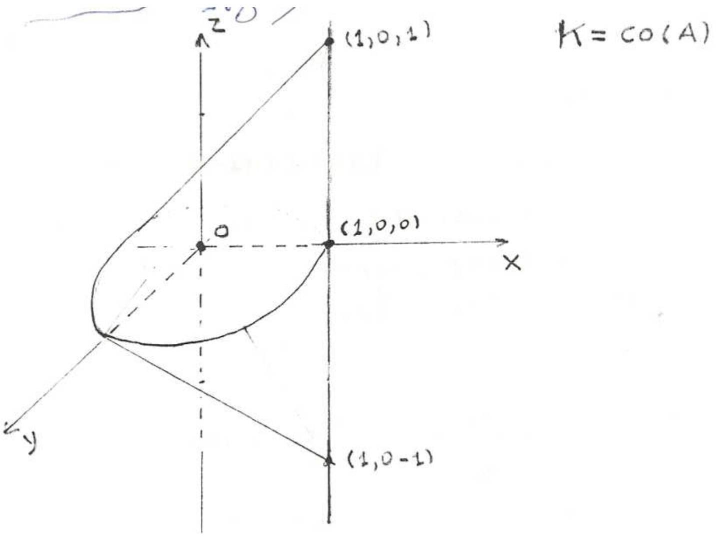
Εφόσον $g\neq h$, έπεται ότι η f δεν μπορεί να είναι ακραίο σημείο της $\hat{B}_{L_1}$.

<u>Παρατήρηση</u> 5.12 1) Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του χώρου c_0 αλλά και του L_1 δεν έχει ακραία σημεία όπως έπεται από τα παραδείγματα 5.11 (1) και (5). Έπεται από το θεώρημα 5.8 ότι κανείς από αυτούς τους χώρους δεν είναι (γραμμικά) ισομετρικός με τον συζυγή ενός χώρου με νόρμα.

2) Το σύνολο των ακραίων σημείων ενός συμπαγούς και κυρτού συνόλου δεν είναι αναγκαία συμπαγές. Αυτό φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα: Έστω K η κυρτή θήκη στον R^3 του συνόλου

$A=\{(1,0,1),(1,0,-1)\}\cup\{(x,y,0):x^2+y^2=1\}$.

Το K είναι βέβαια συμπαγές υποσύνολο του R^3 (ένας διπλός κώνος). Αλλά το $ex(\mathrm{K}) = \mathrm{A} \setminus \{(1,0,0)\}$ δεν είναι συμπαγές.



Σημειώνουμε ότι ένα παράδειγμα όπως το προηγούμενο δεν μπορεί να βρεθεί στο Ευκλείδειο επίπεδο. Πράγματι αποδεικνύεται ότι αν K είναι συμπαγές και κυρτό (μη κενό) υποσύνολο του R^2 τότε το $ex(\mathrm{K})$ είναι κλειστό και άρα συμπαγές υποσύνολο του K.

(Άσκηση 12)

Από την άλλη μεριά, όπως θα αποδείξουμε, η κυρτή θήκη ενός συμπαγούς υποσυνόλου του Ευκλείδειου χώρου $R^n \left(= \ell_2^n\right)$ είναι συμπαγές (και κυρτό) σύνολο.

<u>Λήμμα</u> 5.13 Αν $\mathrm{E} \subseteq R^n$ και $x \in co(\mathrm{E})$ τότε υπάρχει $\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{E}$ με $|\mathrm{E}'| \leq n+1$ ώστε $x \in co(\mathrm{E}')$.

<u>Απόδειξη</u> Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι αν $k > n$ και αν $x = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$ με $x_i \in R^n$, $t_i > 0$ και $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$ τότε το x είναι κυρτός συνδυασμός k το πλήθος από τα x_i.

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\varphi : R^{k+1} \ni \left(a_1,...,a_{k+1}\right) \to \varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1} a_i\right) \in R^{n+1}$$

Επειδή $k > n$, έπεται ότι $Ker\varphi \neq \{0\}$. Έστω λοιπόν $\left(a_1,...,a_{k+1}\right) \in Ker\varphi$ με $\left(a_1,...,a_{k+1}\right) \neq 0$. Θεωρούμε $i_0 \leq k+1$ ώστε $\frac{|a_{i_0}|}{t_{i_0}} = \max\left\{\frac{|a_i|}{t_i} : i = 1,2,...,k+1\right\}$, άρα $a_{i_0} \neq 0$. Επιλέγομε $\lambda \in R$ ώστε $\lambda a_{i_0} = t_{i_0}$ και θέτομε $c_i = t_i - \lambda a_i$, $i = 1,2,...,k+1$. Τότε

$c_i \geq 0$ για κάθε $i=1,2,...,k+1$.(Πράγματι, $\frac{a_i}{t_i} \leq \frac{|a_i|}{t_i} \leq \frac{|a_{i_0}|}{t_{i_0}}$, αν $a_i = 0$ προφανώς

$c_i = t_i > 0$, αν $a_i \neq 0$, τότε $\frac{t_i}{|a_i|} \geq \frac{t_{i_0}}{|a_{i_0}|} \Rightarrow t_i \geq a_i \frac{t_{i_0}}{a_{i_0}} = \lambda a_i$) και $c_{i_0} = 0$.

Έπεται ότι, $\sum_{i=1}^{k+1} c_i = \sum_{i=1}^{k+1} t_i - \lambda \sum_{i=1}^{k+1} a_i = 1 - \lambda \cdot 0 = 1$ ($\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 0$, εφόσον $\varphi(a_1,...,a_{k+1}) = (0,0)$)

και άρα $x = \sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k+1} c_i x_i$.

<u>Πρόταση </u>5.14 Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$ συμπαγές σύνολο τότε η $co(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $S_n = \left\{ (t_1,...,t_n) \in R^n : t_i \geq 0, i=1,...,n \text{ και } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$. Τότε το S_n είναι

κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς κύβου $[0,1]^n$ και άρα συμπαγές σύνολο.

Από το Λήμμα 5.13, $x \in co(\mathrm{K})$ αν και μόνο αν $x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$ για κάποιο

$t = (t_1,...,t_{n+1}) \in S_{n+1}$ και $x_1,...,x_{n+1} \in \mathrm{K}$.

Έπεται ότι η συνεχής απεικόνιση

$$F : S_{n+1} \times \mathrm{K}^{n+1} \to co(\mathrm{K}) : F(t_1,...,t_{n+1},x_1,...,x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$$

είναι επί της κυρτής θήκης $co(\mathrm{K})$ του K και άρα η $co(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές σύνολο.

…………………………………………..

Στην συνέχεια πρόκειται να εξετάσουμε πως γενικεύεται το προηγούμενο αποτέλεσμα σε απειροδιάστατους χώρος Banach.

Θα χρειαστούμε την ακόλουθη απλή <u>παρατήρηση</u>:

Η κυρτή θήκη $co(F)$ ενός πεπερασμένου υποσυνόλου F ενός Hausdorff τ.δ.χ. X είναι συμπαγές σύνολο. (Έστω, $F = \{x_1,...,x_n\} \subseteq X$, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$\varphi : S_n \to co(F) : \varphi(t_1,...,t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ είναι συνεχής και επί).

Επίσης υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (M,d) λέγεται ότι είναι <u>ολικά</u> <u>φραγμένο</u>, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το A μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών σφαιρών του χώρου (M,d) ακτίνας ε. Αν ο χώρος (M,d) είναι πλήρης τότε κάθε ολικά φραγμένο υποσύνολο A του M είναι σχετικά συμπαγές, δηλαδή η κλειστότητά του $c\ell A$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (M,d).

Θεώρημα 5.15 (Θεώρημα συμπάγειας του Mazur) Έστω X χώρος Banach και K norm συμπαγές υποσύνολο του X τότε η κυρτή θήκη $co(\mathrm{K})$ είναι norm σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X (δηλαδή η $c\ell_{\|\cdot\|}co(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X).

Απόδειξη. Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι (εφόσον ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος) η $co(\mathrm{K})$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού το K είναι συμπαγές υπάρχει $F\subseteq \mathrm{K}$ πεπερασμένο ώστε $\mathrm{K}\subseteq F+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$ ($=\bigcup\left\{\hat{\mathrm{B}}_X\left(y,\varepsilon\right): y\in F\right\}$). Άρα

$\mathrm{K}\subseteq co(F)+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$ και επειδή το $co(F)+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$ είναι κυρτό έπεται ότι

$co(\mathrm{K})\subseteq co(F)+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$. Όμως το σύνολο $co(F)$ είναι συμπαγές ως κυρτή θήκη πεπερασμένου συνόλου. Επομένως υπάρχει $F_1\subseteq co(F)$ πεπερασμένο ώστε

$co(F)\subseteq F_1+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$. Έπεται ότι,

$co(\mathrm{K})\subseteq co(F)+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X \subseteq \left(F_1+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X\right)+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X = F_1+2\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$.

(Μάλιστα ισχύει $\overline{co(\mathrm{K})}\subseteq F_1+2\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$, εφόσον το $F_1+2\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$ είναι κλειστό σύνολο.)

Άρα το σύνολο $co(\mathrm{K})$ είναι ολικά φραγμένο στον χώρο X.

…………………………………………….

Παρατήρηση 5.16 Η υπόθεση της πληρότητας του χώρου X είναι αναγκαία (το αποτέλεσμα δεν ισχύει γενικά σε χώρο με νόρμα). Έστω $X=c_{00}$ (ο χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών) εφοδιασμένος με την sup-norm $\|\cdot\|_\infty$ και (e_n) η συνήθης βάση Hamel του X. Υπενθυμίζουμε ότι η πλήρωση του $\left(c_{00},\|\cdot\|_\infty\right)$ είναι ο χώρος Banach c_0. Θέτομε $x_n=\frac{1}{n}e_n$, $n\geq 1$ και $\mathrm{K}=\{x_n, n\geq 1\}\bigcup\{0\}$. Τότε $\|x_n\|_\infty=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ και έτσι το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Αλλά η $co(\mathrm{K})$ δεν είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε μια ακολουθία (a_n) θετικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$ (π.χ. $a_n=\frac{1}{2^n}, n\geq 1$). Θέτομε $t_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$,

$n \geq 1$, τότε η ακολουθία $y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + t_n x_{n+1}$, $n \geq 1$ περιέχεται στη κυρτή θήκη $co(\mathrm{K})$ του K, όμως δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στον χώρο X. Πράγματι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η (y_n) είναι συγκλίνουσα στον χώρο c_0 με όριο την ακολουθία $y = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots.\right)$, όμως το $y \notin c_{00}$. Επίσης σημειώνουμε ότι από το θεώρημα 5.15 η $co(\mathrm{K})$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του χώρου Banach c_0.

Παρατηρούμε ότι το ίδιο σύνολο K περιέχεται στον χώρο Hilbert ℓ_2 και είναι συμπαγές αφού $\|x_n\|_2 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Με ανάλογους συλλογισμούς καταλήγουμε στο γεγονός ότι η $co(\mathrm{K})$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του ℓ_2, βέβαια η $co(\mathrm{K})$ είναι norm σχετικά συμπαγές στον ℓ_2, αφού αυτός είναι πλήρης χώρος.

……………………………………………………………

Το ανάλογο του θεωρήματος 5.15 για ασθενώς συμπαγή υποσύνολα χώρων Banach ισχύει.

<u>Θεώρημα</u> 5.17 (Krein-Smulian) K είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach X τότε η $co(\mathrm{K})$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X (Η $c\ell_w co(\mathrm{K})$ είναι ασθενώς συμπαγές στον X .).

Για την απόδειξη του θεωρήματος Krein παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία ([F-H-H-M-P-Z] και [F-H-H-M-Z]).

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με κάποια αποτελέσματα που αφορούν την ύπαρξη ακραίων σημείων στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα χώρων Banach της μορφής $C(\mathrm{K})$.

<u>Πρόταση</u> 5.18 Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff. Αν B συμβολίζει την κλειστή μοναδιαία σφαίρα του του $C(\mathrm{K})$, τότε μία συνάρτηση $f \in \mathrm{B}$ είναι ακραίο σημείο της B αν και μόνο αν $|f(t)| = 1$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $f \in \mathrm{B}$ με $|f(t)| = 1$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f_1, f_2 \in \mathrm{B}$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$. Άρα

$$1 = |\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t)| \text{ για κάθε } t \in \mathrm{K}$$

Επειδή $|f_1(t)|, |f_2(t)| \leq 1$, για κάθε $t \in \mathrm{K}$, έπεται από την σημείωση 5.4.1 ότι $f_1(t) = f_2(t)$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$ και άρα $f = f_1 = f_2$. Έτσι έχουμε ότι $f \in ex(\mathrm{B})$.

Έστω τώρα $f \in ex(\mathrm{B})$, συνεπώς $\|f\|_{\infty}=1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_0 \in \mathrm{K}$ με $|f(t_0)|<1$. Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει ανοικτή περιοχή V του t_0 και $\delta \in (0,1)$, ώστε $|f(t)|<1-\delta$ για κάθε $t \in V$. Έστω $g:\mathrm{K} \to [0,1]$ συνεχής ώστε $g(t_0)=1$ και $g(t)=0$ για κάθε $t \in \mathrm{K} \setminus V$ (συνάρτηση Urysohn). Αν $0<\varepsilon<\delta$, τότε οι συναρτήσεις $f_1 = f+\varepsilon g$ και $f_2 = f-\varepsilon g$ ανήκουν στη B (πράγματι, $|f \pm \varepsilon g| = |f|$ επί του $\mathrm{K} \setminus V$ και $|f \pm \varepsilon g| \le |f| + \varepsilon |g| \le 1-\delta+\varepsilon<1$ επί της V), $f_1 \neq f_2$ και $f = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$. Έπεται ότι η f δεν είναι ακραίο σημείο της B, άτοπο.

<u>Πόρισμα</u> 5.19 Έστω K συμπαγής και <u>συνεκτικός</u> χώρος. (Π.χ. $\mathrm{K}=[0,1]$). Αν με $C(\mathrm{K})$ συμβολίσουμε τον χώρο Banach των συνεχών <u>πραγματικών</u> συναρτήσεων επί του K, τότε οι σταθερές συναρτήσεις $f_1=1$ και $f_2=-1$ είναι τα μόνα ακραία σημεία της B.

<u>Απόδειξη</u> Επειδή ο K είναι συνεκτικός χώρος, οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathrm{K} \to R$ με $|f(t)|=1$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις $f_1=1$ και $f_2=-1$. Η παρατήρηση αυτή σε συνδυασμό με την πρόταση 5.18 αποδεικνύουν τον ισχυρισμό μας.

<u>Παρατήρηση</u> 5.20 1) Παρατηρούμε ότι όπως έπεται από την πρόταση 5.18 η κλειστή μοναδιαία σφαίρα B ενός χώρου Banach της μορφής $C(\mathrm{K})$ έχει πάντοτε ακραία σημεία, μάλιστα $2 \le |ex(\mathrm{B})|$ και από το πόρισμα 5.19 ενδέχεται να ισχύει $|ex(\mathrm{B})|=2$.

2) Καθόσον αφορά τον χώρο Banach $C(\mathrm{K})$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του K - ακόμα και αν ο K είναι συνεκτικός-η κατάσταση είναι διαφορετική. Πράγματι αν $f:\mathrm{K} \to R$ είναι συνεχής (πραγματική) συνάρτηση τότε η $g=e^{if}$ είναι ακραίο σημείο της B, αφού

$$|g(t)| = \left|e^{if(t)}\right| = 1 \text{ για κάθε } t \in \mathrm{K}.$$

Περαιτέρω αποδεικνύεται, προκειμένου για τον χώρο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων $C(K)$, ότι,

$$\mathrm{B} = c\ell_{\|\cdot\|} co\big(ex(\mathrm{B})\big).$$

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία (Πρβλ. το [B]).

<u>Ασκήσεις</u>

1) Έστω X διανυσματικός χώρος, $C \subseteq X$ κυρτό και $x \in C$.

(α) Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (ι) $x \in ex(C)$, (ιι) $x_1, x_2 \in C$ και $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow x = x_1 = x_2$ και (ιιι) Το σύνολο $C \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.

(β) Επίσης αποδείξτε ότι αν $x \in ex(C)$ και $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ με $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geq 0$ και $x_k \in C$, $k = 1, 2, ..., n$, τότε $x = x_k$ για κάποιο $k \leq n$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Για το (β) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\right) + \lambda_3 x_3$.

Χρησιμοποιείστε επαγωγή στο n.]

2) Έστω X τ.δ.χ. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό τότε $ex(\mathrm{K}) \subseteq Bd\mathrm{K}$ και επί πλέον το $Bd\mathrm{K}$ είναι ακραίο υποσύνολο του $\overline{\mathrm{K}}$, όπου $Bd\mathrm{K} = \overline{\mathrm{K}} \cap \overline{X - \mathrm{K}}$ (= το σύνορο του K).

(β) Αν X χώρος με νόρμα και $C \subseteq \hat{\mathrm{B}}_X$ είναι ακραίο υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ με $C \neq \hat{\mathrm{B}}_X$ τότε $C \subseteq S_X$.

[<u>Υπόδειξη</u> Πρβλ. την άσκηση 11 της παραγράφου 3.1 για το (α)].

3) Έστω X πραγματικός τοπικά κυρτός χώρος και $\mathrm{K} \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό Αν $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{K}$, αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) $\mathrm{K} = \overline{co}(\mathrm{E})$ και (ιι) για κάθε $f \in X^* \Rightarrow \sup_{x \in \mathrm{K}} f(x) = \sup_{x \in \mathrm{E}} f(x)$.

4) Έστω X, Y τοπικά κυρτοί χώροι, $\mathrm{K} \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό και $T : X \to Y$ γραμμική και συνεχής. Τότε κάθε ακραίο σημείο του $T(\mathrm{K})$ είναι εικόνα κάποιου ακραίου σημείου του K.

[<u>Υπόδειξη:</u> Το $T(\mathrm{K})$ είναι βέβαια συμπαγές και κυρτό. Έστω $y \in ex(T(\mathrm{K}))$. Το σύνολο $\mathrm{K}_y = \{x \in \mathrm{K} : T(x) = y\} = T^{-1}(\{y\}) \cap \mathrm{K}$ είναι συμπαγές και κυρτό, επομένως έχει ακραία σημεία. Έστω x_0 ακραίο σημείο του K_y. Δείξτε ότι το x_0 είναι ακραίο σημείο του K.]

5) Έστω X τοπικά κυρτός χώρος και $\mathrm{B} \neq \varnothing$ υποσύνολο του X ώστε $C = \overline{co}(\mathrm{B})$ είναι συμπαγές. Τότε $ex(C) \subseteq \overline{\mathrm{B}}$.

[<u>Περιγραφή της απόδειξης</u>. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το B είναι κλειστό και άρα συμπαγές.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι αν U είναι τυχούσα κλειστή κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του $0 \in X$, τότε $ex(C) \subseteq \mathrm{B} + U$ (πρβλ. την Πρόταση 3.1.2 (νι)) .Έστω U μια τέτοια περιοχή. Επειδή το B είναι συμπαγές μπορεί να καλυφθεί από ένα πεπερασμένο πλήθος συνόλων $x_k + U$ όπου $x_k \in \mathrm{B}$, $k = 1, 2, ..., n$. Τα σύνολα $\mathrm{B}_k = \overline{co}\left(\mathrm{B} \bigcap \left(x_k + U\right)\right)$ είναι κυρτά και συμπαγή, επομένως το $co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$ είναι κυρτό το οποίο περιέχεται στο C. Αποδεικνύεται εύκολα ότι το $co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$ είναι συμπαγές (πράγματι το κυρτό σύνολο $co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$ είναι συμπαγές ως εικόνα του συμπαγούς $\Omega = \mathrm{B}_1 \times ... \times \mathrm{B}_n \times S_n$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης $\varphi\left(y_1, ..., y_n, t_1, ..., t_n\right) = \sum_{k=1}^{n} t_k y_k$, όπου $S_n = \left\{\left(t_1, ..., t_n\right) \in R^n : t_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} t_k = 1\right\}$) και επειδή περιέχει το B συμπεραίνουμε ότι $C = co\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k\right)$. Αν $x \in ex(C)$ τότε $x = \sum_{k=1}^{n} t_k b_k$, όπου $b_k \in \mathrm{B}_k$, $t_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., n$ και $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$.

Έπεται από την άσκηση 1 (β) ότι $x = b_k$ για κάποιο $k \leq n$.

Επομένως $x \in \mathrm{B}_k \subseteq x_k + U$, αφού το $x_k + U$ κλειστό κυρτό και έτσι $x \in \mathrm{B} + U$. Δηλαδή $ex(C) \subseteq \mathrm{B} + U$. (Πρβλ. επίσης την άσκηση 9)]

6) Έστω K κυρτό υποσύνολο του R^n. Αποδείξτε ότι είτε $\mathrm{K}^0 \neq \varnothing$ ή το K περιέχεται σε ένα γνήσιο διανυσματικό υπόχωρο του R^n.

[<u>Υπόδειξη.</u> Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{K}$. Έστω Y η γραμμική θήκη του K και $\left\{e_1, ..., e_m\right\}$ μια βάση του Y η οποία περιέχεται στο K. Προφανώς $m \leq n$. Αν $m < n$ τότε βέβαια το K έχει κενό εσωτερικό. Υποθέτομε ότι $m = n$ και θα αποδείξουμε ότι $D^0 \neq \varnothing$. Έστω $C = co\left(\left\{e_k : k \leq m = n\right\} \bigcup \left\{0\right\}\right) \subseteq \mathrm{K}$. Παρατηρούμε ότι το κυρτό σύνολο $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : 0 \leq a_k \leq \frac{1}{n}, k = 1, 2, ..., n\right\} \subseteq C$. Έστω $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} e_n$. Τότε το $\mathrm{B} = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : \left|a_k - \frac{1}{2n}\right| < \frac{1}{2n}\right\}$ είναι μια ανοικτή περιοχή του x_0 και $\mathrm{B} \subseteq C \subseteq \mathrm{K}$. Πρβλ επίσης την άσκηση 12 των παραγράφων 3.2, 3.3]

7) <u>Θεώρημα Καραθεοδωρή</u>: Έστω K ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του R^n. Τότε κάθε $x \in \mathrm{K}$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός το πολύ $n+1$ ακραίων σημείων του K.

[Περιγραφή της απόδειξης. Προχωρούμε με επαγωγή στην διάσταση n του χώρου. Αν $n=1$, τότε $\mathrm{K}=[a,b]\subseteq R$ και το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτομε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για χώρους διάστασης $n-1$, όπου $n\geq 2$. Έστω $\mathrm{K}\subseteq R^n$ κυρτό με $\mathrm{K}^0\neq\varnothing$ (άσκηση 6) και $x\in\mathrm{K}$. (α) Αν το $x\in Bd\mathrm{K}=\mathrm{K}\setminus\mathrm{K}^0$ θεωρούμε ένα

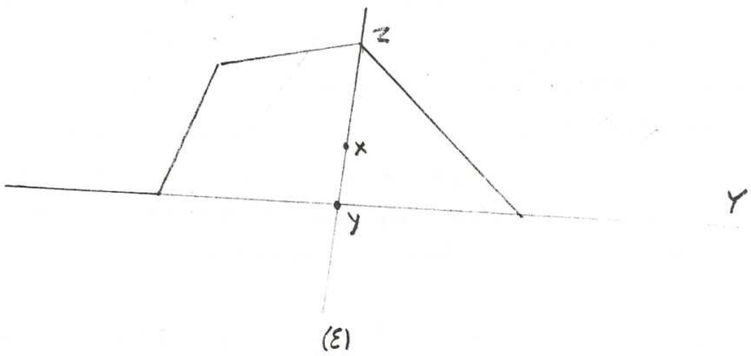
(συσχετισμένο) υπερεπίπεδο Y του R^n που διέρχεται από το x και αφήνει το K σε έναν από τους δύο ημιχώρους που ορίζει το Y (θεώρημα Hahn-Banach στις πεπερασμένες διαστάσεις).

Η τομή του K με το Y είναι ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του K που είναι ακραίο υποσύνολο του K και βέβαια έχει κενό εσωτερικό. Το συμπέρασμα έπεται από την επαγωγική υπόθεση καθώς $\dim Y=n-1$.

(β) Αν $x\in\mathrm{K}^0$, θεωρούμε ένα ακραίο σημείο z του K και την ευθεία (ε) που διέρχεται από τα z και x. Η (ε) τέμνει το $Bd\mathrm{K}$ σε ένα σημείο y. Θεωρούμε όπως στην περίπτωση (α) ένα υπερεπίπεδο Y που διέρχεται από το y και αφήνει το K σε ένα από τους δύο ημιχώρους που ορίζει το Y. Έστω $\mathrm{B}=\mathrm{K}\bigcap Y$. Τότε το B είναι συμπαγές κυρτό ακραίο υποσύνολο του K. Αν το B είναι μονοσύνολο, τότε είναι ακραίο σημείο του K

($\mathrm{B}=\{y\}$) και το x είναι κυρτός συνδυασμός των z και y (δύο ακραίων σημείων του K)

Αν $|\mathrm{B}|\geq 2$, τότε επειδή $\dim Y<n$ από την επαγωγική υπόθεση το $y\in\mathrm{B}$ είναι κυρτός συνδυασμός το πολύ n ακραίων σημείων του B, άρα και του K. Επειδή το x είναι κυρτός συνδυασμός των z και y έπεται το συμπέρασμα.]



8) Έστω X διανυσματικός χώρος $\mathrm{K}\subseteq X$ κυρτό και $f:X\to R$ συνάρτηση. Η f λέγεται κυρτή αν $f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathrm{K}$ και κάθε $\lambda\in[0,1]$. Έστω $f:\mathrm{K}\to R$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) $f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$, όπου $x_1,\dots,x_n\in\mathrm{K}$ και $\lambda_k\geq 0$, $k=1,2,\dots,n$ ώστε $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$.

(β) Αν $X = R^n$, $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό συμπαγές και η $f : X \to R$ συνεχής κυρτή συνάρτηση τότε η f επιτυγχάνει την μέγιστη τιμή της σε ένα ακραίο σημείο του K.

[Υπόδειξη: Για το (β) . Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Καραθεοδωρή (άσκηση 7).]

9) Έστω X τ.δ.χ. και $\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_n$ κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του X τότε η κυρτή θήκη $co\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{B}_k\right)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X .

[Υπόδειξη. Το σύνολο $\mathrm{A} = \left\{\sum_{k=1}^{n} t_k y_k : t_k \geq 0, y_k \in \mathrm{B}_k, k \leq n, \sum_{k=1}^{n} t_k = 1\right\}$ είναι κυρτό και προφανώς περιέχεται στο $co\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{B}_k\right)$. Επειδή A κυρτό και $\mathrm{B}_k \subseteq \mathrm{A}$ για κάθε $k = 1,2,\dots,n$, έπεται ότι $\mathrm{A} = co\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{B}_k\right)$.

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\Phi : \mathrm{B}_1 \times \dots \times \mathrm{B}_n \times S_n \to \mathrm{A}$ η οποία ορίζεται στην απόδειξη της άσκησης 5, είναι συνεχής και επί του A]

10) Ένας χώρος με νόρμα $\left(X, \|\cdot\|\right)$ λέγεται γνήσια κυρτός (ή η νόρμα του X λέγεται γνήσια κυρτή) αν $\|tx + (1-t)y\| < 1$, οποτεδήποτε x και y είναι διαφορετικά σημεία της S_X και $0 < t < 1$. Για ένα χώρο με νόρμα $\left(X, \|\cdot\|\right)$ αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ο X είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν κάθε $x \in S_X$ είναι ακραίο σημείο της, αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in X$ ώστε, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ έπεται ότι τα διανύσματα x και y ανήκουν στην ίδια ημιευθεία από το $0 \in X$. (Δηλαδή το ένα από τα δύο είναι μη αρνητικό πολλαπλάσιο του άλλου.)

(β) Συμπεράνατε ότι ο χώρος Banach ℓ_p, $1 < p < +\infty$ είναι γνήσια κυρτός και ότι οι ℓ_1, ℓ_∞ και c_0 δεν είναι γνήσια κυρτοί.

[Υπόδειξη. Για το (α). Το γεγονός ότι ο X είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν κάθε $x \in S_X$ είναι ακραίο σημείο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ έπεται αμέσως από τους αντίστοιχους ορισμούς. Έστω ότι ο X είναι γνήσια κυρτός και ότι $x, y \in X$ με $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Μπορούμε να υποθέσομε ότι $1 = \|x\| \leq \|y\|$. Έστω $z = \dfrac{y}{\|y\|}$. Τότε $2 \geq \|x+z\| = \left\|x + y - \left(1 - \dfrac{1}{\|y\|}\right)y\right\|$

$\geq \|x+y\| - \left(1 - \dfrac{1}{\|y\|}\right)\|y\| = \|x\| + \|y\| - \|y\| + 1 = 2$. Άρα $\dfrac{\|x+z\|}{2} = 1$. Επειδή $x, z \in S_X$, έπεται ότι $x = z = \dfrac{y}{\|y\|}$. Αντιστρόφως αν x και y είναι διαφορετικά στοιχεία της S_X τότε τα x και y δεν μπορεί να ανήκουν στην ίδια ημιευθεία από το $0 \in X$, από όπου έπεται ότι $\|x+y\| < \|x\| + \|y\| = 2$ και άρα $\dfrac{\|x+y\|}{2} < 1$ και ο χώρος είναι γνήσια κυρτός.]

11) (α) Έστω X και Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός $1-1$ τελεστής. Αποδείξτε ότι αν ο Y είναι γνήσια κυρτός τότε ο X δέχεται ισοδύναμη γνήσια κυρτή νόρμα.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach X δέχεται ισοδύναμη γνήσια κυρτή νόρμα.

[Υπόδειξη. Για το (α) . Έστω $\|\cdot\|_1$ η νόρμα του X και $\|\cdot\|_2$ η γνήσια κυρτή νόρμα του Y. Θέτομε $\|x\| = \|x\|_1 + \|T(x)\|_2$, $x \in X$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι μια γνήσια κυρτή ισοδύναμη νόρμα επί του χώρου X. Για το (β). Έστω $\{x_n^* : n \geq 1\}$ μια ασθενώς * πυκνή ακολουθία στην $\hat{B}_{X^*}$. Ορίζουμε έναν τελεστή $T : X \to \ell_2$ θέτοντας $T(x) = \left(\dfrac{x_n^*(x)}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Αποδείξτε ότι ο T είναι γραμμικός φραγμένος και $1-1$. Επειδή ο χώρος Hilbert είναι γνήσια κυρτός, από το (α) έχουμε το συμπέρασμα. Πρβλ επίσης και την απόδειξη του Λήμματος 4.2.5].

12) Έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του Ευκλειδείου επιπέδου R^2. Αποδείξτε ότι το σύνολο $ex(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του K.

[Υπόδειξη. Αν $K^0 = \varnothing$ τότε το K περιέχεται σε μια ευθεία του R^2 (άσκηση 6) και το αποτέλεσμα είναι προφανές. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K^0 \neq \varnothing$. Από την άσκηση 2 έχουμε ότι $ex(K) \subseteq BdK$. Αποδείξτε ότι το $ex(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (συμπαγούς συνόλου) BdK.]

Παράρτημα 1

Έστω X χώρος Banach και $x_1,\dots,x_n \in X$, $f_1,\dots,f_n \in X^*$ ώστε $f_k(x_\lambda)=\delta_{k,\lambda}$, $k,\lambda=1,2,\dots,n$. Τότε το σύνολο $\{(x_k, f_k): k=1,2,\dots,n\}$ λέγεται ότι είναι ένα διορθογώνιο σύστημα στον X . Ένα διορθογώνιο σύστημα $\{(x_k, f_k): k=1,2,\dots,n\}$ του X , λέγεται ότι είναι μία Auerbach βάση για τον X αν το $\{x_1,\dots,x_n\}$ είναι μια βάση (Hamel) για τον X και επιπλέον ισχύει ότι, $\|x_k\|=\|f_k\|=1$, $k=1,2,\dots,n$.

Λήμμα (Auerbach) Έστω X χώρος Banach πεπερασμένης διάστασης n . Τότε υπάρχει μια Auerbach βάση στον X .

Απόδειξη Η βασική ιδέα είναι να εντοπίσουμε μια αλγεβρική βάση $e_1,\dots,e_n$ του X διανυσμάτων νόρμας ίσης με 1 ώστε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου $[0,e_1]+[0,e_2]+\dots+[0,e_n]$ ($=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k : 0\le \lambda_k \le 1, k=1,2,\dots,n\right\}$) να είναι μέγιστος. Έστω $x_1,\dots,x_n$ μια αλγεβρική βάση του χώρου X . Θεωρούμε την απεικόνιση $(u_1,\dots,u_n)\in X^n \to |\det(u_1,\dots,u_n)|\in R$, όπου $\det(u_1,\dots,u_n)$ είναι η ορίζουσα της οποίας η j στήλη είναι συντεταγμένες του u_j ως προς την βάση $\{x_1,\dots,x_n\}$

($u_j=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,j}x_k$, $j=1,2,\dots n$). Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής και συνεπώς επιτυγχάνει μέγιστη τιμή σε ένα σημείο έστω $(e_1,\dots,e_n)$ του συμπαγούς συνόλου $\hat{B}_X\times\dots\hat{B}_X$.

Επειδή οι ορίζουσες είναι γραμμικές απεικονίσεις των στηλών τους έπεται ότι $\|e_k\|=1$, για κάθε $k=1,2,\dots,n$. Επίσης παρατηρούμε ότι η $n-$ άδα διανυσμάτων $(u_1,\dots,u_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη αν και μόνο αν $\det(u_1,\dots,u_n)\ne 0$. Έτσι η $n-$ αδα $(e_1,\dots,e_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Για κάθε $k=1,2,\dots,n$ ορίζουμε ένα $e_k^*\in X^*$ ως εξής: $e_k^*(x)=\dfrac{\det(e_1,\dots,e_{k-1},x,e_k,\dots,e_n)}{\det(e_1,\dots,e_n)}$, $x\in X$. Έπεται εύκολα ότι, $e_k^*\in\hat{B}_{X^*}$ και ότι $e_k^*(e_\lambda)=\delta_{k,\lambda}$, για $k,\lambda=1,2,\dots,n$. Επομένως το σύνολο $\{(e_k,e_k^*): k=1,2,\dots,n\}$ είναι μία βάση Auerbach για τον X .

Παρατηρήσεις: Μια αναδιατύπωση του λήμματος του Auerbach είναι ότι αν X είναι ένας χώρος Banach διάστασης n , τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός

$T: X\to R^n$ ώστε (1) $\|T(x)\|_\infty \le \|x\| \le \|T(x)\|_1$ για κάθε $x\in X$.

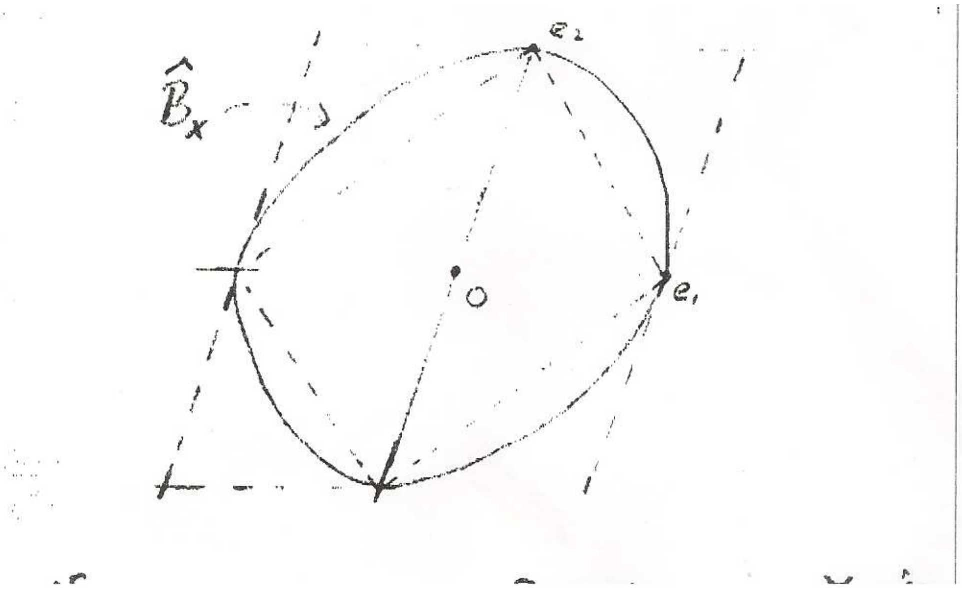
(Πράγματι, αν $\left\{\left(e_k, e_k^*\right): k=1,2,\ldots,n\right\}$ είναι μια βάση Auerbach για τον X και $x \in X$

τότε $x=\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ και άρα $\|x\| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|e_k\| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$. Επίσης για κάθε $k=1,2,\ldots,n$ έχουμε $|\lambda_k| = |e_k^*(x)| \le \|e_k^*\| \cdot \|x\| = \|x\|$, επομένως $\max\{|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_n|\} \le \|x\|$. Θέτομε

$T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$)

Παρατηρούμε ότι η (1) ισοδυναμεί με το ότι, (2) $T\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_1^n}\right) \subseteq \hat{\mathrm{B}}_X \subseteq T\left(\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty^n}\right)$

Όπου $\hat{\mathrm{B}}_{\ell_1^n}$, $\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty^n}$ είναι οι κλειστές μοναδιαίες σφαίρες των ℓ_1^n, ℓ_∞^n, αντίστοιχα. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι σε ένα χώρο Banach διάστασης n, μπορεί να επιλεγεί ένα σύστημα συντεταγμένων $e_1,\ldots,e_n$ ώστε η $conv(\pm e_1,\ldots,\pm e_n)$ να περιέχεται στην $\hat{\mathrm{B}}_X$ η οποία με τη σειρά της περιέχεται στον κύβο $[-e_1,e_1]+\ldots+[-e_n,e_n]$.



<u>Πόρισμα</u> Έστω X χώρος Banach και Y ένας $n-$ διάστατος υπόχωρος του X. Τότε υπάρχει μια γραμμική προβολή $P: X \to Y \subseteq X$ ώστε $\|P\| \le n$.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\left\{\left(e_k, e_k^*\right): k=1,2,\ldots n\right\}$ μια βάση Auerbach του X. Επεκτείνουμε κάθε e_k^* (με την βοήθεια του θεωρήματος Hahn-Banach) σε ένα στοιχείο του S_{X^*} διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό. Κατόπιν ορίζουμε την απεικόνιση

$$P: X \to Y : P(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k \ , \ x \in X \ .$$

Παρατηρούμε ότι η P είναι πράγματι μια προβολή και $\|P(x)\| \le n\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

<u>Παρατήρηση</u> Το προηγούμενο αποτέλεσμα επιδέχεται ουσιαστική βελτίωση. Έτσι μπορεί να αποδειχθεί ότι αν Y είναι υπόχωρος του χώρου Banach X με $\dim Y = n$, τότε υπάρχει προβολή $P : X \to Y \subseteq X$ ώστε $\|P\| \leq \sqrt{n}$. (Θεώρημα Kadec- Snobar, δες το [F-H-H-M-Z]σελίδα 320.)

Παράρτημα 2

Παρατηρήσεις, ασκήσεις και Διορθώσεις

Παράγραφος 1

1) Σελίδα , 1: Παρατηρούμε τα ακόλουθα για το χώρο πηλίκο X/Y :

(α) $Y=\{0\} \Rightarrow X/Y \cong X$ και

(β) $X=Y \Rightarrow \qquad X/Y \cong \{0\}$

Επίσης από τον τύπο (1) έπεται ιδιαίτερα ότι : $\left\|\hat{x}\right\| \le \|x\|, x \in X$.

2) Σελίδα 2. Το θεώρημα 1.5 και το Λήμμα 1.3 είναι καλύτερα να συγχωνευθούν στο ακόλουθο,

Θεώρημα: Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $\pi: X \to X/Y$ η κανονική απεικόνιση τότε έχουμε:

1) $\|\pi(x)\| \le \|x\|, x \in X$ και άρα $\|\pi\| \le 1$. Ιδιαίτερα η π είναι συνεχής.
2) $\pi(B_X) = B_{X/Y}$ και άρα η π είναι ανοικτή απεικόνιση.
3) Αν $Y \ne X$, τότε $\|\pi\| = 1$.

Παρατηρούμε ότι, αν υποθέσουμε ότι ο X είναι χώρος Banach τότε από το θεώρημα 1.10 και ο X/Y θα είναι χώρος Banach και συνεπώς ο ισχυρισμός (2) είναι συνέπεια (και) του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης.

3)Σελίδα, 4, γραμμή -5. Διορθώστε σε « $z \in \hat{B}_{X/Y}$ με $\|z\| = 1$».

4)Σελίδα 7:

Γραμμή , 11. Συμπληρώστε σε, « Έστω $z_{n_i} \in \hat{x}_{n_i}$, από την παρατήρηση 1.9 (β)»

Γραμμή, -6. Διορθώστε σε « Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $k_0 \in N : \frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$. Αν $\lambda > \mu \ge k_0 + 1$ ».

5)Σελίδα, 9:

Γραμμές 3, 6, 9 , αντικατάστησε το T με το F .

6) Γραμμή , 13, αντικατάστησε , « ο T είναι φραγμένος» με το « ο F είναι φραγμένος».

Δεύτερη απόδειξη του ισχυρισμού III (Ο F είναι φραγμένος με $\|F\| = \|T\|$.)

$\|T\| = \sup\limits_{\|x\|<1}\|T(x)\| = \sup\limits_{\|x\|<1}\|F(x+KerT)\| =$ (με χρήση του λήμματος 1.3)

$= \sup\limits_{\|x+KerT\|<1}\|F(x+KerT)\| = \|F\|.$

Σημειώνουμε ότι η απόδειξη του γεγονότος ότι ο τελεστής F είναι φραγμένος δεν χρειάζεται την υπόθεση ότι ο X είναι πλήρης χώρος με νόρμα (χώρος Banach).

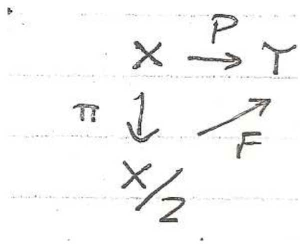
7)Σελίδα , 10: Πρβλ. την απόδειξη του Πορίσματος 1.13 με την άσκηση 11 (σελ. 30) της παραγράφου 3.

<u>Παράγραφος 2</u>

1)Σελίδες, 11, 12, 13, παρατηρήσεις: Έστω $P: X \to Y \subseteq X$ γραμμική προβολή. Τότε η P ταυτίζεται ουσιαστικά με την απεικόνιση πηλίκο $\pi: X \to X/Z$, όπου $Z = KerP$.

Πράγματι, ορίζουμε, $F: X/Z \to Y : F(x+Z) = P(x), x \in X$. Τότε η απεικόνιση F είναι αλγεβρικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων X/Z και Y.

Δείτε και το διάγραμμα $P = Fo\pi$



Ανάλογα, αν ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y κλειστός υπόχωρος του X και $P: X \to Y \subseteq X$ φραγμένη προβολή με $Z = KerP$, τότε η $\pi: X \to X/Z$ είναι βέβαια φραγμένη (με $\|\pi\| \leq 1$) και «ταυτίζεται» με την P.

Στην περίπτωση αυτή η απεικόνιση $F: X/Z \to Y$ (με $F(x+Z) = P(x), x \in X$) είναι τοπολογικός ισομορφισμός και οι χώροι με νόρμα X/Z και Y είναι (τοπολογικά)ισόμορφοι.(Πρβλ την Πρόταση 1.12 καθώς και την άσκηση 10.)

2) Σελίδα 15, γραμμές -8 και- 9. Συντομότερα μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$F_k(x-y) = F_k(x) - F_k(y) = F_k(x) - \Lambda_k(y) = F_k(x) - F_k(x) = 0$.

3)Σελίδα 16: Σχετικά με την παρατήρηση 2.7.1 σημειώνουμε ότι αν $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ τότε η άλγεβρα του δίσκου $A\left(\bar{D}\right)$ (δηλαδή όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \bar{D} \to C$ ώστε $f\,|_D$ είναι ολόμορφη συνάρτηση) μπορεί να ταυτισθεί με τον κλειστό υπόχωρο του $C(T)$ όπου $T = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\} =$ (ο κλειστός μοναδιαίος κύκλος) , που παράγεται από το σύνολο $\{e^{in\theta} : n \geq 0\}$. Αυτός είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f \in C(T)$ ώστε $\hat{f}(n) = 0, n = -1,-2,-3,....$, όπου $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$ είναι ο

$n-$οστος συντελεστής Fourier της f. Αποδεικνύεται ότι η άλγεβρα του δίσκου $A\left(\bar{D}\right)$

(ταυτιζόμενη όπως παραπάνω με τον υπόχωρο του $C(T)$) δεν είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του χώρου Banach $C(T)$. (Πρβλ το βιβλίο [R] Σ. 128-130.)

4)Σελίδα 16: Σχετικά με την παρατήρηση 2.7 (2), σημειώνουμε ότι αν ο H είναι χώρος Hilbert και ο F είναι κλειστός υπόχωρος του H, τότε ο χώρος πηλίκο H/F (με τη νόρμα πηλίκο) είναι ισομετρικός με το ορθογώνιο συμπλήρωμα $F^{\perp}$ του F και συνεπώς είναι χώρος Hilbert. (Πράγματι, η απεικόνιση $P: H \to H : P(x) = x - y$, όπου $y \in F$ το μοναδικό στοιχείο του F ώστε $\|x-y\| = d(x,F)$ είναι ορθογώνια προβολή με $P(H) = F^{\perp}$ και $KerP = F$. Έστω $\pi : H \to H/F$ η κανονική απεικόνιση τότε, όπως έπεται από την πρόταση 1.12, η $\phi : H/F \to F^{\perp}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός, η οποία είναι επί πλέον ισομετρία. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

Παράγραφος 3.1.

1)Σχετικά με το πόρισμα 3.1.12, παρατηρούμε ότι ο μονοδιάστατος υπόχωρος $F = \langle x_0 \rangle$ του E είναι επιπλέον κλειστός. (Πρβλ. την άσκηση 7)

2)Σχετικά με την άσκηση 5, πρβλ. και την πρόταση 3.14 (ιχ).

3)Σχετικά με την άσκηση 11, σημειώνουμε ότι η ακόλουθη ασθενέστερη μορφή του ισχυρισμού (α) αποδεικνύεται ευκολότερα: (α’) Έστω A κυρτό υποσύνολο του τ.δ.χ. E. Αν $x \in A^0$ και $y \in A$ τότε $[x,y) \subseteq A^0$. (Άσκηση).

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του (α’) (την οποία θα χρησιμοποιήσουμε και στην παράγραφο 5) , είναι η ακόλουθη:

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x, y \in S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ με $x \neq y$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ ώστε το $z = \lambda x + (1-\lambda) y \in S_X$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[x,y] \subseteq S_X$. (Άσκηση.)

Παράγραφος 3.2.

1)Σελίδα 34, γραμμή 3:

Αντί του, «τότε $P_k(y-x) \le \varepsilon \le \varepsilon_k - P_k(x-y), k=1,2,\dots,n$ »

Να γραφεί « τότε $P_k(y-x) < \varepsilon \le \varepsilon_k - P_k(x-y), k=1,2,\dots,n$ ».

2)Σελίδα 35, γραμμές 5 και 6: Διαγράψτε το « ότι $x_a + y_a \xrightarrow{\tau} x+y$ και $\lambda_a x_a \xrightarrow{\tau} \lambda x$ »

3) Σελίδα 36, παράδειγμα 3.26 (2): Παρατηρείστε ότι ημινόρμα $p_\gamma(f) = |f(\gamma)|$,

προέρχεται από το γραμμικό συναρτησοειδές $\delta_\gamma : E \to K$ ώστε $\delta_\gamma(f) = f(\gamma)$.

Παράγραφος 3.3

1)Σελίδα 41: παρατηρούμε ότι οι ισχυρισμοί (ι)-(ιv) της Πρότασης 3.3.3 είναι επίσης ισοδύναμοι με τον ακόλουθο ισχυρισμό, (ν) p συνεχής σε κάποιο $x \in E$. (Άσκηση.)

2)Σχετικά με το θεώρημα 3.3.7 παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(α) $p_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in tA \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow H_A(x) = (0,+\infty)$).

(β) Αν ο E είναι πραγματικός χώρος τότε η υπόθεση ότι το κυρτό σύνολο A είναι ισορροπημένο στον ισχυρισμό (ιιι) μπορεί να αντικατασταθεί από την (ισοδύναμη) υπόθεση ότι το A είναι συμμετρικό, δηλαδή $x \in A \Rightarrow -x \in A$.

3)Σελίδα 45, γραμμή 4:

Αντί του , « $x \in H_B(x)$ », να γραφεί « $t \in H_B(x)$ ».

4)Σελίδα 45: Σχετικά με την παρατήρηση (2), σημειώνουμε ότι αν το $X \subseteq S_1$ δεν είναι συμμετρικό τότε βέβαια και το κυρτό $A = \hat{B}(0,1) \setminus X$ δεν είναι συμμετρικό (ισορροπημένο). Παρόλα αυτά το συναρτησοειδές του Minkowski p_A του A είναι (η Ευκλείδεια) νόρμα.

Επίσης χρήσιμη είναι και η ακόλουθη απλή παρατήρηση:

Αν E είναι διανυσματικός χώρος και $A \subseteq B \subseteq E$ κυρτά και απορροφούντα υποσύνολα του E , τότε $p_B \le p_A$.

5)Σελίδα 46: Παρατηρούμε ότι αν το σύνολο U της Πρότασης 3.3.8 δεν είναι ισορροπημένο, τότε το υπογραμμικό συναρτησοειδές p_U δεν είναι (από την Πρόταση 3.2.4) ημινόρμα.

Έτσι , επιλέγοντας το ανοικτό και κυρτό U να μην είναι ισορροπημένο, έχουμε παράδειγμα υπογραμμικού συναρτησοειδούς $P \geq 0$, το οποίο δεν είναι ημινόρμα.

6)Σελίδα 53-54: Σημειώνεται ότι η ιδιότητα (α) του παραδείγματος 3.3.17 αποδεικνύεται ότι ισχύει (με τον ίδιο τρόπο) και για τον χώρο c_0 των μηδενικών ακολουθιών με την τοπολογία T_P της σύγκλισης κατά σημείο.

7) Σελίδα 55: Από την πρόταση 3.3.18 έπεται ιδιαίτερα ότι αν $\Lambda_1, \Lambda : E \to K$ είναι γραμμικά συναρτησοειδή ώστε $Ker\Lambda_1 \subseteq Ker\Lambda$, τότε υπάρχει $a \in K$ ώστε $\Lambda = a\Lambda_1$ Δηλαδή τα Λ_1 και Λ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

8) Σελίδα 58, άσκηση 10:Το αποτέλεσμα που περιγράφεται στην άσκηση αυτή δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της τοπικής κυρτότητας του χώρου E . Για ένα παράδειγμα πρβλ. την άσκηση 2 (σελ.77-78) της παραγράφου 3.5, καθώς και την υπόδειξή της.

<u>Παράγραφος 3.4</u>

1)Σελίδα 62, γραμμή 3: Διορθώστε σε, « και Μ <u>τυχών</u> θετικός».

2)Μια ποιο άμεση απόδειξη του γεγονότος ότι ο $\left(C(\Omega), T_C\right)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος (παράδειγμα 3.4.1) έπεται και από το κλασσικό προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass.

<u>Θεώρημα (</u> Weierstrass) Έστω $K \subseteq R^d$ συμπαγές τότε η άλγεβρα των περιορισμών των πολυωνύμων $\left\{p\left(x_1, ..., x_d\right):\ p \text{ πολυώνυμο } d - \text{μεταβλητών}\right\}$ επί του K είναι πυκνή στο χώρο Banach $C(K)$.

Από το αποτέλεσμα αυτό εύκολα αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές περιορισμένων επί του Ω είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\left(C(\Omega), T_C\right)$.

3)Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για το παράδειγμα 3.4.3, όπου τα πολυώνυμα $p : I \to R$ με ρητούς συντελεστές είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του χώρου $C^{\infty}(I)$, με την τοπολογία T που ορίζεται εκεί. Το βασικό επιχείρημα περιέχεται στο ακόλουθο λήμμα που είναι (πάλι) συνέπεια του προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstrass.

<u>Λήμμα</u> . Έστω $-\infty < a < b < +\infty$. Αν $f : [a,b] \to R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση της κλάσης $C^N (N \geq 1)$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n), ώστε για κάθε $k = 1, 2, ..., N$ να ισχύει $p_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(k)}$, ομοιόμορφα επί του $[a,b]$.

Η απόδειξη του Λήμματος αφήνεται ως άσκηση. Σημειώνουμε ότι η παρούσα παρατήρηση μπορεί να θεωρηθεί ως (εκτενέστερη) απόδειξη για την άσκηση 10 της παραγράφου 3.5.

4)Στα παραδείγματα 3.4.2 και 3.4.3 χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη γενική παρατήρηση: Έστω (E,T) απειροδιάστατος (τοπικά κυρτός) τ.δ.χ. με την ιδιότητα Heine-Borel τότε η τοπολογία του E δεν επάγεται από νόρμα. Για την απόδειξη πρβλ. Τα θεωρήματα 3.3.15-16 και την παρατήρηση που ακολουθεί το θεώρημα 3.3.16.

<u>Παράγραφος 3.5</u>

1)Σελίδα 71, γραμμή -2. Να γραφεί$\left(E_R,\|\cdot\|\right)$ αντί του $\left(E,\|\cdot\|\right)$.

2)Σελίδα 75, γραμμή 7: Συμπληρώστε την γραμμή 6 με τη φράση « f γραμμικό συναρτησοειδές και».

3)Σχετικά με το πόρισμα 3.5.3 αξίζει να παρατηρήσουμε τον δυϊσμό μεταξύ (συνεχών) γραμμικών συναρτησοειδών $\Lambda : E \to K$ και (συνεχών) ημινορμών $p : E \to [0,+\infty)$. Αν Λ γραμμικό συναρτησοειδές τότε $p = |\Lambda|$ είναι βέβαια ημινόρμα

(παράδειγμα 3.2.3 (1)) και αν p ημινόρμα (με $p \neq 0$) τότε (πόρισμα 3.5.3) υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές Λ (με $\Lambda \neq 0$) ώστε $|\Lambda| \leq p$.

4)Σχετικά με το πόρισμα 3.5.10, παρατηρούμε ότι η απόδειξή του απλοποιείται με τη χρήση του λήμματος 3.3.18. Πράγματι, $Kerf = M_0 \subseteq Ker\left(\Lambda|_M\right)$, συνεπώς υπάρχει $a \in K$ ώστε $\Lambda|_M = af$, επειδή $\Lambda(x_0) = f(x_0) = 1$, έπεται ότι $a = 1$.

Επίσης σημειώνουμε ότι, μια άλλη απόδειξη αυτού του πορίσματος είναι δυνατή, με χρήση της αναλυτικής μορφής του θεωρήματος Hahn-Banach (θεώρημα3.5.2) και της άσκησης 5 της παραγράφου3.3 (Άσκηση).

5)Σχετικά με την άσκηση 4 (γ) (σελίδα 78), σημειώνουμε ότι ο υποκείμενος πραγματικός χώρος E_R του E_C είναι ο $E \times E$ με την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού περιορισμένη στο R.

<u>Παράγραφος 4.1</u>

1)Σελίδα 82, παρατήρηση (5): Αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα τότε οι περιοχές του $0 \in X$ δεν είναι φραγμένα σύνολα (ούτε και) στην ασθενή τοπολογία, εφόσον τότε ο X θα ήταν χώρος με νόρμα (θεώρημα 3.3.15) και συνεπώς μετρικοποιήσιμος.

2)Σελίδα 82, γραμμή -5: Διορθώστε σε $0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_k < \ldots$

3)Σελίδα 84, γραμμή 14: Διορθώστε σε, $\sum_{j=1}^{N_1} |x_1(j)| \geq \frac{9}{10}$

4)Σελίδα 85: Σχετικά με την απόδειξη του θεωρήματος 4.13 (Mazur), παρατηρούμε ότι το γεγονός ότι το σύνολο $U=\{x\in X:\operatorname{Re}\Lambda(x)<\lambda_1\}$ είναι ασθενώς ανοικτό προκύπτει αμέσως (και) από τον ορισμό της ασθενούς τοπολογίας.

5)Σελίδα 88, γραμμή 6: Διορθώστε σε, $\Phi\left(x_i^*\right)\xrightarrow{\tau}\Lambda$.

6)Σελίδα 90, γραμμή 5: Συμπληρώστε την γραμμή 5 με « $\Leftrightarrow \varphi(x_i)\xrightarrow{w^*}\varphi(x)$ ».

7) Σελίδα 90, γραμμή- 7: διορθώστε την ανισότητα σε $\operatorname{Re}x^*\left(x_0^*\right)\le\lambda_1<\lambda_2\le\operatorname{Re}x_0^{**}\left(x_0^*\right)$.

8)Σελιδα 92, γραμμές 2-6: Διορθώστε σε « $T(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}y$. Για κάθε $y^*\in Y^*$ έχουμε $\left(y^*oT\right)(x_n)=y^*\left(T(x_n)\right)\to y^*(y)$, εφόσον $T(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}y$ και $\left(y^*oT\right)(x_n)\to\left(y^*oT\right)(x)=y^*\left(T(x)\right)$, εφόσον $y^*oT\in X^*$ και $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$.»

9) Στην απόδειξη της Πρότασης4.1.14 χρησιμοποιήσαμε το ακόλουθο στοιχειώδες αποτέλεσμα: Αν $\{A_i:i\in I\}$ είναι οικογένεια μη κενών υποσυνόλων του R και $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ τότε $\sup A=\sup_{i\in I}\left(\sup A_i\right)$.

Παράγραφος 4.2

1)Σχετικά με την παρατήρηση 4.2.5 (2), σημειώνουμε ότι το γεγονός ότι κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι norm φραγμένο, έπεται και απευθείας όπως στην απόδειξη της κατεύθυνσης « $\Rightarrow$ » του θεωρήματος 4.2.4

2)Το σχόλιο μετά τον ορισμό 4.2.11, συμπληρώνεται ως εξής: Αν $A\subseteq H$ κλειστό και κυρτό, τότε, για κάθε $x\in H$ υπάρχει <u>ακριβώς ένα</u> $y\in A$ έτσι ώστε $d(x,y)=d(x,A)$.

3)Ο ισχυρισμός (α) της άσκησης (1) (σελ. 100), δεν χρειάζεται την υπόθεση ότι ο X είναι χώρος Banach . Η υπόθεση αυτή χρειάζεται στον ισχυρισμό (β) της ίδιας άσκησης. (Γιατί;)

Επίσης σημειώνουμε ότι ο ισχυρισμός (α) είναι συνέπεια της ασθενούς κάτω ημισυνέχειας της νόρμας (πρβλ. και την άσκηση 16 αυτής της παραγράφου)

Αντίστοιχα ο (β) είναι συνέπεια της ασθενούς * κάτω ημισυνέχειας της (δυϊκής) νόρμας του X^*. Περαιτέρω ο (α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να απλοποιήσει την απόδειξη του θεωρήματος 4.2.12 (Πώς;)

4)Σχετικά με τον ισχυρισμό (β) της άσκησης 14, αυτής της παραγράφου, παρατηρούμε ότι αν ο X είναι χώρος Banach πεπερασμένης διάστασης, τότε βέβαια $X\cong X^*$, αλλά ο X δεν είναι αναγκαία ισομετρικός με τον ℓ_2^n, όπου $n=\dim X$.

Παράγραφος 5.

1)Σχετικά με το παράδειγμα 5.2 (3), σημειώνουμε ότι αν K είναι ανοικτό και κυρτό υποσύνολο ενός τ.δ.χ. E, τότε το K δεν έχει ακραία σημεία. Ιδιαίτερα ο ίδιος ο E δεν έχει ακραία σημεία.

2)Σχετικά με το παράδειγμα 5.4 (4), παρατηρούμε περαιτέρω ότι, αν $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x \in S_X$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ με $0<\lambda<1$ και $y,z \in \hat{B}_X$ με $y \neq z$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[y,z] \subseteq S_X$. (Πρβλ και τις παρατηρήσεις της παραγράφου 3.1 του παρόντος παραρτήματος.) Ειδικότερα παρατηρούμε ότι αν $X = \ell_2^2$, τότε κάθε μη κενό υποσύνολο της $S_X = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι ακραίο υποσύνολο της $\hat{B}_X = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, εφόσον $ex\left(\hat{B}_X\right) = S_X$.

3)Γραμμή -1 , σελίδα 111 (απόδειξη του θεωρήματος Krein – Milman) : Διορθώστε σε « από τους ισχυρισμούς (β) και (δ) της ίδιας πρότασης έχουμε το συμπέρασμα».

4)Στην παρατήρηση 5.7 (1) της σελίδας 112, προσθέστε και το ακόλουθο σχόλιο: Έτσι στον χώρο $\ell_p, 0<p<1$, κάθε συμπαγές και κυρτό σύνολο έχει ακραία σημεία, εφόσον από την άσκηση 2 (σελίδα 77) της παραγράφου 3.5, ισχύει ότι $\ell_p^* = \ell_\infty$.

5)Σελίδα 114, γραμμή- 7 (παράδειγμα 5.11 (1)): Διορθώστε σε $y(n) = \begin{cases} x(n), n \neq n_0 \\ x(n_0) + \frac{1}{4}, n = n_0 \end{cases}$

και $z(n) = \begin{cases} x(n), n \neq n_0 \\ x(n_0) - \frac{1}{4}, n = n_0 \end{cases}$.

6)Το παράδειγμα που περιγράφεται στην παρατήρηση 5.16 μας πληροφορεί επιπλέον ότι, αν X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach και $K \subseteq X$ είναι norm συμπαγές τότε η $co(X)$ είναι σχετικά αλλά όχι αναγκαία συμπαγές υποσύνολο του X , όπως συμβαίνει στις πεπερασμένες διαστάσεις.

7)Η άσκηση 7 (θεώρημα Καραθεοδωρή)έπεται ιδιαίτερα ότι στην περίπτωση των πεπερασμένων διαστάσεων, ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο $K \subseteq R^n$, ισούται με την κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του, δηλαδή $K = co(ex(K))$ (η κλειστότητα δεν χρειάζεται). Σημειώνουμε ότι και το (σχετιζόμενο και) ενδιαφέρον Λήμμα 5.13 αποδίδεται επίσης στον Καραθεοδωρή.

8)Σχετικά με την άσκηση 10 (σελίδα 126), η υπόδειξη της άσκησης μας πληροφορεί επιπλέον ότι ένας χώρος με νόρμα $\left(X,\|\cdot\|\right)$ είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν $x,y\in S_X$ και $x\neq y \Rightarrow \|x+y\|<2$. (Πρβλ. και την παρατήρηση (2) παραπάνω).

Ασκήσεις

1) Έστω E διανυσματικός χώρος και $p_1,p_2,...,p_N$, ημινόρμες επί του E . Αποδείξτε ότι:

(α) Οι $\lambda\cdot p_1$ ($\lambda>0$), $p_1+p_2+...+p_N$, $\max\{p_1,p_2,...,p_N\}$ και $\left(p_1^{\lambda}+p_2^{\lambda}+...+p_N^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, $1\leq\lambda<+\infty$, είναι ημινόρμες επί του E .

(β) Οι $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\left(|x_2|+|x_3|\right)^2}$ και $\|x\|=\max\left(|x_1\pm x_2|,|x_2\pm x_3|,|x_1\pm x_3|\right)$, όπου , $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ είναι νόρμες επί του R^3. Γενικεύονται αυτές οι νόρμες στον R^n ;

γ) Έστω $\left(X,\|\cdot\|\right)$ και $\left(Y,\|\cdot\|\right)$ χώροι με νόρμα, $a,\beta,\gamma>0$ και $p\in[1,+\infty)$, τότε ο τύπος,

$\|(x,y)\|=\left[a\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)+\beta\cdot\max\left(\|y\|\cdot\gamma,\|x\|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$ όπου $(x,y)\in X\times Y$, ορίζει νόρμα επί του $X\times Y$.

[Υπόδειξη. Για το (α): Για την $\left(p_1^{\lambda}+...+p_N^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ χρησιμοποιήστε την ανισότητα Minkowski. Για τα (β) και (γ) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (α).]

2)α) Έστω (E,T) τοπικά κυρτός χώρος. Ένα κυρτό ισορροπημένο και φραγμένο υποσύνολο του E ονομάζεται δίσκος. Έστω F η γραμμική θήκη ενός δίσκου $D\subseteq E$. Αποδείξτε ότι το συναρτησοειδές του Minkowski $p_D:F\to R$ του D στον F είναι μια νόρμα.

(β) Έστω K κλειστό κυρτό ισορροπημένο και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X (το K ονομάζεται τότε ένας δίσκος Banach) και Y η γραμμική θήκη του K . Έστω $\|\cdot\|_K$ η νόρμα επί του Y η οποία ορίζεται από το συναρτησοειδές του Minkowski $p_K:Y\to R$

($\|x\|_K=p_K(x), x\in Y$). Αποδείξτε ότι ο $\left(Y,\|\cdot\|_K\right)$ είναι ένας χώρος Banach. Ποια είναι η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{B}_Y$ του Y ;

[Υπόδειξη: Για το (β): Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον $\left(Y,\|\cdot\|_K\right)$ τότε είναι και Cauchy στον X , έστω $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$. Αν U είναι κλειστή σφαίρα (με κέντρο O) στον $\left(Y,\|\cdot\|_K\right)$τότε είναι και κλειστό υποσύνολο του X . Έστω N φυσικός αριθμός με

$n, m \geq N \Rightarrow x_n - x_m \in U$. Τότε $x_n - x_0 \in U$ για κάθε $n \geq N$ άρα $x_0 \in Y$ και συνεπώς $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_K} x_0$.

3)Έστω $A \subseteq c_{oo}$ (= ο χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών) κυρτό και συμμετρικό σύνολο ώστε $e_n \in A, \forall n \geq 1$ (όπου (e_n) η συνήθης βάση του c_{oo}). Αποδείξτε ότι: (α) Το A είναι απορροφούν υποσύνολο του c_{oo} .

(β) Αν επιπλέον $A \subseteq [-1,1]^N$, τότε το συναρτησοειδές Minkowski p_A του A είναι νόρμα και ισχύει $\|x\|_\infty \leq p_A(x) \leq \|x\|_1, x \in c_{oo}$.

(Μάλιστα το A είναι ένας δίσκος στον (c_{oo}, T_p) .)

[<u>Υπόδειξη</u>: Για το (α): Έστω $x = \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \in c_{oo}$ ώστε $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k| \leq 1$. Τότε $x \in A$, εφόσον το A είναι απόλυτα κυρτό (πρβλ. την άσκηση 1 της παραγράφου 3.1). Για το (β): παρατηρούμε ότι αν $x \in c_{oo}$ τότε , $\|x\|_1 \leq 1 \Rightarrow x \in A \Rightarrow \|x\|_\infty \leq 1$.]

4)Έστω p_o, p_1, p_2 τρία μη συνευθειακά σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου R^2 . Θέτομε $A = \{p_i - p_j : 0 \leq i \neq j \leq 2\}$ και $K = c_o(A)$. Αποδείξτε ότι $ex(K) = A$.

[<u>Υπόδειξη</u> : Το K είναι ένα κυρτό εξάγωνο με κορυφές τα σημεία του A .]