Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι
Πρόχειρη Περίληψη Σημειώσεων

Α. Κ.

0 Εισαγωγικά

Ξεκινάμε[1] παραθέτοντας, χωρίς απαιτήσεις πληρότητας ή ιδιαίτερης μαθηματικής αυστηρότητας, μερικά προβλήματα της Κλασικής Ανάλυσης που οδηγούν στην αναγκαιότητα της αναθεώρησης της έννοιας της ολοκλήρωσης, του εμβαδού, του μήκους, δηλαδή ουσιαστικά στο πρόβλημα του μέτρου.

1. Σειρές Fourier – Πλήρωση
2. Εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος
3. Μήκος τόξου – Ευθυγραμμίσιμες καμπύλες
4. Ολοκλήρωση και διαφόριση: Το Θεμελιώδες Θεώρημα
5. Το πρόβλημα του Μέτρου

0.1 Σειρές Fourier – Πλήρωση

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση (γράφουμε: $f \in \mathcal{R}$).
Στην f αντιστοιχεί η *τυπική σειρά Fourier*:

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int} \tag{1}$$

(δηλ. η ακολουθία $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ των συντελεστών Fourier), όπου

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

Είναι γνωστό ότι ισχύει η ισότητα

$$\text{Parseval} \ : \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt. \tag{3}$$

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathcal{R} \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

[1] intro, 16/11/08

διατηρεί την «μέση τετραγωνική απόσταση».

Όμως η απεικόνιση αυτή, όπως αποδεικνύεται, δεν είναι επί. Δηλαδή υπάρχει $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ που δεν είναι ακολουθία συντελεστών Fourier καμμιάς $f \in \mathcal{R}$.

Εφόσον είναι γνωστό ότι ο χώρος $(\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2)$ είναι *πλήρης* ως προς την μετρική $\|(a_n) - (b_n)\|_2 \equiv \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2}$, έπεται ειδικότερα ότι ο $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{L^2})$ *δεν είναι πλήρης* ως προς την ψευδομετρική $\|f - g\|_{L^2} \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2\right)^{1/2}$.

Προκύπτουν δύο ερωτήματα:

- Τι είδους «συναρτήσεις» εμφανίζονται όταν θεωρήσουμε την πλήρωση του $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{L^2})$;
- Πώς μπορούμε να ολοκληρώσουμε αυτές τις «συναρτήσεις»; Ισχύει γι΄ αυτές η ισότητα Parseval;

0.2 Εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος

Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ το όριο $\lim_n f_n(t)$ υπάρχει (στο $\mathbb{R}$), οπότε ορίζει μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Τι είδους συναρτήσεις προκύπτουν από μια τέτοια διαδικασία;

Αν η σύγκλιση της (f_n) είναι *ομοιόμορφη* στο $[0,1]$, τότε η κατάσταση είναι η καλύτερη δυνατή: η συνάρτηση-όριο f είναι *συνεχής*.

Αν όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, το όριο μπορεί να κρύβει εκπλήξεις:

Υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) ώστε

(α) $\forall n \,\forall t, \quad 0 \le f_n(t) \le 1$
(β) για κάθε t η $(f_n(t))_n$ είναι φθίνουσα (άρα συγκλίνει)
(γ) η συνάρτηση-όριο f δεν είναι καν Riemann ολοκληρώσιμη.

Παρατηρούμε όμως ότι από τα (α) και (β) προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ολοκλήρωμα $I_n = \int_0^1 f_n$ υπάρχει, και ότι η ακολουθία (I_n) είναι φθίνουσα και μη αρνητική, άρα το όριο

$$\lim_n \int_0^1 f_n$$

υπάρχει, ενώ το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \lim_n f_n$$

ούτε καν ορίζεται.

Πρόβλημα Ποιά «μέθοδος ολοκλήρωσης» μπορεί να εξασφαλίσει την ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων όπως η $\lim_n f_n$; Υπό ποιές προϋποθέσεις εξασφαλίζεται επιπλέον η ισότητα

$$\lim_n \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_n f_n \qquad ;$$

0.3 Μήκος τόξου – Ευθυγραμμίσιμες καμπύλες

Θεωρούμε μια συνεχή καμπύλη στο επίπεδο, με παραμετρική μορφή

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$$

όπου οι $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχείς* συναρτήσεις.

Προσεγγίζουμε την γ με μια οικογένεια $\{\gamma_{\mathcal{P}}\}$ *πολυγωνικών καμπύλων* ως εξής: Η $\gamma_{\mathcal{P}}$ ορίζεται από μια διαμέριση $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ και είναι η πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία

$$(x(a), y(a)), (x(t_1), y(t_1)), \ldots, (x(b), y(b))$$

της γ. Το μήκος της $\gamma_{\mathcal{P}}$ είναι βεβαίως

$$\ell(\gamma_{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} (|x(t_k) - x(t_{k-1})|^2 + |y(t_k) - y(t_{k-1})|^2)^{1/2}.$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε

$$\ell(\gamma) \equiv \sup\{\ell(\gamma_{\mathcal{P}}) : \mathcal{P} \text{ διαμερ. του } [a, b]\} \in [0, +\infty]$$

και να ονομάζουμε την γ *ευθυγραμμίσιμη* όταν $\ell(\gamma) < +\infty$.

Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι η συνέχεια των x και y δεν είναι αρκετή για να εξασφαλίσει ότι $\ell(\gamma) < +\infty$ (Παράδειγμα;)

Είναι γνωστό ότι όταν οι x και y είναι (έστω κατά τμήματα) συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε η γ είναι ευθυγραμμίσιμη και μάλιστα

$$\ell(\gamma) = \int_a^b (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2)^{1/2} dt. \tag{4}$$

Πρόβλημα 1 Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες στις x και y ώστε η γ να είναι ευθυγραμμίσιμη.

Πρόβλημα 2 Όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες αυτές, έχει έννοια το ολοκλήρωμα στην (4); Και αν ναι, ισχύει η ισότητα;

Η απάντηση στο πρώτο πρόβλημα δίνεται από την έννοια της «συνάρτησης φραγμένης κύμανσης». Όταν οι x και y είναι φραγμένης κύμανσης, το ολοκλήρωμα στην (4) μπορεί να ορισθεί με κατάλληλη «μέθοδο ολοκλήρωσης». Η ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα. Μπορεί να επιτευχθεί με «αλλαγή παραμετρικής μορφής»: Αν η γ είναι ευθυγραμμίσιμη, υπάρχουν συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης x_1 και y_1 ώστε

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\} = \{(x_1(t), y_1(t)) : t \in [a, b]\}$$

$$\text{και} \quad \ell(\gamma) = \int_a^b (|x_1'(t)|^2 + |y_1'(t)|^2)^{1/2} dt.$$

0.4 Ολοκλήρωση και διαφόριση: Το Θεμελιώδες Θεώρημα

Ας γράψουμε τις δύο μορφές του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού (για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής):

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \tag{6}$$

Ερώτημα Για ποιές συναρτήσεις F ισχύει η (5);

Αν η F' είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η (5) ισχύει.

Όμως υπάρχουν παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων F που δεν έχουν παράγωγο σε *κανένα* σημείο του $[a,b]$.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν παραδείγματα διαφορίσιμων συναρτήσεων $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ που η F' υπάρχει μεν, αλλά δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Οι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει η (5) είναι οι λεγόμενες «απόλυτα συνεχείς» συναρτήσεις.

Επίσης, αν η f είναι «L^1-συνάρτηση» τότε (με την κατάλληλη «μέθοδο ολοκλήρωσης»), η (6) ισχύει «σχεδόν παντού».

0.5 Το πρόβλημα του Μέτρου

Η αντιμετώπιση όλων των προηγουμένων προβλημάτων οδηγεί στο λεγόμενο «πρόβλημα του μέτρου». Μια μορφή του είναι η ακόλουθη:

Πώς μπορεί κανείς να ορίσει τον «όγκο» των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, με τρόπο που να επεκτείνει τη γνωστή γεωμετρική έννοια του όγκου παραλληλεπιπέδου;

Θέλουμε δηλαδή να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$m_d:\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\to[0,+\infty] \qquad (\mathcal{P}\text{: το δυναμοσύνολο})$$

με τις ιδιότητες (περιοριζόμαστε στην περίπτωση $d=2$ για απλότητα)

$$\begin{array}{lll}
(a) & m_2([0,a]\times[0,b]) &= a\cdot b \quad \text{όταν } \ a,b\geq 0 \\
(b) & m_2\left(\bigcup_n E_n\right) &= \sum_n m_2(E_n) \quad \text{όταν τα } E_n\subseteq\mathbb{R}^2 \text{ είναι ξένα ανά δυο} \\
(c) & m_2(E+x) &= m_2(E) \quad \text{αν } E\subseteq\mathbb{R}^2,\ \text{για κάθε } \ x\in\mathbb{R}^2 \ \text{ και} \\
 & m_2(T(E)) &= m_2(E) \quad \text{για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό } T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2.
\end{array}$$

Παρατήρηση Ειδική περίπτωση της ιδιότητας (b) (που λέγεται *αριθμήσιμη προσθετικότητα*) είναι η ακόλουθη *πεπερασμένη προσθετικότητα*:

$$(b')\ m_d(E_1\cup E_2)=m_d(E_1)+m_d(E_2) \quad \text{όταν } E_1\cap E_2=\emptyset.$$

Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η (b) είναι αναγκαία για να αντιμετωπισθούν οριακές διαδικασίες (π.χ. εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος, διαφόριση αορίστου ολοκληρώματος κ.λπ.)· η (b') δεν αρκεί.

Όμως,

> *Δεν υπάρχει συνάρτηση $m_d:\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\to[0,+\infty]$ που ικανοποιεί τα $(a),(b),(c)$, ακόμα και στην περίπτωση $d=1$!*

Για ευκολία του γράφοντος, θα δώσουμε την *απόδειξη του ισχυρισμού* για την μοναδιαία περιφέρεια

$$S^1=\{e^{i2\pi t}:t\in[0,1)\}$$

στο μιγαδικό επίπεδο, αντί για την ευθεία $\mathbb{R}$. Η (a) τότε αντικαθίσταται από την εξής: το μήκος ενός τόξου $T=\{e^{i2\pi t}:t\in[0,b)\}$ είναι $m_1(T)=2\pi b$.

Έστω $\{q_1, q_2, \ldots\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $F \subseteq S^1$ που οι «στροφές» $F_n = e^{i2\pi q_n}F$ του F κατά γωνία $2\pi q_n$ διαμερίζουν την S^1 σε ξένα ανά δύο σύνολα:

$$S^1 = \bigcup_n F_n = \bigcup_n e^{i2\pi q_n}F, \qquad F_n \cap F_m = \emptyset \text{ όταν } n \neq m. \tag{7}$$

Αν υπάρχει τέτοιο σύνολο F, τότε η απεικόνιση m_1 αποκλείεται να ορίζεται στο σύνολο αυτό. Γιατί αν οριζόταν, τότε από την (c) θα είχαμε $m_1(F_n) = m_1(F)$ για κάθε n, οπότε, αν μεν $m_1(F) > 0$ τότε $m_1(S^1) = +\infty$ από την (b) λόγω της (7), και αν $m_1(F) = 0$ τότε $m_1(S^1) = 0$ πάλι από την (b). Και οι δύο αυτές εκδοχές έρχονται σε αντίθεση με την (a).

Δείχνουμε ότι τέτοιο σύνολο F υπάρχει:

Ορίζουμε $e^{i2\pi t} \sim e^{i2\pi s}$ αν $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi q}$ για κάποιο $q \in \mathbb{Q}$. Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην S^1, άρα διαμερίζει την S^1 σε κλάσεις ισοδυναμίας. Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής (!), επιλέγουμε έναν και μόνον έναν αντιπρόσωπο $e^{i2\pi t}$ από κάθε κλάση ισοδυναμίας, και ονομάζουμε $F \subseteq S^1$ το σύνολο όλων αυτών των αντιπροσώπων. Θα δείξουμε ότι το F ικανοποιεί την (7).

Αν $p \neq q$ είναι ρητοί στο $[0,1)$, τα σύνολα $e^{i2\pi p}F = \{e^{i2\pi(p+t)} : e^{i2\pi t} \in F\}$ και $e^{i2\pi q}F$ είναι ξένα γιατί αν $e^{i2\pi(p+t)} = e^{i2\pi(q+s)}$ τότε $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi(q-p)}$, οπότε τα $e^{i2\pi t}$ και $e^{i2\pi s}$ θα ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, αντίθετα με την επιλογή του F. Επίσης,

$$S^1 = \bigcup_n e^{i2\pi q_n}F$$

γιατί κάθε $e^{i2\pi t} \in S^1$ ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας, οπότε είναι ισοδύναμο με κάποιο $e^{i2\pi s} \in F$, δηλαδή υπάρχει q_n ώστε $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi q_n}$, άρα $e^{i2\pi t} \in e^{i2\pi q_n}F$. $\square$

Τίθεται το ερώτημα, αν είναι δυνατόν να ορισθεί απεικόνιση $m_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ που να ικανοποιεί τις $(a), (b')$ και (c), να είναι δηλαδή μόνον πεπερασμένα προσθετική.

Το ακόλουθο εντυπωσιακό αποτέλεσμα, γνωστό ως «παράδοξο των Banach - Tarski», δείχνει ότι ούτε τέτοια απεικόνιση υπάρχει, όταν $d \geq 3$:

Αν $d \geq 3$ και U, V είναι οποιαδήποτε ανοικτά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\begin{aligned} U &= E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \\ V &= F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \end{aligned}$$

όπου τα E_k είναι ξένα ανά δύο, τα F_k είναι ξένα ανά δύο, και $E_k \simeq F_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δηλαδή υπάρχουν ορθογώνιοι $d \times d$ πίνακες T_k και $x_k \in \mathbb{R}^d$ ώστε $F_k = T_k(E_k) + x_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Αν λοιπόν οριζόταν μια τέτοια απεικόνιση «όγκου» m_d σε *όλα* τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε όλα τα ανοικτά και φραγμένα σύνολα θα είχαν τον ίδιο «όγκο»: θα μπορούσαμε να «κόψουμε» το U σε πεπερασμένο πλήθος κομματιών $E_1 \ldots E_n$ και, μετά από μεταθέσεις και στροφές, να φτιάξουμε το V.

Συμπέρασμα Αν θέλουμε να διατηρήσουμε τις ιδιότητες $(a), (b)$ και (c), είμαστε υποχρεωμένοι *να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της m_d*, την κλάση δηλαδή των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που μπορούν να «μετρηθούν».

Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι
Πρόχειρες Περιληπτικές Σημειώσεις

Α. Κ.

1 σ-Άλγεβρες

Ορισμός 1.1 *Έστω X μη κενό σύνολο*[1].

Άλγεβρα *$\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ κλειστή ως προς συμπληρώματα και πεπερασμένες τομές.*

*Μία **σ-άλγεβρα** είναι μια άλγεβρα που είναι κλειστή ως προς* αριθμήσιμες τομές.

Παρατηρήσεις 1.1 *Αν $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, τότε $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{A}$.*

Επίσης η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

Αν μια $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα, είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις.

Άσκηση 1.2 Αν μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς ξένες αριθμήσιμες ενώσεις, τότε είναι σ-άλγεβρα. Το ίδιο συμπέρασμα έπεται αν είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις.

Παραδείγματα 1.3 *(α) Οι οικογένειες $\{\emptyset, X\}$ και $\mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρες.*

(β) Αν το X είναι άπειρο τότε

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ πεπερασμένο ή } E^c \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι άλγεβρα, αλλά όχι σ-άλγεβρα.

(γ) Αν το X είναι υπεραριθμήσιμο τότε

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ αριθμήσιμο ή } E^c \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα.

(δ) Η τομή μιάς οποιασδήποτε οικογένειας σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα.

Κάθε $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ περιέχεται σε μια σ-άλγεβρα, την $\mathcal{P}(X)$. Επομένως η τομή $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{E}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που την περιέχει.

Ορισμός 1.2 *Η $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ ονομάζεται **η σ-άλγεβρα που παράγεται από την** $\mathcal{E}$.*

[1] μετρο, 16/11/08

Παρατηρήσεις 1.4 Αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ τότε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$.
Αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ και $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}$.

Ορισμός 1.3 *Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος, η σ-αλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα ονομάζεται **η σ-άλγεβρα Borel** του X και συμβολίζεται $\mathcal{B}_X$.*

Περιέχει:

όλα τα ανοικτά σύνολα

όλα τα κλειστά σύνολα

όλες τις αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα σύνολα G_δ)

όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα σύνολα F_σ)

όλες τις αριθμήσιμες τομές F_σ συνόλων: τα σύνολα $F_{\sigma\delta}$

όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις G_δ συνόλων: τα σύνολα $G_{\delta\sigma}$

κ.λπ. κ.λπ.

Πρόταση 1.5 *Η σ-άλγεβρα Borel $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ παράγεται από οποιανδήποτε από τις παρακάτω οικογένειες:*

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a < b\} & \mathcal{E}_5 = \{[a,b) : a < b\} \\
\mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a < b\} & \mathcal{E}_6 = \{(a,b] : a < b\} \\
\mathcal{E}_3 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} & \mathcal{E}_7 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{E}_4 = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\} & \mathcal{E}_8 = \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}.
\end{array}$$

Ορισμός 1.4 *Μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται **στοιχειώδης οικογένεια** αν*

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- $E, F \in \mathcal{E} \;\Rightarrow\; E \cap F \in \mathcal{E}$
- $E \in \mathcal{E} \;\Rightarrow\; E^c$ *είναι πεπερασμένη ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$.*

Παράδειγμα 1.6 $\mathcal{E} = \{(a,b] : a \le b\} \cup \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. *Είναι μια στοιχειώδης οικογένεια.*

Πρόταση 1.7 *Αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι στοιχειώδης οικογένεια τότε η οικογένεια $\mathcal{A}$ όλων των πεπερασμένων ενώσεων $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ ξένων συνόλων $\{E_1, \ldots, E_n\} \subseteq \mathcal{E}$ είναι άλγεβρα.*

Απόδειξη (περίληψη) **1.** Αν $E, F \in \mathcal{E}$ τότε $E \setminus F \in \mathcal{A}$.

2. Αν $E, F \in \mathcal{E}$ τότε $E \cup F \in \mathcal{A}$.

3. Αν $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ τότε $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}$.

4. Αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

5. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$.

2 Μέτρα

Ορισμός 2.1 (α) *Αν X είναι μη κενό σύνολο και $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του, το ζεύγος $(X, \mathcal{M})$ λέγεται* **μετρήσιμος χώρος**.

(β) Μέτρο *στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ λέγεται μια απεικόνιση*

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

με τις ιδιότητες

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad \text{όταν } E_n \in \mathcal{M} \text{ είναι ξένα ανά δύο (σ-προσθετικότητα).}$$

Παρατήρηση 2.1 *Μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ που ικανοποιεί $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(E \cup F) = \mu(E) \cup \mu(F)$όταν $E, F \in \mathcal{M}$ είναι ξένα λέγεται* πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Ορισμός 2.2 *Ένα μέτρο μ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ λέγεται*

- **πεπερασμένο** *αν $\mu(X) < \infty$*
- *σ-***πεπερασμένο** *αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ όπου $X_n \in \mathcal{M}$ και $\mu(X_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- **ημιπεπερασμένο** *(semifinite) αν κάθε $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) = +\infty$ περιέχει $F \in \mathcal{M}$ με $0 < \mu(E) < \infty$.*

Παρατηρήσεις 2.2 *(a) Από την επόμενη Πρόταση 2.3 (a) έπεται ότι αν το μ είναι πεπερασμένο τότε για κάθε $E \in \mathcal{M}$ ισχύει $\mu(E) < \infty$.*

(β) Επίσης έπεται ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο τότε όλα τα $E \in \mathcal{M}$ έχουν «σ-πεπερασμένο μέτρο».

Πρόταση 2.3 (Βασικές ιδιότητες του μέτρου)
(α) (Μονοτονία) *Αν $E, F \in \mathcal{M}$ και $E \subseteq F$ τότε $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

(β) (σ-Υποπροσθετικότητα) *Αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$ τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.*

(γ) *Αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$ και $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(E_n)$.*

(δ) *Αν $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}$, αν $E_n \supseteq E_{n+1}$ για κάθε n και αν $\mu(E_1) < \infty$ τότε $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(E_n)$.*

Υπενθύμιση Αν $\{a_i : i \in I\} \subseteq [0, +\infty]$, ορίζουμε

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} a_i : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο} \right\} \in [0, +\infty].$$

Όταν $I = \mathbb{N}$ και $a_i \in \mathbb{R}$, ο ορισμός συμπίπτει με τον συνηθισμένο ορισμό του αθροίσματος μιας σειράς *μη αρνητικών* όρων.

Παράδειγμα 2.4 *Έστω X μη κενό σύνολο και $f : X \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε $\mu_f : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ από τη σχέση*

$$\mu_f(E) = \sum_{x \in E} f(x).$$

Ειδικές περιπτώσεις: (α) Αν $f(x) = 1$ για κάθε $x \in X$, τότε $\mu_f(E) = \#E$ (ο πληθάριθμος του E): το μ_f είναι το μέτρο απαρίθμησης (counting measure).

(β) Έστω $x_o \in X$ και $f : X \to [0, +\infty]$ η συνάρτηση όπου $f(x) = \begin{cases} 1, & x = x_o \\ 0, & x \neq x_o \end{cases}$. Τότε $\mu_f(E) = \begin{cases} 1, & x_o \in E \\ 0, & x_o \notin E \end{cases}$. Το μ_f είναι το ***μέτρο Dirac*** *δ_{x_o} στο x_o.*

Παρατηρήσεις 2.5 **(α)** Το μ_f είναι ημιπεπερασμένο αν και μόνον αν $f(X) \subseteq [0, +\infty)$.
(β) Το μ_f είναι σ-πεπερασμένο αν και μόνον αν είναι ημιπεπερασμένο και το σύνολο $\{x \in X : f(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

2.1 Μηδενικά σύνολα, πλήρωση

Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $N \in \mathcal{M}$ και $\mu(N) = 0$ τότε το N λέγεται μ-μηδενικό σύνολο.

Ορισμός 2.3 *Μια ιδιότητα $P(x)$ που αναφέρεται σε στοιχεία $x \in X$ λέγεται ότι ισχύει μ-σχεδόν παντού αν ισχύει εκτός από ένα μηδενικό σύνολο, δηλ. αν υπάρχει ένα μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{M}$ ώστε η $P(x)$ να ισχύει για κάθε $x \notin N$, ή ισοδύναμα, αν το σύνολο των $x \in X$ για τα οποία η $P(x)$ δεν ισχύει* περιέχεται *σε ένα μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{M}$.*

Παρατηρήσεις 2.6 Αν N_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενικά σύνολα τότε το $\cup_n N_n$ είναι μηδενικό σύνολο. Επίσης αν N είναι μηδενικό σύνολο και $F \in \mathcal{M}$, $E \subseteq N$, τότε το F είναι μηδενικό σύνολο.

Όμως, αν N είναι μηδενικό σύνολο και $E \subseteq N$ δεν έπεται ότι $E \in \mathcal{M}$.

Για παράδειγμα αν $X = [0, 1]$ και $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα του Παραδείγματος 1.3(γ), έστω $E = [0, 1/2]$ και $x_o = 3/4$. Θεωρούμε τον $(X, \mathcal{M}, \delta_{x_o})$. Αν $N \equiv \{x_o\}^c$ τότε $N \in \mathcal{M}$, $\delta_{x_o}(N) = 0$ και $E \subseteq N$ αλλά $E \notin \mathcal{M}$.

Ορισμός 2.4 *Ένα μέτρο (ή ένας χώρος μέτρου) λέγεται* **πλήρες** *(αντ. πλήρης) αν κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.*

Θεώρημα 2.7 (Πλήρωση) *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και*

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\} \\ \overline{\mathcal{N}} &= \{F \subseteq X : \exists N \in \mathcal{N} \text{ ώστε } F \subseteq N\} \\ \overline{\mathcal{M}} &= \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \in \overline{\mathcal{N}}\}. \end{aligned}$$

Τότε η $\overline{\mathcal{M}}$ είναι σ-άλγεβρα, και αν θέσουμε

$$\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E), \quad E \in \mathcal{M}, F \in \overline{\mathcal{N}}$$

τότε το $\bar{\mu}$ είναι καλά ορισμένο μέτρο στην $\overline{\mathcal{M}}$ ώστε $\bar{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$.

Ο χώρος μέτρου $(X, \overline{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ είναι πλήρης και το $\bar{\mu}$ είναι μοναδικό, με την έννοια ότι αν ν είναι πλήρες μέτρο στην $\overline{\mathcal{M}}$ ώστε $\bar{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$ τότε $\nu = \bar{\mu}$.

Απόδειξη Παραλείπεται.

2.2 Εξωτερικά μέτρα και μέτρα

Ορισμός 2.5 *Έστω $\Omega \neq \emptyset$. Μια συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ λέγεται* **εξωτερικό μέτρο** *αν*

(α) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(β) *(σ-υποπροσθετικότητα) αν $A_n \subseteq \Omega$ τότε $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$*

(γ) *(μονοτονία) αν $A \subseteq B$ τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

Παρατήρηση 2.8 *Σύγκριση με την έννοια του μέτρου:*

(ι) Ένα εξωτερικό μέτρο ορίζεται σ'ολόκληρο το δυναμοσύνολο

(ιι) δεν είναι όμως κατ'ανάγκη (ούτε πεπερασμένα) προσθετικό, αλλά μόνο σ-υποπροσθετικό.

Πρόταση 2.9 *Έστω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ μια οικογένεια ώστε $\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$ και έστω $\psi : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση με $\psi(\emptyset) = 0$. Αν $A \subseteq \Omega$, ορίζουμε*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi(E_n) : E_n \in \mathcal{B},\ A \subseteq \bigcup_n E_n \right\}.$$

Τότε το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

Παράδειγμα 2.10 *Στον $\Omega = \mathbb{R}^d$, ορίζω*

$$(a, b) = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, d\} \text{ (ανοικτό παραλληλεπίπεδο).}$$

Θέτω $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d,\ a_i < b_i\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^3\}$

και $\psi((a, b)) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_d - a_d)$, $\psi(\emptyset) = 0$, $\psi(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

Το εξωτερικό μέτρο που προκύπτει στο $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ είναι το ***εξωτερικό μέτρο Lebesgue****.*

Παρατήρηση 2.11 Έστω $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο και $B \subseteq \Omega$. Από την υποπροσθετικότητα έχουμε $\phi(\Omega) = \phi(B \cup B^c) \leq \phi(B) + \phi(B^c)$, άρα «στην καλύτερη περίπτωση» θα ισχύει η ισότητα $\phi(B \cup B^c) = \phi(B) + \phi(B^c)$: το B τότε «κόβει καλά» το Ω. Μάλιστα για οποιοδήποτε $A \subseteq \Omega$ έχουμε $\phi(A) \leq \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c)$. Τα μετρήσιμα σύνολα είναι εκείνα τα B που «κόβουν καλά» κάθε σύνολο A:

Ορισμός 2.6 *Έστω $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο. Ένα $B \subseteq \Omega$ λέγεται* ***ϕ-μετρήσιμο*** *αν*

$$\text{για } \textbf{\textit{κάθε}}\ A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

$$\text{Θέτουμε} \quad \mathcal{M}_\phi = \{B \subseteq \Omega : \ B\ \phi\text{-μετρήσιμο}\}.$$

Παρατήρηση 2.12 *Έστω $B \subseteq \Omega$.*

- *Αν $\phi(B) = 0$, τότε $B \in \mathcal{M}_\phi$.*
- *Για να δείξω ότι $B \in \mathcal{M}_\phi$, αρκεί να δείξω ότι*

$$\text{για κάθε } A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) \geq \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

- *Μάλιστα αρκεί να δείξω την ανισότητα αυτή για κάθε A με $\phi(A) < \infty$.*

Θεώρημα 2.13 (Καραθεοδωρή) *Αν ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο Ω, τότε*

- *Η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και*
- *Το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι πλήρες μέτρο.*

Βήματα απόδειξης:

1. Η $\mathcal{M}_\phi$ είναι άλγεβρα.
2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned} &\phi(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_2) \\ &\text{άρα} \quad \phi(B_1 \cup B_2) = \phi(B_1) + \phi(B_2) \end{aligned}$$

   οπότε το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι πεπερασμένα προσθετικό.

3. Αν $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα ανά δύο, τότε
   - $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}_\phi$ και
   - $\phi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \phi(B_n)$

   οπότε η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι σ-προσθετικό.

Επομένως ο χώρος $(\Omega, \mathcal{M}_\phi, \phi|_{\mathcal{M}_\phi})$ είναι χώρος μέτρου. Ότι είναι πλήρης έπεται τώρα από την Παρατήρηση 2.12.

Βήμα 1. (α) $\Omega \in \mathcal{M}_\phi$: προφανές.

(β) Αν $B \in \mathcal{M}_\phi$, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) \\ &= \phi(A \cap C^c) + \phi(A \cap C) \quad (\text{όπου } \ C = B^c) \end{aligned}$$

άρα $B^c \in \mathcal{M}_\phi$.

(γ) Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$, να δείξω ότι $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_\phi$: Έστω $A \subseteq \Omega$. Επειδή $B_1 \in \mathcal{M}_\phi$ έχουμε

$$\phi(A) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_1^c). \tag{1}$$

Επειδή $B_2 \in \mathcal{M}_\phi$ έχουμε

$$\phi(A \cap B_1^c) = \phi((A \cap B_1^c) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1^c) \cap B_2^c) \tag{2}$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi(A\cap B_1)+\phi((A\cap B_1^c)\cap B_2)+\phi(A\cap B_1^c\cap B_2^c)\\ &= \phi(A\cap B_1)+\phi((A\cap B_1^c)\cap B_2)+\phi(A\cap (B_1\cup B_2)^c). \qquad (3)\end{aligned}$$

Αλλά $A\cap(B_1\cup B_2)=(A\cap B_1)\cup(A\cap(B_2\cap B_1^c))$ άρα, αφού το ϕ είναι υποπροσθετικό, $\phi(A\cap(B_1\cup B_2))\le\phi(A\cap B_1)+\phi(A\cap(B_2\cap B_1^c))$, οπότε από την (3) έχουμε

$$\phi(A) \;\geq\; \phi(A\cap(B_1\cup B_2))+\phi(A\cap(B_1\cup B_2)^c) \qquad (4)$$

άρα $(B_1\cup B_2)\in\mathcal{M}_\phi$.

Βήμα 2. Αν $B_1,B_2\in\mathcal{M}_\phi$, και $B_1\cap B_2=\emptyset$, τότε $(B_1\cup B_2)\cap B_1=B_1$ και $(B_1\cup B_2)\cap B_1^c=B_2$, οπότε για κάθε $A\subseteq\Omega$, θέτοντας $C=A\cap(B_1\cup B_2)$ έχουμε, αφού $B_1\in\mathcal{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}\phi(A\cap(B_1\cup B_2)) &= \phi(C)=\phi(C\cap B_1)+\phi(C\cap B_1^c)\\ &= \phi(A\cap(B_1\cup B_2)\cap B_1)+\phi(A\cap(B_1\cup B_2)\cap B_1^c)\\ &= \phi(A\cap B_1)+\phi(A\cap B_2).\end{aligned}$$

Βήμα 3. Αν $\{B_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα ανά δύο και $B=\cup_n B_n$, θα δείξω ότι για κάθε $A\subseteq\Omega$,

$$\phi(A)=\phi(A\cap B)+\phi(A\cap B^c)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A\cap B_n)+\phi(A\cap B^c) \qquad (5)$$

οπότε

$$\phi(A)=\phi(A\cap B)+\phi(A\cap B^c)$$

άρα $B\in\mathcal{M}_\phi$ και (θέτοντας $A=B$)

$$\phi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi(B_n)$$

άρα το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι σ-προσθετικό.

Πράγματι, για κάθε $N\in\mathbb{N}$, επειδή $\bigcup_{n=1}^N B_n\in\mathcal{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)\right)+\phi\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)^c\right)\\ &= \sum_{n=1}^N\phi(A\cap B_n)+\phi\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)^c\right) \quad (\text{Βήμα } 2)\\ &\geq \sum_{n=1}^N\phi(A\cap B_n)+\phi\left(A\cap B^c\right)\end{aligned}$$

διότι $A\cap B^c\subseteq A\cap\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)^c$. Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε $N\in\mathbb{N}$, έχουμε

$$\phi(A)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A\cap B_n)+\phi\left(A\cap B^c\right)\geq\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\right)+\phi\left(A\cap B^c\right)$$

λόγω της σ-υποπροσθετικότητας του ϕ. Αλλά $\bigcup_n (A \cap B_n) = A \cap (\bigcup_n B_n) = A \cap B$, άρα

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)\right) + \phi(A \cap B^c) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) \geq \phi(A)$$

πάλι από την υποπροσθετικότητα. Δηλαδή

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi(A \cap B^c) \geq \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) \geq \phi(A)$$

συνεπώς ισχύει ισότητα, και η (5) αποδείχθηκε. $\square$

Ορισμός 2.7 *Μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται* ***προμέτρο*** *αν*
(α) *Το πεδίο ορισμού $\mathcal{A}$ του μ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X*
(β) *$\mu(\emptyset) = 0$*
(γ) *Αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ είναι ξένα ανα δύο και ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Δηλ. το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό, και «όταν μπορεί» είναι σ-προσθετικό.

Θεώρημα 2.14 (Επέκτασης Καραθεοδωρή) *Έστω $\mu_o : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ένα προμέτρο και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Αν $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, θέτουμε $\mu(E) = \mu^*(E)$.*

Τότε το $\mu : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ που παράγει η $\mathcal{A}$ και επεκτείνει το μ_o.

Η επέκταση αυτή είναι μοναδική όταν το μ_o είναι πεπερασμένο ($\mu_o(X) < \infty$) ή σ-πεπερασμένο ($X = \cup_n A_n$ όπου $A_n \in \mathcal{A}$ και $\mu_o(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Γενικά, κάθε επέκταση $\nu : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ του μ ικανοποιεί $\nu(E) \leq \mu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ και, αν $\mu(E) < \infty$, τότε $\nu(E) = \mu(E)$.

Βήματα απόδειξης Βήμα 1 Δείχνουμε ότι $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_o$.

Βήμα 2 Δείχνουμε ότι κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι μ^*-μετρήσιμο.

Κατά συνέπεια, αν $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$, τότε $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ και αν $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$, τότε ο $(X, \mathcal{M}(\mathcal{A}), \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

Βήμα 3 Εύκολα προκύπτει ότι αν $\nu : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο που επεκτείνει το μ τότε $\nu(E) \leq \mu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Βήμα 4 Δείχνουμε ότι, αν ν είναι όπως στο Βήμα 3 και $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ με $\mu(E) < \infty$, τότε $\mu(E) = \nu(E)$.

Βήμα 5 Εύκολα προκύπτει ότι αν ν είναι όπως στο Βήμα 3 και το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο τότε $\nu = \mu$.

2.3 Μέτρα Borel στο $\mathbb{R}$

Θεώρημα 2.15 *Αν $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ_F στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \leq b$.*

Αν $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής και $\mu_F = \mu_G$ τότε η διαφορά $F - G$ είναι σταθερή.

Τέλος αν μ είναι μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu((a, b]) < \infty$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \leq b$ τότε η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\mu((x, 0]), & x < 0 \end{cases}$$

είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής και $\mu_F = \mu$.

[Για την απόδειξη του πρώτου μέρους, δες το αρχείο `metraborel.pdf`.]

Ορισμός 2.8 *Έστω X τοπολογικός (ή μετρικός) χώρος, $\mathcal{S}$ μια σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά (άρα και τα Borel). Ένα μέτρο μ στον $(X, \mathcal{S})$ λέγεται **κανονικό** αν*

(ι) *Για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές ισχύει $\mu(K) < \infty$.*

(ιι) Εξωτερική κανονικότητα:
Για κάθε $A \in \mathcal{S}$ ισχύει $\quad \mu(A) = \inf\{\mu(V) : V$ *ανοικτό,* $A \subseteq V\}$

(ιιι) Εσωτερική κανονικότητα:
Για κάθε $V \subseteq X$ ανοικτό ισχύει $\quad \mu(V) = \sup\{\mu(K) : K$ *συμπαγές,* $K \subseteq V\}$.

Πρόταση 2.16 *Κάθε μέτρο Borel μ στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu((a, b]) < \infty$ όταν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \leq b$ είναι κανονικό. Μάλιστα η ισότητα*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, \; K \subseteq E\}$$

ισχύει για κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ (και όχι μόνο για τα ανοικτά).

Παρατήρηση 2.17 *Κάθε τέτοιο μέτρο ικανοποιεί, για κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n]) : \; E \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n]\right\}$$

Λήμμα 2.18 *Κάθε τέτοιο μέτρο ικανοποιεί, για κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, b_n)) : \; E \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n)\right\}$$

Πρόταση 2.19 *Αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και $E \subseteq \mathbb{R}$, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) το E είναι μ-μετρήσιμο

(β) Υπάρχει G_δ-σύνολο V και μ-μηδενικό σύνολο N ώστε $E = V \setminus N$.

(γ) Υπάρχει F_σ-σύνολο H και μ-μηδενικό σύνολο M ώστε $E = H \cup M$.

Πρόταση 2.20 *Αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μ-μετρήσιμο με $\mu(E) < \infty$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι πεπερασμένη ένωση ανοικτών διαστημάτων ώστε $\mu(E \triangle A) < \epsilon$.*

Παρατήρηση 2.21 *Το **μέτρο Lebesgue** στον $\mathbb{R}$ (βλ. Παράδειγμα 2.10) είναι το μέτρο $\lambda = \mu_F$ όπου $F(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Πρόταση 2.22 *Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις $f_c : t \to t + c$, $c \in \mathbb{R}$.*

Θεώρημα 2.23 *Αν μ είναι ένα μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ που είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις και πεπερασμένο στα συμπαγή σύνολα τότε είναι πολλαπλάσιο του μέτρου Lebesgue, δηλαδή υπάρχει $a \geq 0$ ώστε $\mu = a\lambda$.*

Απόδειξη Έστω $a = \mu([0,1))$. Το a είναι πεπερασμένο εφόσον $\mu([0,1)) \leq \mu([0,1])$ και το $[0,1]$ είναι συμπαγές.

Αν $a = 0$ τότε $\mu = 0$ γιατί $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(I_n)$ όπου $I_n = [n, n+1)$ άρα $\mu(I_n) = a = 0$.

Αν $a > 0$, θέτουμε $\nu(A) = \frac{1}{a}\mu(A)$ και θα δείξουμε ότι $\nu = \lambda$. Αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι $\nu((a,b)) = \lambda((a,b))$ για κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a,b).

Για κάθε n, θέτουμε $D_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$. Θα δείξουμε ότι $\nu(D_{n,k}) = \frac{1}{2^n}$. Πράγματι, επειδή $D_{n,k} = D_{n,1} + (k-1)$ έχουμε $\nu(D_{n,k}) = \nu(D_{n,1}) \equiv \nu_n$ και επειδή $D_{n,k} \cap D_{n,j} = \emptyset$ όταν $k \neq j$ έχουμε

$$[0,1) = \bigcup_{k=1}^{2^n} D_{n,k} \Longrightarrow \nu([0,1)) = \sum_{k=1}^{2^n} \nu(D_{n,k}) = 2^n \nu_n$$

άρα $\nu_n = \frac{1}{2^n} = \lambda(D_{n,k})$, δηλαδή τα μέτρα ν και λ ταυτίζονται στα διαστήματα της μορφής $D_{n,k}$. Όμως κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a,b) είναι αριθμήσιμη ένωση τέτοιων διαστημάτων[2], άρα τα μέτρα ν και λ ταυτίζονται στα φραγμένα ανοικτά διαστήματα, άρα παντού.
□

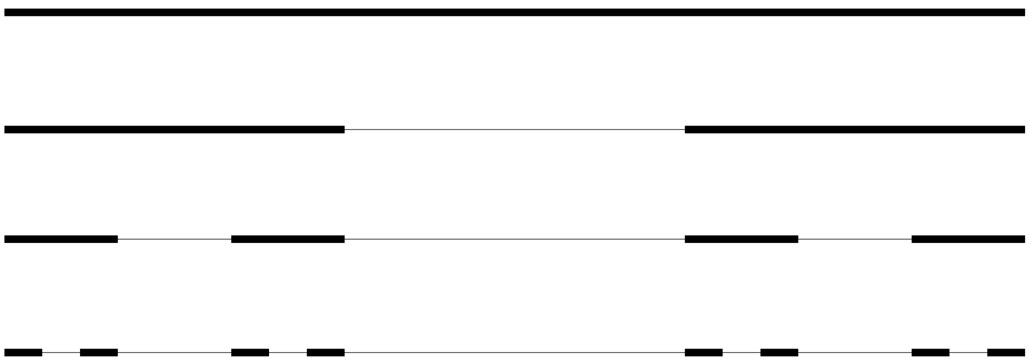
2.4 Το σύνολο Cantor

Έστω

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \bigcup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C &= \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.
\end{aligned}$$

Δηλαδή στο n-οστό στάδιο έχουμε ένα σύνολο C_n που είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων και αφαιρούμε από κάθε κλειστό διάστημα I του C_n το ανοικτό διάστημα με κέντρο το μέσο του I και μήκος ίσο με $1/3$ του μήκος του I.

[2] Υπάρχουν γνησίως μονότονες ακολουθίες δυαδικών ρητών (p_n) και (q_n) ώστε $p_n \searrow a$ και $q_n \nearrow b$, οπότε $(a,b) = \cup_n [p_n, q_n)$ και κάθε διάστημα $[p_n, q_n)$ είναι της μορφής $[\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^m}) = [\frac{2^m p}{2^{n+m}}, \frac{2^n q}{2^{n+m}})$, είναι δηλαδή πεπερασμένη ένωση διαστημάτων της μορφής $D(n+m, k)$.



Παρατήρηση 2.24 *Το σύνολο Cantor είναι «μετροθεωρητικά και τοπολογικά αμελητέο», δηλαδή έχει μέτρο Lebesgue μηδέν και είναι κλειστό και πουθενά πυκνό. Είναι όμως υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη (α) Κάθε C_n είναι ένωση 2^n ξένων κλειστών διαστημάτων με μήκος $(\frac{1}{3})^n$ το καθένα, άρα $\lambda(C_n) = 2^n(\frac{1}{3})^n$. Έπεται ότι $\lambda(C) = \lim_n \lambda(C_n) = 0$.

(β) Το C είναι κλειστό (τομή των κλειστών συνόλων C_n) και πουθενά πυκνό: Αν I είναι ανοικτό διάστημα που περιέχεται στο C, τότε $\lambda(I) \leq \lambda(C) = 0$, και συνεπώς $I = \emptyset$.

(γ) Θα δείξουμε τέλος ότι το C είναι υπεραριθμήσιμο. Θα κατασκευάσουμε μια 1-1 συνάρτηση που θα απεικονίζει το σύνολο

$$\Omega = \{(\sigma_n) : \sigma_n \in \{0, 1\}\}$$

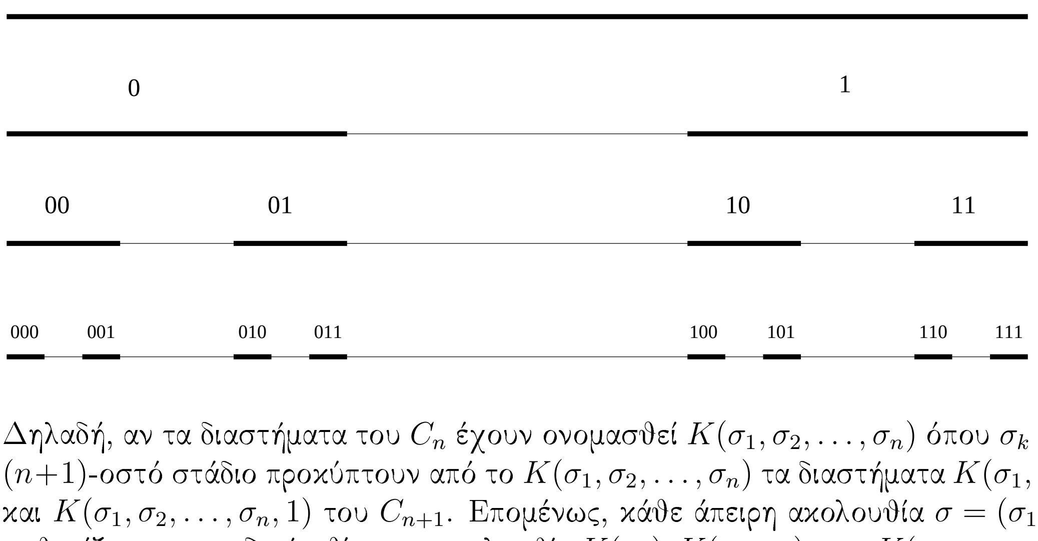
επί του C. Αυτό αρκεί, αφού το Ω είναι υπεραριθμήσιμο.

Δίνουμε διαδοχικά δείκτες στα κλειστά διαστήματα του κάθε C_n ως εξής:

$$C_1 : \quad [0, \tfrac{1}{3}] = K(0), \qquad [\tfrac{2}{3}, 1] = K(1)$$

$$C_2 : \quad [0, \tfrac{1}{9}] = K(00),\ [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}] = K(01), \quad [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}] = K(10),\ [\tfrac{8}{9}, 1] = K(11)$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$



Δηλαδή, αν τα διαστήματα του C_n έχουν ονομασθεί $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ όπου $\sigma_k \in \{0, 1\}$, στο $(n+1)$-οστό στάδιο προκύπτουν από το $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ τα διαστήματα $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, 0)$ και $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, 1)$ του C_{n+1}. Επομένως, κάθε άπειρη ακολουθία $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots) \in \Omega$ καθορίζει μια μοναδική φθίνουσα ακολουθία $K(\sigma_1), K(\sigma_1, \sigma_2), \ldots, K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \ldots$ από συμπαγή διαστήματα. Έπεται (λόγω συμπάγειας) ότι η τομή $K_\sigma \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ δεν είναι κενή, και εφόσον $\operatorname{diam} K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 3^{-n} \to 0$, το K_σ είναι μονοσύνολο. Ονομάζουμε $f(\sigma)$ το μοναδικό στοιχείο του K_σ, δηλαδή $K_\sigma = \{f(c)\}$.

Δεν είναι δύσκολο να βεβαιωθεί κανείς ότι η $\sigma \to f(\sigma)$ είναι 1-1 και επί:

Αν $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots) \neq \tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots)$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma_n \neq \tau_n$ οπότε τα σύνολα $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ και $K(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ είναι ξένα. Αλλά $f(\sigma) \in K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ και $f(\tau) \in K(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ άρα $f(\sigma) \neq f(\tau)$.

Επίσης αν $x \in C = \cap_n C_n$ τότε για κάθε n το x ανήκει σε ένα και μοναδικό $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Άρα το x ανήκει στην τομή $\bigcap_n K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = K_\sigma = \{f(\sigma)\}$ οπότε υπάρχει $\sigma \in \Omega$ ώστε $x = f(\sigma)$.

Παρατήρηση 2.25 *Το σύνολο Cantor είναι τέλειο, δηλαδή είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι όριο μιας ακολουθίας (x_n) σημείων του C δαφορετικών από το x.

Για κάθε n, το σημείο x περιέχεται σε ένα μοναδικό $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Αν το x είναι το αριστερό άκρο του $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_0})$, ονομάζουμε x_n το δεξιό άκρο· αν όχι, ονομάζουμε x_n το αριστερό άκρο. Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε $0 < |x - x_n| \leq (\frac{1}{3})^n$. $\square$

Παρατήρηση 2.26 *Για κάθε $a \in (0,1)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο «τύπου Cantor» C^a με μέτρο a.*

Κατασκευή Ξεκινάμε από το $C_0 = [0,1]$, αλλά αντί να αφαιρέσουμε ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{1}{3}$ με κέντρο το μέσον του, αφαιρούμε ένα ανοικτό διάστημα $(\frac{1}{2} - \frac{b}{4}, \frac{1}{2} + \frac{b}{4})$ μήκους $\frac{b}{2}$ (όπου $b = 1 - a$). Προκύπτουν δύο κλειστά διαστήματα μήκους $\frac{1}{2}(1 - \frac{b}{2})$. Από το καθένα αφαιρούμε ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{b}{8}$ με κέντρο το μέσον του, και προκύπτουν τέσσερα διαστήματα μήκους $\frac{1}{4}(1 - \frac{b}{2} - \frac{b}{4})$ το καθένα, και ούτω καθεξής. Έτσι στο n-οστό στάδιο αφαιρούμε, με κέντρο το μέσον κάθε διαστήματος του C^a_{n-1}, ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{b}{2^{2n-1}}$. Έπεται ότι

$$\lambda([0,1] \setminus C^a) = \frac{b}{2} + 2\frac{b}{8} + 2^2\frac{b}{2^4} + \ldots = b, \text{ άρα } \lambda(C^a) = a.$$

Το C^a είναι κλειστό και πουθενά πυκνό. Πράγματι, αν I είναι ένα ανοικτό διάστημα που περιέχεται στο C^a, τότε για κάθε n θα περιέχεται στο C^a_n. Αλλά, επειδή $\lambda(C^a_n) < 1$, καθένα από τα 2^n κλειστά ξένα διαστήματα που αποτελούν το C^a_n έχει μήκος μικρότερο από $\frac{1}{2^n}$. Κατά συνέπεια $\lambda(I) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε n, οπότε $\lambda(I) = 0$ άρα $I = \emptyset$. Άρα το C^a δεν μπορεί να περιέχει μη κενά ανοικτά διαστήματα.

Επίσης το C^a είναι τέλειο. Η απόδειξη είναι η ίδια με την περίπτωση του C.

Η ιδιάζουσα συνάρτηση του Lebesgue Θα ορίσουμε μια συνάρτηση $\phi : [0,1] \to [0,1]$ αύξουσα, συνεχή και επί, που είναι τοπικά σταθερή στο συμπλήρωμα $C^c = [0,1] \setminus C$ του συνόλου Cantor C.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται και «κλίμακα σου διαβόλου» γιατί ανεβαίνει «κλιμακωτά» από το $0\,(\phi(0) = 0)$ στο $1\,(\phi(1) = 1)$ και είναι τοπικά σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα του C^c, επομένως είναι παραγωγίσιμη σε κάθε τέτοιο διάστημα με παράγωγο ίση με 0! Δηλαδή, η ϕ είναι *σχεδόν παντου παραγωγίσιμη* με $\phi'(t) = 0$ για κάθε t στο (πυκνό) σύνολο C^c, ενώ $\phi(0) = 0$ και $\phi(1) = 1$.

Κατασκευή Η ϕ θα ορισθεί πρώτα στο C^c. Στο πρώτο στάδιο από το $C_0 = [0,1]$ αφαιρούμε το «μεσαίο τρίτο» ανοικτό διάστημα: $C_0 \setminus C_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Στο διάστημα αυτό ορίζουμε την ϕ να είναι σταθερά ίση με $\frac{1}{2}$.

$$\phi(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Στο δεύτερο στάδιο αφαιρούμε από καθένα από τα δύο διαστήματα του C_1 το «μεσαίο τρίτο» διάστημα: το σύνολο $C_1 \setminus C_2 = I_1^2 \cup I_2^2$, είναι ένωση δύο ξένων ανοικτών διαστημάτων πλάτους $\frac{1}{9}$ το καθένα: $I_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Θέτουμε

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & t \in I_1^2 \\ \frac{3}{4}, & t \in I_2^2 \end{cases}$$

Στο n-οστό στάδιο, αφαιρούμε από καθένα από τα διαστήματα του C_{n-1} το «μεσαίο τρίτο» διάστημα: το σύνολο $C_{n-1}\setminus C_n$ είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανοικτών διαστημάτων. Τα αριθμούμε $I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{2^{n-1}}^n$ από τα αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή αν $t \in I_{k-1}^n$ και $s \in I_k^n$ τότε $t < s$. Θέτουμε

$$\phi(t) = \frac{2i-1}{2^n} \ \text{ όταν } \ t \in I_i^n,$$

δηλαδή

$$\phi(t) = \begin{cases} 2^{-n}, & t \in I_1^n \\ 3 \cdot 2^{-n}, & t \in I_2^n \\ \vdots & \\ 1 - 2^{-n}, & t \in I_{2^{n-1}}^n \end{cases}$$

Έτσι ορίζεται η ϕ στο ανοικτό σύνολο C^c.[3] Για να ορίσουμε την ϕ στο C, θέτουμε $\phi(0) = 0$ και για κάθε $t \in C \setminus \{0\}$,

$$\phi(t) = \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t\}.$$

Ισχυρισμός 1: Η ϕ είναι αύξουσα:

$$(a) \qquad s_1, s_2 \in C^c, \quad s_1 < s_2 \Rightarrow \phi(s_1) \leq \phi(s_2).$$

Αυτό είναι φανερό από τον ορισμό της ϕ στο C^c: διότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $j, k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ ώστε $s_1 \in I_j^n$ και $s_2 \in I_k^n$, άρα $\phi(s_1) = \frac{2j-1}{2^n}$ και $\phi(s_2) = \frac{2k-1}{2^n}$. Αλλά $j \leq k$ αφού $s_1 < s_2$, άρα $\phi(s_1) \leq \phi(s_2)$.

$$(b) \qquad t_1, t_2 \in C, \quad t_1 < t_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2)$$

διότι $\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \subseteq \{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\}$, άρα $\sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \leq \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\}$.

$$(c) \qquad t_1 \in C, s_2 \in C^c, \quad t_1 < s_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(s_2)$$

[3]Ήδη βλέπουμε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο C^c με παράγωγο ίση με 0.

διότι για κάθε $s \in C^c$ με $s < t_1$ έχουμε $s < s_2$ άρα $\phi(s) \leq \phi(s_2)$ από το (a), άρα $\phi(t_1) = \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \leq \phi(s_2)$.

$$(d) \qquad s_1 \in C^c, t_2 \in C, \quad s_1 < t_2 \Rightarrow \phi(s_1) \leq \phi(t_2)$$

διότι $s_1 \in \{s \in C^c : s < t_2\}$ άρα $\phi(s_1) \leq \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\} = \phi(t_2)$.

Παρατήρηση Το σύνολο $\phi(C^c) = \{\frac{2i-1}{2^n} : i = 1, \ldots 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ περιέχει όλους τους δυαδικούς ρητούς, άρα είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

Ισχυρισμός 2: Η ϕ είναι συνεχής:

Έστω ότι η ϕ είναι ασυνεχής σε κάποιο $x \in (0, 1)$. Επειδή η ϕ είναι αύξουσα, τα πλευρικά όρια υπάρχουν, και αφού είναι ασυνεχής, είναι διαφορετικά. Δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(\phi(x_-), \phi(x_+))$ δεν είναι κενό, και δεν μπορεί να περιέχει καμμιά τιμή της ϕ, εκτός πιθανώς από την τιμή $\phi(x)$. Δηλαδή υπάρχει κάποιο ανοικτό μη κενό σύνολο[4] που δεν τέμνει το $\phi([0, 1])$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την Παρατήρηση. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ϕ είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1.

Ισχυρισμός 3: Η ϕ είναι επί:

Αυτό είναι τώρα άμεσο από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, αφού η ϕ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παίρνει της τιμές 0 (εξ ορισμού) και 1 (διότι $\phi(1) = \sup\{\frac{2i-1}{2^n} : i = 1, \ldots 2^n, n \in \mathbb{N}\} = 1$).

Η δεξιά αντίστροφη της ϕ: Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \psi &: [0, 1] \to [0, 1] \\ \psi(s) &= \inf\{t \in [0, 1] : \phi(t) = s\} = \inf \phi^{-1}(\{s\}). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αφού η ϕ είναι επί, για κάθε $s \in [0, 1]$ το σύνολο $\phi^{-1}(\{s\}) \subseteq [0, 1]$ δεν είναι κενό, άρα $\psi(s) \in [0, 1]$. Επίσης αφού η ϕ είναι συνεχής, το $\phi^{-1}(\{s\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]$, άρα συμπαγές, και συνεπώς το infimum του είναι minimum. Αφού λοιπόν $\psi(s) \in \{t \in [0, 1] : \phi(t) = s\}$, έπεται ότι

$$\phi(\psi(s)) = s \qquad \text{για κάθε } s \in [0, 1].$$

Ισχυρισμός 4: Η ψ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1:

Θα δείξω ότι

$$s_1 < s_2 \quad \Longrightarrow \quad \psi(s_1) < \psi(s_2).$$

Πράγματι αν $\psi(s_1) \geq \psi(s_2)$, τότε, αφού η ϕ είναι αύξουσα, έχουμε $\phi(\psi((s_1)) \geq \phi(\psi(s_2))$ δηλαδή $s_1 \geq s_2$.

Ισχυρισμός 5: $\psi([0, 1]) \subseteq C$.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $s \in [0, 1]$ ώστε $\psi(s) \in C^c$, τότε το $\psi(s)$ θα περιέχεται σε κάποιο ανοικτό διάστημα I_i^n. Επειδή το I_i^n είναι ανοικτό, περιέχει κάποιο $t < \psi(s)$. Ομως, η ϕ είναι σταθερή στο I_i^n, οπότε $\phi(t) = \phi(\psi(s)) = s$. Αλλά από τον ορισμό του, το $\psi(s)$ είναι το μικρότερο από όλα τα t που ικανοποιούν $\phi(t) = s$, άτοπο.

[4] συγκεκριμένα το $(\phi(x_-), \phi(x_+)) \setminus \{\phi(x)\}$

Μέτρα Borel στο $\mathbb{R}$

Πρόταση 1 *Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα, δεξιά συνεχής. Υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ_F στο $\mathbb{R}$ ώστε*

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \quad \textit{για κάθε } a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b.$$

Απόδειξη Έστω $F_- \equiv \inf\{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$ και $F_+ \equiv \sup\{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$, οπότε $-\infty \leq F_- \leq F_+ \leq +\infty$. Αφού η F είναι είναι αύξουσα, τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχουν στο $[-\infty, +\infty]$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F_-$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F_+$. Επεκτείνουμε λοιπόν την F στο $[-\infty, +\infty]$ θέτοντας $F(-\infty) = F_-$ και $F(+\infty) = F_+$.

Θεωρώ την οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{(a,b] : -\infty \leq a < b < \infty\} \cup \{(a,\infty) : -\infty \leq a < +\infty\} \cup \{\emptyset\}$$

(τα στοιχεία της θα ονομάζουμε *η-διαστήματα*). Είναι στοιχειώδης οικογένεια, επομένως το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των πεπερασμένων ενώσεων $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ ξένων η-διαστημάτων είναι άλγεβρα.

Πρώτο Βήμα Ορισμός του μ_F στην $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \text{Ορίζουμε } \ \mu_F((a,b]) &= F(b) - F(a) \quad \text{όταν } a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b \\ \mu_F((-\infty,b]) &= F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(b) - F(-\infty), \\ \mu_F((a,+\infty)) &= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a). \end{aligned}$$

$$\text{Αν } \ A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j], \quad \text{όπου } \ -\infty \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \cdots \leq a_n < b_n \leq +\infty$$

είναι ένα στοιχείο[1] της $\mathcal{A}$, θέτουμε

$$\mu_F(\bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} (F(b_j) - F(a_j)).$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$\mu_F(\bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} \mu_F((a_j, b_j]).$$

Ισχυρισμός: Το μ_F είναι καλά ορισμένο στην $\mathcal{A}$.

Δηλαδή, αν ένα $A \in \mathcal{A}$ γραφτεί κατά δύο διαφορετικούς τρόπους $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$, όπου $I_i, J_j \in \mathcal{E}$, τότε $\sum_{i=1}^{n} \mu_F(I_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F(J_j)$.

Απόδειξη. (a) Υποθέτουμε πρώτα ότι η οικογένεια $\{J_j\}$ αποτελείται από ένα μόνο η-διάστημα, δηλαδή ότι $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = (c, d]$. Τότε, αναδιατάσσοντας εν ανάγκη τα η-διαστήματα $I_i = (a_i, b_i]$, θα έχουμε

$$c = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_n = d$$

[1]όπου, αν $b_n = +\infty$, με το σύμβολο $(a_n, b_n]$ θα εννοούμε το $(a_n, +\infty)$

και συνεπώς

$$(\cancel{F(b_1)}-F(a_1))+(\cancel{F(b_2)}-\cancel{F(a_2)})+\cdots+(F(b_n)-\cancel{F(a_n)})=-F(a_1)+F(b_n)=F(d)-F(c)$$

διότι $F(b_1)=F(a_2), F(b_2)=F(a_3),\ldots,F(b_{n-1})=F(a_n)$.

(β) Αν τώρα $\bigcup_{i=1}^n I_i=\bigcup_{j=1}^m J_j$, τότε κάθε η-διάστημα I_i είναι ένωση των η-διαστημάτων $I_i\cap I_j$, $j=1,\ldots,m$, επομένως από το (α)

$$\mu_F(I_i)=\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^m (I_i\cap J_j)\right)=\sum_{j=1}^m \mu_F(I_i\cap J_j)$$

και ομοίως
$$\mu_F(J_j)=\mu_F\left(\bigcup_{i=1}^n (I_i\cap J_j)\right)=\sum_{i=1}^n \mu_F(I_i\cap J_j)$$

άρα
$$\sum_{i=1}^n \mu_F(I_i)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m \mu_F(I_i\cap J_j)\right)=\sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n \mu_F(I_i\cap J_j)\right)=\sum_{j=1}^m \mu_F(J_j).$$

Αν τώρα αποδείξω ότι το μ_F είναι προμέτρο στην $\mathcal{A}$, τότε από το Θεώρημα επέκτασης Καραθεοδωρή το μ_F θα δέχεται σ-προσθετική επέκταση στην σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$, η οποία περιέχει όλα τα ημιανοικτά διαστήματα και συνεπώς είναι η σ-άλγεβρα Borel. Επιπλέον η επέκταση αυτή θα είναι μοναδική, καθώς το μ_F είναι σ-πεπερασμένο στην $\mathcal{A}$, εφόσον $\mathbb{R}=\cup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1]$ και $\mu_F((n,n+1])<\infty$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$.

Μένει λοιπόν να αποδείξω ότι

Δεύτερο Βήμα: Το μ_F είναι προμέτρο στην $\mathcal{A}$.

Πράγματι, *(i) Το μ_F είναι πεπερασμένα προσθετικό στην $\mathcal{A}$.*

Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού: Αν $A=\bigcup_{i=1}^n I_i$ και $B=\bigcup_{j=1}^m J_j$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και είναι ξένα, τότε όλα τα η-διαστήματα I_i και J_j είναι ξένα οπότε

$$\mu_F(A\cup B)=\mu_F(\bigcup_{i=1}^n I_i\cup\bigcup_{j=1}^m J_j)=\sum\mu_F(I_i)+\sum\mu_F(J_j)=\mu_F(A)+\mu_F(B).$$

(ii) Το μ_F είναι σ-προσθετικό στην $\mathcal{A}$. Πρέπει να δείξω ότι

$$\text{Αν }\ A_n\in\mathcal{A} \text{ είναι ξένα ανά δύο και }\ \cup_{n=1}^\infty A_n=A\in\mathcal{A},\quad\text{τότε}\quad \mu_F(A)=\sum_{n=1}^\infty \mu_F(A_n). \tag{1}$$

Δεν είναι δύσκολο να πεισθούμε ότι αρκεί να περιορισθούμε στην περίπτωση όπου τα A_n και A είναι η-διαστήματα. Πράγματι:

Εξ υποθέσεως, αφού $A\in\mathcal{A}$, το A είναι πεπερασμένη ένωση ξένων η-διαστημάτων, $A=\bigcup_{j=1}^m J_j$. Εφόσον κάθε $A_i\subset A=\bigcup_{j=1}^m J_j$ έχουμε $A_i=\bigcup_{j=1}^m (J_j\cap A_i)$ και συνεπώς

$$\bigcup_{i=1}^\infty\left(\bigcup_{j=1}^m (J_j\cap A_i)\right)=A=\bigcup_{j=1}^m J_j \qquad \text{άρα}\quad \bigcup_{j=1}^m\left(\bigcup_{i=1}^\infty (J_j\cap A_i)\right)=\bigcup_{j=1}^m J_j$$

οπότε, επειδή τα J_j είναι ξένα,

$$\bigcup_{i=1}^\infty (J_j\cap A_i)=J_j \quad \text{για κάθε}\quad j=1,\ldots m.$$

Αλλά κάθε $J_j \cap A_i$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων η-διαστημάτων, οπότε από την προηγούμενη ισότητα το J_j είναι ένωση ξένων η-διαστημάτων

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ij} = J_j \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots m.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(I_{ij}) = \mu_F(J_j) \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots m$$

γιατί τότε, προσθέτοντας τις m αυτές ισότητες κατά μέλη, από την πεπερασμένη προσθετικότητα του μ_F θα προκύψει η (1).

Με άλλα λόγια, αρκεί να αποδείξω ότι

Αν I_n είναι ξένα ανά δύο η-διαστήματα και $\cup_{n=1}^{\infty} I_n = I$ είναι η-διάστημα, τότε

$$\mu_F(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(I_n). \tag{2}$$

Απόδειξη της (2) Η σχέση

$$\mu_F(I) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(I_n)$$

είναι εύκολη: Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, επειδή το μ_F είναι πεπερασμένα προσθετικό και τα I, I_n ανήκουν στην άλγεβρα $\mathcal{A}$, έχουμε

$$\mu_F(I) = \mu_F(\bigcup_{n=1}^{N} I_n) + \mu_F(I \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n) \geq \mu_F(\bigcup_{n=1}^{N} I_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu_F(I_n)$$

$$\text{οπότε} \quad \mu_F(I) \geq \sup_N \sum_{n=1}^{N} \mu_F(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(I_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, *υποθέτω πρώτα ότι το I είναι φραγμένο διάστημα* (οπότε και κάθε I_n θα είναι φραγμένο) και γράφω $I = (a, b]$, $\;I_n = (a_n, b_n]$.

Η F είναι δεξιά συνεχής (!). Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$F(a + \delta) - F(a) < \epsilon \tag{3}$$

και, για τον ίδιο λόγο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\delta_n > 0$ ώστε

$$F(b_n + \delta_n) - F(b_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\,. \tag{4}$$

Επειδή $(a, b] = \cup_n (a_n, b_n]$, έχουμε $[a + \delta, b] \subseteq \cup_n (a_n, b_n + \delta_n)$. Όμως το $[a + \delta, b]$ είναι συμπαγές (!), άρα το ανοικτό κάλυμμα $\{(a_n, b_n + \delta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα: υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n + \delta_n).$$

Αν κάποιο από τα ανοικτά αυτά διαστήματα περιέχεται εξ ολοκλήρου σε κάποιο άλλο, το παραλείπουμε και εξακολουθούμε να έχουμε κάλυμμα του $[a + \delta, b]$. Αναδιατάσσοντας τώρα εν ανάγκη τα διαστήματα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε $(a_n, b_n + \delta_n)$ τέμνει το επόμενο διάστημα $(a_{n+1}, b_{n+1} + \delta_{n+1})$ και δεν το υπερκαλύπτει, δηλαδή ότι

$$b_n + \delta_n \in (a_{n+1}, b_{n+1} + \delta_{n+1}) \qquad \text{για κάθε } \; n = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\mu_F(I) &= F(b) - F(a) < F(b) - F(a+\delta) + \epsilon \qquad \text{από την (3)} \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon \qquad (\text{αφού } F \text{ αύξουσα και } a_1 < a + \delta, \; b < b_N + \delta_N) \\
&= (F(b_N + \delta_N) - F(a_N)) + (F(a_N) - F(a_{N-1})) + \cdots + (F(a_2) - F(a_1)) + \epsilon \\
&= (F(b_N + \delta_N) - F(a_N)) + \sum_{k=1}^{N-1} (F(a_{k+1}) - F(a_k)) + \epsilon \\
&\leq (F(b_N + \delta_N) - F(a_N)) + \sum_{k=1}^{N-1} (F(b_k + \delta_k) - F(a_k)) + \epsilon \qquad (\text{λόγω της (5)}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} (F(b_k + \delta_k) - F(a_k)) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \Big(F(b_k) + \frac{\epsilon}{2^k} - F(a_k) \Big) + \epsilon \qquad (\text{από την (4)}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \Big(\mu_F((a_k, b_k]) + \frac{\epsilon}{2^k} \Big) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mu_F((a_k, b_k]) + \frac{\epsilon}{2^k} \Big) + \epsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k, b_k]) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Επειδή το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, αποδείξαμε, με την υπόθεση ότι το I είναι φραγμένο, την απαιτούμενη ανισότητα

$$\mu_F(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k).$$

Όταν το I είναι της μορφής $I = (-\infty, b]$ όπου $b \in \mathbb{R}$ (δηλαδή $(-\infty, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$) τότε[2] για κάθε $M < \infty$ καλύπτω το διάστημα $[-M, b]$ με πεπερασμένο πλήθος διαστημάτων της μορφής $(a_n, b_n + \delta_n)$ και όπως πριν καταλήγω στην ανισότητα

$$\mu_F([-M, b]) = F(b) - F(-M) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu_F((a_k, b_k]) + 2\epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k) + 2\epsilon$$

επομένως

$$\mu_F(I) = F(b) - \lim_{M \to +\infty} F(-M) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k) + 2\epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε πάλι έπεται η απαιτούμενη ανισότητα. Με τον ίδιο τρόπο, όταν $I = (a, +\infty)$, καταλήγουμε για κάθε $M < +\infty$ στην

$$\mu_F((a, M]) = F(M) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(I_k) + 2\epsilon.$$

[2] αρκεί να υποθέσω ότι όλα τα I_n είναι φραγμένα, διότι αλλιώς, αν π.χ. $I_1 = (-\infty, b_1]$ οπότε
$I = (-\infty, b] = (-\infty, b_1] \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (a_n, b_n]$ έχω
$\mu_F(I) = \mu_F((-\infty, b_1]) + \mu_F(\bigcup_{n=2}^{\infty} (a_n, b_n]) = \mu_F((-\infty, b_1]) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_F((a_n, b_n])$
από την προηγούμενη περίπτωση.

3 Ολοκλήρωση

3.1 Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Παρατηρήσεις 3.1 (α) Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ μεταξύ μη κενών συνόλων επάγει[1] μια απεικόνιση

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X) : \; B \to f^{-1}(B) \equiv \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Η απεικόνιση αυτή διατηρεί συμπληρώματα, αυθαίρετες ενώσεις και αυθαίρετες τομές.

(β) Αν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ είναι σ-άλγεβρα, η οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \equiv \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

Ορισμός 3.1 *Αν $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ είναι μετρήσιμοι χώροι, μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Παρατηρήσεις 3.2 (α) Η σύνθεση μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη: Αν

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{C})$$

όπου η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη και η g είναι $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-μετρήσιμη, τότε η $g \circ f$ είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-μετρήσιμη.

(β) Έστω $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ μια οικογένεια που παράγει την $\mathcal{B}$, δηλαδή τέτοια ώστε $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. Για να ελέγξω αν μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη, αρκεί να ελέγξω αν η σχέση $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ ισχύει για κάθε $E \in \mathcal{E}$.

(γ) Έπεται από το (β) ότι αν οι X και Y είναι τοπολογικοί (ή μετρικοί) χώροι, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-μετρήσιμη.

Ορισμός 3.2 *Αν $(X, \mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος και Y είναι τοπολογικός ή μετρικός χώρος, μια $f : X \to Y$ λέγεται $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_Y)$-μετρήσιμη.*

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις $Y = \mathbb{R}$ ή $Y = \mathbb{C}$ (με τη συνηθισμένη τοπολογία).

Ειδικότερα μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται Borel μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-μετρήσιμη, και Lebesgue μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-μετρήσιμη (όπου $\mathcal{M}_\lambda$ η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων).

Άσκηση 3.3 Η συνάρτηση χ_A είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν $A \in \mathcal{M}$.

Πρόταση 3.4 *Αν $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$, τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(i) Η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη.
(ii) Για κάθε $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$.
(iii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}$.
(iv) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$.

[1] oloklhr, 25/11/08

Παρατήρηση 3.5 Αν $E \subseteq X$ και $f : E \to \mathbb{R}$, η f λέγεται μετρήσιμη στο E αν είναι $(\mathcal{M}_E, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$. Στην περίπτωση που η f ορίζεται στο X και $E \in \mathcal{M}$, η $f|_E$ είναι μετρήσιμη στο E αν και μόνον αν για κάθε $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ισχύει $(f^{-1}(B) \cap E) \in \mathcal{M}$.

Ορισμός 3.3 *Αν $(X, \mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος, μια $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέγεται $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$-μετρήσιμη όπου $\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}} = \{E \subseteq [-\infty, \infty] : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$. Ισοδύναμα, η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν $f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{M}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*

Πρόταση 3.6 *Αν $(X, \mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος, $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

Παρατηρήσεις 3.7 (α) Αν μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel (δηλαδή $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη), τότε είναι Lebesgue μετρήσιμη, δηλαδή $(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
(β) Αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες, δεν αληθεύει πάντα ότι η σύνθεση $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Πρόταση 3.8 *Αν $(X, \mathcal{M})$ είναι μετρήσιμος χώρος, $f, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $p > 0$,*

(i) οι συναρτήσεις $|f|$ και $|f|^p$ είναι μετρήσιμες

(ii) οι συναρτήσεις $f + g$ και fg είναι μετρήσιμες.

Πρόταση 3.9 *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες ($n \in \mathbb{N}$). Τότε*

1. *η συνάρτηση $\sup_n f_n$ είναι μετρήσιμη,*
2. *η συνάρτηση $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμη,*
3. *η συνάρτηση $\limsup_n f_n \equiv \inf_k \sup_{n \geq k} f_n$ είναι μετρήσιμη,*
4. *η συνάρτηση $\liminf_n f_n \equiv \sup_k \inf_{n \geq k} f_n$ είναι μετρήσιμη,*
5. *ειδικότερα, αν το κατά σημείο όριο $f \equiv \lim_n f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ υπάρχει, τότε είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Πρόταση 3.10 *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος.*
(α) *Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη, τότε οι $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = -\min\{f, 0\}$ και $|f| = f_+ + f_-$ είναι μετρήσιμες (και ικανοποιούν $f = f_+ - f_-$ και $f_+ f_- = 0$).*
(β) *Αν $g : X \to \mathbb{C}$ και $u = \frac{1}{2}(g + \bar{g})$, $v = \frac{1}{2i}(g - \bar{g})$, τότε η g είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν οι u και v είναι μετρήσιμες.*
(γ) *Αν η $g : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη, τότε οι $|g| = \sqrt{u^2 + v^2}$ και $\operatorname{sgn} g$ είναι μετρήσιμες, όπου* $\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad (z \in \mathbb{C})$.

Απλές συναρτήσεις

Ορισμός 3.4 *Μια συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται* **απλή** *αν το σύνολο $s(X)$ είναι πεπερασμένο. Αν $s(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$ τότε η $\{A_1, \ldots A_n\}$ είναι διαμέριση*[2] *του X και η s γράφεται σε* **κανονική μορφή:** $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$.

Παρατηρήσεις 3.11 *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος.*
(α) *Μια απλή συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ σε κανονική μορφή $s = \sum_k c_k \chi_{E_k}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $E_k \in \mathcal{M}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.*

(β) *Επομένως αν οι $s, t : X \to \mathbb{R}$ είναι απλές μετρήσιμες, το ίδιο ισχύει και για τις*

$$s + t,\ s \cdot t,\ \max\{s, t\},\ \min\{s, t\},\ s_+,\ s_-,\ |s| = s_+ + s_-.$$

Θεώρημα 3.12 *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχει* αύξουσα *ακολουθία (s_n) απλών με $s_n(X) \subseteq [0, +\infty)$ για κάθε n τέτοια ώστε*

$$s_n(x) \nearrow f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Αν η f είναι φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις s_n ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα *στο X.*

Η ιδέα της απόδειξης: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτω

$$F_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Χωρίζω το $[0, n)$ σε $n \cdot 2^n$ διαστήματα $[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \ldots, [\frac{n2^n - 1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n})$ και θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

Ορίζω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

δηλαδή θέτω

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } f(x) \geq n \\ \frac{i-1}{2^n}, & \text{αν } i = 1, 2, \ldots, n2^n \text{ τέτοιο ώστε } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \end{cases}$$

Πρόταση 3.13 *Για κάθε $\mathcal{M}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, +\infty]$ υπάρχει ακολουθία (s_n) απλών $\mathcal{M}$-μετρησίμων συναρτήσεων ώστε $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x)$ και $s_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Αν η f είναι φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις s_n ώστε $s_n \to f$* ομοιόμορφα *στο X.*

Θεώρημα 3.14 *Μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ή $f : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν είναι το (κατά σημείο) όριο μιας ακολουθίας*[3] *$\{s_n\}$ (πραγματικών ή μιγαδικών) $\mathcal{M}$-μετρήσιμων απλών συναρτήσεων.*

[2] δηλαδή τα A_k είναι ξένα ανά δύο και $\cup A_k = X$

[3] η $\{s_n\}$ δεν είναι κατ'ανάγκην μονότονη, μπορούμε όμως να την επιλέξουμε ώστε η $\{|s_n|\}$ να είναι αύξουσα

Συμπέρασμα *Η κλάση των $\mathcal{M}$-μετρησίμων συναρτήσεων περιέχει τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις χ_A, $A \in \mathcal{M}$ και είναι κλειστή ως προς τις αλγεβρικές πράξεις:*

$$f, g \text{ μετρήσιμες } \Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\},\ |f|,\ f^+,\ f^- \text{ μετρήσιμες}$$

καθώς και τα κατά σημείο όρια ακολουθιών:

$$f_n\,(n\in\mathbb{N}) \text{ μετρήσιμες } \Rightarrow \sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \lim_n f_n \text{ μετρήσιμες}$$

(αν το τελευταίο όριο υπάρχει).

Πρόταση 3.15 *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ η πλήρωσή του. Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ ή $f : X \to \mathbb{C}$ τότε*

(α) *αν η f είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη τότε είναι $\overline{\mathcal{S}}$-μετρήσιμη*

(β) *αν η f είναι $\overline{\mathcal{S}}$-μετρήσιμη τότε υπάρχει $\mathcal{S}$-μετρήσιμη συνάρτηση g που είναι μ-σχεδόν παντού ίση με την f.*

Πόρισμα 3.16 *Κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ είναι λ-σχεδόν παντού ίση με μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση.*

3.2 Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε όλη την παράγραφο, σταθεροποιούμε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

3.2.1 Μη αρνητικές συναρτήσεις

Θα μελετήσουμε πρώτα τις ιδιότητες του ολοκληρώματος μη αρνητικών συναρτήσεων.

Ορισμός 3.5 *Συμβολίζουμε $\mathcal{L}^+(X, \mathcal{S})$ ή απλά $\mathcal{L}^+$ το σύνολο των μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to [0, +\infty]$.*

(i) *Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ είναι **απλή μετρήσιμη** σε κανονική μορφή $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$ ορίζουμε*

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k) \in [0, +\infty]$$

(θέτουμε $0 \cdot (+\infty) = 0$).

(ii) *Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι **μετρήσιμη**, ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη, } 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Αν $A \in \mathcal{S}$ ορίζουμε

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

Λήμμα 3.17 *Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ απλή μετρήσιμη και $s = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$ όπου $B_k \in \mathcal{S}$ και $B_k \cap B_j = \emptyset$ για $k \neq j$, τότε*

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(B_k).$$

Πρόταση 3.18 *Αν $s,t : X \to [0,+\infty)$ απλές μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε*

$$\textbf{(i)} \quad \int as d\mu = a \int s d\mu$$

$$\textbf{(ii)} \quad \int (s+t) d\mu = \int s d\mu + \int t d\mu$$

$$\textbf{(iii)} \quad \text{Αν} \quad s \leq t \quad \text{τότε} \quad \int s d\mu \leq \int t d\mu.$$

Πρόταση 3.19 *Αν $f,g : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε*

$$\textbf{(i)} \quad \int af d\mu = a \int f d\mu$$

$$\textbf{(ii)} \quad \text{Αν} \quad f \leq g \quad \text{τότε} \quad \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

$$\textbf{(iii)} \quad \text{Αν} \quad A \subseteq B \ (A, B \in \mathcal{S}) \quad \text{τότε} \quad \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

$$\textbf{(iv)} \quad \text{Αν} \quad A \in \mathcal{S} \text{ και } \mu(A) = 0 \text{ ή } f|_A = 0 \quad \text{τότε} \quad \int_A f d\mu = 0.$$

Παράδειγμα 3.20 *Αν μ είναι το μέτρο Dirac δ_0 στο $0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε συνάρτηση Borel $f : \mathbb{R} \to [-\infty,+\infty]$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = f(0)$$

διότι αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Borel και $0 \notin A$, τότε $\mu(A) = 0$, οπότε $\int f d\mu = \int_{\{0\}} f d\mu = f(0)$.

Πρόταση 3.21 *Έστω $s : X \to [0,+\infty)$ απλή μετρήσιμη. Ορίζουμε*

$$\nu : \mathcal{S} \to [0,+\infty] : \nu(A) = \int_A s d\mu.$$

Τότε το ν είναι μέτρο.

Θεώρημα 3.22 (Μονότονης σύγκλισης του Lebesgue) *Αν (f_n) είναι* αύξουσα *ακολουθία μετρησίμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : X \to [0,+\infty]$, τότε*

$$\int (\lim_n f_n) d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι αύξουσα και συνεπώς έχει όριο $f(x) \in [0,+\infty]$. Έχουμε δείξει ότι το κατά σημείο όριο μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη. Άρα η f είναι μετρήσιμη, και συνεπώς το $\int f d\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$). Επειδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, έχουμε $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$. Επομένως το όριο $\lim_n \int f_n d\mu \equiv a$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$) και

$$a \leq \int f d\mu.$$

Μένει να δειχθεί η αντίστροφη ανισότητα. Από τον ορισμό του $\int f d\mu$ αρκεί να δείξουμε ότι αν s είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \leq s \leq f$ ισχύει

$$\int s d\mu \leq a.$$

Σταθεροποιούμε ένα $c \in (0,1)$ και θα δείξουμε ότι

$$c \int s d\mu \leq a.$$

Θέτουμε

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι $E_n \in \mathcal{S}$ αφού η $f_n - cs$ είναι μετρήσιμη και ότι $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ αφού $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$.

Ισχυρισμός:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Πράγματι, έστω $x \in X$. Αν $f(x) = 0$ τότε $s(x) = 0$ άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Αν πάλι $f(x) > 0$ τότε $f(x) \geq s(x) > cs(x)$ (θυμίσου ότι $s(x) < \infty$), οπότε εφόσον $f_n(x) \nearrow f(x)$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) \geq cs(x)$, άρα $x \in E_n$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θεωρούμε το μέτρο ν που ορίζεται από τη σχέση

$$\nu(E) = \int_E s d\mu, \quad E \in \mathcal{S}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} c\nu(E_n) = c\int_{E_n} s d\mu = \int_{E_n} cs d\mu &\leq \int_{E_n} f_n d\mu \quad (\text{γιατί } cs(x) \leq f_n(x) \text{ όταν } x \in E_n) \\ &\leq \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Όταν $n \to \infty$, έχουμε $\nu(E_n) \to \nu(X) = \int s d\mu$ από την σ-προσθετικότητα του ν (Πρόταση 3.21). Επίσης $\int f_n d\mu \to a$. Συνεπώς από τη σχέση $c\nu(E_n) \leq \int f_n d\mu$ έπεται ότι $c \int s d\mu \leq a$. Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $c \in (0,1)$, θεωρώντας $c \nearrow 1$ προκύπτει

$$\int s d\mu \leq a.$$

Η ανισότητα αποδείχθηκε για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$, και συνεπώς

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, \ 0 \leq s \leq f \right\} \leq a$$

άρα τελικώς $\int f d\mu = a$. $\square$

Πόρισμα 3.23 (Προσθετικότητα) *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Θεώρημα 3.24 (Beppo Levi) *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρησίμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$, τότε*

$$\int \left(\sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \left(\int f_n d\mu \right).$$

Λήμμα 3.25 (Ανισότητα Chebyshev - Markov) *Αν $f \in \mathcal{L}^+$ και $c > 0$ τότε*

$$\int f d\mu \geq c\mu(\{x \in X : f(x) \geq c\}).$$

Πρόταση 3.26 *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμες τότε*

(ι) $f = g$ *σχεδόν παντού* $\Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$

(ιι) $f = 0$ *σχεδόν παντού* $\iff \int f d\mu = 0.$

Πρόταση 3.27 *Αν $f_n, f \in \mathcal{L}^+$ και $f_n \nearrow f$ σ.π. τότε*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Παραδείγματα 3.28 *(α) Στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, αν $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ τότε $f_n \to 0$ κατά σημείο αλλά $\lim_n \int f_n d\lambda = 1 > \int \lim_n f_n d\lambda$.*

(β) Στον $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, αν $g_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ τότε $g_n \to g = 0$ κατά σημείο αλλά $\lim_n \int g_n d\lambda = 1 > \int \lim_n g_n d\lambda$.

Θεώρημα 3.29 (Λήμμα Fatou) *Αν $f_n : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμες* [4]

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Πόρισμα 3.30 *Αν $f_n, f \in \mathcal{L}^+$ και $f_n \to f$ σ.π. τότε*

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Πρόταση 3.31 *Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη και $\int f d\mu < \infty$ τότε*

(ι) *Η f είναι σ.π. πεπερασμένη: $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$.*

(ιι) *Το σύνολο $\{x \in X : f(x) > 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο.*

3.2.2 Ολοκλήρωση μετρησίμων συναρτήσεων

Ορισμός 3.6 **(i)** *Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη και $f_+ = \max\{f, 0\}$ και $f_- = -\min\{f, 0\}$. Τότε οι f_+ και f_- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f_+ d\mu$ και $\int f_- d\mu$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο ολοκληρώματα είναι πεπερασμένο, ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

[4] Υπενθύμιση: $\liminf_n x_n = \lim_n(\inf\{x_k : k \geq n\}) = \sup_n(\inf\{x_k : k \geq n\})$.

(**ii**) *Μια* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *λέγεται* ***(απολύτως) ολοκληρώσιμη*** *αν είναι* ***μετρήσιμη*** *και*

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

Συμβολισμός:

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ ολοκληρώσιμη}\}.$$

Παρατήρηση 3.32 **(ι)** *Ο περιορισμός* $f : X \to \mathbb{R}$ *στον ορισμό του* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *είναι αναγκαίος για να εξασφαλισθεί ότι ο* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *είναι γραμμικός χώρος (δες το Θεώρημα 3.33). Μία ολοκληρώσιμη* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι δυνατόν να μην ανήκει στον* $\mathcal{L}^1$*, καθώς ενδέχεται να παίρνει τις τιμές* $\pm\infty$*. Όμως, εφόσον* $\int |f| d\mu < +\infty$*, από την Πρόταση 3.31 η* $|f|$ *παίρνει* μ*-σχεδόν παντού πεπερασμένες τιμές, άρα το ίδιο ισχύει για τις* f, f^+ *και* f^-*. Επομένως υπάρχει*[5] $g \in \mathcal{L}_1$ *ώστε* $g = f$ μ*-σχεδόν παντού.*

(ιι) *Αν* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *και* $f = f^+ - f^-$*, τότε επειδή* $0 \le f^\pm \le |f|$ *έχουμε* $f^\pm \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$*. Αν αντίστροφα οι* f^+ *και* f^- *είναι ολοκληρώσιμες και δεν απειρίζονται, τότε αφού* $|f| = f^+ + f^-$ *έχουμε* $\int |f| d\mu < +\infty$ *άρα* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$*. Δηλαδή, αν η* $f : X \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμη,*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \;\Leftrightarrow\; |f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \;\Leftrightarrow\; f^+ \text{ και } f^- \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \;\Rightarrow\; \int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα 3.33 *Ο* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *είναι γραμμικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμική απεικόνιση* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$*. Δηλαδή*

$$\begin{aligned} &\text{αν } f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{και } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε } f + \lambda g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{και } \int (f + \lambda g) d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu. \end{aligned}$$

Απόδειξη **(ι)** Επειδή $|f + \lambda g| \le |f| + |\lambda||g|$, έχουμε

$$\int |f + \lambda g| d\mu \le \int (|f| + |\lambda||g|) d\mu \overset{(3.19,3.23)}{=} \int |f| d\mu + |\lambda| \int |g| d\mu < +\infty.$$

(ιια) Αν $h = f + g$ τότε οι $f^\pm, g^\pm$ και $h^\pm$ παίρνουν πραγματικές μόνο τιμές οπότε

$$\begin{aligned} &h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ &\Rightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \\ &\Rightarrow \int (h^+ + f^- + g^-) d\mu = \int (f^+ + g^+ + h^-) d\mu \qquad \text{(όλες μη αρνητικές)} \\ &\Rightarrow \int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu \qquad \text{(Πόρισμα 3.23)} \\ &\Rightarrow \int h d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

(ιιβ) Αν $\lambda \ge 0$ τότε $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ και $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ άρα

$$\begin{aligned} \int \lambda f d\mu &= \int (\lambda f)^+ d\mu - \int (\lambda f^-) d\mu = \int \lambda f^+ d\mu - \int \lambda f^- d\mu \\ &\overset{(3.19)}{=} \lambda \int f^+ d\mu - \lambda \int f^- d\mu = \lambda \int f d\mu. \end{aligned}$$

[5] πάρε $g = f\chi_E$, όπου $E = \{x \in X : |f(x)| < \infty\}$

(ιιγ) $(-f)^+ = f^-$ και $(-f)^- = f^+$ άρα

$$\begin{aligned}\int(-f)d\mu &= \int(-f)^+d\mu - \int(-f^-)d\mu = \int f^-d\mu - \int f^+d\mu \\ &= -\left(\int f^+d\mu - \int f^-d\mu\right) = -\int fd\mu.\end{aligned}$$

Πρόταση 3.34 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ τότε*

$$\begin{aligned}&(i) \qquad f \le g \quad \Longrightarrow \quad \int fd\mu \le \int gd\mu. \\ &(ii) \qquad \left|\int fd\mu\right| \le \int |f|d\mu\end{aligned}$$

Απόδειξη (ι) Εξ ορισμού αν $h \ge 0$ μετρήσιμη τότε $\int hd\mu \ge 0$. Επομένως $\int(g-f)d\mu \ge 0$. Αλλά $\int(g-f)d\mu = \int gd\mu - \int fd\mu$.

(ιι) Έχουμε

$$\begin{aligned}-|f| \le f \le |f| &\Longrightarrow \int(-|f|)d\mu \le \int fd\mu \le \int |f|d\mu \\ &\Longrightarrow -\int |f|d\mu \le \int fd\mu \le \int |f|d\mu \\ &\Longrightarrow \left|\int fd\mu\right| \le \int |f|d\mu.\end{aligned}$$

Πρόταση 3.35 *Έστω $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.*

(ι) *Αν $f = g$ μ-σ.π. τότε $\int fd\mu = \int gd\mu$.*

(ιι) *$f = g$ μ-σ.π. αν και μόνον αν $\int_A fd\mu = \int_A gd\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$.*

Απόδειξη (ι) Αν $f = g$ μ-σ.π. τότε $|f-g| = 0$ μ-σ.π. οπότε $\int |f-g|d\mu = 0$, άρα

$$0 \le \left|\int fd\mu - \int gd\mu\right| = \left|\int(f-g)d\mu\right| \le \int |f-g|d\mu = 0.$$

(ιι) Αν $\int_A fd\mu = \int_A gd\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$, τότε θέτοντας $A^+ = \{x \in X : f(x) \ge g(x)\}$ και $A^- = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$, οπότε $A^\pm \in \mathcal{S}$, έχουμε

$$\int |f-g|d\mu = \int_{A^+}(f-g)d\mu + \int_{A^-}(g-f)d\mu = 0$$

άρα, αφού $|f-g| \ge 0$, έχουμε $|f-g| = 0$ μ-σ.π. (Πρόταση 3.26) επομένως $f = g$ μ-σ.π.

Πόρισμα 3.36 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f \le g$ μ-σ.π. τότε $\int fd\mu \le \int gd\mu$.*

Απόδειξη Αν $B = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ τότε $B \in \mathcal{S}$ και $\mu(B) = 0$. Αν $f_1 = f\chi_{B^c}$ και $g_1 = g\chi_{B^c}$ τότε $|f_1| \le |f|$ και $|g_1| \le |g|$ άρα $f_1, g_1 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f_1 \le g_1$ παντού άρα $\int f_1d\mu \le \int g_1d\mu$. Αλλά $f = f_1$ και $g = g_1$ μ-σ.π. άρα $\int fd\mu = \int f_1d\mu$ και $\int gd\mu = \int g_1d\mu$.

Παρατήρηση 3.37 *Τα συμπεράσματα του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης και του Λήμματος Fatou εξακολουθούν να ισχύουν αν οι υποθέσεις τους ικανοποιούνται μ-σχεδόν σε όλα τα σημεία του X.*

Συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές Αν $f : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη (ισοδύναμα, οι $u = \operatorname{Re} f$ και $v = \operatorname{Im} f$ είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις), οπότε η $|f| : X \to [0, +\infty)$ είναι μετρήσιμη, λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** αν $\int |f| d\mu < \infty$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^1(\mu) &= \{f : X \to \mathbb{C} : \text{ ολοκληρώσιμη}\} \\ &= \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ μετρήσιμη: } \int |f| d\mu < \infty \right\}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ και $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$, ενώ $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$, η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν οι $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι ολοκληρώσιμες. Ορίζουμε

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu.$$

Είναι άμεσο ότι ο $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι (μιγαδικός) γραμμικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμική απεικόνιση $\mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{C}$.

Πρόταση 3.38 *Αν $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ τότε*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Απόδειξη Ο μιγαδικός αριθμός $z = \int f d\mu$ γράφεται $z = e^{i\theta}|z| = \lambda |z|$ όπου $|\lambda| = 1$. Έχουμε λοιπόν $|z| = \bar{\lambda} z$ δηλαδή

$$\left| \int f d\mu \right| = \bar{\lambda} \int f d\mu = \int \bar{\lambda} f d\mu.$$

οπότε $\int \bar{\lambda} f d\mu \in \mathbb{R}$. Αν λοιπόν $g = \operatorname{Re} \bar{\lambda} f$ και $h = \operatorname{Im} \bar{\lambda} f$ έχουμε $\bar{\lambda} f = g + ih$ οπότε

$$\int \bar{\lambda} f d\mu = \int g d\mu + i \int h d\mu = \int g d\mu \leq \int |g| d\mu$$

από την Πρόταση 3.34 (ιι). Όμως $|g| \leq |\bar{\lambda} f| = |f|$ (αφού $|\lambda| = 1$) και συνεπώς $\int |g| d\mu \leq \int |f| d\mu$ από την 3.34 (ι), άρα τελικά

$$\left| \int f d\mu \right| = \int \bar{\lambda} f d\mu \leq \int |g| d\mu \leq \int |f| d\mu. \qquad \square$$

Θεώρημα 3.39 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης) *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές που συγκλίνει μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ μ-σχεδόν παντού. Αν ορίσουμε $f(x) = \lim_n f_n(x)$ στα σημεία $x \in X$ όπου το όριο υπάρχει (στο $\mathbb{C}$) και $f(x) = 0$ στα υπόλοιπα σημεία του χώρου, τότε η f είναι μετρήσιμη, ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Απόδειξη Η f είναι μετρήσιμη διότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη. Εφόσον $|f_n| \le g$ σχεδόν παντού και $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, έχουμε $\int |f_n| d\mu \le \int g d\mu < +\infty$ άρα η f_n είναι ολοκληρώσιμη. Για τον ίδιο λόγο (εφόσον $|f| = \lim_n |f_n| \le g$) η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Επομένως

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| = \left|\int (f_n - f) d\mu\right| \le \int |f_n - f| \, d\mu$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και η δεύτερη ανισότητα από την Πρόταση 3.38.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Αλλάζοντας, αν χρειασθεί, τις τιμές των f_n σε ένα σύνολο[6] μέτρου 0, μπορούμε να υποθέσουμε ότι *για κάθε* $x \in X$ ισχύει $|f_n(x)| \le g(x)$ και $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Θέτουμε $h_n = |f_n - f|$ και παρατηρούμε ότι $0 \le h_n \le 2g$ και ότι $h_n(x) \to 0$ για κάθε x. Άρα $2g - h_n \ge 0$ και $2g - h_n \to 2g$ κατά σημείο. Από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf_n (2g - h_n) d\mu \le \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\int 2g d\mu &= \int \liminf_n (2g - h_n) d\mu \le \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu \\ &= \int 2g d\mu + \liminf_n \int (-h_n) d\mu = \int 2g d\mu - \limsup_n \int h_n d\mu\end{aligned}$$

άρα $\limsup_n \int h_n d\mu \le 0$. Αλλά $\int h_n d\mu \ge 0$ άρα $\liminf_n \int h_n d\mu \ge 0$ επομένως

$$0 \le \liminf_n \int h_n d\mu \le \limsup_n \int h_n d\mu \le 0$$

δηλαδή το όριο $\lim_n \int h_n d\mu$ υπάρχει και είναι 0. $\square$

3.3 Σύγκλιση ως προς την $\|\cdot\|_1$ – Ο χώρος $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$

Συμβολισμός Αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ή $f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη, γράφουμε

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \in [0, +\infty]$$

(οπότε $\mathcal{L}^1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ μετρήσιμη: } \|f\|_1 < \infty\}$.)

Παρατήρηση 3.40 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε $f + \lambda g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και*

1. $\|\lambda g\|_1 = |\lambda| \|g\|_1$

[6] Αν $N_n = \{x \in X : |f_n(x)| > g(x)\}$ και $N = \{x \in X : \text{ το } \lim_n f_n(x) \text{ δεν υπάρχει}\}$, τα N_n, N είναι μετρήσιμα και μηδενικά, άρα θέτοντας $M = (\cup_n N_n) \cup N$ έχουμε $M \in \mathcal{S}$ και $\mu(M) = 0$.

2. $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

3. $\|f\|_1 = 0$ *αν και μόνον αν* $f = 0$ *μ-σ.π.*

Ορισμός 3.7 *Μια ακολουθία* (f_n) *συναρτήσεων στον* $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ *λέγεται ότι συγκλίνει στην* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ ***ως προς την*** $\|\cdot\|_1$ *(ή στον* L^1*) αν* $\|f_n - f\|_1 \to 0$*. Γενικότερα, η* (f_n) *λέγεται* ***βασική ακολουθία ως προς την*** $\|\cdot\|_1$ *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_o \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ *για κάθε* $m, n \geq n_o$*.*

Παρατήρηση 3.41 *Αν η* (f_n) *συγκλίνει μ-σ.π., δεν έπεται κατ'ανάγκην ότι συγκλίνει ως προς την* $\|\cdot\|_1$*.*
Για παράδειγμα έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(1-nx), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Τότε $f_n \in \mathcal{L}^1([0,1], \lambda)$ και $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα $f_n \to 0$ λ-σ.π., αλλά $\|f_n\|_1 = \frac{n}{2} \to \infty$.

Παρατήρηση 3.42 *Αν η* (f_n) *συγκλίνει ως προς την* $\|\cdot\|_1$*, δεν έπεται κατ'ανάγκην ότι συγκλίνει μ-σ.π. Μπορεί μάλιστα να αποκλίνει σε κάθε σημείο. Όπως θα δούμε όμως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.44, η* (f_n) *έχει πάντα μια υπακολουθία που συγκλίνει μ-σ.π.*

Παράδειγμα 3.43 Για κάθε n, έστω K_n το εξής πεπερασμένο κάλυμμα του $[0,1]$ από διαστήματα μήκους 2^{-n}: $K_1 = \{[0, \frac{1}{2}],][\frac{1}{2}, 1]\}, K_2 = \{[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]\}$ και ούτω καθεξής. Το σύνολο $\cup_m K_m$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $I_1, I_2, \ldots$ μια αρίθμησή του, και έστω f_n η χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n. Έστω $x \in [0,1]$ τυχαίο. Εφόσον το x ανήκει σε άπειρο πλήθος I_n και σε άπειρο πλήθος I_n^c, η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν μπορεί να συγκλίνει. Από την άλλη όμως,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n| d\lambda = \lambda(I_n) \to 0$$

εφόσον για κάθε $m \in \mathbb{N}$, μόνον πεπερασμένο πλήθος από τα I_n έχει μήκος μεγαλύτερο από 2^{-m}. Επομένως $f_n \to 0$ ως προς την $\|\cdot\|_1$.

Θεώρημα 3.44 (Riesz-Fischer) *Έστω* (f_n) *μια ακολουθία στον* $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ *που είναι βασική ως προς την* $\|\cdot\|_1$*. Τότε υπάρχει* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ώστε* $f_n \to f$ *ως προς την* $\|\cdot\|_1$*.*
Επιλπέον, υπάρχει μια υπακολουθία της (f_n) *που συγκλίνει στην* f *μ-σ.π.*

Απόδειξη (ι) Εφόσον οι διαφορές $\|f_n - f_m\|_1$ «τείνουν στο 0», υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) ώστε $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_n\|_1 < +\infty$. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια υπακολουθία συγκλίνει μ-σ.π. σε μια $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε επαγωγικά γνησίως αύξουσα ακολουθία (n_k) ώστε

$$\|f_m - f_n\|_1 < \frac{1}{2^k} \quad (m, n \geq n_k) \tag{†}$$

Για ευκολία θέτουμε $h_k = f_{n_k}$,

$$g_k = |h_1| + |h_2 - h_1| + \ldots + |h_{k+1} - h_k|$$

και
$$g = \sup_k g_k = \lim_k g_k = |h_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k|.$$
Τότε από το Θεώρημα B. Levi,
$$\begin{aligned}\int g d\mu &= \int |h_1| d\mu + \int \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k| d\mu \\ &= \int |h_1| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int |h_{k+1} - h_k| d\mu \le \int |h_1| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty\end{aligned}$$
άρα $g(x) < +\infty$ σχεδόν για κάθε x. Με άλλα λόγια, υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ με $\mu(A^c) = 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ η ακολουθία $(g_k(x))$ να συγκλίνει σε πεπερασμένο όριο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$, η σειρά
$$h_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+1}(x) - h_k(x))$$
συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει, σε πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό. Αλλά
$$h_{k+1}(x) = h_1(x) + (h_2(x) - h_1(x)) + \ldots + (h_{k+1}(x) - h_k(x)),$$
οπότε θέτοντας $f(x) = \lim_k h_k(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$ για $x \in A$ και $f(x) = 0$ για $x \in A^c$ έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση f στο X.

(ιι) Ισχυρισμός: $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και $\quad \lim_k \|f_{n_k} - f\|_1 = \|h_k - f\|_1 = 0.$

Πράγματι, έχουμε $f = \lim h_k$ σχεδόν παντού, και για κάθε k,
$$|h_{k+1}| = \left| h_1 + \sum_{m=1}^{k} (h_{m+1} - h_m) \right| \le |h_1| + \sum_{m=1}^{k} |h_{m+1} - h_m| = g_k \le g.$$
Δηλαδή η ακολουθία (h_k) «κυριαρχείται» από την $g \in \mathcal{L}^1$. Έπεται λοιπόν από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και ότι $\int |h_k - f| d\mu \to 0$.

(ιιι) Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι το όριο ως προς την $\|\cdot\|_1$ ολόκληρης της ακολουθίας (f_n). Δοθέντος $\varepsilon > 0$, αφού η (f_n) είναι βασική υπάρχει n_o ώστε
$$m, n \ge n_o \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon.$$
Ομως από το (ιι) υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ ώστε
$$k \ge k_o \quad \Rightarrow \quad \|f_{n_k} - f\|_1 < \varepsilon.$$
Επιλέγοντας ένα $k \ge k_o$ ώστε $n_k \ge n_o$ έχουμε, για κάθε $m \ge n_o$
$$\|f_m - f\|_1 \le \|f_m - f_{n_k}\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1 < 2\varepsilon.$$
Δείξαμε ότι $\|f_m - f\|_1 \to 0$.

Ο χώρος $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$

Αν f, g είναι μ-σχεδόν παντού στο X ορισμένες συναρτήσεις[7] με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$ ή στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f \overset{\mu}{\sim} g$ αν οι f, g είναι ίσες μ-σχεδόν παντού.[8] Είναι άμεσο ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των σχεδόν παντού ορισμένων συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$ (αντίστοιχα, σχεδόν παντού ορισμένων συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{C}$).

Από την Πρόταση 3.35(ιι) έπεται ότι αν οι f, g είναι μετρήσιμες μ-ισοδύναμες και μία από τις δύο είναι ολοκληρώσιμη, τότε (επειδή $\int |f| d\mu = \int |g| d\mu$) είναι και οι δύο ολοκληεώσιμες και $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{S}$. Δηλαδή η ύπαρξη και οι τιμές του ολοκληρώματος μιάς μετρήσιμης συνάρτησης εξαρτάται μόνον από την κλάση ισοδυναμίας της.

Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος στις συναρτήσεις που είναι ορισμένες και μετρήσιμες μ-σχεδόν παντού:[9] Θα λέμε ότι μια τέτοια συνάρτηση είναι (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μ-ισοδύναμη με μια $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Ας συμβολίζουμε (προσωρινά) την κλάση ισοδυναμίας

$$\tilde{f} = \{g : E_g \to [-\infty, +\infty] \text{ μετρήσιμη με } g \overset{\mu}{\sim} f\}$$

και αντίστοιχα

$$\tilde{f} = \{g : E_g \to \mathbb{C} \text{ μετρήσιμη με } g \overset{\mu}{\sim} f\}$$

(όπου $E_g \in \mathcal{S}$ και $\mu(E_g^c) = 0$.) Μπορούμε τώρα να ορίσουμε

Ορισμός 3.8

$$L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{S}, \mu) = \{\tilde{f} : f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{S}, \mu)\} \qquad L^1(X, \mathcal{S}, \mu) = \{\tilde{f} : f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{S}, \mu)\}.$$

Με τις πράξεις $\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f+g}$ και $\lambda\tilde{f} = \widetilde{\lambda f}$, ο $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος: Για κάθε $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^1$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, αν $f_1, f_2 \in \tilde{f}$ και $g_1, g_2 \in \tilde{g}$, οι $f_i + \lambda g_i \, (i = 1, 2)$ ορίζονται μ-σχεδόν παντού, $f_1 + \lambda g_1 \overset{\mu}{\sim} f_2 + \lambda g_2$ και $\int |f_1 + \lambda g_1| d\mu \leq \int |f_1| d\mu + |\lambda| \int |g_1| d\mu < +\infty$. Επίσης, η $\|\cdot\|_1$ ορίζει μια νόρμα στον χώρο $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$, διότι $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0$.

Με αυτήν την ορολογία, το Θεώρημα Riesz-Fischer λέει ακριβώς ότι ο χώρος $(L^1(X, \mathcal{S}, \mu), \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach.

Από την Πρόταση 3.15 έπεται ότι αν $(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{S}, \mu)$, τότε υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του $L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και του $L^1(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ η οποία διατηρεί το ολοκλήρωμα. Συνεπώς θα ταυτίζουμε τους χώρους αυτούς:

$$L^1(X, \mathcal{S}, \mu) = L^1(X, \overline{\mathcal{S}}, \bar{\mu}).$$

Ειδικότερα
$$L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda) = L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda).$$

Αν $\tilde{f} \in L^1$ μπορώ να επιλέγω $g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη ώστε $g \in \tilde{f}$. Μάλιστα στην περίπτωση $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$ μπορώ να υποθέτω ότι η g είναι Borel μετρήσιμη (Πόρισμα 3.16). Συνήθως στην πράξη δεν κάνουμε διάκριση μεταξύ της συνάρτησης f και της κλάσης ισοδυναμίας $\tilde{f}$.

[7] Δηλαδή $f : E_f \to \overline{\mathbb{R}}$ ή $\mathbb{C}$ όπου το $X \setminus E_f$ είναι μ-μηδενικό σύνολο.

[8] Δηλαδή αν το σύνολο $E_{f,g} \equiv \{x \in E_f \cap E_g : f(x) = g(x)\}$ έχει μ-μηδενικό συμπλήρωμα.

[9] Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι μια μ-σχεδόν παντού ορισμένη συνάρτηση είναι μετρήσιμη (βλ. Παρατήρηση 3.5) στο πεδίο ορισμού της, έστω E_f (το οποίο μπορούμε να υποθέτουμε μετρήσιμο, περιορίζοντας κι άλλο την f εν ανάγκη), αν και μόνον αν έχει μια παντού ορισμένη μετρήσιμη επέκταση.

Παρατήρηση 3.45 *Στον $L^1(X,\mathcal{S},\mu)$ οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι πυκνό υποσύνολο: για κάθε $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ υπάρχει ακολουθία (f_n) από απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ώστε $\|f - f_n\|_1 \to 0$.*

Απόδειξη Θεωρώντας χωριστά πραγματικό και φανταστικό μέρος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές.

Υπάρχουν τότε αύξουσες ακολουθίες απλών μετρήσιμων συναρτήσεων (s_n) και (t_n) ώστε $s_n \nearrow f^+$ και $t_n \nearrow f^-$. Αν $f_n = s_n - t_n$ έχουμε
$f_n \to f^+ - f^- = f$ κατά σημείο και

$$|f_n| = |s_n - t_n| \leq |s_n| + |t_n| \leq f^+ + f^- = |f|.$$

Αφού η $|f|$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1$, έχουμε $f_n \in \mathcal{L}^1$ και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι $\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| d\mu \to 0$.

Πρόταση 3.46 *Αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel (μέτρο Borel - Stieltjes) στο $\mathbb{R}$, οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνό υποσύνολο[10] του $L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R},\mu)$: για κάθε $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R},\mu)$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση g με συμπαγή φορέα ώστε $\|f - g\|_1 < \epsilon$.*

Απόδειξη Από την τελευταία Παρατήρηση (και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος), αρκεί να υποθέσουμε ότι $f = \chi_E$, όπου $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\mu(E) = \int |f| d\mu < \infty$. Ξέρουμε (Πρόταση 2.19) ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη ένωση $A = \cup_{k=1}^n I_k$ ξένων και φραγμένων διαστημάτων[11] ώστε $\mu(E \triangle A) < \epsilon$, οπότε $\|\chi_E - \chi_A\|_1 < \epsilon$. Για κάθε ένα από τα I_k μπορούμε να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση $g_k : \mathbb{R} \to [0,1]$ με συμπαγή φορέα ώστε $\|g_k - \chi_{I_k}\|_1 < \frac{\epsilon}{n}$. Πράγματι, αν $I_k = (a,b)$ και $C_j = [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}]$ τότε $C_j \subseteq C_{j+1}$ και $\cup_j C_j = I_k$, οπότε μπορώ να διαλέξω $C_j \subseteq (a,b)$ ώστε $0 < \mu(I_k \setminus C_j) < \frac{\epsilon}{n}$ και να πάρω $g_k(t) = 1$ όταν $t \in C_j$, $g_k(s) = 0$ όταν $s \notin I_k$ και g_k «γραμμική» στα υπόλοιπα. Τότε θα έχω $0 \leq \chi_{I_k} - g_k \leq 1$ οπότε

$$\|\chi_{I_k} - g_k\|_1 = \int |\chi_{I_k} - g_k| d\mu = \int_{I_k \setminus C_j} (\chi_{I_k} - g_k) d\mu \leq \mu(I_k \setminus C_j) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Επειδή τα I_k είναι ξένα έχω $\chi_A = \sum_k \chi_{I_k}$ και συνεπώς

$$\left\|\chi_E - \sum_k g_k\right\|_1 \leq \left\|\chi_E - \sum_k \chi_{I_k}\right\|_1 + \left\|\sum_k (\chi_{I_k} - g_k)\right\|_1 < \|\chi_E - \chi_A\|_1 + \sum_k \frac{\epsilon}{n} < 2\epsilon.$$

Πρόταση 3.47 *Αν $f_n \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ και $\displaystyle\sum_n \int |f_n| d\mu < +\infty$ τότε η σειρά $\sum f_n$ συγκλίνει μ-σ.π. και ως προς την $\|\cdot\|_1$ σε μια $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ και $\displaystyle\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$.*

Με άλλα λόγια, αν $f_n \in L^1$ και $\sum_n \|f_n\|_1 < +\infty$ τότε η σειρά $\sum_n f_n$ συγκλίνει στον $(L^1, \|\cdot\|_1)$.

[10] Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κανονικά μέτρα Borel σε τοπικά συμπαγείς χώρους Hausdorff.

[11] Από την Πρόταση 2.19 μπορούμε να γράψουμε $A = \cup_{j=1}^m I_j$· αντικαθιστώντας ορισμένα από τα διαστήματα με την ένωσή τους, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ξένα, διότι αν $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ τότε η ένωση $I_1 \cup I_2$ είναι ανοικτό και φραγμένο διάστημα.

3.4 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

3.4.1 Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

σε ξένα ανά δύο διαστήματα $I_k = [t_{k-1}, t_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ και $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in I_i\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in I_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

και

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \qquad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}).$$

Τα $L(f, \mathcal{P})$ και $U(f, \mathcal{P})$ ονομάζονται **το κάτω και άνω άθροισμα Riemann** της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Είναι σαφές ότι $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P})$. Θεωρώντας διαδοχικά διαμερίσεις με όλο και περισσότερα σημεία, θα παρατηρήσουμε ότι τα κάτω αθροίσματα μεγαλώνουν, παραμένοντας όμως όλα μικρότερα (ή ίσα) από κάθε άνω άθροισμα, ενώ τα άνω αθροίσματα μικραίνουν, παραμένοντας όμως όλα μεγαλύτερα (ή ίσα) από κάθε κάτω άθροισμα. Αν υπάρχει *ένας και μοναδικός* αριθμός I ανάμεσα στα κάτω και τα άνω αθροίσματα, δηλαδή τέτοιος ώστε να ισχύει $L(f, \mathcal{P}) \leq I \leq U(f, \mathcal{Q})$ για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$, τότε αυτός ο αριθμός ονομάζεται το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ δεν υπάρχει. Τα αθροίσματα Riemann λοιπόν αποτελούν κάτω και άνω προσεγγίσεις[12] του ολοκληρώματος Riemann, όταν αυτό υπάρχει.

Πρόταση 3.48 (Κριτήριο Riemann) *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon$ του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f, \mathcal{P}_\epsilon) - L(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα:

Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ ορίζουμε **κλιμακωτές** συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$, $g_{\mathcal{P}}$ στο $[a,b]$ ως εξής: κάθε $t \in [a,b]$ ανήκει ακριβώς σε ένα από τα I_i και θέτουμε

$$h_{\mathcal{P}}(t) = m_i(f), \;\; g_{\mathcal{P}}(t) = M_i(f), \quad t \in I_i \; (i = 1, \ldots, n)$$

δηλαδή

$$h_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\chi_{I_i}, \quad g_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\chi_{I_i}$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$h_{\mathcal{P}}(t) \leq f(t) \leq g_p(t) \quad \text{για κάθε } \; t \in [a,b]$$

$$\text{και} \quad \int_a^b h_{\mathcal{P}}(t)dt = L(f, \mathcal{P}), \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}}(t)dt = U(f, \mathcal{P}).$$

Επομένως το κριτήριο Riemann αναδιατυπώνεται ως εξής:

[12] Μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι, είτε υπολογίσει τα άνω και κάτω αθροίσματα χρησιμοποιώντας ημιάνοιχτα διαστήματα (όπως εδώ) είτε τα υπολογίσει χρησιμοποιώντας κλειστά διαστήματα, η ύπαρξη και η τιμή του ολοκληρώματος της f δεν επηρεάζονται.

Πρόταση 3.49 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις $g_\epsilon, h_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $g_\epsilon \le f \le h_\epsilon$ και $\int_a^b (h_\epsilon - g_\epsilon) < \epsilon$.*

3.4.2 Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση ανάμεσα στο ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Θα δείξουμε ότι αν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη τότε είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Επειδή οι συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$ και $g_{\mathcal{P}}$ είναι κλιμακωτές (άρα απλές μετρήσιμες), το ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue των συναρτήσεων αυτών συμπίπτουν.

Επιλέγουμε επαγωγικά διαμερίσεις $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{P}_n \subseteq \ldots$ ώστε η «λεπτότητα» (δηλαδή η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων) της P_n να είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_{\mathcal{P}_n} = \sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P}) \equiv \underline{\int_a^b} f, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_{\mathcal{P}_n} = \inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P}) \equiv \overline{\int_a^b} f.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(h_{\mathcal{P}_n}) = (h_n)$ είναι αύξουσα και η $(g_{\mathcal{P}_n}) = (g_n)$ είναι φθίνουσα και ότι $h_n \le f \le g_n$ για κάθε n. Θέτουμε $h = \sup_n h_n$ και $g = \inf_n g_n$. Οι h, g είναι μετρήσιμες, φραγμένες (άρα Lebesgue-ολοκληρώσιμες) και

$$h \le f \le g.$$

Χωρίς καμμιά υπόθεση για την f (εκτός του ότι είναι φραγμένη) από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (αφού $h_n \le g_n \le g_1$ και $g_1 \in L^1$) συμπεραίνουμε ότι

$$\int h d\lambda = \lim_n \int h_n d\lambda = \underline{\int_a^b} f \quad \text{και} \quad \int g d\lambda = \lim_n \int g_n d\lambda = \overline{\int_a^b} f.$$

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα

$$\int h d\lambda = \int g d\lambda.$$

Εφόσον $h \le g$, η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a,b]$. Επομένως

Παρατήρηση *Δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν παντού.*

Τότε έχουμε και $h(x) = f(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a,b]$ οπότε η f είναι μετρήσιμη[13], μάλιστα Lebesgue-ολοκληρώσιμη και

$$\int f d\lambda = \int h d\lambda = \underline{\int_a^b} f$$

[13]για κάθε $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in [a,b] : f(x) < c\}$ διαφέρει από το σύνολο $\{x \in [a,b] : h(x) < c\}$ κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν, άρα είναι μετρήσιμο, γιατί τα σύνολα μέτρου μηδέν είναι Lebesgue μετρήσιμα.

δηλαδή το ολοκλήρωμα Lebesgue της f συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής.

Ισχυρισμός *Έστω $x \in [a,b]$ που δεν ανήκει σε κανένα από τα διαχωριστικά σημεία καμμιάς από τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$. Τότε η f είναι συνεχής στο x αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$.*

Απόδειξη Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $t \in [a,b]$ και $|t - x| < \delta$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \epsilon$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \delta$, οπότε η λεπτότητα της διαμέρισης $\mathcal{P}_n$ είναι μικρότερη από δ. Έπεται ότι αν I_k είναι το διάστημα[14] της $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε κάθε $t \in I_k$ θα ικανοποιεί $|t - x| < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ και συνεπώς $|M_k(f) - f(x)| \leq \epsilon$ και $|m_k(f) - f(x)| \leq \epsilon$ άρα $|M_k(f) - m_k(f)| \leq 2\epsilon$. Αφού $x \in I_k$, έχουμε $g_n(x) = M_k(f)$ και $h_n(x) = m_k(f)$ οπότε $g_n(x) - h_n(x) \leq 2\epsilon$. Αλλά $0 \leq g(x) - h(x) \leq g_n(x) - h_n(x) \leq 2\epsilon$, πράγμα που σημαίνει (αφού το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο) ότι $g(x) - h(x) = 0$.

Αν αντίστροφα $g(x) - h(x) = 0$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq g_n(x) - h_n(x) < \epsilon$ οπότε, αν $I_k = [t_{k-1}, t_k)$ είναι το διάστημα της $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε για κάθε $t \in I_k$ έχουμε $m_k(f) \leq f(t) \leq M_k(f)$ και $m_k(f) \leq f(x) \leq M_k(f)$ άρα

$$|f(t) - f(x)| \leq M_k(f) - m_k(f) = g_n(x) - h_n(x) < \epsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό διάστημα (t_{k-1}, t_k) ώστε για κάθε $t \in (t_{k-1}, t_k)$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x. □

Έστω λοιπόν ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Από την Παρατήρηση, υπάρχει ένα σύνολο $N_1 \subseteq [a,b]$ μέτρου μηδέν ώστε $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b] \setminus N_1$. Αν ονομάσουμε N την ένωση του N_1 με το (αριθμήσιμο, άρα λ-μηδενικό) σύνολο $\cup_n \mathcal{P}_n$ όλων των σημείων όλων των διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε το N έχει μέτρο μηδέν και η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a,b] \setminus N$, δηλαδή σχεδόν παντού. Πράγματι, αν $x \notin N$ τότε το x δεν είναι σημείο καμμιάς διαμέρισης οπότε, αφού $x \in N_1$ οπότε $h(x) = f(x) = g(x)$, η f είναι συνεχής στο x από τον Ισχυρισμό.

Έστω αντίστροφα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $N_2 \subseteq [a,b]$ μέτρου μηδέν ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a,b] \setminus N_2$. Θέτουμε $M = N_2 \cup (\cup_n \mathcal{P}_n)$. Για κάθε $x \in M^c$, η f είναι συνεχής στο x, οπότε από τον Ισχυρισμό προκύπτει η ισότητα $h(x) = g(x)$. Αφού $\lambda(M) = 0$, έχουμε $h = g$ σχεδόν παντού. Από την Παρατήρηση προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ υπάρχει.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 3.50 *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.*

Παρατήρηση 3.51 *Ας τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια «σχεδόν παντού συνεχής» και την έννοια «σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση»:*

Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet, δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών, δεν είναι πουθενά συνεχής, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$.

[14] μοναδικό, αφού τα I_n είναι ξένα

Αντίθετα η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ είναι σχεδόν παντού συνεχής (αφού είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$), αλλά δεν μπορεί να είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση, γιατί έχει άλμα στα δύο αυτά σημεία.

3.5 Σύγκλιση ακολουθιών μετρησίμων συναρτήσεων

Παρατήρηση 3.52 *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες. Γνωρίζουμε ήδη τις εξής έννοιες σύγκλισης:*

1. *$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X*
2. *$f_n \to f$ κατά σημείο στο X.*
3. *$f_n \to f$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.*
4. *$f_n \to f$ στον L^1, δηλαδή $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.*

Είναι προφανές ότι (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) και ότι οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν.

Επίσης η (1) $\Rightarrow$ (4) δεν ισχύει εν γένει (παράδειγμα: $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, $f = 0$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$), ισχύει όμως σε χώρους πεπερασμένου μέτρου (από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης).

Η συνεπαγωγή (2) $\Rightarrow$ (4) δεν ισχύει χωρίς επιπλέον υποθέσεις (όπως π.χ. στα Θεωρήματα Μονότονης ή Κυριαρχημένης Σύγκλισης) ούτε σε χώρους πεπερασμένου μέτρου. Ένα παράδειγμα στον $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ είναι η $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$, $f = 0$.

Ούτε όμως η συνεπαγωγή (4) $\Rightarrow$ (3) ισχύει. Ένα παράδειγμα είναι το 3.43. Το μόνο που μπορεί κανείς να συμπεράνει εν γένει από την $\|f_n - f\|_1 \to 0$ είναι ότι υπάρχει *υπακολουθία* (f_{k_n}) ώστε $f_{k_n} \to f$ σχεδόν παντού (Θεώρημα 3.44).

Ορισμός 3.9 *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες. Λέμε ότι $f_n \to f$* ***κατά μέτρο*** *όταν*

για κάθε $\varepsilon > 0$, αν $\quad N(n, \varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ τότε $\quad \lim_n \mu(N(n,\varepsilon)) = 0.$

Πρόταση 3.53 (Lebesgue) *Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Παραδείγματα 3.54 ***(α)*** *Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Δες το παράδειγμα 3.43.*

(β) *Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου. Για παράδειγμα η ακολουθία $(\chi_{[n,\infty)})$ τείνει στο 0 κατά σημείο, ενώ δεν συγκλίνει κατά μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$.*

Θεώρημα 3.55 (Egorov) *Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A_\delta \in \mathcal{S}$ με $\mu(A_\delta) < \delta$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_\delta$.*

Η σύγκλιση στο συμπέρασμα του Θεωρήματος ονομάζεται πολλές φορές «σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση».

Απόδειξη Για κάθε k και $m \in \mathbb{N}$, έστω

$$E_m(k) = \bigcup_{n \geq m} N(n, \frac{1}{k}) = \{x : \exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Έχουμε $E_m(k) \supset E_{m+1}(k)$ για κάθε m και

$$\bigcap_{m\geq 1} E_m(k) = \{x : \forall m\, \exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0\}$$

διότι αν $x \in \bigcap_m E_m(k)$ τότε υπάρχουν άπειροι $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}$, και συνεπώς η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν συγκλίνει στο $f(x)$. Όμως $f_n \to f$ σχεδόν παντού, άρα $\mu\left(\cap_m E_m(k)\right) = 0$. Επειδή $\mu(E_1(k)) < +\infty$, έπεται ότι $\lim\limits_m \mu(E_m(k)) = 0$.

Επομένως για κάθε $\delta > 0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\quad \mu(E_{m_k}(k)) < \dfrac{\delta}{2^k}$.

Έστω

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m_k}(k)$$

Τότε

$$\mu(A_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{m_k}(k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Ισχυρισμός: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c.

Απόδειξη : Έστω $\epsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{k} < \epsilon$. Επειδή $A_\delta \supseteq E_{m_k}(k)$, αν $x \in A_\delta^c$ έχουμε $x \notin E_{m_k}(k)$ άρα για κάθε $n \geq m_k$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \epsilon$. Αφού το m_k δεν εξαρτάται από το x έχουμε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c. $\square$

Το Θεώρημα Egorov δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου. Ένα παράδειγμα είναι το 3.54 (β): Η ακολουθία $(\chi_{[n,\infty)})$ τείνει στο μηδέν παντού, αλλά δεν υπάρκει A_δ πεπερασμένου (πόσο μάλλον μικρού) μέτρου ώστε η $(\chi_{[n,\infty)})$ να τείνει στο μηδέν ομοιόμορφα στο A_δ^c (γιατί;).

Το αντίστροφο όμως του Θεωρήματος Egorov ισχύει. Μάλιστα ισχύει κάτι ισχυρότερο:

Πρόταση 3.56 *Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα τότε $f_n \to f$ σχεδόν παντού και κατά μέτρο.*

Απόδειξη Παραλείπεται.

Το αντίστροφο της 3.56 δεν ισχύει εν γένει. Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία (g_n) όπου $g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \leq t \leq n + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$. (Απόδειξη: Άσκηση.)

Επίσης, η υπόθεση «$f_n \to f$ κατά μέτρο» δεν αρκεί από μόνη της για να εξασφαλίσει την σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση (ούτε σε χώρους πεπερασμένου μέτρου): η ακολουθία (f_n) στο Παράδειγμα 3.43 συγκλίνει στο 0 κατά μέτρο, δεν συγκλίνει όμως σε κανένα σημείο, οπότε δεν είναι δυνατόν να συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

Παρατήρηση 3.57 *Απο το Θεώρημα 3.55 και την Πρόταση 3.56 έπεται ότι σε χώρους* ***πεπερασμένου*** *μέτρου,*

$$f_n \to f \text{ σ.π.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \to f \text{ σχεδόν ομοιόμορφα.}$$

Πρόταση 3.58 *Αν $f_n \to f$ στον L^1 τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη Από την ανισότητα Chebyshev - Markov 3.25 έχουμε για κάθε $\epsilon > 0$,

$$\mu(N(n,\epsilon)) \leq \frac{1}{\epsilon} \int |f_n - f| d\mu = \frac{1}{\epsilon} \|f_n - f\|_1 \to 0. \qquad \square$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία $f_n = n^2 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ στον $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$.

4 Μέτρα γινόμενο - Θεώρημα Fubini

Ορισμός 4.1 *Αν*[1] $(X, \mathcal{A})$ *και* $(Y, \mathcal{B})$ *είναι μετρήσιμοι χώροι, τα σύνολα* $A \times B$ *όπου* $A \in \mathcal{A}$ *και* $B \in \mathcal{B}$ *λέγονται* **μετρήσιμα ορθογώνια**. *Ορίζουμε* [2]

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{M}\{A \times B \subseteq X \times Y : A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}.$$

Παρατήρηση $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Πρόταση 4.1 *Αν* $(Z, \mathcal{C})$ *είναι μετρήσιμος χώρος και* $f : Z \to X \times Y$, *τότε η* f *είναι* $\mathcal{C}$-$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-*μετρήσιμη αν και μόνον αν η* $\pi_1 \circ f : Z \to X$ *είναι* $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}$-*μετρήσιμη και η* $\pi_2 \circ f : Z \to Y$ *είναι* $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-*μετρήσιμη (όπου* π_i *οι καρτεσιανές προβολές* $X \times Y \to X$ *και* $X \times Y \to Y$*).*

Πόρισμα 4.2 *Έστω* $(Z, \mathcal{C})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f_1, f_2 : Z \to \mathbb{R}$.
(α) *Αν οι* f_1, f_2 *είναι μετρήσιμες, τότε οι* $f_1 + f_2 : Z \to \mathbb{R}$ *και* $f_1 f_2 : Z \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμες.*
(β) *Οι* f_1, f_2 *είναι μετρήσιμες αν και μόνον αν η* $f_1 + i f_2 : Z \to \mathbb{C}$ *είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση 4.3 *Αν* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *είναι χώροι μέτρου, υπάρχει μέτρο*

$$\pi \equiv \mu \times \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, +\infty]$$

ώστε

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{όταν } A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}.$$

Αν τα μ, ν *είναι σ-πεπερασμένα, τότε το* π *είναι μοναδικό και σ-πεπερασμένο.*

Η ιδέα της απόδειξης. Το π ορίζεται καλά στην οικογένεια $\mathcal{C}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων μετρησίμων ορθογωνίων. Η $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα (Πρόταση 1.7). Επεκτείνουμε το π στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα επέκτασης Καραθεοδωρή.

Ορισμός 4.2 (Τομές (sections)) *Αν* $E \subseteq X \times Y$ *και* $f : X \times Y \to Z$, *για κάθε* $(x, y) \in X \times Y$ *θέτουμε*

$$\begin{aligned}
E_x &= \{v \in Y : (x, v) \in E\} \subseteq Y \\
E^y &= \{s \in X : (s, y) \in E\} \subseteq X \\
f_x &: Y \to Z \qquad f_x(v) = f(x, v)\ (v \in Y) \\
f^y &: X \to Z \qquad f^y(s) = f(s, y)\ (s \in X).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$.

Πρόταση 4.4 *Αν* $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *τότε για κάθε* $(x, y) \in X \times Y$,

$$E_x \in \mathcal{B}, \qquad E^y \in \mathcal{A}.$$

[1] fubinew, 24 Dec. 08

[2] Βεβαίως το σύνολο $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ δεν είναι άλγεβρα συνόλων, είναι όμως «στοιχειώδης οικογένεια» (Ορισμός 1.4).

Πρόταση 4.5 *Αν $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη τότε για κάθε $(x, y) \in X \times Y$,*

$$f_x \quad \text{είναι } \mathcal{B}\text{-μετρήσιμη}, \qquad f^y \quad \text{είναι } \mathcal{A}\text{-μετρήσιμη.}$$

Απόδειξη Παρατήρησε ότι, αν $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε (γιατί;)

$$f_x^{-1}(U) = (f^{-1}(U))_x.$$

Θεώρημα 4.6 (Fubini για χαρακτηριστικές) *Θεωρούμε χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Για κάθε $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,*

(α) οι συναρτήσεις

$$X \to [0, +\infty] : \quad x \to \nu(E_x) = \int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y)$$
$$Y \to [0, +\infty] : \quad y \to \mu(E^y) = \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x)$$

είναι $\mathcal{A}$ (αντιστοίχως $\mathcal{B}$) μετρήσιμες και

(β) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E)$$

δηλαδή

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y). \tag{1}$$

Η ιδέα της απόδειξης Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(X) < \infty$ και $\nu(Y) < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\Theta \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ των συνόλων για τα οποία (όλα) τα συμπεράσματα του Θεωρήματος ισχύουν. Παρατηρούμε ότι η Θ περιέχει όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ξένες ενώσεις, άρα περιέχει την άλγεβρα $\mathcal{C}$ που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης) καθώς και ως προς φθίνουσες τομές (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). Έπεται τότε (δες το επόμενο Λήμμα) ότι η Θ περιέχει την σ-άλγεβρα που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια, άρα $\Theta = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Η επέκταση στην περίπτωση σ-πεπερασμένων μέτρων γίνεται γράφοντας τον $X \times Y$ ως αριθμήσιμη ξένη ένωση μετρησίμων ορθογωνίων πεπερασμένου μέτρου και εφαρμόζοντας την γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων και το Θεώρημα Beppo Levi.

Λήμμα 4.7 (Μονοτόνων κλάσεων) *Έστω $\mathcal{C}$ μια άλγεβρα συνόλων και $\mathcal{M}$ μια οικογένεια που είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις και ως προς φθίνουσες τομές (μια τέτοια $\mathcal{M}$ λέγεται* μονότονη κλάση*). Αν η $\mathcal{M}$ περιέχει την $\mathcal{C}$, τότε περιέχει την σ-άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ που παράγει η $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη Παραλείπεται.

Πρόταση 4.8 (Αρχή Cavalieri) *Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $E, F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, τότε*

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(E) = (\mu \times \nu)(F) \iff & \nu(E_x) = \nu(F_x) \quad \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X \\ \iff & \mu(E^y) = \mu(F^y) \quad \nu\text{-σχεδόν για κάθε } y \in Y.\end{aligned}$$

Απόδειξη Άμεση από την σχέση (1) στο Θεώρημα 4.6.

Παρατήρηση 4.9 Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.6, αν η

$$f : X \times Y \to [0, +\infty] \qquad \text{με} \;\; f(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}(x,y) \quad (c_k \geq 0)$$

είναι απλή και $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη, τότε η $\phi_f : X \to [0, +\infty]$ με

$$\phi_f(x) = \int_Y f(x,y) d\nu(y) = \sum_k c_k \nu((E_k)_x)$$

είναι $\mathcal{A}$ μετρήσιμη[3] ως γραμμικός συνδυασμός μετρησίμων συναρτήσεων.
Επιπλέον έχουμε

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X \phi_f(x) d\mu(x) = \sum_k c_k \int_X \nu((E_k)_x) d\mu(x) = \sum_k c_k \pi(E)$$

(όπου $\pi = \mu \times \nu$) συνεπώς

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \sum_k c_k \pi(E) = \int_{X \times Y} f(x,y) d\pi(x,y).$$

Γενικότερα,

Θεώρημα 4.10 (Tonelli) *Έστω $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ όπου οι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν η f είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη, τότε*

(α) οι συναρτήσεις

$$X \to [0, +\infty] : \;\; x \to \int_Y f(x,y) d\nu(y)$$
$$Y \to [0, +\infty] : \;\; y \to \int_X f(x,y) d\mu(x)$$

είναι $\mathcal{A}$ (αντιστοίχως $\mathcal{B}$) μετρήσιμες και

(β) ισχύουν οι ισότητες $\iint f d\nu d\mu = \iint f d\mu d\nu = \int f d\pi$, δηλαδή

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu).$$

Απόδειξη Αν η f είναι απλή, δείξαμε στην Παρατήρηση 4.9 ότι η ϕ_f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και ότι $\int_X \phi_f d\mu = \int f d\pi$.

Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία (f_n) από $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \nearrow f$ κατά σημείο. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον $X \times Y$ έχουμε

$$\int_{X \times Y} f_n d\pi \nearrow \int_{X \times Y} f d\pi. \qquad (2)$$

[3] Δεν είναι εν γένει απλή. Πάρε για παράδειγμα την $f = \chi_E$ όπου $E \subseteq [0,1] \times [0,1]$ το σύνολο Borel $E = \{(x,y) : x \leq y\}$ και υπολόγισε την ϕ_f (μέτρο Lebesgue).

Όμως, αν $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x,y)d\nu(y)$ τότε κάθε ϕ_n είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. Επίσης, για κάθε $x \in X$, επειδή $(f_n)_x(y) \nearrow f_x(y)$ για κάθε $y \in Y$, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον Y έχουμε

$$\phi_n(x) = \int_Y (f_n)_x(y)d\nu(y) \nearrow \int_Y f_x(y)d\nu(y) \equiv \phi_f(x) \quad \text{για κάθε } \ x \in X.$$

Αφού η ϕ_f είναι κατά σημείο όριο μετρησίμων, είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και (από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον X) έπεται ότι

$$\int_X \phi_n d\mu \nearrow \int_X \phi_f d\mu.$$

Όμως κάθε f_n είναι απλή, άρα (από την Παρατήρηση 4.9)

$$\int_X \phi_n d\mu = \int_X \left(\int_Y f_n(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f_n d\pi.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\int_X \phi_f d\mu = \lim_n \int_{X\times Y} f_n d\pi. \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι

$$\int_{X\times Y} f d\pi = \int_X \phi_f d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

και η άλλη ισότητα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο. $\square$

Παράδειγμα 4.11 *Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα όταν δεν είναι και οι δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για παράδειγμα, έστω $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ τα σύνολα Borel, μ το μέτρο Lebesgue και ν το μέτρο απαρίθμησης. Αν $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$, τότε τα τρία ολοκληρώματα $\int_Y(\int_X \chi_D d\mu)d\nu = 0$, $\int_X(\int_Y \chi_D d\nu)d\mu = 1$ και $\int_{X\times Y} \chi_D d(\mu\times\nu) = +\infty$ είναι διαφορετικά ανά δύο.*

Ας δείξουμε ότι $\int_{X\times Y} \chi_D d(\mu\times\nu) = +\infty$, δηλαδή ότι $\pi(D) = (\mu\times\nu)(D) = +\infty$. Αφού το D είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμο, το μέτρο του ισούται με το εξωτερικό του μέτρο, δηλαδή

$$\pi(D) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) : A_i \in \mathcal{A},\, B_i \in \mathcal{B},\, D \subseteq \bigcup_i A_i \times B_i \right\}.$$

Θεωρούμε μια τυχαία αριθμήσιμη κάλυψη $D \subseteq \bigcup_i A_i \times B_i$. Για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ ώστε $(x,x) \in A_i \times B_i$, οπότε $x \in A_i \cap B_i \equiv C_i$. Έχουμε λοιπόν $[0,1] = \bigcup_i C_i$, άρα κάποιο C_j θα έχει θετικό μέτρο Lebesgue: $\mu(C_j) > 0$. Τότε όμως το C_j είναι άπειρο, οπότε $\nu(C_j) = +\infty$. Συνεπώς $\pi(A_j \times B_j) \geq \pi(C_j \times C_j) = \mu(C_j)\nu(C_j) = +\infty$ και άρα $\sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) = +\infty$. Αφού η κάλυψη είναι τυχαία, έπεται ότι $\pi(D) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.12 *Η υπόθεση $f \geq 0$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν $(X,\mathcal{A},\mu) = (Y,\mathcal{B},\nu) = (\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ (μ το μέτρο απαρίθμησης) και*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y+1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε $\int_Y(\int_X f d\mu)d\nu = 0$ ενώ $\int_X(\int_Y f d\nu)d\mu = 1$.
Παρατηρούμε εδώ ότι $\int_{X\times Y} |f| d(\mu\times\nu) = +\infty$.

Θεώρημα 4.13 (Fubini) *Έστω* $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ *όπου οι* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε*

(α) σχεδόν όλες οι τομές της f είναι ολοκληρώσιμες, δηλαδή
μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\int_Y |f(x,y)|d\nu(y) < +\infty$
και ν-σχεδόν για κάθε $y \in Y$ ισχύει ότι $\int_X |f(x,y)|d\mu(y) < +\infty$

(β) οι (σχεδόν παντού ορισμένες) συναρτήσεις

$$x \to \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad \text{και} \quad y \to \int_X f(x,y)d\mu(x)$$

ορίζουν στοιχεία[4] *του $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντιστοίχως $L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$) και*

(γ) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε το Θεώρημα για την περίπτωση $f(X) \subseteq [-\infty, +\infty]$. Η περίπτωση $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ έπεται εύκολα.

Από το Θεώρημα Tonelli η συνάρτηση $\phi_{|f|} : X \to [0, +\infty]$ με $\phi_{|f|}(x) = \int_Y |f(x,y)|d\nu(y)$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και

$$\int_X \phi_{|f|}(x)d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f|d\pi < +\infty.$$

Επομένως το σύνολο

$$A = \{x \in A : \phi_{|f|}(x) < \infty\}$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$ και $\mu(A^c) = 0$. Με άλλα λόγια

$$\mu\text{-σχεδόν για κάθε } \ x \in X, \quad \int_Y |f_x(y)|d\nu(y) < +\infty, \ \text{ δηλ.} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(\nu).$$

Για τον ίδιο λόγο υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $\nu(B^c) = 0$ ώστε για κάθε $y \in B$ να ισχύει $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και το (α) αποδείχθηκε.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Tonelli στην $f_+ = \max\{f, 0\}$: έπεται ότι η συνάρτηση $\phi_+ : X \to [0, +\infty]$ με $\phi_+(x) = \int_Y f_+(x,y)d\nu(y)$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και ότι

$$\int_X \phi_+ d\mu = \int_X \left(\int_Y (f_+)_x(y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f_+ d(\mu \times \nu) \le \int_{X \times Y} |f|d(\mu \times \nu) < \infty,$$

δηλαδή $\phi_+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Ομοίως η συνάρτηση $\phi_-(x) = \int_Y f_-(x,y)d\nu(y)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ και

$$\int_X \phi_+ d\mu = \int_{X \times Y} f_+ d(\mu \times \nu) < \infty, \qquad \int_X \phi_- d\mu = \int_{X \times Y} f_- d(\mu \times \nu) < \infty$$

$$\text{άρα} \quad \int_X \phi_+ d\mu - \int_X \phi_- d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu)\,. \tag{4}$$

Όμως, αν $x \in A$ οπότε $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ και άρα $(f_\pm)_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$, έχουμε

$$\int_Y f_x(y)d\nu(y) = \int_Y (f_+)_x(y)d\nu(y) - \int_Y (f_-)_x(y)d\nu(y) = \phi_+(x) - \phi_-(x) \in \mathbb{R}.$$

[4] δηλαδή π.χ. η πρώτη συνάρτηση είναι μ-ισοδύναμη με μία $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Δηλαδή η συνάρτηση

$$x \to \int_Y f(x,y)d\nu(y)$$

είναι μ-σχεδόν παντού ορισμένη και ίση με τη διαφορά δύο στοιχείων του $L^1(\mu)$, άρα ορίζει στοιχείο του $L^1(\mu)$. Ακριβέστερα, αν θέσουμε

$$g(x) = \phi_+(x)\chi_A(x) - \phi_-(x)\chi_A(x) \qquad (x \in X) \tag{5}$$

τότε η g είναι (παντού) διαφορά δύο συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1(\mu)$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, άρα ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ και ικανοποιεί

$$g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad \text{για κάθε} \;\; x \in A$$

δηλαδή μ-σχεδόν παντού.

Από την (5) και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) &= \int_X g(x)d\mu(x) \\ &= \int_X \phi_+(x)d\mu(x) - \int_X \phi_-(x)d\mu(x) \overset{(4)}{=} \int_{X\times Y} f(x,y)d\pi(x,y).\end{aligned}$$

Ομοίως η (ν-σχεδόν παντού ορισμένη) συνάρτηση

$$y \to \int_X f(x,y)d\mu(x)$$

ορίζει στοιχείο του $L^1(\nu)$ και προκύπτει ότι

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)d\pi(x,y).$$

□

Παρατήρηση 4.14 Τα Θεωρήματα Tonelli και Fubini συνήθως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό: αν δοθεί μια $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση f, παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Tonelli οι σχέσεις

$$\begin{aligned} (i) &\quad \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\right) d\mu(x) < \infty \\ (ii) &\quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|d\mu(x)\right) d\nu(y) < \infty \\ \text{και} \;\; (iii) &\quad \int_{X\times Y} |f(x,y)|d\pi(x,y) < \infty \quad (\text{όπου} \;\; \pi = \mu \times \nu)\end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες. Ελέγχουμε λοιπόν αν κάποιο από τα διαδοχικά ολοκληρώματα στο (i) ή στο (ii) δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα, οπότε έχουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \pi)$, και αν αυτό ισχύει, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini συμπεραίνουμε ότι το «διπλό» ολοκλήρωμα $\int_{X\times Y} f d\pi$ υπάρχει και ισούται με οποιοδήποτε από τα τα διαδοχικά ολοκληρώματα $\int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\mu(y)$ και $\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$.

Uniqueness of translation invariant measures

joint work by The Class

Let G be an abelian group equiped with a σ-algebra $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(G)$ such that[1] *for all $g \in G$ the map $\lambda_g : G \to G : h \to g + h$ is measurable. Suppose μ and ν are two σ-finite measures on $\mathcal{S}$ which are* ***left invariant****, that is $\mu(\lambda_g(E)) = \mu(E)$ for all $g \in G$ and $E \in \mathcal{S}$, and similarly for ν. Then there exists $c > 0$ such that $\nu = c\mu$.*

Proof By σ-finiteness, there exists $B \in \mathcal{S}$ such that $\nu(B)$ and $\mu(B)$ are both nonzero and finite. Let $c = \frac{\nu(B)}{\mu(B)}$. Replacing μ by the measure $\mu'(E) = c\mu(E)$, we may assume that $\mu(B) = \nu(B)$ and we will show that $\mu = \nu$.

Claim Given any pair E, F of sets in $\mathcal{S}$, we claim that

$$\int \chi_E(x-y)\chi_F(x)d\mu(x) = \int \chi_E(x)\chi_F(y+x)d\mu(x) \qquad \text{for all} \;\; y \in G$$

Proof of the Claim Observe first that if $f : G \to [0, +\infty]$ is measurable, then

$$\int_G f(x+g)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x) \qquad \text{for all} \;\; g \in G$$

and similarly for ν. Indeed, if $f = \chi_E$, note that $f(x+g) = \chi_{E_g}(x)$, where $E_g = \lambda_g^{-1}(E)$, because $f(x+g) = f(\lambda_g(x)) = 1$ iff $\lambda_g(x) \in E$ iff $x \in \lambda_g^{-1}(E)$. But $\mu(E_g) = \mu(E)$ and thus

$$\int f(x+g)d\mu(x) = \int \chi_{E_g}(x)d\mu(x) = \mu(E_g) = \mu(E) = \int f d\mu.$$

By linearity of the integral the equality is valid whenever f is a nonnegative measurable simple function. For general f let s_n be an increasing sequence of nonnegative measurable simple functions such that $s_n \to f$ pointwise, observe that $s_n \circ \lambda_g \to f \circ \lambda_g$ and apply the monotone convergence theorem.

If $y \in G$, applying this to the function f_y given by $f_y(x) = \chi_E(x)\chi_F(x+y)$ gives

$$\int \chi_E(x-y)\chi_F(x)d\mu(x) = \int f_y(x-y)d\mu(x) = \int f_y(x)d\mu(x) = \int \chi_E(x)\chi_F(y+x)d\mu(x)$$

which proves the Claim.

It follows that

$$\int \left(\int \chi_E(x-y)\chi_F(x)d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int \chi_E(x)\chi_F(y+x)d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

[1] haar, 5 feb 09

Since the integrands are both non-negative and $\mathcal{S}\otimes\mathcal{S}$ measurable functions on $\times G$, using Tonelli's Theorem, we get

$$\int\left(\int \chi_E(x-y)\chi_F(x)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int\left(\int \chi_E(x)\chi_F(y+x)d\nu(y)\right)d\mu(x).$$

Now we calculate

$$\begin{aligned}\int\left(\int \chi_E(x)\chi_F(y+x)d\nu(y)\right)d\mu(x) &= \int\left(\chi_E(x)\int \chi_{\lambda_{-x}(F)}(y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int \chi_E(x)\nu(\lambda_{-x}(F))d\mu(x) = \int \chi_E(x)\nu(F)d\mu(x)\\ &= \mu(E)\nu(F)\end{aligned}$$

(since $\nu(\lambda_{-x}(F)) = \nu(F)$) and

$$\begin{aligned}\int\left(\int \chi_E(x-y)\chi_F(x)d\nu(y)\right)d\mu(x) &= \int\left(\chi_F(x)\int \chi_{-E}(y-x)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int\left(\chi_F(x)\int \chi_{\lambda_x(-E)}(y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int \chi_F(x)\nu(\lambda_x(-E))d\mu(x) = \int \chi_F(x)\nu(-E)d\mu(x)\\ &= \nu(-E)\mu(F)\end{aligned}$$

and so

$$\mu(E)\nu(F) = \nu(-E)\mu(F) \qquad \text{for all } \ E, F \in \mathcal{S}. \tag{1}$$

Set $F = B$ in (1) to obtain

$$\begin{gathered}\mu(E)\nu(B) = \nu(-E)\mu(B) = \nu(-E)\nu(B)\\ \text{and so } \ \mu(E) = \nu(-E) \qquad \text{for all } \ E \in \mathcal{S}\end{gathered}$$

since $0 < \nu(B) < +\infty$. Applying the last equality to B we obtain $\mu(B) = \nu(-B)$ and now (1) for $E = B$ gives

$$\mu(B)\nu(F) = \nu(-B)\mu(F)$$

and so finally

$$\nu(F) = \mu(F) \qquad \text{for all } \ F \in \mathcal{S}. \qquad \square$$

Remarks [A.K.] *Note that we have actually shown that $\mu(E) = \mu(-E)$ for all $E \in \mathcal{S}$: thus any translation invariant measure is automatically reflection invariant. This is not true in general for non-abelian groups.*

For the case $G = \mathbb{R}^n, \mathcal{S} = \mathcal{B}_G$, the above shows that any translation invariant Borel measure on $\mathbb{R}^n$ is a multiple of Lebesgue measure.

It is known that any (not necessarily abelian) locally compact (Hausdorff) group G admits a (left-) translation invariant regular Borel measure μ, called ***Haar measure****. The proof is non-trivial.*

Any other left translation invariant regular Borel measure on G is a positive multiple of Haar measure. The proof in the non-abelian case also uses Tonelli's theorem.

Θεώρημα Radon - Nikodym – Διαφόριση

5 Προσημασμένα μέτρα

Παράδειγμα 5.1 *Αν $(X, \mathcal{S})$ είναι μετρήσιμος χώρος*[1] *και μ_1, μ_2 είναι* πεπερασμένα *μέτρα στην $\mathcal{S}$, η απεικόνιση*

$$\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R} : \qquad E \to \mu_1(E) - \mu_2(E)$$

ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &(i)\ \nu(\emptyset) = 0 \\ &(ii)\ \text{αν } E_n \in \mathcal{S} \ \text{ είναι ξένα ανά δύο τότε } \ \nu(\bigcup_n E_n) = \sum_n \nu(E_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Παράδειγμα 5.2 *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, η σχέση*

$$E \to \nu(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}$$

ορίζει (θετικό) μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$. Παρατήρησε ότι αν $\mu(E) = 0$ τότε $\nu(E) = 0$.

Γενικότερα αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη και το ολοκλήρωμα $\int f d\mu$ ορίζεται (βλ. τον Ορισμό 3.6), η συνολοσυνάρτηση

$$\mathcal{S} \to [-\infty, +\infty] : E \to \nu(E) = \int_E f d\mu \tag{2}$$

είναι διαφορά δύο μέτρων, τουλάχιστον ένα εκ των οποίων είναι πεπερασμένο, επομένως ικανοποιεί τις σχέσεις (1) και παίρνει το πολύ μία από τις τιμές $-\infty$ και $+\infty$.

Ορισμός 5.1 ***Προσημασμένο μέτρο*** *είναι μια συνολοσυνάρτηση $\mathcal{S} \to [-\infty, +\infty] : E \to \nu(E)$ που παίρνει το πολύ μία από τις τιμές $-\infty$ και $+\infty$ και ικανοποιεί τις σχέσεις (1).*

Μιγαδικό μέτρο *είναι μια συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις (1).*

Παρατηρήσεις 5.3 (α) Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα (θετικό) μέτρο είναι προσημασμένο μέτρο, ενώ ένα προσημασμένο μέτρο δεν είναι πάντα μιγαδικό μέτρο. Άλλοι συγγραφείς (π.χ. Κουμουλλής – Νεγρεπόντης), με τον όρο προσημασμένο μέτρο εννοούν ένα μιγαδικό μέτρο με πραγματικές τιμές.

[1] RN, 12/02/09

(β) Αν στην (ii) έχουμε $|\nu(\cup_n E_n)| < \infty$ (ειδικότερα αν το μέτρο ειναι μιγαδικό) η σειρά συγκλίνει. Τότε, επειδή κάθε αναδιάταξη $\sum_n E_{\pi(n)}$ της σειράς έχει το ίδιο όριο $\nu(\bigcup_n E_{\pi(n)}) = \nu(\bigcup_n E_n)$, η σύγκλιση είναι απόλυτη.[2]

(γ) Αν μ_1 και μ_2 είναι (θετικά) μέτρα, το άθροισμά τους είναι θετικό μέτρο, αλλά η διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ δεν είναι εν γένει προσημασμένο μέτρο.

Το σύνολο των μιγαδικών μέτρων είναι μιγαδικός γραμμικός χώρος ως προς τις πράξεις κατά σημείο, όπως ο χώρος $L^1(X, \mu)$.

(δ) Θα δούμε ότι όλα τα προσημασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$ είναι της μορφής $\mu_1 - \mu_2$ για κατάλληλα θετικά μέτρα μ_i και επίσης της μορφής (2) για κατάλληλο θετικό μέτρο μ και μετρήσιμη $f : X \to [-\infty, +\infty]$.

Αν δοθεί ένα θετικό μέτρο μ στον $(X, \mathcal{S})$, είναι αλήθεια ότι όλα τα προσημασμένα μέτρα ν στον $(X, \mathcal{S})$ είναι της μορφής (2); Όχι!

Παράδειγμα το μέτρο Dirac δ_0 στο 0: Αν ικανοποιούσε την (2) ως προς το μέτρο Lebesgue λ τότε η f θα έπρεπε να ικανοποιεί $f(x) = 0$ λ-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, οπότε $\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = 0 \neq \delta_0(\mathbb{R})$.

Παρατήρησε ότι όταν το ν ικανοποιεί την (2) τότε ικανοποιεί, εκτός από τις (i) και (ii), και την σχέση

$$(iii) \quad \text{αν } \mu(E) = 0 \text{ τότε } \nu(E) = 0$$

ενώ για το δ_0 ισχύει το «άκρως αντίθετο»: Υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\lambda(E) = 0$ ενώ $\delta_0(E^c) = 0$ (πράγματι, $E = \{0\}$).

Ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο θα αποδείξουμε με την επιπλέον υπόθεση ότι το ν είναι σ-πεπερασμένο (δες Θεώρημα 5.21):

Θεώρημα 5.4 (Radon - Nikodym I) *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και ν είναι θετικό μέτρο τότε υπάρχει μετρήσιμη $f : X \to [0, +\infty]$, ώστε*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}$$

αν και μόνον αν

$$E \in \mathcal{S}, \ \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

Η f είναι μοναδική modulo ισότητα μ-σ.π.

---

[2] **Απόδειξη** (α) Έστω πρώτα ότι το ν είναι προσημασμένο μέτρο. Υποθέτουμε ότι δεν παίρνει την τιμή $-\infty$ (αλλιώς, θεωρούμε το $-\nu$). Η σειρά $\sum_n \nu(E_n)$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $\nu(\cup_n E_n)$. Θέτοντας $\mathbb{N}_1 = \{n : \nu(E_n) \geq 0\}$ και $\mathbb{N}_2 = \{n : \nu(E_n) < 0\}$ παρατηρούμε ότι οι δύο σειρές $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \nu(E_n) = \nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1})$ και $\sum_{n\in\mathbb{N}_2}(-\nu(E_n)) = -\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_2})$ έχουν και οι δύο μη αρνητικούς όρους, άρα ή συγκλίνουν ή τείνουν στο $+\infty$. Εφόσον όμως $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_2}) > -\infty$, η δεύτερη αναγκαστικά συγκλίνει. Επειδή η διαφορά τους είναι η συγκλίνουσα σειρά $\sum_n \nu(E_n)$, έπεται ότι και οι δύο συγκλίνουν (στο $\mathbb{R}$). Έχουμε λοιπόν

$$\sum_{n\in\mathbb{R}} |\nu(E_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} |\nu(E_n)| + \sum_{n\in\mathbb{N}_2} |\nu(E_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \nu(E_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}_2} (-\nu(E_n)) \in \mathbb{R}.$$

(β) Αν το ν είναι μιγαδικό μέτρο, τότε τα $\nu_1(E) = \mathrm{Re}\, \nu(E)$ και $\nu_2(E) = \mathrm{Im}\, \nu(E)$ είναι προσημασμένα μέτρα με πραγματικές μόνον τιμές, οπότε $\sum_n |\nu(E_n)| \leq \sum_n |\nu_1(E_n)| + \sum_n |\nu_2(E_n)| < +\infty$.

5.1 Αναλύσεις μέτρων

Λήμμα 5.5 *Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ και (E_n) στην $\mathcal{S}$. Αν η (E_n) είναι αύξουσα, τότε $\nu(\cup E_n) = \lim_n \nu(E_n)$. Αν η (E_n) είναι φθίνουσα και $\nu(E_1) \in \mathbb{R}$, τότε $\nu(\cap E_n) = \lim_n \nu(E_n)$.*

Ορισμός 5.2 *Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$. Ένα σύνολο $E \in \mathcal{S}$ λέγεται*

- **θετικό** *για το ν αν* $\quad F \in \mathcal{S}, F \subseteq E \Rightarrow \nu(F) \geq 0$
- **αρνητικό** *για το ν αν* $\quad F \in \mathcal{S}, F \subseteq E \Rightarrow \nu(F) \leq 0$
- **μηδενικό** *για το ν αν* $\quad F \in \mathcal{S}, F \subseteq E \Rightarrow \nu(F) = 0.$

Αν το ν είναι θετικό μέτρο, τότε ένα $E \in \mathcal{S}$ είναι μηδενικό για το ν αν και μόνον αν $\nu(E) = 0$.

Παράδειγμα 5.6 *Αν το ν ορίζεται από τη σχέση $\nu(E) = \int_E f d\mu$ όπου μ θετικό μέτρο και $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, τότε ένα E είναι ν-θετικό αν και μόνον αν $f(x) \geq 0$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in E$.*

Λήμμα 5.7 *(α) Αν το E είναι θετικό για το ν και $F \in \mathcal{S}$ είναι υποσύνολο του E τότε το F είναι θετικό για το ν και $\nu(F) \leq \nu(E)$.*

(β) Αν τα E_n είναι θετικά για το ν τότε το $\cup_n E_n$ είναι θετικό για το ν.

Απόδειξη (α) Αν $G \in \mathcal{S}$ και $G \subseteq F$ τότε $G \subseteq E$ άρα $\nu(G) \geq 0$. Δηλαδή το F είναι ν-θετικό. Επίσης $\nu(E \setminus F) \geq 0$ άρα $\nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F) \geq \nu(F)$.

(β) Αν $F_n = E_n \setminus \cup_{k<n} E_k$ τότε τα F_n είναι ν-θετικά από το (α). Έπεται ότι αν $F \in \mathcal{S}$ είναι υποσύνολο του $\cup_n E_n$ τότε $\nu(F) = \sum_n \nu(F \cap F_n) \geq 0$.

Θεώρημα 5.8 (Ανάλυση Hahn) *Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$. Τότε υπάρχει μετρήσιμη διαμέριση*

$$X = P \cup N, \qquad P \cap N = \emptyset \quad \text{όπου } P \ \text{ θετικό για το } \nu, \ N \ \text{ αρνητικό για το } \nu.$$

Αν $X = P' \cup N'$ είναι μια άλλη τέτοια διαμέριση, τότε το $P \triangle P' = N \triangle N'$ είναι μηδενικό για το ν.

Απόδειξη Εξ ορισμού το ν δεν μπορεί να παίρνει και τις δύο τιμές $+\infty, -\infty$. Υποθέτουμε ότι

$$\text{για κάθε } \ E \in \mathcal{S}, \quad \text{ισχύει } \ \nu(E) < +\infty$$

(αλλιώς, θεωρούμε το $-\nu$).

(i) Ας ονομάσουμε $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ την οικογένεια των ν-θετικών μετρήσιμων συνόλων.

Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{P}$ περιέχει το $\emptyset$, άρα είναι μη κενή . Έστω $m = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{P}\} \in [0, +\infty]$. Υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}$ στην $\mathcal{P}$ ώστε $\nu(E_n) \to m$. Επειδή η $\mathcal{P}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις (Λήμμα 5.7), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Αν λοιπόν θέσουμε $P = \cup_n E_n$, από το Λήμμα 5.7 έπεται ότι $P \in \mathcal{P}$ και από το Λήμμα 5.5 ότι $\nu(P) = \lim \nu(E_n) = m$, οπότε έχουμε $m < \infty$.

(ii) Θέτουμε $N = P^c$.

Παρατήρηση (α). Το N δεν μπορεί να περιέχει σύνολα $E \in \mathcal{P}$ με $\nu(E) > 0$.

Πράγματι, αν περιείχε ένα τέτοιο E, τότε $P \cup E \in \mathcal{P}$ και

$$\nu(P \cup E) = \nu(P) + \nu(E) = m + \nu(E) > m,$$

ενώ το m ικανοποιεί εξ ορισμού $m \geq \nu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{P}$.

Παρατήρηση (β). Αν $A \in \mathcal{S}$, $A \subseteq N$ και $\nu(A) > 0$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{S}$, $B \subseteq A$ με $\nu(B) > \nu(A)$.

Πράγματι, από το (α) έχουμε $A \notin \mathcal{P}$, άρα υπάρχει $C \in \mathcal{S}$, $C \subseteq A$ ώστε $\nu(C) < 0$. Θέτοντας $B = A \setminus C$ έχουμε $\nu(B) + \nu(C) = \nu(A)$ άρα $\nu(B) > \nu(A)$.

(iii) Θα δείξουμε ότι το N είναι ν-αρνητικό.

Υποθέτουμε ότι δεν είναι. Θα βρούμε επαγωγικά μια *φθίνουσα* ακολουθία $\{A_n\}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του N με όλο και *μεγαλύτερο* θετικό μέτρο. Αυτό θα μας οδηγήσει σε άτοπο, όπως θα δούμε.

Αφού υποθέσαμε ότι το N δεν είναι ν-αρνητικό, θα περιέχει $A \in \mathcal{S}$ με $\nu(A) > 0$.

Επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο το σύνολο $\{A \in \mathcal{S}, A \subseteq N, \nu(A) > \frac{1}{n}\}$ δεν είναι κενό. Έστω n_1 ο μικρότερος τέτοιος n.

Επιλέγουμε $\quad A_1 \in \mathcal{S}$, $A_1 \subseteq N$ με $\nu(A_1) > \frac{1}{n_1}$.

Από την Παρατήρηση (β) υπάρχει $B \in \mathcal{S}$, $B \subseteq A_1$ με $\nu(B) > \nu(A_1)$.

Έστω n_2 ο μικρότερος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $B \in \mathcal{S}$, $B \subseteq A_1$ με $\nu(B) > \nu(A_1) + \frac{1}{n}$.

Επιλέγουμε $A_2 \in \mathcal{S}$, $A_2 \subseteq A_1$ με $\nu(A_2) > \nu(A_1) + \frac{1}{n_2}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: Αν έχουμε επιλέξει

$$N \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{j-1}$$

μετρήσιμα και αντίστοιχα $n_1, \ldots, n_{j-1}$, από την Παρατήρηση (β) υπάρχει $C \in \mathcal{S}$, $C \subseteq A_{j-1}$ με $\nu(C) > \nu(A_{j-1})$, οπότε αν n_j είναι ο μικρότερος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $C \in \mathcal{S}$, $C \subseteq A_{j-1}$ με $\nu(C) > \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n}$, επιλέγουμε
$A_j \subseteq A_{j-1}$ ώστε $\nu(A_j) > \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n_j}$.

Αν $A = \cap_j A_j$ τότε $0 < \sup \nu(A_j) = \lim_j \nu(A_j) = \nu(A) < +\infty$. Επομένως $\nu(A_j) - \nu(A_{j-1}) \to 0$ και αφού $\nu(A_j) - \nu(A_{j-1}) > \frac{1}{n_j}$ έπεται ότι $\frac{1}{n_j} \to 0$, δηλ. $n_j \to \infty$.

Όμως $A \subseteq N$ και $\nu(A) > 0$, οπότε υπάρχει $D \subseteq A$ μετρήσιμο με $\nu(D) > \nu(A)$. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί $\nu(D) > \nu(A) + \frac{1}{n}$, τότε για κάθε j έχουμε $\nu(D) > \nu(A) + \frac{1}{n} \geq \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n}$. Όμως ο n_j είναι εξ ορισμού ο μικρότερος που μπορεί να ικανοποιεί την ανισότητα $\nu(D) > \nu(A_{j-1}) + \frac{1}{n}$, οπότε $n_j \leq n$. Δηλαδή το n είναι άνω φράγμα της (n_j), σε αντίθεση με το γεγονός ότι $n_j \to \infty$.

Η αντίφαση προήλθε από την υπόθεση ότι το N περιέχει μετρήσιμα σύνολα θετικού μέτρου. Κατά συνέπεια αυτό δεν ισχύει, άρα κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $E \subseteq N$ ικανοποιεί $\nu(E) \leq 0$, δηλαδή το N είναι ν-αρνητικό.

(iv) Αν $X = P' \cup N'$ είναι μια άλλη διαμέριση σε ν-θετικό και ν-αρνητικό σύνολο, τότε έχουμε $P \setminus P' = P \cap (P')^c = P \cap N'$ άρα το $P \setminus P'$ είναι ν-αρνητικό γιατί περιέχεται στο

N', αλλά και ν-θετικό γιατί περιέχεται στο P. Άρα το $P \setminus P'$ είναι ν-μηδενικό. Ομοίως το $P' \setminus P = P' \cap N$ είναι ν-μηδενικό, άρα το $P \triangle P'$ είναι ν-μηδενικό. Η ισότητα $P \triangle P' = N \triangle N'$ είναι άμεση. $\square$

Παρατηρήσεις 5.9 (i) Εν γένει η ανάλυση $X = P \cup N$ δεν είναι μοναδική: αν $\Omega \subseteq P$ είναι ένα ν-μηδενικό σύνολο, θέτοντας $P_1 = P \setminus \Omega$ και $N_1 = N \cup \Omega$ έχουμε μια (ενδεχομένως) διαφορετική διαμέριση. Το (iv) στην απόδειξη δείχνει ότι αυτό είναι το «χειρότερο» που μπορεί να συμβεί.

(ii) Αν ονομάσουμε P_o την ένωση όλων των ν-θετικών (μετρήσιμων) συνόλων, το P_o μπορεί να μην είναι μετρήσιμο. Γι αυτό ορίσαμε το σύνολο P μέσω μιάς *ακολουθίας* ν-θετικών συνόλων.

Το σύνολο P «ν-σχεδόν περιέχει» όλα τα ν-θετικά σύνολα, με την έννοια ότι αν $A \in \mathcal{P}$, τότε το $A \cap P^c$ είναι ν-μηδενικό: πράγματι, κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $E \subseteq A \cap P^c$ ανήκει στην $\mathcal{P}$ και περιέχεται στο N, άρα αναγκαστικά ικανοποιεί $\nu(E) = 0$.

Ορισμός 5.3 *Αν μ, ν είναι δύο προσημασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$, το ν λέγεται* ***κάθετο στο*** *μ ή* ***μ-ιδιάζον (singular)*** *αν υπάρχει μετρήσιμη διαμέριση $X = A \cup A^c$ ώστε το A να είναι ν-μηδενικό και το A^c να είναι μ-μηδενικό. Γράφουμε $\mu \perp \nu$.*

Δηλαδή όχι μόνο το A^c, αλλά *κάθε* μετρήσιμο υποσύνολο E του A^c έχει $\mu(E) = 0$. Λέμε ότι το μ είναι **συγκεντρωμένο (concentrated)** στο A. Ομοίως το ν είναι συγκεντρωμένο στο A^c.

Για παράδειγμα αν δ_0 είναι το μέτρο Dirac στο $0 \in \mathbb{R}$ και m είναι το μέτρο Lebesgue, τότε $\delta_0 \perp m$ γιατί το $\{0\}$ είναι m-μηδενικό ενώ το $\{0\}^c$ είναι δ_0-μηδενικό.

Θεώρημα 5.10 (Ανάλυση Jordan) *Αν ν είναι προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$, υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα ν_+ και ν_- στον $(X, \mathcal{S})$, τουλάχιστον ένα από τα οποία είναι πεπερασμένο, ώστε*

$$\nu = \nu_+ - \nu_- \quad \textit{και} \;\; \nu_+ \perp \nu_-.$$

Απόδειξη Έστω $X = P \cup N$ μια ανάλυση Hahn για το ν. Τότε για κάθε $E \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} E &= (E \cap P) \cup (E \cap N) \\ \text{άρα} \quad \nu(E) &= \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N). \end{aligned}$$

Ορίζουμε τα ν_+ και ν_- από τις σχέσεις

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P) \quad \text{και} \qquad \nu_-(E) = -\nu(E \cap N) \qquad (E \in \mathcal{S})$$

και έχουμε δύο θετικά μέτρα. Αν το ν δεν παίρνει την τιμή $+\infty$, τότε για *κάθε* $E \in \mathcal{S}$ ισχύει $\nu(E \cap P) \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή το ν_+ είναι πεπερασμένο, ενώ αν δεν παίρνει την τιμή $-\infty$, τότε το ν_- είναι πεπερασμένο. Και στις δύο περιπτώσεις, για κάθε $E \in \mathcal{S}$ η διαφορά $\nu_+(E) - \nu_-(E)$ ορίζεται και ισούται με $\nu(E)$.

Επίσης από την κατασκευή, αν ένα $E \in \mathcal{S}$ περιέχεται στο N τότε $\nu_+(E) = 0$, άρα το N είναι ν_+-μηδενικό, και ομοίως το P είναι ν_--μηδενικό. Επομένως $\nu_+ \perp \nu_-$.

Μοναδικότητα Έστω $\nu = \mu_+ - \mu_-$ όπου τα μ_+, μ_- είναι κάθετα θετικά μέτρα. Υπάρχει λοιπόν μια μετρήσιμη διαμέριση $X = A \cup A^c$ ώστε το A^c να είναι μ_+-μηδενικό και το A

να είναι μ_--μηδενικό. Έπεται ότι το A είναι ν-θετικό (γιατί αν $E \in \mathcal{S}$ και $E \subseteq A$ τότε $\mu_-(E) = 0$ αφού το A είναι μ_--μηδενικό, οπότε $\nu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E) = \mu_+(E) \geq 0$) ενώ το A^c είναι ν-αρνητικό. Επομένως η διαμέριση $X = A \cup A^c$ είναι μια ανάλυση Hahn για το ν. Από το Θεώρημα 5.8, το $P \triangle A = A^c \triangle N$ είναι ν-μηδενικό. Έπεται ότι για κάθε $E \in \mathcal{S}$ έχουμε [3] $\nu(E \cap P) = \nu(E \cap A)$, άρα

$$\begin{aligned}\nu_+(E) = \nu(E \cap P) = \nu(E \cap A) &= \mu_+(E \cap A) - \mu_-(E \cap A) \\ &= \mu_+(E \cap A) + \mu_+(E \cap A^c) - 0 = \mu_+(E)\end{aligned}$$

(γιατί $\mu_-(E \cap A) = 0$ και $\mu_+(E \cap A^c) = 0$) δηλαδή $\nu_+(E) = \mu_+(E)$ και επομένως $\nu_-(E) = \mu_-(E)$. $\square$

Παρατήρηση 5.11 Μπορούμε να υπολογίσουμε τα ν_+ και ν_- από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\nu_+(E) &= \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\} \\ \nu_-(E) &= \sup\{-\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\} \qquad (E \in \mathcal{S}).\end{aligned}$$

Για παράδειγμα η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται ως εξής: Επειδή $E \cap N \subseteq E$ έχουμε

$$\nu_-(E) = -\nu(E \cap N) \leq \sup\{-\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\}$$

ενώ για κάθε $F \in \mathcal{S}$ με $F \subseteq E$ έχουμε

$$-\nu(F) = \nu_-(F) - \nu_+(F) \leq \nu_-(F) \leq \nu_-(E)$$

(διότι τα ν_+ και ν_- είναι θετικά μέτρα) επομένως $\sup\{-\nu(F) : F \in \mathcal{S}, F \subseteq E\} \leq \nu_-(E)$ άρα ισχύει ισότητα.

Αυτό αποτελεί μια δεύτερη απόδειξη ότι οι κυμάνσεις του ν είναι ανεξάρτητες από την ανάλυση Hahn που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό τους.

Ορισμός 5.4 *Αν ν είναι ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$, τα θετικά μέτρα ν_+, ν_- που ορίσαμε λέγονται* ***η θετική και η αρνητική κύμανση*** *του ν και το θετικό μέτρο $|\nu|$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-$$

λέγεται ***η ολική κύμανση*** *του ν.*

Παρατήρηση 5.12 Αν $f = \chi_P - \chi_N$ και $\mu = |\nu|$ τότε $\nu(E) = \int_E f d\mu$.

Άσκηση 5.13 Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ και $\nu(E) = \int_E f d\mu$, τότε $\nu_+(E) = \int_E f_+ d\mu$ και $\nu_-(E) = \int_E f_- d\mu$ (επομένως $|\nu|(E) = \int_E |f| d\mu$).

Άσκηση 5.14 Αν ν είναι προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ και $E \in \mathcal{S}$, τότε

$$|\nu|(E) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : E_k \in \mathcal{S} \text{ ξένα}, \ \bigcup_{k=1}^{n} E_k = E\}$$

και το $|\nu|$ είναι το μικρότερο θετικό μέτρο μ στον $(X, \mathcal{S})$ με την ιδιότητα $\mu(E) \geq |\nu(E)|$ για κάθε $E \in \mathcal{S}$.

Άσκηση 5.15 Αν ν, μ είναι προσημασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$, τότε

(α) Ένα σύνολο $E \in \mathcal{S}$ είναι ν-μηδενικό αν και μόνον αν $|\nu|(E) = 0$.

(β) $\quad \nu \perp \mu \Leftrightarrow |\nu| \perp \mu \Leftrightarrow (\nu_+ \perp \mu$ και $\nu_- \perp \mu)$.

[3] $\nu(E \cap P) - \nu(E \cap A) = \nu(E \cap (P \setminus A)) = 0$ γιατί $E \cap (P \setminus A) \subseteq P \triangle A$ που είναι ν-μηδενικό σύνολο

5.2 Το Θεώρημα Lebesgue - Radon - Nikodym

Ορισμός 5.5 *Έστω μ θετικό μέτρο και ν προσημασμένο ή μιγαδικό ή θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{S})$. Το ν λέγεται* ***απόλυτα συνεχές*** *ως προς μ (γράφουμε $\nu \ll \mu$) αν*

$$E \in \mathcal{S}, \ \ \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

Δύο θετικά μέτρα μ και ν λέγονται ***ισοδύναμα*** *αν $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.*

Άσκηση 5.16 Έστω μ θετικό μέτρο και ν προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{S})$. Δείξτε τα ακόλουθα:

- Αν $\nu \ll \mu$ τότε κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) = 0$ είναι ν-μηδενικό (Ορισμός 5.2).
- Αν κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) = 0$ είναι ν-μηδενικό τότε $\nu_+ \ll \mu$ και $\nu_- \ll \mu$.
- Αν $\nu_+ \ll \mu$ και $\nu_- \ll \mu$ τότε $|\nu| \ll \mu$.
- Αν $|\nu| \ll \mu$ τότε $\nu \ll \mu$.

Επομένως όλες οι συνθήκες είναι ισοδύναμες.

Παρατήρηση 5.17 Αν $\nu \ll \mu$ και $\nu \perp \mu$ τότε $\nu = 0$.

Πράγματι, αν $\nu \perp \mu$ τότε υπάρχει μετρήσιμη διαμέριση $X = E \cup F$ με το E μ-μηδενικό και το F ν-μηδενικό (οπότε $|\nu|(F) = 0$ από την Άσκηση 5.15) και έχουμε

$$|\nu|(X) = |\nu|(E) + |\nu|(F) = |\nu|(E) = 0$$

διότι $|\nu| \ll \mu$, επομένως $|\nu| = 0$, άρα $\nu = 0$.

Πρόταση 5.18 *Έστω ν ένα προσημασμένο* πεπερασμένο *μέτρο (δηλαδή $\nu(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}$). Το ν είναι μ-απόλυτα συνεχές αν και μόνον αν*

$$\text{για κάθε } \ \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } \ \delta > 0 \text{ ώστε αν } \ E \in \mathcal{S} \text{ και } \ \mu(E) < \delta \text{ τότε } \ |\nu(E)| < \epsilon. \tag{3}$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (3). Αν $\mu(E) = 0$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ έπεται από την (3) ότι $|\nu(E)| < \epsilon$, άρα $\nu(E) = 0$. Δείξαμε ότι $\nu \ll \mu$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη (3) δεν αληθεύει. Υπάρχει τότε $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $E_\delta \in \mathcal{S}$ ώστε $\mu(E_\delta) < \delta$ και $|\nu(E_\delta)| \geq \epsilon$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για $\delta = \frac{1}{2^n}$, βρίσκουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ένα $E_n \in \mathcal{S}$ με $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ και $|\nu(E_n)| \geq \epsilon$.

Θέτουμε τώρα $\quad F = \limsup E_n = \bigcap_{n \geq 1} F_n \ \ \text{όπου} \ \ F_n = \bigcup_{k \geq n} E_k$ και έχουμε

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0 \quad \text{άρα} \quad \mu(F) = \lim \mu(F_n) = 0 \ (\text{αφού } \mu(F_1) \leq 1 < \infty)$$

ενώ $\ |\nu|(F_n) \geq |\nu|(E_n) \geq \epsilon \ $ άρα $\ |\nu|(F) = \lim |\nu|(F_n) \geq \epsilon \ $ (αφού $|\nu|(F_1) < \infty$ γιατί το ν, άρα και το $|\nu|$, είναι πεπερασμένο).

Βρήκαμε λοιπόν $F \in \mathcal{S}$ με $\mu(F) = 0$ και $|\nu|(F) > 0$, οπότε το $|\nu|$ δεν είναι μ-απόλυτα συνεχές, άρα ούτε και το ν (Άσκηση 5.16). $\square$

Πόρισμα 5.19 *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $f \in L^1(X, \mu)$ τότε*

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε αν } E \in \mathcal{S} \text{ και } \mu(E) < \delta \text{ τότε } \left| \int_E f d\mu \right| < \epsilon.$$

Το επόμενο Λήμμα θα χρειασθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος Lebesgue - Radon - Nikodym.

Λήμμα 5.20 *Αν ν, μ είναι πεπερασμένα θετικά μέτρα στον $(X, \mathcal{S})$, τότε:*
ή $\nu \perp \mu$ ή αλλιώς (δηλαδή αν $\nu \not\perp \mu$) υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) > 0$ ώστε $\nu(F) \geq \epsilon\mu(F)$ για κάθε $F \in \mathcal{S}$, $F \subseteq E$ (δηλ. το E είναι θετικό σύνολο για το προσημασμένο μέτρο $\nu - \epsilon\mu$).

Απόδειξη (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι δεν μπορεί να συμβαίνουν και τα δύο: Πράγματι, αν $\nu \perp \mu$, οπότε υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ ώστε $\nu(A) = 0$ και $\mu(A^c) = 0$, τότε για κάθε $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) > 0$ έχουμε $\nu(A \cap E) = 0$, οπότε, για κάθε $\epsilon > 0$,

$$\nu(A \cap E) - \epsilon\mu(A \cap E) < 0$$

διότι $\mu(A \cap E) = \mu(E) > 0$, δηλαδή το E δεν είναι θετικό για το μέτρο $\nu - \epsilon\mu$.

(β) Αν $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το προσημασμένο μέτρο $\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$ και μια ανάλυση Hahn $X = P_n \cup N_n$ σε ν_n-θετικό και ν_n-αρνητικό σύνολο.

Ορίζουμε $P = \bigcup_n P_n$ και $N = P^c = \bigcap N_n$. Για κάθε n, εφόσον $N \subseteq N_n$ έχουμε $\nu_n(N) \leq 0$, δηλαδή $\nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N)$. Εφόσον $\nu(N) \geq 0$ και $\mu(N) < \infty$, έπεται ότι $\nu(N) = 0$.

Υπάρχουν τώρα δύο περιπτώσεις: $\mu(P) = 0$ ή $\mu(P) > 0$.

Αν $\mu(P) = 0$, έπεται ότι $\mu \perp \nu$.

Αν $\mu(P) > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(P_n) > 0$. Θέτουμε τότε $\epsilon = \frac{1}{n}$, οπότε το $E \equiv P_n$ ικανοποιεί $\mu(E) > 0$ και εξ υποθέσεως είναι θετικό για το προσημασμένο μέτρο $\nu_n = \nu - \epsilon\mu$. $\square$

Θεώρημα 5.21 (Lebesgue - Radon - Nikodym) *Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν ν είναι ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ με $|\nu|$ σ-πεπερασμένο, τότε*
(α) Ανάλυση Lebesgue: *υπάρχουν μοναδικά προσημασμένα μέτρα λ, ρ ώστε*

$$\nu = \lambda + \rho, \quad \text{όπου } \lambda \perp \mu \text{ και } \rho \ll \mu$$

(β) Radon - Nikodym: *υπάρχει μ-σχεδόν μοναδική ολοκληρώσιμη $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\rho(E) = \int_E f d\mu \text{ για κάθε } E \in \mathcal{S}.$$

Αν το ν είναι θετικό μέτρο, τότε τα λ, ρ είναι θετικά μέτρα και η f μη αρνητική.
Αν το $|\nu|$ είναι πεπερασμένο μέτρο, τότε $f \in L^1(X, |\nu|)$.

Απόδειξη. Μοναδικότητα: Αν $\nu = \lambda + \rho = \lambda' + \rho'$ τότε, επειδή $\lambda \perp \mu$ και $\lambda' \perp \mu$, υπάρχουν $N, N' \in \mathcal{S}$ με $\mu(N) = \mu(N') = 0$ ώστε το N^c να είναι λ-μηδενικό και το N'^c λ'-μηδενικό. Θέτοντας $M = N \cup N'$ έχουμε $\mu(M) = 0$ και το M^c είναι λ-μηδενικό και

λ'-μηδενικό. Επίσης $\rho \ll \mu$ και $\rho' \ll \mu$ άρα το M είναι ρ-μηδενικό και ρ'-μηδενικό. Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $E \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \lambda(E\cap M) = \lambda(E\cap M) + \rho(E\cap M) = \nu(E\cap M)\\ &= \lambda'(E\cap M) + \rho'(E\cap M) = \lambda'(E\cap M) = \lambda(E),\end{aligned}$$

δηλαδή $\lambda = \lambda'$ και ομοίως $\rho(E) = \rho(E\cap M^c) = \rho'(E\cap M^c) = \rho'(E)$. Έχουμε επομένως

$$\int_E f d\mu = \rho(E) = \rho'(E) = \int_E f' d\mu \qquad \text{για κάθε } \; E \in \mathcal{S}$$

το οποίο δείχνει ότι $f = f'$ μ-σχεδόν παντού.

Ύπαρξη: Περίπτωση Ι *Υποθέτουμε ότι τα ν, μ είναι θετικά και πεπερασμένα μέτρα.*
Κατασκευή της παραγώγου Radon-Nikodym f. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{H} = \{h : X \to [0,+\infty] \text{ μετρήσιμη} : \int_A h d\mu \le \nu(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{S}\}.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{H}$ ώστε $\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$ και ότι αυτή είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι

1. $\mathcal{H} \neq \emptyset$, αφού $0 \in \mathcal{H}$.
2. Αν $h, g \in \mathcal{H}$ τότε [4] $h \vee g \in \mathcal{H}$.
3. Αν (h_n) είναι αύξουσα ακολουθία με $h_n \in \mathcal{H}$ για κάθε n τότε $\lim_n h_n \in \mathcal{H}$.

Απόδειξη του (2): Θέτοντας $B = \{x : h(x) \ge g(x)\}$, έχουμε $B \in \mathcal{S}$ και, για κάθε $A \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\int_A (h\vee g) d\mu &= \int_{A\cap B} (h\vee g) d\mu + \int_{A\setminus B} (h\vee g) d\mu\\ &= \int_{A\cap B} h d\mu + \int_{A\setminus B} g d\mu \le \nu(A\cap B) + \nu(A\setminus B) = \nu(A).\end{aligned}$$

Απόδειξη του (3): Από μονότονη σύγκλιση

$$\int_A \lim_n h_n d\mu = \int \lim_n h_n \chi_A d\mu = \lim_n \int h_n \chi_A d\mu \le \nu(A).]$$

Κάθε $h \in \mathcal{H}$ ικανοποιεί $\int h d\mu \le \nu(X) < +\infty$, οπότε θέτοντας

$$a = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$$

έχουμε $0 \le a \le \nu(X)$.

Ισχυρισμός Υπάρχει $f \in \mathcal{H}$ ώστε $\int f d\mu = a$.

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $h_n \in \mathcal{H}$ ώστε $\int h_n d\mu > a - \frac{1}{n}$. Έστω $g_n = h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n$. Τότε $g_n \in \mathcal{H}$, $\int g_n d\mu \ge \int h_n d\mu > a - \frac{1}{n}$ και η (g_n) είναι αύξουσα. Άρα αν

[4] $h \vee g = \max\{f, g\}$

$f = \sup_n g_n = \lim_n g_n$ έχουμε $f \in \mathcal{H}$ και $a \geq \int f d\mu \geq \int g_n d\mu > a - \frac{1}{n}$ για κάθε n, οπότε $a = \int f d\mu$. $\square$

Ορισμός του μέτρου $\lambda : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+ : \quad \lambda(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{S})$.

Παρατηρούμε ότι $\lambda(A) \geq 0$ εφόσον $f \in \mathcal{H}$. Επίσης το λ είναι μέτρο, ως διαφορά δύο μέτρων. Μένει να αποδειχθεί ο

Ισχυρισμός $\quad \lambda \perp \mu$.

Απόδειξη Αν όχι, από το Λήμμα 5.20 υπάρχει $\epsilon > 0$ και $E \in \mathcal{S}$ με $\mu(E) > 0$ και $\lambda(F) \geq \epsilon\mu(F)$ για κάθε $F \in \mathcal{S}$ με $F \subseteq E$. Έπεται ότι

$$\nu(F) = \lambda(F) + \int_F f d\mu \geq \epsilon\mu(F) + \int_F f d\mu.$$

Θέτοντας λοιπόν $g = f + \epsilon\chi_E$, η οποία είναι μετρήσιμη, έχουμε για κάθε $F \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\int_F g d\mu = \int_F f d\mu + \int_F \epsilon\chi_E d\mu &= \int_F f d\mu + \epsilon\mu(F \cap E) \\ \leq \int_F f d\mu + \lambda(F \cap E) &\leq \int_F f d\mu + \lambda(F) = \nu(F).\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $g \in \mathcal{H}$, οπότε $\int g d\mu \leq a$. Όμως

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \epsilon\mu(E) = a + \epsilon\mu(E) > a$$

άτοπο. *Η απόδειξη της Περίπτωσης I ολοκληρώθηκε.*

Παρατήρηση Εφόσον το μέτρο ν είναι πεπερασμένο, η (μη αρνητική) συνάρτηση f ικανοποιεί $\int f d\mu \leq \nu(X) < +\infty$, δηλαδή $f \in L^1(X, \mu)$.

Περίπτωση II Υποθέτουμε ότι τα ν, μ είναι θετικά και σ-πεπερασμένα μέτρα.
Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{X_n\} \subseteq X$ από ξένα ανά δύο σύνολα με $X = \cup_n X_n$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\mu(X_n) < +\infty$ *και* $\nu(X_n) < +\infty$ (γιατί;)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τα μέτρα μ_n και ν_n στον $(X, \mathcal{S})$ από τις σχέσεις

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap X_n) \qquad \nu_n(E) = \nu(E \cap X_n) \quad (E \in \mathcal{S}).$$

Τα μέτρα αυτά είναι πεπερασμένα. Παρατηρούμε μάλιστα ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση g έχουμε $\int g d\mu_n = \int g\chi_{X_n} d\mu = \int_{X_n} g d\mu$ και ότι $\mu_n \ll \mu$.

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Περίπτωσης I στα ν_n και μ_n βρίσκουμε μη αρνητική συνάρτηση $f_n \in L^1(X, \mu_n)$ και θετικό πεπερασμένο μέτρο λ_n κάθετο στο μ_n ώστε

$$\nu_n(E) = \lambda_n(E) + \int_E f_n d\mu_n \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον $\lambda_n \perp \mu_n$ και $\mu_n \ll \mu$, έχουμε $\lambda_n \perp \mu$. Εξάλλου εφόσον $\mu_n(X_n^c) = 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f_n μηδενίζεται παντού στο X_n^c, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\nu_n(E) = \lambda_n(E) + \int_E f_n d\mu \qquad (E \in \mathcal{S}). \tag{4}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $f_n \in L^1(X,\mu)$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \le f_n(x) < +\infty$ για κάθε x και κάθε n. Ορίζουμε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ως εξής: κάθε $x \in X$ ανήκει σε ένα ακριβώς X_n· ορίζουμε $f(x) = f_n(x)$, δηλαδή $f = \sum_n f_n$. Η f είναι μετρήσιμη και ικανοποιεί $0 \le f(x) < +\infty$ για κάθε x.

Προσθέτοντας τώρα τις ισότητες (4) κατά μέλη (όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί) έχουμε

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \sum_n \nu(E\cap X_n) = \sum_n \nu_n(E) = \sum_n \lambda_n(E) + \sum_n \int_E f_n d\mu \\ &= \sum_n \lambda_n(E) + \int_E \sum_n f_n d\mu = \sum_n \lambda_n(E) + \int_E f d\mu.\end{aligned}$$

Θέτουμε λοιπόν

$$\lambda(E) = \sum_n \lambda_n(E) \qquad (E \in \mathcal{S})$$

οπότε το λ είναι θετικό μέτρο (και είναι σ-πεπερασμένο γιατί $\lambda(X_n) = \lambda_n(X) < +\infty$ για κάθε n). Μένει να δείξουμε ότι $\lambda \perp \mu$.

Πράγματι, αφού για κάθε n ισχύει ότι $\lambda_n \perp \mu$ υπάρχει $N_n \in \mathcal{S}$ με $\mu(N_n) = 0$ ώστε $\lambda_n(N_n^c) = 0$. Θέτοντας τώρα $N = \cup_n N_n$ έχουμε $0 \le \mu(N) \le \sum_n \mu(N_n) = 0$ και $0 \le \lambda_n(N^c) \le \lambda_n(N_n^c) = 0$, άρα $\lambda_n(N^c) = 0$. Επομένως $0 \le \lambda(N^c) \le \sum_n \lambda_n(N^c) = 0$, άρα $\lambda \perp \mu$.

Παρατήρηση Αν συμβεί το ν να είναι πεπερασμένο, τότε το λ είναι πεπερασμένο και $f \in L^1(X,\mu)$. Πράγματι

$$\lambda(X) + \int f d\mu = \nu(X) < +\infty \quad \text{άρα} \quad \lambda(X) < +\infty \text{ και } \int f d\mu < +\infty$$

αφού $\int f d\mu \ge 0$ και $\lambda(X) \ge 0$.

Περίπτωση III (γενική) Το ν είναι τώρα ένα προσημασμένο μέτρο και τα μ, $|\nu|$ είναι σ-πεπερασμένα. Αν $\nu = \nu_+ - \nu_-$ είναι η ανάλυση Jordan του ν, τότε τα ν_+, ν_- είναι σ-πεπερασμένα. Επιπλέον, αφού το ν δεν μπορεί να πάρει και τις δύο τιμές $+\infty, -\infty$, ένα από τα δύο μέτρα θα είναι πεπερασμένο. Υποθέτουμε ότι το ν_+ είναι πεπερασμένο (αλλιώς, θεωρούμε το $-\nu$).

Από την Περίπτωση ΙΙ λοιπόν υπάρχουν θετικά μέτρα λ_i ($i = 1,2$) κάθετα προς το μ και μετρήσιμες συναρτήσεις $f_i : X \to [0,+\infty)$ ώστε

$$\nu_+(E) = \lambda_1(E) + \int_E f_1 d\mu \quad \text{και} \quad \nu_-(E) = \lambda_2(E) + \int_E f_2 d\mu \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

Εφόσον το ν_+ έχει υποτεθεί πεπερασμένο, έχουμε $0 \le \lambda_1(E) < +\infty$ και $0 \le \int_E f_1 d\mu < +\infty$. Επομένως, αν ορίσουμε $\lambda(E) = \lambda_1(E) - \lambda_2(E)$ και $f = f_1 - f_2$, το λ είναι καλά ορισμένο προσημασμένο μέτρο, η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι *ολοκληρώσιμη* συνάρτηση και $\int_E f_1 d\mu - \int_E f_2 d\mu = \int_E f d\mu$. Επίσης, αφού τα λ_i είναι κάθετα στο μ, εύκολα φαίνεται ότι $\lambda \perp \mu$. Αφαιρώντας τις προηγούμενες ισότητες κατά μέλη, έχουμε

$$\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E) = \lambda_1(E) - \lambda_2(E) + \int_E f_1 d\mu - \int_E f_2 d\mu = \lambda(E) + \int_E f d\mu \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

□

Παρατήρηση 5.22 (Σύνδεση με την Συναρτησιακή Ανάλυση) Αν μ είναι θετικό κανονικό μέτρο Borel σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο (ή γενικότερα τοπολογικό συμπαγή χώρο Hausdorff) X τότε $C_c(X) \subseteq L^1(X,\mu)$ (πράγματι για κάθε $f \in C_c(X)$ έχουμε $\int |f| d\mu \leq \|f\|_\infty \mu(supp\, f) < \infty$) [5]. Επομένως αν ν είναι ένα προσημασμένο πεπερασμένο μέτρο Borel ώστε το $|\nu|$ να είναι κανονικό, κάθε $f \in C_c(X)$ ανήκει στον $L^1(|\nu|)$ άρα $f \in L^1(\nu_+)$ και $f \in L^1(\nu_-)$. Ορίζοντας λοιπόν $\phi_\nu(f) = \int f d\nu_+ - \int f d\nu_-$ έχουμε μια γραμμική μορφή στον $C_c(X)$ η οποία είναι συνεχής γιατί

$$\begin{aligned} |\phi_\nu(f)| &= \left| \int f d\nu_+ - \int f d\nu_- \right| \leq \left| \int f d\nu_+ \right| + \left| \int f d\nu_- \right| \\ &\leq \|f\|_\infty (\nu_+(X) + \nu_-(X)) = \|f\|_\infty |\nu|(X). \end{aligned}$$

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz λέει ότι όλες οι συνεχείς γραμμικές μορφές στον $(C_c(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι της μορφής ϕ_ν για κατάλληλα πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα ν.

Ασκήσεις 5.23 (1) Στον μετρήσιμο χώρο $([0,1], \mathcal{M}_m)$ όπου $\mathcal{M}_m$ τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, θεωρούμε τα εξής δύο μέτρα: m, το μέτρο Lebesgue και ν, το μέτρο απαρίθμησης. Το μέτρο ν δεν δέχεται ανάλυση Lebesgue ως προς το μέτρο m. Επίσης, ενώ το μέτρο m είναι προφανώς απολύτως συνεχές ως προς το ν, δεν υπάρχει $f \in L^1([0,1], \nu)$ ώστε $m(E) = \int_E f d\nu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}_m$.

(2) Στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, όπου $\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ αριθμήσιμο ή } E^c \text{ αριθμήσιμο}\}$ ονομάζουμε μ το μέτρο απαρίθμησης και ν το μέτρο που ορίζεται από τις σχέσεις $\nu(E) = 0$ αν E αριθμήσιμο και $\nu(E) = 1$ αν E υπεραριθμήσιμο. Τότε προφανώς $\nu \ll \mu$ αλλά δεν υπάρχει μετρήσιμη f ώστε $\nu(E) = \int_E f d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

Ορισμός 5.6 *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και ν προσημασμένο μέτρο με $|\nu|$ σ-πεπερασμένο ώστε $\nu \ll \mu$, η μ-σχεδόν μοναδική f που ικανοποιεί τη σχέση $\nu(E) = \int_E f d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{S}$ ονομάζεται* ***παράγωγος Radon-Nikodym του ν ως προς μ*** *και συμβολίζεται $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.*

Ορισμός 5.7 *Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$ με ανάλυση Jordan $\nu = \nu_+ - \nu_-$. Για κάθε $g \in L^1(X, |\nu|)$ ορίζουμε*

$$\int g d\nu = \int g d\nu_+ - \int g d\mu_-.$$

Πρόταση 5.24 *Αν $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \lambda$ όπου τα μ και λ είναι θετικά μέτρα και το ν είναι προσημασμένο μέτρο (όπου τα $|\nu|$, μ και λ είναι σ-πεπερασμένα), τότε*

(α) για κάθε $g \in L^1(X, |\nu|)$ έχουμε $g\dfrac{d\nu}{d\mu} \in L^1(X,\mu)$ και $\displaystyle\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$

(β) Ισχύει η ισότητα $\dfrac{d\nu}{d\lambda} = \left(\dfrac{d\nu}{d\mu}\right)\left(\dfrac{d\mu}{d\lambda}\right)$ *λ-σχεδόν παντού.*

[5] Το σύνολο $supp\, f$, ο φορέας της f, είναι η κλειστή θήκη του $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Είναι συμπαγές αφού $f \in C_c(X)$, οπότε έχει πεπερασμένο μέτρο.