Σημειώσεις Εφαρμοσμένης Συναρτησιακής Ανάλυσης

Γ. Μπαρμπάτης

Τμήμα Μαθηματικών

ΕΚΠΑ

Αθήνα 2022

Περιεχόμενα

Μέρος I

Η γενική θεωρία

1 Η γεωμετρία των χώρων Hilbert

1.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1.1 *Ονομάζουμε χώρο εσωτερικού γινομένου έναν γραμμικό χώρο X πάνω στο $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με μία απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \quad x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \\ &\text{(ii)} \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad x, y \in X \\ &\text{(iii)} \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \ \textit{και} \ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

Τα παραπάνω συνεπάγονται

$$\begin{aligned} &\text{(iv)} \quad \langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \bar{\mu} \langle x, z \rangle, \quad x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \\ &\text{(v)} \quad \langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.2 Οι παρακάτω χώροι είναι χώροι εσωτερικού γινομένου:
(1) Το $\mathbb{C}^n$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

(2) Ο γραμμικός χώρος

$$l^2 = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Παρατηρείστε ότι η σειρά συγκλίνει αφού $|x_n y_n| \leq (|x_n|^2 + |y_n|^2)/2$.
(3) Ο χώρος $C([0,1])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

(4) Ο χώρος $C^1([0,1])$ όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο συνεχή στο $[0,1]$, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \{ f(x) \overline{g(x)} + f'(x) \overline{g'(x)} \} dx.$$

Αν στον ίδιο χώρο ορίσουμε

$$\langle f,g\rangle' = \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx,$$

τότε το $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ δεν είναι εσωτερικό γινόμενο. Γιατί ;

Θεώρημα 1.1.3 (ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}.$$

Απόδειξη. Αν $\langle x,y\rangle = 0$ τότε το ζητούμενο προφανώς ισχύει. Έστω $\langle x,y\rangle = Re^{i\theta}$. Έστω τυχόν $r \in \mathbb{R}$ και έστω $\lambda = re^{i\theta}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Rr + r^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $r \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη-θετική, δηλαδή $4R^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, και το ζητούμενο έπεται. □

Παράδειγμα 1.1.4 Η ανισότητα Cauchy-Schwarz εφαρμοζόμενη στο $C([0,1])$ συνεπάγεται την χρήσιμη ανισότητα

$$\Big(\int_0^1 |f(x)g(x)|\,dx\Big)^2 \leq \Big(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\Big)\Big(\int_0^1 |g(x)|^2\,dx\Big).$$

Πρόταση 1.1.5 *Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου γίνεται νορμικός χώρος αν ορίσουμε*

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}.$$

Απόδειξη. Η τριγωνική ανισότητα είναι το μόνο μη-τετριμμένο σημείο. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Έχοντας ορίσει την νόρμα $\|\cdot\|$ η ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνει την απλούστερη μορφή

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\|g\|.$$

Παρατήρηση. Σε κάθε χώρο εσωτερικού γινομένου ισχύει

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle.$$

Πρόταση 1.1.6 (κανόνας του παραλληλογράμμου) *Ισχύει*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις. □

Πρόταση 1.1.7 (πολική ταυτότητα) *Ισχύει*

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2, \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις. □

Παρατήρηση 1.1.8 Η παραπάνω ταυτότητα μας λέει ότι σε έναν χώρο εσωτερικού γινουμένο το εσωτερικό γινόμενο προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την νόρμα.

Παρατήρηση 1.1.9 Αποδεικνύεται το εξής: η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός νορμικού χώρου X είναι η νόρμα που επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ισχύει για την $\|\cdot\|$ ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

Ορισμός 1.1.10 *Ένας πλήρης χώρος εσωτερικού γινομένου ονομάζεται χώρος Hilbert.*

'ρα κάθε χώρος Hilbert είναι και χώρος Banach και όλη η θεωρία των χώρων Banach μπορεί να εφαρμοστεί και σε χώρους Hilbert. Θα ασχοληθούμε με ιδιότητες των χώρων Hilbert που εν γένει δεν ισχύουν σε ένα χώρο Banach.

Ας θεωρήσουμε τους χώρους εσωτερικού γινομένου του Παραδείγματος 1.1.2. Τότε

1. Ο $\mathbb{C}^N$ με το εσωτερικό γινόμενα του Παραδείγματος 1 είναι χώρος Hilbert.
2. Ο l^2 είναι χώρος Hilbert.
3. Ο $C([0,1])$ δεν είναι χώρος Hilbert.

Η πληρότητα του $\mathbb{C}^N$ είναι συνέπεια του ότι κάθε νορμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης. Για τα άλλα δύο χρειάζεται απόδειξη.

Πρόταση 1.1.11 *Ο χώρος l^2 με το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

Απόδειξη. (i) (Πληρότητα) Έστω (a_n) μία ακολουθία Cauchy στον l^2. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η (a_n) συγκλίνει σε κάποιο όριο στον l^2. Κάθε a_n είναι μία αριθμητική ακολουθία,

$$a_n = (a_{ni}) = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots)$$

και εξ ορισμού $a_n \in l^2$ σημαίνει $\sum_i \mid a_{ni} \mid^2 < \infty$. Έστω $i \in \mathbb{N}$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία $(a_{ni})_n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mid a_{ni} - a_{mi} \mid &\leq (\sum_{j=1}^{\infty} \mid a_{nj} - a_{mj} \mid^2)^{1/2} \\ &= \|a_n - a_m\| \\ &\longrightarrow 0 \text{ όταν } n, m \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

'ρα για κάθε i η ακολουθία $(a_{ni})_n$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ και άρα συγκλίνει σε κάποιο όριο b_i. Έστω $b = (b_i)$. Θα δείξουμε ότι $b \in l^2$ και ότι $a_n \longrightarrow b$ στον l^2.

Αφού η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy είναι και φραγμένη, $\|a_n\| \leq M$. Έστω $j \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j} \mid b_i \mid^2 &= \sum_{i=1}^{j} (\lim_n \mid a_{ni} \mid^2) = \lim_n \sum_{i=1}^{j} \mid a_{ni} \mid^2 \\ &\leq \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \mid a_{ni} \mid^2 = \lim_n \|a_n\|^2 \leq M^2. \end{aligned}$$

'ρα $b \in l^2$. Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n, m > N$ να συνεπάγεται $\|a_n - a_m\| < \epsilon$. Έστω τώρα $j \in \mathbb{N}$ σταθερό αλλά τυχαίο. Για $n, m > N$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j} \mid a_{ni} - a_{mi} \mid^2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mid a_{ni} - a_{mi} \mid^2 \\ &= \|a_n - a_m\|^2 < \epsilon^2. \end{aligned}$$

Κρατώντας το n σταθερό και αφήνοντας $m \longrightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{j} \mid a_{ni} - b_i \mid^2 \leq \epsilon^2, \quad \text{για κάθε } n > N,$$

και αφού το j είναι τυχόν,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid a_{ni} - b_i \mid^2 \leq \epsilon^2, \quad \text{για κάθε } n > N,$$

δηλαδή

$$\|a_n - b\| \leq \epsilon, \quad \text{για κάθε } n > N.$$

'ρα $a_n \to b$, και η πληρότητα αποδείχθηκε.

(ii) (Διαχωρισιμότητα) Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \mid \; a_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$$

και θέτουμε $A = \cup A_n$. Προφανώς το A είναι αριθμήσιμο σύνολο. Θα αποδείξουμε ότι είναι πυκνό. Έστω λοιπόν $b \in l^2$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{i=N+1}^{\infty} \mid b_i \mid^2 < \epsilon^2$.

Επιπλέον, για κάθε $i = 1, \dots, N$ μπορούμε να βρούμε $a_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ ώστε $| a_i - b_i | < \epsilon / N^{1/2}$. Η ακολουθία $a = (a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$ τότε ανήκει στο σύνολο A και

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= \sum_{i=1}^{N} | a_i - b_i |^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} | b_i |^2 \\ &< \sum_{i=1}^{N} (\epsilon^2 / N) + \epsilon^2 = 2\epsilon^2. \end{aligned}$$

Πρόταση 1.1.12 *Ο χώρος $C([0,1])$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx$$

δεν είναι χώρος Hilbert.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία (f_n) όπου

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ nx, & 0 \le x \le 1/n, \\ 1, & 1/n \le x \le 1. \end{cases}$$

Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy για την αντίστοιχη νόρμα, δηλαδή την $\| \cdot \|_2$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή εις άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει $f \in C([-1,1])$ ώστε $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Έστω τώρα $\delta > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n > N \Rightarrow f_n(x) = 1 \text{ στο } [\delta, 1].$$

'ρα

$$\begin{aligned} \int_\delta^1 | 1 - f(x) |^2 \, dx &= \int_\delta^1 | f_n(x) - f(x) |^2 \, dx \\ &\le \|f_n - f\|_2^2 \\ &\longrightarrow 0 \text{ όταν } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Αφού το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του n πρέπει να είναι ίσο με μηδέν γεγονός που συνεπάγεται ότι $f(x) = 1$ στο $[\delta, 1]$. 'ρα $f(x) = 1$ στο $(0, 1]$ αφού το δ ήταν τυχόν. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(x) = 0$ στο $[-1, 0)$. 'ρα η f είναι ασυνεχής στο $x = 0$, άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $f \in C([-1,1])$.

1.2 Καθετότητα

Ορισμός 1.2.1 *Δύο διανύσματα $x, y \in X$ για τα οποία ισχύει*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

ονομάζονται ορθογώνια ή κάθετα μεταξύ τους.

Πρόταση 1.2.2 (Πυθαγόρειο θεώρημα) *Αν τα διανύσματα* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *είναι ανά δύο ορθογώνια, τότε*

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις. $\square$

Ορισμός 1.2.3 *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος. Η απόσταση* $d(a, K)$ *ενός σημείου* $a \in X$ *από ένα μη-κενό σύνολο* $K \subset X$ *ορίζεται ως*

$$d(a, K) = \inf\{d(a, x) \mid x \in K\}.$$

Ορισμός 1.2.4 *Ένα μη-κενό υποσύνολο* K *ενός γραμμικού χώρου* V *ονομάζεται κυρτό αν για κάθε* $x, y \in K$ *και κάθε* $\lambda \in [0, 1]$ *ισχύει* $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Πρόταση 1.2.5 *Έστω* K *κλειστό και κυρτό υπσύνολο του χώρου Hilbert* $\mathcal{H}$. *Για κάθε* $a \in \mathcal{H}$ *υπάρχει μοναδικό* $x \in K$ *ώστε*

$$\|a - x\| = d(a, K).$$

Απόδειξη. (i) (Ύπαρξη) Έστω (x_n) ακολουθία στοιχείων του K τέτοια ώστε $\|a - x_n\| \longrightarrow d = d(a, K)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου στο διανύσματα $a - x_n$ και $a - x_m$ και χρησιμοποιόντας το γεγονός ότι $(x_n + x_m)/2 \in K$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|a - x_n\|^2 + 2\|a - x_m\|^2 - \|2a - x_n - x_m\|^2 \\ &\leq 2\|a - x_n\|^2 + 2\|a - x_m\|^2 - 4d^2 \\ &\longrightarrow 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

καθώς $n, m \longrightarrow \infty$. ῎ρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Έστω x το όριό της. Τότε $x \in K$ και

$$\|a - x\| = \lim \|a - x_n\| = d(a, K).$$

(ii) (Μοναδικότητα) Ας υποθέσουμε ότι για τα στοιχεία $x, x' \in K$ ισχύει $\|a - x\| = \|a - x'\| = d(a, K)$. Τότε $(x + x')/2 \in K$ και άρα

$$\begin{aligned} d &\leq \|a - \frac{x + x'}{2}\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|a - x\| + \frac{1}{2}\|a - x'\| = d, \end{aligned}$$

δηλαδή το στοιχείο $(x+x')/2$ έχει και αυτό την ιδιότητα της πρότασης. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου στα διανύσματα $a - x$ και $a - x'$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|x - x'\|^2 &= 2\|a - x\|^2 + 2\|a - x'\|^2 - \|2a - x - x'\|^2 \\ &= 2\|a - x\|^2 + 2\|a - x'\|^2 - 4\|a - \frac{x + x'}{2}\|^2 \\ &= 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

και άρα $x = x'$. $\square$

Πρόταση 1.2.6 *Έστω K κλειστός γραμμικός υποχώρος του $\mathcal{H}$ και $a \in \mathcal{H}$. Για το πλησιέστερο σημείο $x \in K$ του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει*

$$\langle a - x, y \rangle = 0, \qquad \text{για κάθε } y \in K.$$

Απόδειξη. Έστω $y \in K$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|y\| = 1$. Έστω

$$\lambda = \langle a - x, y \rangle.$$

Τότε $x + \lambda y \in K$ και άρα

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|a - x - \lambda y\|^2 \\ &= \|a - x\|^2 + |\lambda|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle a - x, \lambda y \rangle \\ &= \|a - x\|^2 - |\lambda|^2 \\ &= d^2 - |\lambda|^2, \end{aligned}$$

και άρα $\lambda = 0$. □

Ορισμός 1.2.7 *Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός μη-κενού συνόλου $M \subset \mathcal{H}$ ορίζεται ως*

$$M^\perp = \{y \in \mathcal{H} \mid \langle x, y \rangle = 0, \quad \text{για κάθε } x \in M\}.$$

Πρόταση 1.2.8 *Το $M^\perp$ είναι κλειστός υποχώρος του $\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι πολύ απλή και αφήνεται ως άσκηση. □

Παράδειγμα 1.2.9 Στον χώρο l^2 θεωρούμε τον κλειστό υποχώρο

$$M = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \ : \ x_1 = x_2\}.$$

Τότε

$$M^\perp = \{(a, -a, 0, 0, \ldots) \ : \ a \in \mathbb{C}\}.$$

Ορισμός 1.2.10 *Έστω M, M_1, M_2 κλειστοί υποχώροι του $\mathcal{H}$. Λέμε ότι ο M είναι το ευθύ άθροισμα των M_1 και M_2, $M = M_1 \oplus M_2$, αν* (i) *$M_1 + M_2 \subset M$ και* (ii) *κάθε $x \in M$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $x = x_1 + x_2$ με $x_i \in M_i$.*

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν $M = M_1 \oplus M_2$ τότε $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Όταν $M = M_1 \oplus M_2$, η ισότητα $x = x_1 + x_2$ γράφεται και $x = x_1 \oplus x_2$.

Πρόταση 1.2.11 *Για κάθε κλειστό υποχώρο M του $\mathcal{H}$ ισχύει $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δει ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in M$ ώστε

$$\|x - x_1\| = d(x, M)$$

και ότι τότε

$$\langle x - x_1, y \rangle = 0, \qquad \text{για κάθε } y \in M,$$

δηλαδή $x_2 := x - x_1 \in M^\perp$. 'ρα

$$x = x_1 + x_2$$

είναι μια ανάλυση της ζητούμενης μορφής. Έστω τώρα ότι υπάρχει και δεύτερη τέτοια ανάλυση, $x = x_1' + x_2'$, με $x_1' \in M$, $x_2' \in M^\perp$. Τότε $x_1 - x_1' \in M$, και επίσης $x_1 - x_1' = (x - x_2) - (x - x_2') = x_2' - x_2 \in M^\perp$. 'ρα

$$\|x_1 - x_1'\|^2 = \langle x_1 - x_1', x_1 - x_1' \rangle = 0,$$

και συνεπώς $x_1 = x_1'$, οπότε και $x_2 = x_2'$. □

Πρόταση 1.2.12

(i) *Αν $M \subset N$ τότε $N^\perp \subset M^\perp$.*

(ii) *$M \subset M^{\perp\perp}$.*

(iii) *$M = M^{\perp\perp}$ αν και μόνο αν το M είναι κλειστός υποχώρος του $\mathcal{H}$.*

(iv) *Αν το M είναι πυκνό τότε $M^\perp = \{0\}$.*

(v) *Αν το M είναι υποχώρος και $M^\perp = \{0\}$ τότε το M είναι πυκνό.*

Απόδειξη. Τα (i), (ii) αποδεικνύονται πολύ εύκολα.
(iii) Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.2.8. Για το αντίστροφο, έστω $x \in M^{\perp\perp}$. Μπορούμε να γράψουμε $x = x_1 + x_2$ με $x_1 \in M$ και $x_2 \in M^\perp$. Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο με το x_2 συμπεραίνουμε ότι $x_2 = 0$, και άρα $x = x_1 \in M$.
(iv) Έστω $x \in M^\perp$. Υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subset M$ η οποία συγκλίνει στο x. Τότε $\langle x, x_n \rangle = 0$, και παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $x = 0$.
(v) Το $\overline{M}$ είναι κλειστός υποχώρος, και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{H} = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp.$$

'ρα κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται ως $x = x_1 + x_2$ με $x_1 \in \overline{M}$ και $x_2 \in \overline{M}^\perp = \{0\}$. 'ρα $x = x_1 \in \overline{M}$ και άρα το M είναι πυκνό. □

1.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Στο εξής θα συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$ ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Ορισμός 1.3.1 *Έστω $(x_n) \subset \mathcal{H}$. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αν η ακολουθία (S_j) των μερικών αθροισμάτων, $S_j = \sum_{n=1}^{j} x_n$, συγκλίνει. Αν y είναι το όριό της, γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y$$

και το y ονομάζεται άθροισμα της σειράς. Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Πρόταση 1.3.2 *Αν μία σειρά συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Για $j > i$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|S_j - S_i\| &= \|\sum_{n=i+1}^{j} x_n\| \\ &\leq \sum_{n=i+1}^{j} \|x_n\| \\ &\to 0, \qquad \text{όταν } i, j \to \infty. \end{aligned}$$

'ρα η ακολουθία (S_i) είναι Cauchy και συνεπώς συγκλίνει.

Ορισμός 1.3.3 *Ένα σύνολο $\{e_n\}$ λέγεται ορθοκανονικό αν $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$.*

Ορισμός 1.3.4 *Έστω $\{e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο και $x \in \mathcal{H}$. Οι αριθμοί*

$$x_n = \langle x, e_n \rangle$$

ονομάζονται συντελεστές Fourier του x ως προς το σύστημα $\{e_n\}$.

Πρόταση 1.3.5 (ανισότητα Bessel) *Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ορθοκανονικό σύνολο. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση $N = \infty$, η περίπτωση $N \in \mathbb{N}$ είναι απλούστερη. Για κάθε $M \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n, x - \sum_{m=1}^{M} \langle x, e_m \rangle e_m \rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle - \sum_{m=1}^{M} \overline{\langle x, e_m \rangle} \langle x, e_m \rangle + \sum_{n,m=1}^{M} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Αφήνοντας $M \to \infty$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.3.6 *Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ η σειρά $\sum_{r=1}^{N} \langle x, e_r\rangle e_r$ συγκλίνει και το άθροισμά της, έστω y, ικανοποιεί*

$$\|y\| = (\sum_{r=1}^{N} |\langle x, e_r\rangle|^2)^{1/2} \leq \|x\|.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πάλι ότι $N = \infty$. Έστω $y_n = \sum_{r=1}^{n} \langle x, e_r\rangle e_r$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και την σύγκλιση της σειράς της ανισότητας Bessel έχουμε

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|\sum_{r=n+1}^{m} \langle x, e_r\rangle e_r\|^2 \\ &= \sum_{r=n+1}^{m} |\langle x, e_r\rangle|^2 \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{όταν } m, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

῎ρα η (y_n) είναι Cauchy και για το όριό της y έχουμε

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|y_n\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} |\langle x, e_r\rangle|^2 \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} |\langle x, e_r\rangle|^2 \\ &\leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.3.7 *Η γραμμική θήκη* $\mathrm{lin}A$ *ενός συνόλου $A \subset \mathcal{H}$ είναι ο γραμμικός υποχώρος*

$$\mathrm{lin}A = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}\}.$$

Το σύνολο $\overline{\mathrm{lin}A}$ ονομάζεται κλειστή γραμμική θήκη του A.

Άσκηση 1.3.1 Να δειχθεί ότι η (κλειστή) γραμμική θήκη του A είναι ο μικρότερος (κλειστός) γραμμικός υποχώρος που περιέχει το A.

Λήμμα 1.3.8 *Έστω $\{e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο, $L = \overline{\mathrm{lin}\{e_n\}}$ και $y = \sum_{r=1}^{\infty} \langle x, e_r\rangle e_r$. Ως προς την ανάλυση $\mathcal{H} = L \oplus L^{\perp}$ έχουμε*

$$x = y \oplus (x - y).$$

Παρατήρηση. Από την Πρόταση 1.2.5 έπεται ότι το y είναι το σημείο του L το πλησιέστερο στο x.
Απόδειξη. Αρκεί να δείξει κανείς ότι $y - x \in L^{\perp}$. □

Θεώρημα 1.3.9 *Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, ορθοκανονικό σύνολο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(1) $\quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *για κάθε* $x \in \mathcal{H}$.

(2) $\quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ *για κάθε* $x \in \mathcal{H}$.

(3) *Αν* $\langle x, e_n \rangle = 0$ *για κάθε* n, *τότε* $x = 0$.

(4) *Ο* $L = \operatorname{lin}\{e_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ *είναι πυκνός υποχώρος του* $\mathcal{H}$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) Προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 1.3.6.
(2) $\Rightarrow$ (3) ᾿μεσο.
(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω $x \in \mathcal{H}$. Θέτουμε $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, οπότε $y \in \bar{L}$. Για κάθε m έχουμε

$$\langle y - x, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle = 0.$$

Από την υπόθεση (3) έπεται $x = y$. Συνεπώς $x \in \bar{L}$ και άρα ο L είναι πυκνός.
(4) $\Rightarrow$ (1) Έστω $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. Τότε

$$\langle x - y, e_n \rangle = 0, \qquad \text{για κάθε } m,$$

άρα

$$\langle x - y, z \rangle = 0, \qquad \text{για κάθε } z \in L,$$

και συνεπώς $x - y \in L^{\perp}$. Όμως $L^{\perp} = \{0\}$ αφού L πυκνό. ᾿ρα $x = y$. □

Ορισμός 1.3.10 *Ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}$ για το οποίο ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.3.9 ονομάζεται πλήρες ορθοκανονικό σύνολο ή ορθοκανονική βάση.*

Παράδειγμα 1.3.11 1. Αν ο χώρος $\mathcal{H}$ έχει πεπερασμένη διάσταση τότε η έννοια του πλήρους ορθοκανονικού συνόλου συμπίπτει με τη γνωστή από τη Γραμμική ᾿λγεβρα έννοια της ορθοκανονικής βάσης.
2. Στον χώρο l^2 συμβολίζουμε με e_n την ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι μηδέν εκτός από n-οστό, ο οποίος είναι ίσος με ένα. Το σύνολο $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι προφανώς μία ορθοκανονική βάση. Η βάση αυτή ονομάζεται και συνήθης ή κανονική ορθοκανονική βάση του l^2.
3. Στον χώρο $C([-\pi, \pi])$ με το εσωτερικό γινόμενο του Παραδείγματος 1.1.2 (3) ορίζουμε για $n \in \mathbb{Z}$ την συνάρτηση

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονικό. Είναι ένα από τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης Fourier το ότι το σύνολο είναι και πλήρες.
Παρατήρηση: Είδαμε στην Πρόταση 1.1.12 ότι ο $C([-\pi,\pi])$ δεν είναι χώρος Hilbert. Ωστόσο οι ιδιότητες (1)-(4) έχουν έννοια.

Άσκηση 1.3.2 Δείξτε ότι το σύνολο $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ του τρίτου παραδείγματος είναι πράγματι ορθοκανονικό σύνολο.

Πρόταση 1.3.12 (ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt) *Έστω $\{y_n\}$ ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}$ τέτοιο ώστε*

$$\mathrm{lin}\{e_n\} = \mathrm{lin}\{y_n\}.$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν δεν είναι τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\{y_n\}$ από το σύνολο $\{y'_n\}$ που ορίζεται ως εξής:

$$y'_1 = y_{n_1}$$

όπου y_{n_1} είναι το πρώτο μη-μηδενικό y_n,

$$y'_2 = y_{n_2},$$

όπου y_{n_2} είναι το πρώτο y_n που δεν ανήκει στη γραμμική θήκη του y'_1, και, γενικά,

$$y'_k = y_{n_k},$$

όπου y_{n_k} είναι το πρώτο y_n που δεν ανήκει στο $\mathrm{lin}\{y'_1,\ldots,y'_{k-1}\}$. Από την κατασκευή αυτή έπεται ότι $\mathrm{lin}\{y'_n\} = \mathrm{lin}\{y_n\}$ και ότι τα y'_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ορίζουμε τα διανύσματα $\{e_n\}$ ως εξής:

$$u_1 = y_1, \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},$$

$$u_2 = y_2 - \langle y_2, e_1\rangle e_1, \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|},$$

και επαγωγικά

$$u_n = y_n - \sum_{r=1}^{n-1} \langle y_n, e_r\rangle e_r, \qquad e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Παρατηρείστε ότι σε κάθε βήμα μπορούμε να διαιρέσουμε με $\|u_k\|$ αφού $u_k \neq 0$ από τη γραμμική ανεξαρτησία του συνόλου $\{y_n\}$. Ισχύει τότε $\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_N\} = \mathrm{lin}\{y_1,\ldots,y_N\}$ για κάθε N από την κατασκευή. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι $\langle u_n, u_m\rangle = 0$ όταν $n > m$. Αυτό θα δειχθεί με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ είναι φανερό ότι ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n \in \{1, \ldots, N\}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = N + 1$. Πράγματι για κάθε $m < N + 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle u_{N+1}, u_m \rangle &= \langle y_{N+1}, u_m \rangle - \sum_{r=1}^{N} \langle y_{N+1}, e_r \rangle \langle e_r, u_m \rangle \\
&= \langle y_{N+1}, u_m \rangle - \langle y_{N+1}, e_m \rangle \langle e_m, u_m \rangle \\
&= \langle y_{N+1}, u_m \rangle - \langle y_{N+1}, u_m \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.3.13 *Ένας χώρος Hilbert είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν περιέχει μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη. Έπεται από το προηγούμενο θεώρημα (πώς;) ότι αν ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος τότε περιέχει μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση. Αντίστροφα, έστω ότι ο $\mathcal{H}$ περιέχει μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ορίζουμε

$$A_n = \{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \ \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$$

και $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε το A είναι αριθμήσιμο και (άσκηση) πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{H}$.

Ορισμός 1.3.14 *Έστω $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ δύο χώροι Hilbert. Μία απεικόνιση $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ονομάζεται ισομορφισμός αν διατηρεί την δομή του χώρου Hilbert δηλαδή αν είναι 1-1, επί, γραμμική και επιπλέον*

$$\langle Ux, Ux \rangle_2 = \langle x, x \rangle_1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}_1.$$

Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ τότε οι $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$ ονομάζονται ισόμορφοι.

Είναι φανερό ότι η ισομορφία είναι μία σχέση ισοδυναμίας στη κλάση όλων των χώρων Hilbert.

Πρόταση 1.3.15 *Όλοι οι απειροδιάστατοι, διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert είναι ισόμορφοι μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Απόδειξη. [*Υπόδειξη:* Αποδείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ είναι ισόμορφος με τον l^2 ως εξής: θεωρείστε μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\} \subset \mathcal{H}$ και ορίστε $U : l^2 \longrightarrow \mathcal{H}$ μέσω της σχέσης $U(x_n) = \sum_n x_n e_n$. Στη συνέχεια ελέγξτε ότι ο U είναι ισομορφισμός χώρων Hilbert.

Στο εξής θα υποθέτουμε ότι όλοι οι αναφερόμενοι χώροι Hilbert είναι διαχωρίσιμοι, και άρα ότι περιέχουν μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.

2 Τελεστές σε χώρους Hilbert

2.1 Βασικές ιδιότητες

Ορισμός 2.1.1 *Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ χώροι εσωτερικού γινομένου. Μία γραμμική απεικόνιση $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ λέγεται γραμμικός τελεστής.*

Για κάθε γραμμικό τελεστή T ορίζονται τα σύνολα

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in \mathcal{H} \ : \ Tx = 0\} \quad , \quad \mathrm{Ran}(T) = \{Tx \ : x \in \mathcal{H}\},$$

γραμμικοί υποχώροι των $\mathcal{H}$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα. Οι υπόχωροι αυτοί ονομάζονται πυρήνας και εικόνα του T αντίστοιχα.

Παρατήρηση. Ο ορισμός του γραμμικού τελεστή είναι συχνά ευρύτερος, επιτρέποντας το πεδίο ορισμού να μην είναι όλος ο $\mathcal{H}$ αλλά κάποιος υπόχωρος του $\mathcal{H}$, συνήθως πυκνός. Εμείς προς το παρόν θα ασχοληθούμε με τελεστές που ορίζονται σε όλον τον $\mathcal{H}$.

Πρόταση 2.1.2 *Για έναν γραμμικό τελεστή $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *T Lipschitz συνεχής*

(ii) *T συνεχής στο 0*

(iii) *Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|Tx\| \leq M\|x\|$, για κάθε $x \in \mathcal{H}$*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Προφανές.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Η συνέχεια στο 0 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\|y\| \leq \delta \Rightarrow \|Ty\| \leq 1.$$

Έστω $x \neq 0 \in \mathcal{H}$. Το διάνυσμα

$$y = \frac{\delta x}{\|x\|}$$

ικανοποιεί $\|y\| \leq \delta$, άρα

$$\|T(\frac{\delta x}{\|x\|})\| \leq 1,$$

δηλαδή $\|Tx\| \leq \delta^{-1}\|x\|$.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Από το (iii) έπεται ότι

$$\|Tx - Ty\| \leq M\|x - y\|, \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathcal{H},$$

και άρα ο T είναι Lipschitz συνεχής. $\square$

Ορισμός 2.1.3 *Ένας γραμμικός T λέγεται φραγμένος αν ικανοποιείται μία (και άρα όλες) από τις παραπάνω συνθήκες. Τον γραμμικό χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ θα το συμβολίζουμε στο εξής με $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.*

Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ορίζεται ο αριθμός

$$\|T\| := \inf\{M \mid \quad \|Tx\| \le M\|x\|, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}\}.$$

Πρόταση 2.1.4 *Ισχύει*

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : \quad x \neq 0\} \\
&= \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \le 1\} \\
&= \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| = 1\} \\
&= \min\{M : \quad \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le M, \text{ για κάθε } x \neq 0\} \\
&= \min\{M : \quad \|Tx\| \le M, \text{ για κάθε } x \text{ με } \|x\| \le 1\} \\
&= \min\{M : \quad \|Tx\| \le M, \text{ για κάθε } x \text{ με } \|x\| = 1\}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. 'σκηση □

Θεώρημα 2.1.5 *Η απεικόνιση $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον γραμμικό χώρο $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον $\mathcal{H}$ στον $\mathcal{F}$ και ο $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ με αυτή τη νόρμα είναι χώρος Banach. Επιπλέον, αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ και $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{K})$ τότε $BA \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ και $\|BA\| \le \|B\|\|A\|$.*

Απόδειξη. Το ότι η $\|\cdot\|$ είναι πράγματι νόρμα αφήνεται ως άσκηση. Θα δείξουμε ότι ο χώρος $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ είναι πλήρης για την παραπάνω νόρμα. Έστω (T_n) μία ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\|,$$

και άρα η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{F}$. Αφού ο $\mathcal{F}$ είναι πλήρης, υπάρχει $y \in \mathcal{F}$ ώστε $T_n x \longrightarrow y$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το y εξαρτάται γραμμικά από το x, οπότε ορίζεται ένας γραμμικός τελεστής

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}, \qquad Tx = y.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος και ότι $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.
Αφού η (T_n) είναι Cauchy υπάρχει M ώστε $\|T_n\| \le M$ για κάθε n. 'ρα

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \le M\|x\|,$$

και άρα ο T είναι φραγμένος. Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n, m > N \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \epsilon$$

και άρα για τέτοια n, m και κάθε $x \in \mathcal{H}$ ισχύει

$$\|T_n x - T_m x\| \le \epsilon \|x\|.$$

Αφήνοντας $m \longrightarrow \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|T_n x - T x\| \le \epsilon \|x\|,$$

και άρα

$$\|T_n - T\| \le \epsilon, \qquad \text{για κάθε } n > N.$$

'ρα $T_n \to T$. □

Παράδειγμα 2.1.6 Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Στον χώρο $L^2(\Omega)$ έστω T ο τελεστής

$$Tf(x) = h(x)f(x),$$

όπου h φραγμένη και συνεχής συνάρτηση στο Ω. Τότε ο T είναι φραγμένος και

$$\|T\| = \sup_{\Omega} |h|.$$

Για να το δείξουμε αυτό ας θέσουμε $M = \sup_{\Omega} |h|$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2^2 &= \int_{\Omega} |Tf(x)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} |h(x)f(x)|^2 dx \\
&\le M^2 \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \\
&= M^2 \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

και άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \le M$. Για το αντίστροφο θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της h υπάρχει τότε μπάλα $B \subset \Omega$ τέτοια ώστε

$$|h(x)| > M - \epsilon, \qquad \text{για κάθε } x \in B.$$

Έστω χ η χαρακτηριστική συνάρτηση του B. Τότε $\chi \in L^2(\Omega)$ και

$$\begin{aligned}
\|T\|^2 &\ge \frac{\|T\chi\|^2}{\|\chi\|^2} \\
&= \frac{\int_B \mid h(x)\chi(x) \mid^2 dx}{\int_B \mid \chi(x) \mid^2 dx} \\
&\ge (M - \epsilon)^2.
\end{aligned}$$

Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο συμπεραίνουμε ότι $\|T\| \ge M$.

Παρατήρηση 2.1.7 Το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι $h \in L^\infty(\Omega)$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\|T\| = \|h\|_{L^\infty}$, όπου

$$\|h\|_{L^\infty} = \operatorname{Ess\,Sup}|h| = \inf\{M > 0 \ : |h(x)| \le M \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega\}.$$

2.2 Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα 2.2.1 (θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) *Έστω $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ γραμμικός και φραγμένος. Υπάρχει μοναδικό $y \in \mathcal{H}$ ώστε*

$$\pi(x) = \langle x, y\rangle, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}. \tag{2. 1}$$

Επιπλέον ισχύει $||\pi|| = ||y||$.

Απόδειξη. (i) Μοναδικότητα. Αν τα στοιχεία y_1, y_2 έχουν τη ζητούμενη ιδιότητα, συνάγουμε ότι $y_1 = y_2$ θεωρώντας το $\pi(y_1 - y_2)$.
(ii) Ύπαρξη. Αν $\pi = 0$ τότε το θεώρημα είναι προφανές. Έστω λοιπόν $\pi \neq 0$. Τότε ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(\pi)$ είναι κλειστός υποχώρος του $\mathcal{H}$ και περιέχεται γνήσια στον $\mathcal{H}$. Έστω $z \in \mathrm{Ker}(\pi)^{\perp}, z \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{H}$ ισχύει

$$\pi(x)z - \pi(z)x \in \mathrm{Ker}(\pi),$$

άρα

$$\langle \pi(x)z - \pi(z)x, z\rangle = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}$$

και συνεπώς

$$\pi(x) = \langle x, \frac{\overline{\pi(z)z}}{||z||^2}\rangle.$$

'ρα το $y = (\overline{\pi(z)}/||z||^2)z$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Το ότι $||\pi|| \leq ||y||$ είναι άμεσο, ενώ η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει επιλέγοντας $x = y$ στην (2. 1). □

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{F}.$$

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathcal{F}$. Θα ορίσουμε το T^*y. Έστω το γραμμικό συναρτησιοειδές $\pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$$\pi(x) = \langle Tx, y\rangle, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Τότε

$$|\pi(x)| \leq ||Tx||||y|| \leq ||T||||y||||x||,$$

και άρα το π είναι φραγμένο και $||\pi|| \leq ||T||||y||$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $z \in \mathcal{H}$ με $||z|| = ||\pi|| \leq ||T||||y||$ ώστε $\pi(x) = \langle x, z\rangle$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, δηλαδή

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $y \mapsto z$ είναι γραμμική, και έχουμε ήδη δει ότι είναι φραγμένη. 'ρα ορίζεται ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής $T^* : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ από τη σχέση $z = T^*y$. Προφανώς $||T^*|| \leq ||T||$, και ο T^* έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.
□

Ορισμός 2.2.3 *Ο τελεστής T^* ονομάζεται* συζυγής *του T.*

Άσκηση 2.2.1 Στον χώρο Hilbert $\mathbb{C}^N$ (με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο) να βρεθεί ο συζυγής πίνακας ενός πίνακα $A = (a_{ij})$.

Πρόταση 2.2.4 *Έστω $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{K})$. Τότε*

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

(ii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

(iii) $(ST)^* = T^* S^*$

(iv) $T^{**} = T$

(v) $\|T^*\| = \|T\|$

(vi) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

(vii) *Αν ο T είναι αντιστρέψιμος τότε και ο T^* είναι αντιστρέψιμος και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (vi), τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. Έχουμε $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Επίσης

$$\begin{aligned}
\|T\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, x\rangle \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tx\|\|x\| \\
&= \|T^*T\|.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2.5 1. Έστω T στον $L^2(\Omega)$ ο τελεστής που δρα πολλαπλασιάζοντας με $h \in L^\infty(\Omega)$. Τότε

$$T^* f(x) = \overline{h(x)} f(x).$$

2. Ο τελεστής *δεξιάς μετατόπισης* στον l^2 ορίζεται από τη σχέση

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Τότε

$$S^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots).$$

Ο S^* ονομάζεται τελεστής της *αριστερής μετατόπισης*.
3. Στον $L^2(0,1)$ έστω

$$Bf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Τότε

$$B^* g(x) = \int_x^1 g(t)dt.$$

Πρόταση 2.2.6 *Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ισχύει*

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ran}(T)^{\perp}, \qquad \overline{\mathrm{Ran}(T^*)} = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}.$$

Απόδειξη. ’σκηση. □

2.3 Ειδικοί τύποι τελεστών

2.3.1 Μοναδιαίοι τελεστές και ισομετρίες

Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ χώροι Hilbert.

Ορισμός 2.3.1 (i) *Ένας τελεστής $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ για τον οποίο ισχύει $\|Ax\| = \|x\|$, $x \in \mathcal{H}$, ονομάζεται ισομετρία.* (ii) *Ένας ισομορφισμός χώρων Hilbert $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ ονομάζεται* μοναδιαίος *τελεστής.*

Δηλαδή ο U είναι μοναδιαίος αν είναι 1-1, επί, γραμμικός και

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Κάθε μοναδιαίος τελεστής είναι και ισομετρία, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Ως παράδειγμα θεωρείστε τον τελεστή S της δεξιάς μετατόπισης στον l^2 (Παράδειγμα 2.2.5). O S είναι ισομετρία και $S^*S = I$, όμως $SS^* \neq I$, άρα ο S δεν είναι μοναδιαίος.

Πρόταση 2.3.2 *Μία ισομετρία U είναι μοναδιαίος τελεστής αν και μόνο αν είναι επί.*

Απόδειξη. ’μεση συνέπεια των ορισμών. □

Πρόταση 2.3.3 *Ο τελεστής $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν*

$$U^*U = I_{\mathcal{H}} \text{ και } UU^* = I_{\mathcal{F}}.$$

Απόδειξη. ’σκηση. □

2.3.2 Ορθογώνιες προβολές

Έστω M κλειστός υποχώρος του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Έχουμε δει ότι κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$x = x_1 \oplus x_2$$

με $x_1 \in M$ και $x_2 \in M^{\perp}$.
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $x \mapsto x_1$ είναι γραμμική, άρα ορίζει έναν

(γραμμικό) τελεστή P στον $\mathcal{H}$, $Px = x_1$. Επιπλέον, ο P είναι φραγμένος και $\|P\| = 1$, εκτός από την ειδική περίπτωση όπου $M = \{0\}$ οπότε $P = 0$. Πράγματι,

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2 = \|Px\|^2$$

ενώ $Py = y$ για κάθε $y \in M$.

Ορισμός 2.3.4 *Ο τελεστής T που ορίσαμε ονομάζεται* ορθογώνια προβολή *πάνω στον M.*

Παρατήρηση 2.3.5 (i) Έπεται από τα παραπάνω ότι για $g \in M$ έχουμε $Pg = g$, ενώ για $g \in M^{\perp}$ έχουμε $Pg = 0$. Με άλλα λόγια, ο P περιορισμένος στο M είναι ο ταυτοτικός τελεστής, ενώ περιορισμένος στον $M^{\perp}$ είναι ο μηδενικός τελεστής. Αυτό συχνά το εκφράζουμε γράφοντας ότι υπό την ανάλυση

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$$

έχουμε

$$P = I \oplus 0.$$

(ii) Είναι φανερό ότι η ορθογώνια προβολή πάνω στον κλειστό υποχώρο $M^{\perp}$ είναι η $I - P$.
(iii) Είναι επίσης φανερό ότι

$$\mathrm{Ran}(P) = M \quad , \quad \mathrm{Ker}(P) = M^{\perp}.$$

Θεώρημα 2.3.6 *Έστω P η ορθογώνια προβολή πάνω στον κλειστό υποχώρο M του $\mathcal{H}$. Τότε $P = P^2 = P^*$. Αντίστροφα, αν T είναι ένας φραγμένος τελεστής για τον οποίο ισχύει $T = T^2 = T^*$, τότε ο υποχώρος $N := \mathrm{Ran}(T)$ είναι κλειστός και ο T είναι η ορθογώνια προβολή πάνω στον N.*

Απόδειξη. Έστω $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ δύο στοιχεία του $\mathcal{H}$. Έχουμε

$$P^2x = P(P(x_1 + x_2)) = Px_1 = x_1 = Px,$$

και άρα $P^2 = P$. Ακόμα

$$\begin{aligned} \langle Px, y\rangle &= \langle x_1, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1\rangle \\ &= \langle x, Py\rangle \end{aligned}$$

και άρα $P = P^*$.

Για το αντίστροφο, έστω T ένας φραγμένος και $T = T^2 = T^*$. Έστω $Tx_n \longrightarrow y$. Τότε

$$Tx_n = T^2x_n \longrightarrow Ty,$$

άρα $y = Ty$ και συνεπώς ο $\mathrm{Ran}(T)$ είναι κλειστός.
Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε x έχουμε $(I - T)x \in \mathrm{Ran}(T)^{\perp}$. Έστω λοιπόν $y \in \mathcal{H}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle Ty, x - Tx \rangle &= \langle Ty, x \rangle - \langle Ty, Tx \rangle \\ &= \langle Ty, x \rangle - \langle Ty, x \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Παράδειγμα 2.3.7 Είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 1.3.8 ότι αν $\{e_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, τότε

$$Px = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

είναι η ορθογώνια προβολή στο $\overline{\mathrm{lin}\{e_n\}}$ (Ειδικότερα, αν το $\{e_n\}$ είναι πλήρες τότε $P = I$ και ανακτούμε το (i) του Θεωρήματος 1.3.9).

Άσκηση 2.3.1 Στον $L^2(\Omega)$ έστω ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $Tf(x) = h(x)f(x)$, όπου $h \in L^{\infty}(\Omega)$. Βρείτε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την συνάρτηση h ώστε ο T να είναι ορθογώνια προβολή. Περιγράψτε τους υποχώρους $\mathrm{Ran}(T)$ και $\mathrm{Ker}(T)$ (όταν ο T είναι ορθογώνια προβολή).

2.3.3 Αυτοσυζυγείς τελεστές

Ορισμός 2.3.8 *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ για τον οποίο ισχύει $T^* = T$ λέγεται* αυτοσυζυγής.

'ρα ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ για κάθε $x, y, \in \mathcal{H}$.

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές είναι μία πολύ σημαντική κατηγορία τελεστών στους οποίους θα επανέλθουμε και στη συνέχεια. Εδώ αναφέρουμε απλώς τις βασικές του ιδιότητες.

Πρόταση 2.3.9 *Ισχύουν τα εξής:*

(i) T *α.σ.* , $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda T$ *α.σ.*
(ii) T_1, T_2 *α.σ.* $\Rightarrow T_1 + T_2$ *α.σ.*
(iii) T_1, T_2 *α.σ.* $\Longrightarrow (T_1T_2$ *α.σ.* $\Leftrightarrow T_1, T_2$*μετατίθενται*)
(iv) *αν* (T_n) *α.σ. και* $T_n \to T$ *τότε* T *α.σ.*
(v) *αν* T *α.σ. τότε* $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $x \in \mathcal{H}$.

Απόδειξη. 'σκηση.

Πρόταση 2.3.10 *Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 4\langle Tx, y\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &+ i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle \end{aligned}$$

(ελέγξτε την παραπάνω σχέση: είναι γενίκευση της πολικής ταυτότητας, Πρόταση 1.1.7) και παρόμοια

$$\begin{aligned} 4\langle x, Ty\rangle &= \langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle \\ &+ i\langle x+iy, T(x+iy)\rangle - i\langle x-iy, T(x-iy)\rangle. \end{aligned}$$

Από το ότι

$$\langle Tz, z\rangle = \overline{\langle Tz, z\rangle} = \langle z, Tz\rangle, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{H},$$

έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.3.11 *Αν ο T είναι αυτοσυζυγής τότε* (i) *όλες οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές και* (ii) *ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω λ ιδιοτιμή, $Tx = \lambda x$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$\lambda = \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, αν $Ty = \mu y$, τότε

$$\langle Tx, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

αλλά επίσης

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

και άρα $\lambda \neq \mu$ συνεπάγεται $\langle x, y\rangle = 0$. □

2.4 Το φάσμα

Ορισμός 2.4.1 *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Το* επιλυτικό σύνολο *$\rho(T)$ του T ορίζεται ως το σύνολο όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο $zI - T$ (ή για συντομία $z - T$) είναι 1-1 και επί και ο αντίστροφος $(z-T)^{-1}$ είναι φραγμένος. Το* φάσμα *$\sigma(T)$ είναι το σύνολο $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$.*

Παράδειγμα 2.4.2 Αν ο $\mathcal{H}$ έχει πεπερασμένη διάσταση τότε το φάσμα συμπίπτει με το σύνολο των ιδιοτιμών του τελεστή.

Πρόταση 2.4.3 *Ισχύει*

$$\sigma(T^*) = \{\bar{z} \mid z \in \sigma(T)\}.$$

Απόδειξη. Άσκηση.

Λήμμα 2.4.4 *Έστω T φραγμένος με $\|T\| < 1$. Τότε $I - T$ είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο (δηλαδή $1 \notin \sigma(T)$) και*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} T^n.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε ότι όντως το δεξί μέλος είναι αντίστροφος του $I - T$. Η εκτίμηση της νόρμας προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα. ◻

Πρόταση 2.4.5 *Για κάθε φραγμένο τελεστή T στον $\mathcal{H}$ ισχύει*

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq \|T\|\}$$

και

$$\|(z - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z| - \|T\|}, \qquad \text{για κάθε } |z| > \|T\|.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $|z| > \|T\|$ τότε $z \in \rho(T)$. Δοθέντος τέτοιου z έχουμε $\|z^{-1}T\| < 1$ και άρα ο $I - z^{-1}T$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(I - z^{-1}T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}T)^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας με z^{-1} συμπεραίνουμε ότι ο $z - T$ είναι αντιστρέψιμος με

$$(z - T)^{-1} = z^{-1}(I - z^{-1}T)^{-1} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}T)^n$$

και έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} \|(z - T)^{-1}\| &\leq |z|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{-1}\|T\|^n \\ &= |z|^{-1} \frac{1}{1 - |z|^{-1}\|T\|} \\ &= \frac{1}{|z| - \|T\|}. \end{aligned}$$

’ρα ο $(z - T)^{-1}$ υπάρχει, είναι φραγμένος και έχουμε την ζητούμενη εκτίμηση για τη νόρμα του. ◻

Πρόταση 2.4.6 (i) *Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.* (ii) *Η απεικόνιση $\mathbb{C} \setminus \sigma(T) \ni z \mapsto (z - T)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αναλυτική.*

Απόδειξη. (i) Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\sigma(T)$ είναι φραγμένο άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι το $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ είναι ανοικτό. Έστω λοιπόν $z_0 \in \rho(T)$. Θα δείξουμε ότι αν το z είναι αρκετά κοντά στο z_0 τότε $z \in \rho(T)$. Πράγματι, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$z - T = (z_0 - T) + (z - z_0) = \left[I + (z - z_0)(z_0 - T)^{-1}\right](z_0 - T) .$$

Συνεπώς για να είναι ο $z - T$ αντιστρέψιμος αρκεί να είναι ο $I + (z - z_0)(z_0 - T)^{-1}$ αντιστρέψιμος, και άρα, από το Λήμμα 2.4.4 αρκεί να έχουμε $|z - z_0| < \|(z_0 - T)^{-1}\|^{-1}$. Δείξαμε λοιπόν ότι το $\rho(T)$ είναι ανοικτό.

Επιπλέον, για $|z - z_0| < \|(z_0 - T)^{-1}\|^{-1}$ χρησιμοποιώντας και πάλι το Λήμμα 2.4.4, έχουμε

$$\begin{aligned}(z - T)^{-1} &= (z_0 - T)^{-1}\left[I + (z - z_0)(z_0 - T)^{-1}\right]^{-1} \\ &= (z_0 - T)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n(z_0 - T)^{-n}.\end{aligned}$$

Το γεγονός ότι το $(z - T)^{-1}$ τελεστής γράφεται (τοπικά) ως δυναμοσειρά σημαίνει (εξ ορισμού) ότι το $(z - T)^{-1}$ είναι αναλυτική συνάρτηση του $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. □

Πρόταση 2.4.7 *Το $\sigma(T)$ είναι μη-κενό για κάθε φραγμένο τελεστή T.*

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι αν $|z| > \|T\|$ τότε $z \notin \sigma(T)$ και

$$\|(z - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\, z \,| - \|T\|}.$$

'ρα για z τέτοια ώστε $|z| > 2\|T\|$ έχουμε

$$\|(z - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|T\|}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\sigma(T) = \emptyset$. Τότε ο επιλυτής $(z - T)^{-1}$ ορίζεται και είναι φραγμένος για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Έστω τυχόντα $x, y \in \mathcal{H}$ και έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ η συνάρτηση

$$f(z) = \langle (z - T)^{-1}x, y \rangle.$$

Το ότι ο $(z - T)^{-1}$ είναι αναλυτική συνάρτηση συνεπάγεται ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$, είναι δηλαδή ακέραια συνάρτηση. Είναι φραγμένη στο σύνολο $\{z : |z| > 2\|T\|\}$ αφού η $\|(z - T)^{-1}\|$ είναι φραγμένη εκεί , και είναι φραγμένη στο $\{z : |z| \leq 2\|T\|\}$ ως συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές. 'ρα η f είναι σταθερή από το Θεώρημα του Liouville. Όμως $f(z) \to 0$ καθώς $|\, z \,| \to \infty$, άρα η f είναι ταυτοτικά μηδέν, δηλαδή

$$\langle (z - T)^{-1}x, y \rangle = 0.$$

Αφού τα x και y ήταν τυχαία, $(z - T)^{-1} = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, άτοπο. □

Τα παραπάνω συμπυκνώνονται στο ακόλουθο

Θεώρημα 2.4.8 *Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή T είναι μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και περιέχεται στο κλειστό δίσκο $\{z \mid |z| \leq \|T\|\}$. Επίσης η απεικόνιση $z \mapsto (z-T)^{-1}$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ με τιμές στο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Παράδειγμα 2.4.9 Στον χώρο $L^2(a,b)$, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$, ορίζουμε τον τελεστή T ως

$$Tf(x) = h(x)f(x), \qquad \text{για κάθε } f \in L^2(a,b), x \in (a,b),$$

όπου $h(x)$ είναι φραγμένη, μιγαδική και συνεχής συνάρτηση στο (a,b). Τότε

$$\sigma(T) = \overline{\mathrm{Ran}(h)}.$$

Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε ένα $\lambda \notin \overline{\mathrm{Ran}(h)}$. Το $\overline{\mathrm{Ran}(h)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|\lambda - z| \geq \delta, \quad \text{για κάθε } z \in \overline{\mathrm{Ran}(h)}.$$

Ειδικότερα $|\lambda - h(x)| \geq \delta$ για κάθε $x \in (a,b)$, άρα ορίζεται η συνάρτηση $(\lambda - h)^{-1}$ και έχουμε

$$|(\lambda - h(x))^{-1}| \leq \frac{1}{\delta}, \quad \text{για κάθε } x \in (a,b).$$

Έπεται ότι ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής S,

$$Sf = (\lambda - h)^{-1}f, \qquad \text{για κάθε } f \in L^2$$

είναι φραγμένος. Είναι επίσης άμεσο ότι

$$S(\lambda - h) = (\lambda - h)S = I.$$

'ρα $\lambda \notin \sigma(T)$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\sigma(T) \subset \overline{\mathrm{Ran}(h)}$.
Αντίστροφα, έστω $\lambda \in \overline{\mathrm{Ran}(h)}$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda \neq \sigma(T)$, δηλαδή ότι ο $\lambda - T$ έχει φραγμένο αντίστροφο S. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η συνάρτηση h είναι συνεχής, υπάρχει μη-κενό, φραγμένο, ανοικτό υποδιάστημα $U \subset (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$|\lambda - h(x)| < \epsilon, \qquad \text{για κάθε } x \in U.$$

Έστω χ η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου U. Τότε

$$(\lambda - h(x))S\chi(x) = \chi(x), \qquad \text{για κάθε } x \in (a,b)$$

και ειδικότερα $x \in U$ συνεπάγεται $\lambda - h(x) \neq 0$ και $S\chi(x) = (\lambda - h(x))^{-1}$. 'ρα

$$\begin{aligned}
\|S\|^2 &= \sup_{f \in L^2, f \neq 0} \frac{\|Sf\|^2}{\|f\|^2} \\
&\geq \frac{\|S\chi\|^2}{\|\chi\|^2} \\
&= \frac{\int_a^b \mid S\chi(x) \mid^2 dx}{\int_a^b \mid \chi(x) \mid^2 dx} \\
&\geq \mid U \mid^{-1} \int_U \mid (\lambda - h(x))^{-1} \mid dx \\
&\geq \mid U \mid^{-1} \int_U \epsilon^{-2} dx \\
&= \epsilon^{-2}.
\end{aligned}$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, άτοπο αφού ο S είναι φραγμένος. □

Άσκηση 2.4.1 Έστω $(a_n) \in l^\infty$ και $A : l^2 \longrightarrow l^2$ ο τελεστής $Ax = y$, όπου $y_n = a_n x_n$. Ποιά είναι η νόρμα $\|A\|$; Ποιο είναι το φάσμα $\sigma(A)$;

Θεώρημα 2.4.10 *Αν ο T είναι αυτοσυζυγής τότε $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω $z = a + ib \notin \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι ο τελεστής $z - T$ είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο.
Ο $z - T$ είναι 1-1 αφού αν $(z - T)x = 0$ για κάποιο $x \neq 0$ τότε ο T θα είχε μία μη-πραγματική ιδιοτιμή, άτοπο λόγω του (i) της Πρότασης 2.3.11. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{Ran}(z - T) = \mathcal{H}$ δείχνοντας ότι το $\mathrm{Ran}(z - T)$ είναι (i) κλειστό και (ii) πυκνό.
(i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|(T - a - ib)x\|^2 &= \|(T - a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \\
&\geq b^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

'ρα αν $(z - T)x_n \longrightarrow y$, τότε η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν $x := \lim x_n$, έπεται ότι $y = (z - T)x$. 'ρα το $\mathrm{Ran}(z - T)$ είναι κλειστό.
(ii) Έστω $y \in \mathrm{Ran}(z - T)^\perp$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε τότε

$$0 = \langle (z - T)x, y \rangle = \langle x, (\bar{z} - T)y \rangle$$

και επιλέγοντας $x = (\bar{z} - T)y$ συμπεραίνουμε ότι $(\bar{z} - T)y = 0$. 'ρα $y = 0$ αφού το $\bar{z}$ δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή του T. Αποδείξαμε λοιπόν ότι το $\mathrm{Ran}(z - T)$ είναι πυκνό. Από τα (i) και (ii) έπεται ότι $\mathrm{Ran}(z - T) = \mathcal{H}$.
Τέλος, η ανισότητα $\|(z - T)x\| \geq |b|\|x\|$ συνεπάγεται ότι ο $(z - T)^{-1}$ είναι φραγμένος, και μάλιστα $\|(z - T)^{-1}\| \leq 1/|b|$. □

Ορισμός 2.4.11 *Έστω $\mathcal{H}$ και $\mathcal{F}$ δύο χώροι Hilbert. Δύο τελεστές $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ λέγονται* μοναδιαία ισοδύναμοι *αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ τέτοιος ώστε*

$$T = U^{-1} S U.$$

Πρόταση 2.4.12 *Έστω ότι οι γραμμικοί τελεστές $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ είναι μοναδιαία ισοδύναμοι. Τότε*

(i) *ο T είναι 1-1 ανν ο S είναι 1-1*

(ii) *ο T είναι επί ανν ο S είναι επί*

(iii) *οι T^* και S^* είναι μοναδιαία ισοδύναμοι*

(iii) $\|T\| = \|S\|$

(iv) $\sigma(T) = \sigma(S)$

(v) *οι $p(T)$ και $p(S)$ είναι μοναδιαία ισοδύναμοι για κάθε πολυώνυμο p.*

Απόδειξη. 'σκηση. □

3 Φασματική θεωρία για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές

3.1 Συμπαγείς τελεστές

Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ χώροι Hilbert.

Ορισμός 3.1.1 *Ένας τελεστής $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ λέγεται συμπαγής αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subset \mathcal{H}$, η ακολουθία (Tx_n) έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία (στον $\mathcal{F}$).*

Πρόταση 3.1.2 *Το σύνολο $C(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ όλων των συμπαγών τελεστών από τον $\mathcal{H}$ στον $\mathcal{F}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.*

Παράδειγμα 3.1.3 1. Κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης (τάξη ενός τελεστή T ονομάζεται η διάσταση της εικόνας $\mathrm{Ran}(T)$) είναι συμπαγής.
2. Μία ορθογώνια προβολή P είναι συμπαγής αν και μόνο αν η εικόνα της έχει πεπερασμένη διάσταση.
3. 'μεση συνέπεια του Παραδείγματος 2. είναι ότι ο ταυτοτικός τελεστής σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert δεν είναι συμπαγής τελεστής.

Το 1. είναι άμεση συνέπεια του ότι κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο σε έναν νορμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι συμπαγές.
Η μία κατεύθυνση του 2. έπεται από το προηγούμενο παράδειγμα. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι το $\mathrm{Ran}(P)$ έχει άπειρη διάσταση. Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathrm{Ran}(P)$. Ας υποθέσουμε ότι ο P είναι συμπαγής. Τότε η ακολουθία $(e_n) = (Pe_n)$ περιέχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία. Όμως για $n \neq m$ ισχύει

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2,$$

άρα η (e_n) δεν μορεί να περιέχει μία υπακολουθία Cauchy, άτοπο.

Θεώρημα 3.1.4 *Ο $C(\mathcal{H})$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, δηλαδή αν ο T είναι συμπαγής και ο S φραγμένος, τότε οι τελεστές TS και ST είναι και οι δύο συμπαγείς.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) μία φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{H}$. Τότε και η (Sx_n) είναι φραγμένη, και άρα η (TSx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. 'ρα ο τελεστής TS είναι συμπαγής. Επίσης, η (Tx_n) έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία (Tx_{n_k}), και αφού ο S είναι φραγμένος έπεται ότι η (STx_{n_k}) συγκλίνει. 'ρα και ο ST είναι συμπαγής. □

Θεώρημα 3.1.5 *Ο $C(\mathcal{H})$ Η είναι κλειστός υποχώρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Απόδειξη. Έστω (T_n) ακολουθία συμπαγών τελεστών η οποία συγκλίνει σε κάποιον τελεστή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι συμπαγής. Έστω λοιπόν (x_n) μία φραγμένη ακολουθία. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_n\| \leq 1$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία (Tx_n) έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού ο T_1 είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία $(x_{1,n})$ της (x_n), τέτοια ώστε η $(T_1x_{1,n})$ να συγκλίνει. Αφού ο T_2 είναι συμπαγής, υπάρχει ακολουθία $(x_{2,n})$, υπακολουθία της $(x_{1,n})$ τέτοια ώστε η $(T_2x_{n_{2,k}})$ να είναι συγκλίνουσα.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ ορίζεται μία ακολουθία $(x_{i,n})_n$ και ισχύει ότι (i) η $(x_{i,n})_n$ είναι υπακολουθία της $(x_{i-1,n})_n$ και (ii) για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ η ακολουθία $(T_ix_{i,n})_n$ συγκλίνει.

Ορίζουμε
$$y_n = x_{n,n}.$$
Προφανώς η (y_n) είναι υπακολουθία της (x_n). Επίσης, για κάθε i η ακολουθία (y_n) είναι τελικά (συγκεκριμένα από τον i όρο και μετά) υπακολουθία της $(x_{i,n})_n$. [Ένα διάγραμμα θα σας βοηθήσει να ξεκαθαρίσετε γιατί ισχύει αυτό.] Συνεπώς η $(T_iy_n)_n$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Θα αποδείξουμε ότι η (Ty_n) συγκλίνει δείχνοντας ότι είναι Cauchy. Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Υπάρχει τότε $i \in \mathbb{N}$ ώστε
$$\|T_i - T\| < \frac{\epsilon}{3}.$$
Αφού η $(Ty_n)_k$ είναι συγκλίνουσα, υπάρχει n_0 ώστε
$$n, m > n_0 \Longrightarrow \|T_iy_n - T_iy_m\| < \frac{\epsilon}{3}.$$
Άρα για $n, m > n_0$ έχουμε
$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty_m\| &\leq \|Ty_n - T_iy_n\| + \|T_iy_n - T_iy_m\| + \|T_iy_m - Ty_m\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3}\|y_n\| + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}\|y_m\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$
Άρα η (Ty_n) είναι Cauchy, το οποίο ήταν το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.1.6 *Έστω ότι ο $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι συμπαγής τελεστής στον απειροδιάστατο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε* (i) *κάθε μη-μηδενική ιδιοτιμή του T έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα και* (ii) *$0 \in \sigma(T)$.*

Απόδειξη. Άσκηση.

3.2 Τελεστές Hilbert-Schmidt

Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ φραγμένος και $\{e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$. Η ποσότητα $\sum_n \|Te_n\|^2$ (η οποία μπορεί να είναι ίση με $+\infty$) είναι ανεξάρτητη της συγκεκριμένης βάσης $\{e_n\}$. Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε μία τυχαία ορθοκανονική βασή $\{f_n\}$ του $\mathcal{F}$. Τότε

$$\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \sum_k |\langle Te_n, f_k\rangle|^2$$
$$= \sum_{n,k} |\langle e_n, T^* f_k\rangle|^2 = \sum_k \|T^* f_k\|^2.$$

'ρα $\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|Te_n'\|^2$ για κάθε δύο ορθοκανονικές βάσεις $\{e_n\}, \{e_n'\}$ του $\mathcal{H}$. Η ποσότητα

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} = \Big(\sum_n \|Te_n\|^2\Big)^{1/2}$$

ονομάζεται *Hilbert-Schmidt* νόρμα του T και οι τελεστές για τους οποίους $\|T\|_{\mathrm{HS}} < +\infty$ ονομάζονται τελεστές Hilbert-Schmidt.

Άσκηση 3.2.1 (i) Αποδείξτε ότι το σύνολο των τελεστών Hilbert-Schmidt είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ και ότι η $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ είναι πράγματι νόρμα στον χώρο αυτό. (ii) Δείξτε ότι $\|T\| \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}$ για κάθε Hilbert-Schmidt τελεστή T.

Πρόταση 3.2.1 *Αν ο $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ είναι Hilbert-Schmidt τότε είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο T είναι Hilbert-Schmidt και έστω $\{e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$. Για κάθε $r = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε

$$T_r x = \sum_{n=1}^{r} \langle x, e_n\rangle Te_n$$

Προφανώς κάθε T_r έχει πεπερασμένη τάξη ($\leq r$) και άρα είναι συμπαγής. Για κάθε $x =\in \mathcal{H}$ έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\|Tx - T_r x\|^2 &= \Big\|\sum_{n=r+1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle Te_n\Big\| \\
&\leq \Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle| \|Te_n\|\Big)^2 \\
&\leq \Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} |a_n|^2\Big)\Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big) \\
&\leq \Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)\|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Άρα

$$\|T - T_r\| \leq \Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{1/2} \longrightarrow 0.$$

Όντας το όριο συμπαγών τελεστών ο T είναι και αυτός συμπαγής. □

Πρόταση 3.2.2 (Ολοκληρωτικοί τελεστές) *Έστω* $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ *και*

$$k : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

μία συνεχής συνάρτηση στο $(0,1) \times (0,1)$ *τετοια ώστε*

$$\int_0^1 \int_0^1 \mid k(x,y) \mid^2 dx\, dy < \infty.$$

Ο τελεστής T *που ορίζεται ένας τελεστής* T *από την σχέση*

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy.$$

είναι Hilbert-Schmidt και

$$\|K\|_{\mathrm{HS}} = \left\{ \int_R \mid k(x,y) \mid^2 \right\}^{1/2}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in (0,1)$ ας ορίσουμε $k_x(y) = k(x,y)$. Έστω $\{e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $L^2(0,1)$. Τότε

$$Ke_n(x) = \int_0^1 k(x,y)e_n(y)dy = \langle k_x, \overline{e_n} \rangle.$$

'ρα

$$\|Ke_n\|^2 = \int_0^1 \mid Ke_n(x) \mid^2 dx = \int_0^1 \mid \langle k_x, \overline{e_n} \rangle \mid^2 dx$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \mid \langle k_x, \overline{e_n} \rangle \mid^2 dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle k_x, \overline{e_n} \rangle \mid^2 dx \\ &= \int_0^1 \|k_x\|^2 dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mid k(x,y) \mid^2 dx\, dy < \infty. \end{aligned}$$ □

Η συνάρτηση $k(x,y)$ ονομάζεται και *ολοκληρωτικός πυρήνας* του τελεστή T.

Άσκηση 3.2.2 Αν K είναι ένας ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα $k(x,y)$, τότε και ο K^* είναι ολοκληρωτικός τελεστής και οι δύο πυρήνες συνδέονται με τη σχέση

$$k^*(x,y) = \overline{k(y,x)}.$$

3.3 Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές

Ορισμός 3.3.1 *Έστω M ένας κλειστός υποχώρος του $\mathcal{H}$. Λέμε ότι ο τελεστής T αφήνει τον M αναλλοίωτο αν $x \in M$ συνεπάγεται $Tx \in M$. Λέμε ότι ο T* ανάγει *τον M αν αφήνει αναλλοίωτο και τον M και τον $M^\perp$.*

Δηλαδή ο T ανάγει M αν η δράση του T στον M και η δράση του στον $M^\perp$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό εκφράζεται και ως εξής: καταρχήν τόσο ο M όσο και ο $M^\perp$ είναι χώροι Hilbert ως κλειστοί υποχώροι του $\mathcal{H}$. Αν ο T ανάγει τον M τότε υπάρχουν τελεστές $A \in \mathcal{B}(M)$ και $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$ ώστε

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$$

$$T(x \oplus y) = Ax \oplus Dy. \tag{3. 2}$$

Γράφουμε τότε

$$T = A \oplus D$$

και καλούμε τον T *ευθύ άθροισμα* των A και D.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε τα παραπάνω είναι ο εξής: αν μας δοθεί ο κλειστός υποχώρος M και ο τελεστής T, ορίζονται οι τελεστές

$$A : M \to M, \quad B : M^\perp \to M, \quad C : M \to M^\perp, \quad D : M^\perp \to M^\perp$$

ώστε

$$T(x \oplus y) = (Ax + By) \oplus (Cx + Dy), \qquad x \in M,\ y \in M^\perp.$$

Γράφουμε τότε

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι ο M ανάγει τον M αν και μόνο αν $B = 0$ και $C = 0$, οπότε

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο T έχει διαγώνια μπλοκ μορφή.

Αν μας δοθεί ένας τελεστής T και μπορέσουμε να βρούμε έναν κλειστό υποχώρο M που ανάγεται από τον T, τότε ορίζονται οι παραπάνω τελεστές A και D και η μελέτη του T ανάγεται πλήρως στην μελέτη των A και D. Αυτό είναι σημαντικό όφελος, αφού κάθε ένας από τους A, D είναι εν γένει απλούστερος από τον T.

Γενικότερα, λέμε ότι ο $\mathcal{H}$ είναι το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα των κλειστών υποχώρων $\{M_n\}_{n=1}^N$ ($N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) αν οι M_n είναι ανά δύο ορθογώνιοι και αν κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται ως

$$x = \sum_{n=1}^N x_n, \qquad x_n \in M_n.$$

Η γραφή αυτή είναι τότε μοναδική και ισχύει $x_n = P_n x$, όπου P_n η ορθογώνια προβολή πάνω στον υποχώρο M_n. Γράφουμε τότε

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{N} M_n, \qquad x = \bigoplus_{n=1}^{N} x_n.$$

Αν ένας τελεστής T ανάγει κάθε M_n, τότε ορίζονται τελεστές $T_n : M_n \to M_n$ ώστε

$$Tx = \bigoplus_{n=1}^{N} T_n x_n,$$

δηλαδή

$$T\Big(\bigoplus_{n=1}^{N} x_n\Big) = \bigoplus_{n=1}^{N} T_n x_n.$$

Τότε γράφουμε

$$T = \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n, \tag{3. 3}$$

και η μελέτη του T ανάγεται στην μελέτη των απλούστερων τελεστών T_n.

Παράδειγμα 3.3.2 Αν P είναι η ορθογώνια προβολή πάνω στον M τότε η P ανάγει τον M και ως προς την ανάλυση $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ έχουμε $P = I \oplus 0$.

Άσκηση 3.3.1 Δείξτε ότι αν ισχύει η ανάλυση (3. 3) τότε

$$\text{(i)} \quad \|T\| = \sup_n \|T_n\|, \quad \text{(ii)} \quad \sigma(T) \supset \overline{\bigcup_n \sigma(T_n)}.$$

Λήμμα 3.3.3 *Έστω T είναι αυτοσυζυγής. Αν ο T αφήνει αναλλοίωτο τον κλειστό υπόχωρο M τότε ανάγει τον M. Ειδικότερα, ο T ανάγει όλους τους ιδιοχώρους του.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε κάτι λίγο γενικότερο: ότι αν ένας τελεστής S αφήνει αναλλοίωτο τον κλειστό υπόχωρο M τότε ο S^* αφήνει αναλλοίωτο τον $M^{\perp}$.

Έστω $x \in M^{\perp}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $S^*x \in M^{\perp}$, οπότε θεωρούμε Έστω τώρα $y \in M$. Τότε $Sy \in M$ και άρα

$$\langle S^*x, y\rangle = \langle x, Sy\rangle = 0.$$

Άρα $S^*x \in M^{\perp}$. □

Λήμμα 3.3.4 *Αν ο τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, τότε*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Απόδειξη. Έστω M το δεξί μέλος της ζητούμενης σχέσης. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq ||Tx||||x|| \leq ||T||||x||^2,$$

και άρα $M \leq ||T||$. Τώρα, για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ = & \ 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle \\ = & \ 4\mathrm{Re}\ \langle Tx, y\rangle, \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} 4|\mathrm{Re}\ \langle Tx, y\rangle| & \leq M||x+y||^2 + M||x-y||^2 \\ & = 2M(||x||^2 + ||y||^2). \end{aligned}$$

Έπεται ότι αν $||x||, ||y|| \leq 1$ τότε $|\mathrm{Re}\ \langle Tx, y\rangle| \leq M$ και άρα για τυχόντα $x, y \in \mathcal{H}$

$$|\mathrm{Re}\ \langle Tx, y\rangle| \leq M||x||||y||.$$

Επιλέγοντας $y = Tx$ παίρνουμε

$$||Tx||^2 \leq M||x||||Tx||$$

και έτσι συμπεραίνουμε ότι $||T|| \leq M$. □

Λήμμα 3.3.5 *Αν ο T είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής τότε ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $||T||$ και $-||T||$ είναι ιδιοτιμή του T.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T \neq 0$. Από το Λήμμα 3.3.4 έπεται ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) με $||x_n|| = 1$ και τέτοια ώστε

$$|\langle Tx_n, x_n\rangle| \longrightarrow ||T||.$$

Ειδικότερα η ακολουθία $(\langle Tx_n, x_n\rangle)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και άρα έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία,

$$\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle \longrightarrow \lambda$$

όπου $|\lambda| = ||T||$ και άρα $\lambda = ||T||$ ή $\lambda = -||T||$ (αφού $\langle Tx_n, x_n\rangle \in \mathbb{R}$).
Θα αποδείξουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του T. Για απλότητα μετονομάζουμε την (x_{n_k}) σε (x_n). Έχουμε

$$\begin{aligned} ||Tx_n - \lambda x_n||^2 & = ||Tx_n||^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \\ & \leq 2\lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Αφού ο T είναι συμπαγής, η (Tx_n) έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι η ίδια η (Tx_n), $Tx_n \longrightarrow y$. Έπεται τότε ότι $\lambda x_n \longrightarrow y$ και άρα

$$Tx_n \longrightarrow \lambda^{-1}Ty.$$

Συμπεραίνουμε ότι $Ty = \lambda y$ και άρα το λ είναι ιδιοτιμή αφού $y \neq 0$. □

Θεώρημα 3.3.6 (Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές - απλή διατύπωση) *Έστω T συμπαγής και αυτοσυζυγής τελεστής στον απειροδιάστατο και διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.*

Θεώρημα 3.3.7 (Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές - σύνθετη διατύπωση) *Έστω T συμπαγής και αυτοσυζυγής τελεστής στον απειροδιάστατο και διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Επιπλέον:*

Έστω $\{e_n\} = \{\phi_n\} \cup \{\psi_n\}$ όπου $\{\phi_n\}$ οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές ιδιοτιμές και $\{\psi_n\} \subset \mathrm{Ker}(T)$. Έστω λ_n η ιδιοτιμή για το ιδιοδιάνυσμα ϕ_n:

$$T\phi_n = \lambda_n \phi_n \quad , \qquad \lambda_n \neq 0.$$

(άρα τα λ_n, $n \in \mathbb{N}$, δεν είναι απαραίτητα διάφορα ανά δύο). Ισχύουν τότε τα εξής:

(i) *Κάθε ιδιοτιμή λ_n έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα (ίση με $\#\{k : \lambda_n = \lambda_k\}$)*

(ii) *Αν το σύνολο $\{\lambda_n\}$ είναι άπειρο τότε έχει μόνο σημείο συσσώρευσης το 0. Επιπλέον οι ιδιοτιμές λ_n μπορούν να διαταχθούν ώστε*
$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$
και ισχύει $\lambda_n \to 0$.

(iii) *Ισχύει*
$$T = \sum_n \lambda_n \phi_n \otimes \phi_n$$
(όπου η σειρά, αν έχει άπειρους όρους, συγκλίνει στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$)

(iv) $\sigma(T) = \{\lambda_n\} \cup \{0\}$

Παρατήρηση. Έστω T ένας φραγμένος τελεστής στον $\mathcal{H}$ και έστω $\{e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$. Ονομάζουμε *πίνακα* του T ως προς την βάση $\{e_n\}$ τον (άπειρο) πίνακα $\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως

$$a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle.$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι αν $Tx = y$ τότε

$$\langle y, e_i \rangle = \sum_j a_{ij} \langle x, e_j \rangle,$$

σχέση που δείχνει ότι η έννοια αυτή είναι γενίκευση της συνήθους έννοια του πίνακα ως προς βάση που ξέρουμε από την Γραμμική Άλγεβρα.

Το φασματικό θεώρημα μας λέει ότι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση (η $\{\phi_n\} \cup \{\psi_n\}$) ως προς την οποία ο πίνακας του T είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $(\lambda_1, \lambda_2, \dots |$

$0, 0, \ldots$). (Το πλήθος των μηδενικών ισούται με τη διάσταση του $\mathrm{Ker}(T)$ και μπορεί να είναι κάποιος φυσικός ≥ 0 ή άπειρο.)

Απόδειξη. Το (i) έχει ήδη αποδειχθεί στην Πρόταση 3.1.6.

Αν $T = 0$ τότε προφανώς ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $T \neq 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγική μέθοδο.

Έστω $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $T_1 = T$. Από το Λήμμα 3.3.5 έπεται ότι υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda_1 = \pm\|T\|$ του T_1. Έστω ϕ_1 ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\|\phi_1\| = 1$. Ο T_1 ανάγει τον $\mathcal{H}_2 := \{\phi_1\}^\perp$ και άρα ο τελεστής

$$T_2 = T_1 \,|_{\mathcal{H}_2}$$

μπορεί να θεωρηθεί ως τελεστής στον $\mathcal{H}_2$. Έτσι, ως προς την ανάλυση

$$\mathcal{H} = \langle\phi_1\rangle \oplus \mathcal{H}_2$$

(εδώ $\langle\phi_1\rangle = \mathrm{span}\{\phi_1\}$) έχουμε

$$T = \lambda_1 \oplus T_2\,.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο T_2, ως περιορισμός του T είναι κι αυτός συμπαγής και αυτοσυζυγής. Αν $T_2 \neq 0$ τότε ο T_2 έχει μία ιδιοτιμή $\lambda_2 = \pm\|T_2\|$. Έστω ϕ_2 ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\|\phi_2\| = 1$. Έχουμε

$$|\lambda_2| = \|T_2\| = \|T_1 \,|_{\mathcal{H}_2}\| \leq \|T_1\| = |\lambda_1|.$$

Θέτουμε τώρα $\mathcal{H}_3 = \mathrm{lin}\{\phi_1, \phi_2\}^\perp$ και $T_3 = T\,|_{\mathcal{H}_3}$. Άρα, ως προς την ανάλυση

$$\mathcal{H} = \langle\phi_1\rangle \oplus \langle\phi_2\rangle \oplus \mathcal{H}_3$$

έχουμε

$$T = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus T_3\,.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά με αυτόν τον τρόπο. Στο n-οστό βήμα έχουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T και για τις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ ισχύει

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Ορίζουμε τότε $\mathcal{H}_{n+1} = \mathrm{lin}\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}^\perp$ και τον τελεστή T_{n+1} στον $\mathcal{H}_{n+1}$ ως $T_{n+1} = T\,|_{\mathcal{H}_{n+1}}$. Έχουμε τότε

$$\mathcal{H} = \langle\phi_1\rangle \oplus \langle\phi_2\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\phi_n\rangle \oplus \mathcal{H}_{n+1}$$

(ανάλυση σε ευθύ άθροισμα ανά δύο κάθετων υποχώρων) και ως προς την ανάλυση αυτή ο T γράφεται

$$T = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_n \oplus T_{n+1}\,.$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν η διαδικασία αυτή τερματίζεται ή όχι.

Περίπτωση 1. Η διαδικασία τερματίζεται, υπάρχει δηλαδή κάποιο $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$T_{m+1} = T|_{\mathcal{H}_{m+1}} = 0\,.$$

Τότε $\mathcal{H}_{m+1} = \mathrm{Ker}(T)$. Έχουμε λοιπόν τότε την ανάλυση

$$\mathcal{H} = \langle\phi_1\rangle \oplus \langle\phi_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle\phi_m\rangle \oplus \mathrm{Ker}(T) \tag{3. 4}$$

ως προς την οποία

$$T = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_m \oplus 0\,.$$

Έστω $\{\psi_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathrm{Ker}(T)$. Τότε το σύνολο

$$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m\} \cup \{\psi_n\}$$

είναι μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.

Ως προς την ανάλυση (3. 4) το τυχόν $x \in \mathcal{H}$ γράφεται ως

$$x = \langle x, \phi_1\rangle\phi_1 + \langle x, \phi_2\rangle\phi_2 \oplus \ldots \oplus \langle x, \phi_m\rangle\phi_m \oplus \Big(x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, \phi_k\rangle\phi_k\Big).$$

Συνεπώς το διάνυσμα $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \phi_k\rangle\phi_k$ ανήκει στον πυρήνα $\mathrm{Ker}(T)$ και άρα

$$Tx = T\Big(\sum_{k=1}^{m} \langle x, \phi_k\rangle\phi_k\Big) = \lambda_1\langle x, \phi_1\rangle\phi_1 + \lambda_2\langle x, \phi_2\rangle\phi_2 + \ldots + \lambda_n\langle x, \phi_n\rangle\phi_n\ ,$$

δηλαδή ισχύει η (iii) (το άθροισμα είναι πεπερασμένο στην περίπτωση αυτή).

Εύκολα βλέπουμε ότι $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_\}\cup\{0\}$ και ότι για κάθε $z \notin \sigma(T)$ ο $(z - T)^{-1}$ εκφράζεται ως προς την ανάλυση (3. 4) ως

$$(z - T)^{-1} = (z - \lambda_1)^{-1} \oplus \ldots (z - \lambda_m)^{-1} \oplus z^{-1}\,.$$

Περίπτωση 2. Η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία (λ_n) συγκλίνει στο 0. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι δεν συγκλίνει στο 0. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $|\lambda_n| \geq \epsilon$ για κάθε n. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε n, m με $n \neq m$ ισχύει

$$\begin{aligned} \|T\phi_n - T\phi_m\|^2 &= \|\lambda_n\phi_n - \lambda_m\phi_m\|^2 \\ &= |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \\ &\geq 2\epsilon^2. \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $(T\phi_n)$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, το οποίο είναι άτοπο αφού ο T είναι συμπαγής.

Έπεται ότι το σύνολο $\{\lambda_n\}$ έχει μόνο σημείο συσσώρευσης το μηδέν. Συνεπώς δείχθηκε η (ii).

Θέλουμε να δείξουμε την (iii). Έστω λοιπόν $T_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\phi_k\otimes\phi_k$, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς. Έστω τώρα $x \in \mathcal{H}$. Θέτουμε

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \phi_k\rangle\phi_k \quad , \qquad y_n = x - x_n.$$

Άρα το x_n είναι η ορθογώνια προβολή του x στον $\langle \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle$ και συνεπώς το y_n η ορθογώνια προβολή του στον $\mathcal{H}_{n+1}$.

Ισχύει $T_n x = T x_n$ και άρα

$$\begin{aligned} \|Tx - T_n x\| &= \|T(x - x_n)\| \\ &= \|Ty_n\| \\ &= \|T_{n+1} y_n\| \\ &\leq \|T_{n+1}\| \|y_n\| \\ &\leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\|T - T_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \to 0,$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$, άρα δείχθηκε η (iii).

Έστω $\{\psi_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathrm{Ker}(T)$ (αυτή μπορεί να έχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος στοιχείων). Τότε το σύνολο $\{\phi_n\} \cup \{\psi_m\}$ είναι ορθοκανονικό.

Έστω $x \in \mathcal{H}$. Λόγω της (iii) το διάνυσμα

$$y = x - \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$$

ανήκει στον $\mathrm{Ker}(T)$, άρα

$$y = \sum_n \langle y, \psi_n \rangle \psi_n = \sum_n \langle x, \psi_n \rangle \psi_n.$$

Συνεπώς

$$x = \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n + \sum_n \langle x, \psi_n \rangle \psi_n.$$

Από το Θεώρημα 1.3.9 έπεται ότι το ορθοκανονικό σύνολο $\{\phi_n\} \cup \{\psi_n\}$ είναι πλήρες. Η (iv) αποδεικνύεται εύκολα. □

3.4 Εφαρμογή: το πρόβλημα Sturm-Liouville

Ορισμός. Μία συνάρτηση $u : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι απόλυτα συνεχής αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε n διαστήματα $[x_n, y_n] \subset [a, b]$ να ισχύει ότι

$$\text{αν} \quad \sum_{k=}^{n} (y_k - x_k) < \delta \quad \text{τότε} \quad \sum_{k=}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon\,.$$

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι απόλυτα συνεχής και ότι κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Είναι γνωστή από την Πραγματική Ανάλυση η ακόλουθη

Πρόταση 3.4.1 *Αν η u είναι απόλυτα συνεχής στο $[a,b]$ τότε είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, η παράγωγος u' ανήκει στο $L^1(a,b)$ και*

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)dt\ , \qquad x \in [a,b]\ .$$

Αντίστροφα αν $v \in L^1(a,b)$ τότε η συνάρτηση

$$u(x) = \int_a^x v(t)dt\ , \qquad x \in [a,b]$$

είναι απόλυτα συνεχής και ισχύει $u' = v$ σχεδόν παντού.

Ορισμός Ονομάζουμε τελεστή Sturm-Liouville στον χώρο Hilbert $L^2(0,1)$ ένα τελεστή L της μορφής

$$Lu(x) = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu,$$

μαζί με συνοριακές συνθήκες

$$\alpha u(0) + \alpha' u'(0) = 0$$

$$\beta u(1) + \beta' u'(1) = 0,$$

όπου:

(i) p και q συνεχείς συναρτήσεις με πραγματικές τιμές και $p(x) > 0$ στο $[0,1]$.

(ii) η p' υπάρχει και είναι συνεχής στο $[0,1]$.

(iii) $\alpha, \alpha', \beta, \beta$, είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha^2 + \alpha'^2 \neq 0$, $\beta^2 + \beta'^2 \neq 0$.

Το πεδίο ορισμού του L δεν είναι όλος ο χώρος $L^2(0,1)$, το οποίο είναι αναμενόμενο αφού το Lu δεν ορίζεται για κάθε $u \in L^2(0,1)$. Ορίζουμε το πεδίο ορισμόυ $D(L)$ του L ως το σύνολο όλων των $u \in L^2(0,1)$ που είναι τέτοιες ώστε:

(i) η u' υπάρχει και είναι απόλυτα συνεχής στο $[0,1]$

(ii) η u'' ανήκει στον $L^2(0,1)$

(iii) η u ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (iii).

'ρα για $u \in D(L)$, το Lu είναι καλά ορισμένο και ανήκει στον $L^2(0,1)$. Για πρακτικούς λόγους κάνουμε επιπλέον την (τεχνική) υπόθεση ότι το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του L, δηλαδή

$$u \in D(L), \quad Lu = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Ο τελεστής L δεν είναι φραγμένος, και άρα τίποτα από τη θεωρία που μέχρι τώρα έχουμε δει δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τον L. Όπως θα δούμε όμως, μπορούμε να μάθουμε πολλά για τον L μελετώντας τον L^{-1} ο οποίος είναι φραγμένος.

Θεώρημα 3.4.2 *Ο τελεστής L είναι 1-1 και επί, και ο αντίστροφος L^{-1} είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη. Από την θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων γνωρίζουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $u_1, u_2 \in C^2(0,1)$ οι οποίες είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$-\frac{d}{dt}(p\frac{du_i}{dt}) + qu_i = 0, \quad i = 1, 2$$

με αντίστοιχες συνοριακές συνθήκης

$$\alpha u_1(0) + \alpha' u_1'(0) = 0$$

$$\beta u_2(1) + \beta' u_2'(1) = 0$$

και οι λύσεις είναι μη τετριμμένες, δηλαδή $u_1(0)^2 + u_1'(0)^2 \neq 0$, $u_2(1)^2 + u_2'(1)^2 \neq 0$. Ορίζουμε την ορίζουσα

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} .$$

Ένας απλός υπολογισμός μας δίνει

$$(-pW)' = 0, \qquad \text{για κάθε } t \in (0,1),$$

και άρα $-p(x)W(x) = c$ για κάθε x, όπου c είναι μία σταθερά. Θα δείξουμε ότι $c \neq 0$. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $c = 0$. Αφού $p(x) \neq 0$, έχουμε $W(x) = 0$ για κάθε x και ειδικότερα

$$u_1(0)u_2'(0) - u_2(0)u_1'(0) = 0.$$

Όμως $u_1(0) \neq 0$ ή $u_1'(0) \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $u_1(0) \neq 0$, η περίπτωση $u_1'(0) \neq 0$ αντιμετωπίζεται με ανάλογο τρόπο. Έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha u_2(0) + \alpha' u_2'(0) &= \alpha u_2(0) + \alpha' \left(\frac{u_1'(0)}{u_1(0)} u_2(0) \right) \\ &= (\alpha u_1(0) + \alpha' u_1'(0)) \frac{u_2(0)}{u_1(0)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Αφού η u_2 είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η u_2'' είναι συνεχής, έπεται ότι $u_2 \in D(L)$ και $Lu_2 = 0$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του L. ᾿ρα πράγματι $c \neq 0$.

Ορίζουμε τώρα τον ολκληρωτικό πυρήνα

$$k(x,t) = \begin{cases} c^{-1}u_1(x)u_2(t), & \text{αν } x \leq t \\ c^{-1}u_1(t)u_2(x), & \text{αν } t \leq x. \end{cases}$$

Αφού οι u_1, u_2 είναι συνεχείς στο $[0,1]$, έχουμε

$$\int_0^1 \int_0^1 | k(x,t) |^2 \, dx \, dt < \infty.$$

Είναι επίσης προφανές ότι

$$k(x,t) = \overline{k(t,x)}.$$

'ρα ο τελεστής K που ορίζεται από τον ολοκληρωτικό πυρήνα $k(x,t)$,

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)dt,$$

είναι τελεστής Hilbert-Schmidt και αυτοσυζυγής. Θα αποδείξουμε ότι ο L είναι αντιστρέψιμος και $L^{-1} = K$.
Έστω $f \in L^2(0,1)$ και ας θέσουμε $g = Kf$. Θα δείξουμε ότι $g \in D(L)$ και $Lg = f$. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$v_1(x) = c^{-1}\int_0^x u_1(t)f(t)dt, \quad v_2(x) = c^{-1}\int_x^1 u_2(t)f(t)dt$$

και παρατηρούμε ότι

$$g = u_1v_2 + u_2v_1.$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} g' &= u_1'v_2 + u_1v_2' + u_2'v_1 + u_2v_1' \\ &= u_1'v_2 + u_2'v_1. \end{aligned}$$

Ειδικότερα η g' είναι συνεχής. Παραγωγίζοντας άλλη μία φορά έχουμε

$$g'' = -c^{-1}u_1'u_2f + u_1''v_2 + c^{-1}u_1u_2'f + v_1u_2'' \tag{3. 5}$$

και άρα $g'' \in L^2(0,1)$ αφού όλοι οι όροι στο δεξί μέλος της (3. 5) ανήκουν στον $L^2(0,1)$. Επιπλέον, αφού $v_1(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \alpha g(0) + \alpha' g'(0) &= \alpha u_1(0)v_2(0) + \alpha' u_1'(0)v_2(0) \\ &= [\alpha u_1(0) + \alpha' u_1'(0)]v_2(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

και παρόμοια $\beta g(1) + \beta' g'(1) = 0$. 'ρα $g \in D(L)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} (pg')' + qg &= -(pu_1'v_2 + pu_2'v_1)' + qg \\ &= -(pu_1')'v_2 - (pu_2')'v_1 - p(u_2'v_1' + u_1'v_2') + qg \\ &= -qu_1v_2 - qu_2v_1 + pc^{-1}(u_2'u_1 - u_1'u_2)f + qg \\ &= -qg - pc^{-1}Wf + qg \\ &= f. \end{aligned}$$

'ρα $Lg = f$, δηλαδή $LKf = f$.
Πρέπει ακόμη να δείξουμε ότι $KLg = g$ για κάθε $g \in D(L)$. Πράγματι, έχουμε $LKLg = Lg$ και άρα

$$L[KLg - g] = 0.$$

Η υπόθεση ότι το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του L συνεπάγεται ότι $KLg = g$, που είναι το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.4.3 *Η συνάρτηση $k(x,t)$ ονομάζεται* συνάρτηση Green *του προβλήματος Sturm-Liouville.*

Θεώρημα 3.4.4 *Υπάρχει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα $\{\phi_n\}$ που αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του L. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{\mu_n\}$ έχουν όλες πεπερασμένη πολλαπλότητα και $|\mu_n| \longrightarrow \infty$.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξει κανείς ότι το $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του K με ιδιοσυνάρτηση ϕ αν και μόνο αν το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του L με ιδιοσυνάρτηση ϕ. Το θεώρημα τότε έπεται αν εφαρμόσουμε στον K το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές. □

Άσκηση 3.4.1 Να βρεθούν οι συναρτήσεις Green καθώς και οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις για τον τελεστή

$$Lf = -f''$$

στο $(0,1)$, με συνοριακές συνθήκες.

$$f(0) = 0, \qquad 3f(1) + f'(1) = 0.$$

4 Θεώρημα Lax-Milgram και μεταβολικά προβλήματα

Ορισμός 4.0.1 *Ονομάζουμε (3/2)-γραμμική μορφή σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ μια απεικόνιση $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad A(\lambda x + \mu y, z) = \lambda A(x,z) + \mu A(y,z), \\ &\text{(ii)} \quad A(x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda} A(x,y) + \overline{\mu} A(x,z), \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Η (3/2)-γραμμική μορφή A λέγεται:

- *φραγμένη, αν υπάρχει $\Lambda > 0$ ώστε $|A(u,v)| \leq \Lambda \|u\| \|v\|$ για κάθε $u, v \in \mathcal{H}$*
- *ελλειπτική, αν υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\operatorname{Re} A(v,v) \geq c\|v\|^2$ για κάθε $v \in \mathcal{H}$.*

Θεώρημα 4.0.2 (Θεώρημα Lax-Milgram) *Έστω $A(\cdot,\cdot)$ μία (3/2)-γραμμική φραγμένη ελλειπτική μορφή στον $\mathcal{H}$. Για κάθε φραγμένο συναρτησιακό $\pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{H}$ ώστε*

$$A(v,u) = \pi(v)\,, \qquad \text{για κάθε } v \in \mathcal{H}. \tag{4. 6}$$

Επιπλέον η απεικόνιση $\pi \mapsto u$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{H}$. Η απεικόνιση

$$v \mapsto A(v, u) \tag{4. 7}$$

είναι γραμμική από τον $\mathcal{H}$ στο $\mathbb{C}$. Επίσης

$$|A(v, u)| \leq \Lambda \|u\| \|v\|,$$

άρα η (4. 7) είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathcal{H}$, με νόρμα μικρότερη ή ίση του $M\|u\|$. Από το Θέωρημα Αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι υπάρχει $w \in \mathcal{H}$ ώστε

$$A(v, u) = \langle v, w \rangle\ , \qquad \text{για κάθε } v \in \mathcal{H}.$$

Ισχύει τότε $\|w\| \leq M\|u\|$, άρα ορίζεται ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής S από τη σχέση $S u = w$. Αρα λοιπόν

$$A(v, u) = \langle v, S u \rangle\ , \quad u, v \in \mathcal{H}\ .$$

Επίσης, πάλι από το Θέωρημα Αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $f \in \mathcal{H}$ ώστε $\pi(v) = \langle v, f \rangle$, $v \in \mathcal{H}$. Αρα η (4. 6) γράφεται ισοδύναμα

$$\langle v, S u \rangle = \langle v, f \rangle\ , \qquad \text{για κάθε } v \in \mathcal{H},$$

και άρα το ζητούμενο ανάγεται στο να βρεθεί u ώστε $S u = f$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο S είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο. Παρατηρούμε καταρχήν ότι

$$\lambda \|x\|^2 \leq \operatorname{Re} A(x, x) = \operatorname{Re} \langle S x, x \rangle \leq \|S x\| \, \|x\|,$$

και άρα

$$\|S x\| \geq \lambda \|x\|\ , \qquad x \in \mathcal{H}\ . \tag{4. 8}$$

<u>Ο S είναι 1-1.</u> Αυτό είναι άμεση συνέπεια της (4. 8).

<u>Η εικόνα $\operatorname{Ran}(S)$ είναι κλειστός υπόχωρος.</u> Αυτό είναι επίσης συνέπεια της (4. 8), ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.10.

<u>Η εικόνα $\operatorname{Ran}(S)$ είναι πυκνός υπόχωρος.</u> Έστω $x \in \operatorname{Ran}(S)^{\perp}$. Τότε

$$c\|x\|^2 \leq \operatorname{Re} A(x, x) = \operatorname{Re} \langle S x, x \rangle = 0,$$

και άρα $x = 0$.

Συνεπώς ο S είναι αντιστρέψιμος. Το ότι ο αντίστροφος S^{-1} είναι φραγμένος έπεται από την (4. 8), και μάλιστα $\|S^{-1}\| \leq 1/\lambda$. □

Θεώρημα 4.0.3 *Έστω $A(\cdot, \cdot)$ μία φραγμένη ελλειπτική (3/2)-γραμμική μορφή στον $\mathcal{H}$ για την οποία ισχύει επιπλέον*

$$A(x, y) = \overline{A(y, x)}.$$

Έστω π ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathcal{H}$. Η συνάρτηση

$$J(u) = \frac{1}{2} A(u, u) - \operatorname{Re} \pi(u)\ , \quad u \in \mathcal{H}\ ,$$

έχει ένα μοναδικό ελάχιστο στον $\mathcal{H}$ το οποίο λαμβάνεται ακριβώς στη λύση u του θεωρήματος Lax-Milgram

Απόδειξη. Έστω u η λύση του Θεωρήματος 4.0.2 και $v \in \mathcal{H}$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}\Big(A(v,v) - A(u,u)\Big) - \operatorname{Re}\pi(v-u) \\ &= \frac{1}{2}\Big(A(v,v) - A(u,u)\Big) - \operatorname{Re}A(v-u,u)\,. \end{aligned}$$

Όμως

$$\operatorname{Re}A(v-u,u) = \frac{1}{2}(A(v-u,u) + A(u,v-u)) = \frac{1}{2}(A(v,u) + A(u,v)) - A(u,u),$$

άρα

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}(A(v,v) + A(u,u) - A(v,u) - A(u,v)) = \frac{1}{2}A(v-u,v-u) \geq \frac{\lambda}{2}\|v-u\|^2\,,$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Μέρος II

Εφαρμογές στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

5 Χώροι Sobolev και ασθενείς λύσεις

Έστω Ω ένα ανοικτό χωρίο (= ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το σύνολο U περιέχεται συμπαγώς στο Ω, και γράφουμε $U \subset\subset \Omega$ αν

$$\text{(i)} \quad \overline{U} \subset \Omega$$

$$\text{(ii)} \quad \overline{U} \text{ συμπαγές σύνολο}$$

Πρόταση Έστω $U \subset \Omega$. Ισχύει $U \subset\subset \Omega$ αν και μόνο αν U φραγμένο και $\mathrm{dist}(U, \partial\Omega) > 0$.

Απόδειξη. 'σκηση. □

Για $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \ : \ u \text{ μετρήσιμη και } u \in L^p(U), \text{ για κάθε } U \subset\subset \Omega\}$$

Ορίζουμε επίσης

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \ : \ u \in C^\infty(\Omega) \text{ και } \mathrm{supp}(u) \subset\subset \Omega\}$$

Παρατήρηση. Είναι άμεσο ότι

$$\text{(i)} \quad L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega), \text{ για κάθε } 1 \leq p \leq q \leq \infty$$

$$\text{(ii)} \quad L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)\,, \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

$$\text{(iii)} \quad L^\infty_{loc}(\Omega) \subset C(\Omega)$$

(Το (i) έπεται από την ανισότητα Hölder)

5.1 Ομαλοποιητές

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (όχι απαραίτητα φραγμένο). Για $\epsilon > 0$ ορίζουμε

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$$

και

$$\Omega^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \epsilon\}.$$

Θέτουμε

$$\rho(x) = \begin{cases} C\exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

όπου η σταθερά C επιλέγεται έτσι ώστε $\int \rho(x)dx = 1$.

Για $\epsilon > 0$ ορίζουμε στη συνέχεια

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\rho(x/\epsilon)\ , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Η οικογένεια συναρτήσεων (ρ_ϵ) ονομάζεται ομαλοποιητής και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \rho_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{(ii)} & \mathrm{supp}(\rho_\epsilon) = \overline{B}(0,\epsilon) \\ \text{(iii)} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x)dx = 1 \end{array}$$

Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Για κάθε $\epsilon > 0$ ορίζουμε

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int_{|y-x|<\epsilon} \rho_\epsilon(x-y)u(y)dy\ , \qquad x \in \Omega_\epsilon. \tag{5. 9}$$

Ισοδύναμα, επεκτείνοντας την u θέτοντάς την ίση με μηδέν στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, έχουμε

$$u_\epsilon = (\rho_\epsilon * u)\big|_{\Omega_\epsilon}.$$

όπου $f * g$ συμβολίζει τη συνέλιξη συναρτήσεων. Συνέπεια τις ανισότητας Young και του ότι $\|\rho_\epsilon\|_{L^1} = 1$ είναι ότι αν $u \in L^p(\Omega)$ τότε $u_\epsilon \in L^p(\Omega_\epsilon)$ και

$$\|u_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\ . \tag{5. 10}$$

Συμβολισμός. Στο (iii) της ακόλουθης πρότασης χρησιμοποιούμε την εξής ορολογία και συμβολισμό: κάθε $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ όπου $\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ονομάζεται πολυδείκτης. Ο αριθμός $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ ονομάζεται μήκος του πολυδείκτη. Τέλος, αν $|\alpha| = k$ και $u \in C^k$ τότε γράφουμε $D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$.

Πρόταση 5.1.1 *Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ισχύουν τα εξής:*

(i) $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$

(ii) *Αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\epsilon = (D^\alpha u)_\epsilon$ για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq k$*

(iii) *Αν $u \in C(\Omega)$ τότε $u_\epsilon \to u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω*

(iv) *Αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\epsilon \to D^\alpha u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq k$*

() *Αν $u \in L^p(\Omega)$ τότε $\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \to 0$.*
Ειδικότερα $u_\epsilon \to u$ στον $L^p(U)$ για κάθε $U \subset\subset \Omega$.

Απόδειξη. Βλ. μέρος Β του Παραρτήματος.

5.2 Χώροι Sobolev

Έστω $u \in C^1(\Omega)$. Θυμίζουμε ότι ολοκλήρωση κατά παράγοντες μας δίνει

$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega u_{x_i}(x)\phi(x)dx$$

για κάθε συνάρτηση $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ορισμός 5.2.1 *Λέμε ότι η συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, \dots, g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε*

$$\int_\Omega u(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx$$

για κάθε $1 \le i \le n$ και για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Λήμμα 5.2.2 *Αν η $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε $\int_\Omega u\phi dx = 0$ για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, τότε $u = 0$ στο Ω.*

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Έπεται από το Λήμμα 5.2.2 ότι αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη τότε οι συναρτήσεις $g_1, \dots, g_n$ είναι μοναδικές (μέχρι σύνολα μέτρου μηδέν). Τις ονομάζουμε τότε ασθενείς μερικές παραγώγους της u και τις συμβολίζουμε με u_{x_i}.

Παρατηρήσεις. (1) Είναι άμεσο ότι αν η u είναι παραγωγίσιμη με την κλασσική έννοια, τότε είναι και ασθενώς παραγωγίσιμη και οι ασθενείς μερικές παράγωγοι ταυτίζονται με τις κλασικές μερικές παραγώγους.
(2) Έπεται άμεσα από το Λήμμα 5.2.2 ότι η έννοια της ασθενούς παραγώγου είναι *τοπική*, δηλαδή αν οι u και v είναι ασθενώς παραγωγίσιμες στο Ω και $u = v$ σε ένα ανοικτό σύνολο $U \subset \Omega$ τότε $u_{x_i} = v_{x_i}$ στο U.
(3) Αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και κλασικά παραγωγίσιμη στο ανοικτό σύνολο $U \subset \Omega$, τότε η ασθενής και κλασική παράγωγος συμπίπτουν στο U.

Παραδείγματα: (1) Η συνάρτηση $u(t) = 1 + |t|$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και

$$u'(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

(2) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

δεν είναι ασθενώς παραγωγίσιμη.

Πρόταση 5.2.3 *Αν οι f, g είναι ασθενώς παραγωγίσιμες τότε και οι $f + g$, cf $(c \in \mathbb{R})$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμες και*

$$(f+g)_{x_i} = f_{x_i} + g_{x_i} \quad , \qquad (cf)_{x_i} = cf_{x_i} \, .$$

Ορισμός. Ορίζουμε

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ : \ u \text{ ασθενώς παραγωγίσιμη και } u_{x_i} \in L^p(\Omega)\}.$$

Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος και ονομάζεται χώρος Sobolev. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι η

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \Big)^{1/p} \tag{5. 11}$$

είναι νόρμα στον $W^{1,p}(\Omega)$. Είναι άμεσο ότι

$$u_k \to u \text{ στον } W^{1,p}(\Omega) \text{ αν και μόνο αν } \begin{cases} u_k \to u, & \text{στον } L^p(\Omega), \\ u_{k,x_i} \to u_{x_i}, & \text{στον } L^p(\Omega),\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

(όπου $u_{k,x_i} = (u_k)_{x_i}$).

Θεώρημα 5.2.4 *Ο $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα (5. 11) είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (u_k) μία ακολουθία Cauchy στον $W^{1,p}(\Omega)$. Τότε οι ακολουθίες (u_k) και (u_{k,x_i}) $(i = 1, \dots, n)$ είναι ακολουθίες Cauchy στον $L^p(\Omega)$. Άρα υπάρχουν συναρτήσεις $u, g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega)$ ώστε

$$u_k \to u\ , \quad u_{k,x_1} \to g_1\ , \dots,\ u_{k,x_n} \to g_n\ , \qquad \text{στον } L^p(\Omega)\,,\ \text{καθώς } k \to +\infty\ . \tag{5. 12}$$

Έστω τώρα $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $i = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\int_\Omega u_k \phi_{x_i} dx = - \int_\Omega u_{k,x_i} \phi\, dx\ .$$

Παίρνοντας το όριο $k \to +\infty$ προκύπτει

$$\int_\Omega u \phi_{x_i} dx = - \int_\Omega g_i \phi\, dx\ .$$

Αφού η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και $u_{x_i} = g_i$. 'ρα $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Τέλος, η (5. 12) μαζί με τις σχέσεις $u_{x_i} = g_i$ συνεπάγεται ότι $u_k \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. 'ρα λοιπόν ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert. □

Λήμμα 5.2.5 *Αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη τότε*

$$(u_\epsilon)_{x_k} = (u_{x_k})_\epsilon\ ,\ \text{στο } \Omega_\epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \Omega_\epsilon$. Θέτουμε $\rho_\epsilon^x(y) = \rho_\epsilon(x - y)$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
(u_\epsilon)_{x_k}(x) &= \int_\Omega \rho_{\epsilon,x_k}(x-y) u(y) dy \\
&= - \int_\Omega \rho^x_{\epsilon,x_k}(y) u(y) dy \\
&= \int_\Omega \rho^x_\epsilon(y) u_{x_k}(y) dy \\
&= \int_\Omega \rho_\epsilon(x-y) u_{x_k}(y) dy \\
&= (u_{x_k})_\epsilon(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Ορισμός Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Λήμμα 5.2.6 *Αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$ και $\mathrm{supp}(u) \subset\subset \Omega$ τότε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το λήμμα σε δύο περιπτώσεις: όταν το Ω είναι φραγμένο και όταν $\Omega = \mathbb{R}^n$. Συνδυάζοντας τις δύο αποδείξεις μπορεί κανείς να αποδείξει το λήμμα και στην περίπτωση όπου το Ω είναι μη φραγμένο γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Περίπτωση 1. Ω φραγμένο. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$ με $\mathrm{supp}(u) \subset\subset \Omega$. Υπάρχει τότε $\delta > 0$ ώστε $\mathrm{supp}(u) \subset \Omega_\delta$.

Θεωρούμε τώρα τις ομαλοποιημένες συναρτήσεις u_ϵ.

Ισχυρισμός. Αν $\epsilon < \delta/4$ και η u_ϵ επεκταθεί από το Ω_ϵ στο Ω θέτοντας $u_\epsilon = 0$ στο $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ και $u_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ τότε $\mathrm{supp}(u_\epsilon) \subset \Omega_{\delta/2}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $\epsilon < \delta/4$ και $x \in \Omega_\epsilon$. Τότε

$$u_\epsilon(x) = \int_{|y-x|<\epsilon} \rho_\epsilon(x-y)u(y)dy \, .$$

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι $x \notin \Omega_{\delta/2}$, οπότε έχουμε

$$\epsilon < d(x) \leq \frac{\delta}{2} \, .$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας και το ότι η συνάρτηση $d(y)$ είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz ίση με ένα, για κάθε $y \in B(x,\epsilon)$ έχουμε

$$d(y) \leq d(x) + |y-x| < \frac{\delta}{2} + \epsilon < \frac{3\delta}{4} \, .$$

Άρα $u_\epsilon(x) = 0$. Δείξαμε συνεπώς ότι $\mathrm{supp}(u_\epsilon) \subset \Omega_{\delta/2}$.

Ειδικότερα $u_\epsilon = 0$ στο σύνολο $\{x : \frac{\delta}{2} < d(x) < \epsilon\}$ και συνεπώς η u_ϵ, θέτοντάς την ίση με μηδέν στο $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ είναι C^∞. Άρα ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του λήμματος σε αυτήν την περίπτωση αρκεί να δείξουμε ότι $u_\epsilon \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$u_\epsilon \to u \qquad \text{στον } L^p(\Omega)$$

και

$$(u_\epsilon)_{x_k} \to u_{x_k} \qquad \text{στον } L^p(\Omega) \, .$$

Η πρώτη σύγκλιση είναι άμεση συνέπεια του Ισχυρισμού και του (v) της Πρότασης 5.1.1. Η δεύτερη σύγκλιση αποδεικνύεται παρόμοια αν λάβουμε υπόψιν και το Λήμμα 5.2.5.

Περίπτωση 2. $\Omega = \mathbb{R}^n$. Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε συνάρτηση $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{αν } |x| \geq 2. \end{cases}$$

και ορίζουμε

$$\psi_n(x) = \psi(x/n) , \qquad u_n(x) = \psi_n(x)u(x) .$$

Τότε κάθε u_n ανήκει στο $W^{1,p}(\Omega)$ και έχει συμπαγή φορέα. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$||u_n - u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = ||(1-\psi_n)u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

και

$$||\nabla u_n - \nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||(1-\psi_n)\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||u\nabla\psi_n||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Ο πρώτος όρος στο β′ μέλος τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Για τον δεύτερο έχουμε

$$||u\nabla\psi_n||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||\nabla\psi_n||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{n}||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||\nabla\psi||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 .$$

Συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.2.7 *Ισχύει* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 5.2.6 αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στο χώρο των συναρτήσεων στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα. Έστω λοιπόν u μία τέτοια συνάρτηση. Θεωρούμε τους ομαλοποιητές $\rho_\epsilon(x)$ και ορίζουμε

$$u_\epsilon = \rho_\epsilon * u.$$

Έχουμε τότε $u_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ισχύει επίσης $(\mathbb{R}^n)_\epsilon = \mathbb{R}^n$, και άρα

$$||u_\epsilon - u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 .$$

Παρόμοια, χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 5.2.5

$$||(u_\epsilon)_{x_k} - u_{x_k}||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = ||(u_{x_k})_\epsilon - u_{x_k}||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Άρα λοιπόν $u_\epsilon \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, και συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.2.8 (ανισότητα Poincaré) *Έστω Ω φραγμένο. Υπάρχει $c > 0$ ώστε*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^p(\Omega)} , \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) .$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα για $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Έστω ότι το Ω περιέχεται ανάμεσα στα υπερεπίπεδα $x_n = 0$ και $x_n = \alpha$. Επεκτείνουμε την u σε όλο το $\mathbb{R}^n$ θέτοντάς τη ίση με μηδέν εκτός του Ω. Γράφουμε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ως $x = (x', x_n)$ όπου $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Για $x = (x', x_n) \in \Omega$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_n} u_{x_n}(x', t)dt \right| \\
&\leq \int_0^\alpha |u_{x_n}(x', t)|dt \\
&\leq \alpha^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^\alpha |u_{x_n}(x', t)|^p dt \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Υψώνουμε στην p δύναμη και ολοκληρώνουμε ως προς x_n στο $[0, \alpha]$, παρατηρώντας ότι το β′ μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι ανεξάρτητο του x_n. Παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha |u(x', x_n)|^p dx_n &\leq \alpha^p \int_0^\alpha |u_{x_n}(x', t)|^p dt \\
&\leq \alpha^p \int_0^\alpha |\nabla u(x', x_n)|^p dx_n,
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται ολοκληρώνοντας ως προς $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. □

Παρατήρηση. Έπεται από την ανισότητα Poincaré ότι αν το Ω είναι φραγμένο τότε η $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ είναι νόρμα στον $W_0^{1,p}(\Omega)$ ισοδύναμη με την Sobolev νόρμα.

5.3 Ίχνη

Θεώρημα 5.3.1 *Έστω Ω ένα χωρίο με C^1 σύνορο και $1 \leq p < n$. Η απεικόνιση του περιοσμού στο $\partial\Omega$ μίας συνάρτησης $u \in C_c^1(\overline{\Omega})$ επεκτείνεται σε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή*

$$\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

Βήμα 1. Έστω μία συνάρτηση $u \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. Γράφουμε $x = (x', x_n)$ με $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \geq 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^n$ έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
|u(x', x_n)|^p &= |u(x', 0)|^p + \int_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} |u(x', t)|^p dt \\
&= |u(x', 0)|^p + p \int_0^{x_n} |u(x', t)|^{p-2} u(x', t) u_{x_n} dt
\end{aligned}$$

και πέρνοντας όριο $x_n \to +\infty$,

$$|u(x', 0)|^p \leq p \int_0^{+\infty} |u(x', t)|^{p-1} |\nabla u(x', t)| dt.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',0)|^p dx' &\le p\int_{\mathbb{R}^n_+}\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p-1}|\nabla u| dx \\ &\le p\Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le p\Big[\frac{p-1}{p}\Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p dx\Big) + \frac{1}{p}\Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p dx\Big)\Big] \\ &\le c\|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}\,.\end{aligned}$$

Βήμα 2. Θεωρούμε τώρα τυχόν $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Επεκτείνουμε την u σε μία συνάρτηση v στο $\mathbb{R}^n$ ώστε να είναι άρτια ως προς τη μεταβλητή x_n. Τότε $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ [αυτό δεν είναι προφανές και δεν θα το αποδείξουμε]. Από την Πρόταση 5.2.7 έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $(v_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ώστε

$$\|v_n - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Έστω τώρα u_n ο περιορισμός της v_n στο $\mathbb{R}^n_+$. Τότε $u_n \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ και

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \to 0.$$

Συνεπώς ο $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Άρα ο τελεστής ίχνους επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο από τον $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ σε έναν φραγμένο τελεστή από τον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ στον $L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)$. □

Παρατήρηση. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει πως παρότι οι συναρτήσεις που ανήκουν στον $W^{1,p}(\Omega)$ είναι ορισμένες σχεδόν παντού, λαμβάνουν, με μία συγκεκριμένη έννοια, τιμές στο μηδενικού μέτρου σύνολο $\partial\Omega$.

Πρόταση 5.3.2 *Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ισχύει*

$$u \in W^{1,p}_0(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Tr}\,(u) = 0\,.$$

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $\Rightarrow$ του (i) είναι άμεση από τους ορισμούς και το Θεώρημα 5.3.1.

Για το αντίστροφο, ας θεωρήσουμε μία $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$. Υπάρχουν τότε συναρτήσεις $u_m \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}^n})$ ώστε

$$u_m \to u \text{ στον } W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\,, \qquad \mathrm{Tr}\,(u_m) \to 0 \text{ στον } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|u_m(x',x_n)| \le |u_m(x',0)| + \int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x',t)| dt$$

και άρα

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',x_n)|^p dx' \\
\leq\ & c\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',0)|^p dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x',t)|dt\Big)^p dx'\Big) \\
\leq\ & c\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',0)|^p dx' + x_n^{p-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x',t)|^p dt\, dx'\Big)
\end{aligned}
$$

Παίρνοντας όριο $m \to +\infty$ καταλήγουμε ότι

$$
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',x_n)|^p dx' \leq c x_n^{p-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{x_n} |u_{x_n}(x',t)|^p dt\, dx' \,. \tag{5. 13}
$$

Θεωρούμε τώρα μία συνάρτηση $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $0 \leq \psi \leq 1$ και

$$
\psi(s) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq s \leq 1 \\ 1, & \text{αν } s \geq 2. \end{cases}
$$

και για $\epsilon > 0$ θέτουμε $\psi_\epsilon(s) = \zeta(s/\epsilon)$.

Ορίζουμε τέλος

$$
u_\epsilon(x) = u(x)\psi_\epsilon(x_n)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \,.
$$

Λόγω του Λήμματος 5.2.6, αρκεί να αποδείξουμε ότι $u_\epsilon \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ καθώς $\epsilon \to 0$.

Θα δείξουμε ότι $\|\nabla u_\epsilon - \nabla u\|_p \to 0$. Η απόδειξη του ότι $\|u_\epsilon - u\|_p \to 0$ είναι απλούστερη. Έχουμε

$$
\|\nabla u_\epsilon - \nabla u\|_p \leq \|(\nabla u)(1-\psi_\epsilon)\|_p + \|u\psi'_\epsilon\|_p \,.
$$

Για τον πρώτο όρο έχουμε

$$
\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p (1-\psi_\epsilon(x))^p dx \leq \int_{\{x_n<2\epsilon\}} |\nabla u|^p dx \to 0\,.
$$

Για τον δεύτερο όρο, χρησιμοποιώντας και την εκτίμηση (5. 13) έχουμε έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p |\psi'|^s dx &\leq \frac{c}{\epsilon^p}\int_0^{2\epsilon}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',x_n)|^p dx'\, dx_n \\
&\leq \frac{c}{\epsilon^p}\int_0^{2\epsilon}\Big(c x_n^{p-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{x_n} |\nabla u(x',t)|^p dt\, dx'\Big)dx_n \\
&\leq \frac{c}{\epsilon^p}\int_0^{2\epsilon}\Big(c x_n^{p-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{2\epsilon} |\nabla u(x',t)|^p dt\, dx'\Big)dx_n \\
&= \frac{c}{\epsilon^p}\Big(\int_0^{2\epsilon} x_n^{p-1} dx_n\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{2\epsilon} |\nabla u(x',t)|^p dt\, dx'\Big) \\
&= c\int_{\{x_n<2\epsilon\}} |\nabla u|^p dx \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

καθώς $\epsilon \to 0$. $\square$

Άσκηση. Αποδείξτε ότι αν $1 < p < n$ τότε ο τελεστής ίχνους ορίζεται και είναι φραγμένος από το $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ στο $L^{\frac{p(n-1)}{n-p}}(\partial\mathbb{R}^n_+)$. [Υπόδειξη. Ακολουθείστε την απόδειξη του βασικού θεωρήματος για το ίχνος, αντικαθιστώντας το p από κατάλληλο $r > 1$.]

5.4 Θεώρημα συμπάγειας του Rellich

Λήμμα 5.4.1 *Ισχύει*

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{5. 14}$$

για κάθε $\epsilon > 0$ και $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
|u_\epsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y)|u(x-y) - u(x)|dy \\
&= \int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x-ty)dt \right| dy \\
&\leq \int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \int_0^1 |y|\, |\nabla u(x-ty)| dt\, dy \\
&\leq \epsilon \int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| dt\, dy\,.
\end{aligned}$$

'ρα

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon(x) - u(x)|^p dx \\
&\leq \epsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| dt\, dy \right)^p dx \\
\text{(Hölder)} \quad &\leq \epsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) dy \right)^{p-1} \left(\int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \left\{ \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| dt \right\}^p dy \right) \right] dx \\
\text{(Hölder)} \quad &\leq \epsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)|^p dt\, dy \right) dx \\
&= \epsilon^p \int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x-ty)|^p dx\, dt\, dy \\
&= \epsilon^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_{|y|<\epsilon} \rho_\epsilon(y) \int_0^1 dt\, dy \\
&= \epsilon^2 \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.
\end{aligned}$$

Η γενική περίπτωση $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ έπεται από την παραπάνω προσεγγίζοντας την u με μία ακολουθία $(u_k) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Για να γίνει χρησιμοποιούμε και το γεγονός ότι η απεικόνιση $u \mapsto u_\epsilon$ είναι συνεχής από τον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ στον $L^p(\Omega)$, το οποίο είναι άμεση συνέπεια της (5. 10). Συνεπώς η (5. 14) ισχύει για κάθε $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

Θυμίζουμε εδώ ότι αν X είναι ένας συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε ο γραμμικός χώρος

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ συνεχής}\}$$

είναι χώρος Banach αν εφοδιαστεί με τη νόρμα

$$||f||_{C(X)} = \max\{|f(x)| \ : \ x \in \ X\} \ .$$

Ορισμός. Ένα υποσύνολο $S \subset C(X)$ λέγεται ισοσυνεχές αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } \ |x - y| < \delta \ \text{ τότε } \ |f(x) - f(y)| < \epsilon \ , \ \text{ για κάθε } f \in S.$$

Θεώρημα 5.4.2 (Arzelà-Ascoli) *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Αν το σύνολο $S \subset C(X)$ είναι ισοσυνεχές και φραγμένο, τότε η κλειστή του θήκη $\overline{S}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(X)$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η τυχαία ακολουθία $(f_n) \subset S$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω λοιπόν $(f_n) \subset S$.

Ισχυρισμός. Ο X έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο A.
Απόδειξη του Ισχυριμού. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$\{B(x, \frac{1}{n}) \ : \ x \in X\}$$

είναι μια ανοικτή κάλυψη του X. ᾿ρα περιέχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη. Έστω A_n το σύνολο των κεντρών της υποκάλυψης. Τότε το σύνολο $A = \cup_n A_n$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Πράγματι, έστω $x \in X$. Γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$\{B(y, \frac{1}{n}) \ : \ y \in A_n\}$$

είναι κάλυψη του X, άρα υπάρχει $y_n \in A_n$ ώστε $x \in B(y_n, 1/n)$. Η ακολουθία (y_n) είναι τότε ακολουθία στοιχείων του A και συγκλίνει στο x.

Γράφουμε $A = \{y_1, y_2, \ldots\}$ και συνεχίζουμε με την απόδειξη του θεωρήματος. Η ακολουθία $(f_n(y_1))$ είναι φραγμένη, άρα από το Θεώρημα Bolzanno - Weierstrass έχει μία συγκλίνουσα ακολουθία $(f_{1,n}(y_1))$.

Παρόμοια, η ακολουθία $(f_{1,n}(y_2))$ είναι φραγμένη άρα έχει μία συγκλίνουσα ακολουθία $(f_{2,n}(y_2))$. Συνεχίζοντας έτσι ορίζεται για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία $(f_{k,n})_n$. Η κατασκευή είναι τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$

(i) η ακολουθία $(f_{k,n})_n$ είναι υπακολουθία της $(f_{k-1,n})_n$

(ii) η ακολουθία $(f_{k,n}(y_k))_n$ είναι συγκλίνουσα

Ορίζουμε τώρα $g_n = f_{n,n}$. Η (g_n) είναι τότε υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας (f_n) και επιπλέον η $(g_n(y_k))$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ – ισοδύναμα, η $(g_n(y))_n$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $y \in A$. Θα δείξουμε ότι η (g_n) είναι Cauchy στον $C(X)$.

Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει τότε $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|x-y| < \frac{1}{k} \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \text{για κάθε } f \in S.$$

Αφού το A_k είναι πεπερασμένο υποσύνολο του A, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n, m > n_0 \implies |g_n(y) - g_m(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \text{για κάθε } y \in A_k .$$

Έστω τώρα $x \in X$. Υπάρχει τότε $y \in A_k$ με $|x - y| < 1/k$. Για $n, m > n_0$ έχουμε τότε

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(y)| + |g_n(y) - g_m(y)| + |g_m(y) - g_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

'ρα για $n, m > n_0$ έχουμε $\|g_m - g_n\|_{C(X)} < \epsilon$. Αποδείξαμε λοιπό ότι η (g_n) είναι Cauchy στον $C(X)$. □

Θεώρημα 5.4.3 (Rellich) *Αν το χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο, τότε η εμβάπτιση $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία (u_n) στον $W_0^{1,p}(\Omega)$ έχει υπακολουθία συγκλίνουσα στον $L^p(\Omega)$. Έστω λοιπόν (u_n) φραγμένη στον $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k})_k$ της $(u_n)_n$ ώστε

$$\|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{L^p(\Omega)} \leq \delta \quad , \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Αποδειξη του Ισχυρισμού. Επεκτείνουμε κάθε u_n θέτοντάς τη ίση με το μηδέν εκτός του Ω, οπότε κάθε u_n ανήκει στο $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Έστω $\delta > 0$. Έστω $u_{n,\epsilon}$ η ομαλοποιημένη συνάρτηση που αντιστοιχεί στην u_n (βλ. (5. 9)). Κάθε u_n έχει τότε φορέα που περιέχεται στο $\overline{\Omega^\epsilon}$. Από το Λήμμα 5.4.1 έχουμε

$$\|u_{n,\epsilon} - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \epsilon \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C\epsilon \quad , \quad n \geq 1.$$

Υπάρχει άρα $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$ ώστε

$$\|u_{n,\epsilon} - u_n\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\delta}{3}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{5. 15}$$

Αφού το Ω είναι φραγμένο η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη στον $L^1(\Omega)$. Από την ανισότητα του Young έχουμε τότε

$$\|u_{n,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c\epsilon^{-n}.$$

και παρόμοια, από την (0. 28),

$$\|(u_{n,\epsilon})_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\rho_\epsilon)_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c\epsilon^{-n-1}.$$

Αρα η ακολουθία $(u_{n,\epsilon})$ είναι ισοσυνεχής στο $\mathbb{R}^n$ για κάθε $\epsilon > 0$. Επίσης, όλες οι συναρτήσεις $u_{n,\epsilon}$ έχουν φορέα που περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, \Omega) \le \epsilon\}$.

Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το θεώρημα Arzela-Ascoli. Παίρνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k,\epsilon})_k$ της $(u_{n,\epsilon})_n$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, \Omega) \le \epsilon\}$, άρα και στο Ω. 'ρα συγκλίνει και στον $L^p(\Omega)$, άρα είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$. Συνεπώς υπάρχει $k_0 = k_0(\delta)$ ώστε

$$k, l \ge k_0 \Longrightarrow \|u_{n_k,\epsilon} - u_{n_l,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{3}\,.$$

Συνεπώς υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_{k_i},\epsilon})_i$ της $(u_{n_k,\epsilon})_k$ ώστε

$$\|u_{n_{k_i},\epsilon} - u_{n_{k_j},\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\delta}{3} \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots\,.$$

Ισχύει τότε για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_j}}\|_{L^p(\Omega)} &\le \|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_i},\epsilon}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{n_{k_i},\epsilon} - u_{n_{k_j},\epsilon}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{n_{k_j},\epsilon} - u_{n_{k_j}}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θα εφαρμόσουμε τον Ισχυρισμό επαγωγικά για $\delta = 1/n$. Για $n = 1$, υπάρχει ακολουθία $(u_{1,k})_k$, υπακολουθία της (u_n), ώστε

$$\|u_{1,k} - u_{1,l}\|_{L^p(\Omega)} \le 1 \quad , \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Όμοια, υπάρχει ακολουθία $(u_{2,k})_k$, υπακολουθία της $(u_{1,k})_k$, ώστε

$$\|u_{2,k} - u_{2,l}\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{2} \quad , \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Στο i-βήμα έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(u_{i,k})_k$, υπακολουθία της $(u_{i-1,k})_k$, ώστε

$$\|u_{i,k} - u_{i,l}\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{i} \quad , \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Έστω τώρα $i, j \in \mathbb{N}$ με $i > j$. Έστω ακόμα $k, l \in \mathbb{N}$. Υπάρχει τότε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $u_{i,k} = u_{j,m}$. 'ρα

$$\|u_{i,k} - u_{j,l}\|_{L^p(\Omega)} = \|u_{j,m} - u_{j,l}\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{j}.$$

Ορίζουμε τώρα $v_k = u_{k,k}$. Η ακολουθία (v_k) είναι τότε υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας (u_n). Έστω $l > k$. Τότε

$$\|v_l - v_k\|_{L^p(\Omega)} = \|u_{l,l} - u_{k,k}\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{k}.$$

'ρα η ακολουθία (v_k) είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$, άρα συγκλίνει. □

5.5 Προβλήματα συνοριακών τιμών - ασθενείς λύσεις

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε το πρόβλημα

$$(*)\qquad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

όπου Ω φραγμένο χωρίο (= ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) στον $\mathbb{R}^n$, a_{ij}, f και g δεδομένες συναρτήσεις και u η άγνωστη συνάρτηση.

Παρατήρηση. Έστω ότι $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ και $g \in C(\partial\Omega)$. Έστω ακόμη $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ μία (κλασική) λύση του προβλήματος (*). Πολλαπλασιάζουμε τη διαφορική εξίσωση με μία συνάρτηση $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, ολοκληρώνουμε στο Ω και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες. Καταλήγουμε ότι

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j}\,dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx\,.$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη βάση του ορισμού της ασθενούς λύσης.

Κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

Υποθέσεις. Ο πίνακας $\{a_{ij}(x)\}$, $x \in \Omega$, είναι συμμετρικός, πραγματικός και $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Επίσης υπάρχουν $\lambda, \Lambda > 0$ ώστε

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2\,, \qquad x \in \Omega\,, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι $f \in L^2(\Omega)$ και $g \in H^1(\Omega)$, με πραγματικές τιμές.

Ορισμός Μία συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ λέγεται ασθενής λύση του προβλήματος $(*)$ αν $u - g \in H_0^1(\Omega)$ και

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\phi_{x_j}\,dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx, \tag{5. 16}$$

για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Παρατήρηση. Αν η u είναι ασθενής λύση τότε η (5. 16) ισχύει για κάθε $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Θεώρημα 5.5.1 *Το πρόβλημα $(*)$ έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H^1(\Omega)$ η οποία, επιπλέον, εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τις f και g.*

Απόδειξη. Για $v, w \in H^1(\Omega)$ ορίζουμε

$$A(v,w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)v_{x_i}\overline{w}_{x_j}dx. \tag{5. 17}$$

Έχουμε τότε ότι

$$\lambda \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \le A(v,v) \le \Lambda \int_\Omega |\nabla v|^2 dx\,, \qquad v \in H^1(\Omega).$$

Η $A(v,w)$ ορισμένη στον $H^1(\Omega)$ έχει όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου εκτός από μία, υπάρχουν μη-μηδενικές συναρτήσεις (οι σταθερές) για τις οποίες $A(v,v) = 0$. Αν όμως θεωρηθεί η $A(v,w)$ στον $H_0^1(\Omega)$ τότε είναι εσωτερικό γινόμενο (λόγω της ανισότητας Poincaré : αν $v \in H_0^1(\Omega)$ και $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ τότε $v = 0$). Επιπλέον η επαγόμενη από αυτό το εσωτερικό γινόμενο νόρμα στον $H_0^1(\Omega)$ (δηλαδή η $\sqrt{A(v,v)}$) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη νόρμα του $H_0^1(\Omega)$.

Ζητούμε ύπαρξη και μοναδικότητα συνάρτησης $u \in H^1(\Omega)$ ώστε

$$\begin{cases} A(u,\phi) = \langle f,\phi\rangle_{L^2(\Omega)} , & \text{για κάθε } \phi \in H_0^1(\Omega), \\ u - g \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $v = u - g$, ζητούμε ύπαρξη και μοναδικότητα συνάρτησης $v \in H_0^1(\Omega)$ ώστε

$$A(v,\phi) = \langle f,\phi\rangle_{L^2(\Omega)} - A(g,\phi) \ , \quad \text{για κάθε } \phi \in H_0^1(\Omega),$$

το οποίο με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με

$$A(\phi,v) = \langle \phi,f\rangle_{L^2(\Omega)} - A(\phi,g) \ , \quad \text{για κάθε } \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{5. 18}$$

Το συναρτησιακό

$$\pi(\phi) = \langle \phi,f\rangle_{L^2(\Omega)} - A(\phi,g) \ , \quad \phi \in H_0^1(\Omega),$$

ικανοποιεί

$$\begin{aligned} |\pi(\phi)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \Lambda\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \Lambda\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)})\|\phi\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

άρα είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον $H_0^1(\Omega)$ με $\|\pi\| \leq c_1(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)})$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz για τον χώρο Hilbert $H_0^1(\Omega)$ με το εσωτερικό γινόμενο $A(\cdot,\cdot)$ και για το συναρτησιακό π και πέρνουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα συναρτησης $v \in H_0^1(\Omega)$ για την οποία ισχύει η (5. 18). Επιπλέον ισχύει

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2\|\pi\| \leq c_3(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}).$$

και άρα

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)} \leq c_4(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}),$$

έχουμε δηλαδή τη συνεχή εξάρτηση της v από τις f και g. □

Παρατήρηση. Αν ο πίνακας $\{a_{ij}(x)\}$ δεν είναι συμμετρικός τότε η απεικόνιση $A(v,w)$ δεν είναι εσωτερικό γινόμενο στον $H_0^1(\Omega)$. Το αποτέλεσμα εξακολουθεί να ισχύει, για την απόδειξη όμως θα πρέπει κανείς να χρησιμοποιήσει το Θεώρημα Lax-Milgram αντί του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz.

6 Φασματική ανάλυση για γραμμικούς ελλειπτικούς τελεστές.

Ο σκοπός μας σε αυτήν την ενότητα είναι να διατυπώσουμε το παραπάνω πρόβλημα (∗) ως ένα πρόβλημα Θεωρίας Τελεστών και στη συνέχεια να αποδείξουμε ένα φασματικό θεώρημα για τον αντίστοιχο τελεστή.

6.1 Φασματικό θεώρημα για ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές

Θεωρούμε ένα φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Παραμένουμε στο πλαίσιο της προηγούμενης ενότητας, αλλά υποθέτουμε πλέον ότι $g = 0$. Γνωρίζουμε λοιπόν από το Θεώρημα 5.5.1 την ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6. 19}$$

Αυτό όπως είδαμε σημαίνει ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ ώστε

$$A(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}\,, \quad \text{για κάθε } \phi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Θα θεωρήσουμε τα παραπάνω σε ένα ελαφρώς διαφορετικό πλαίσιο. Θέλουμε να ορίσουμε έναν τελεστή $L : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ώστε η (6. 19) να γράφεται ισοδύναμα $Lu = f$.

Ορισμός. Ο τελεστής L ορίζεται στον $L^2(\Omega)$ ως εξής: το πεδίο ορισμού του $D(L)$ αποτελείται από το σύνολο των λύσεων του (6. 19) καθώς η f διατρέχει τον $L^2(\Omega)$:

$$D(L) = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ \exists f \in L^2(\Omega) \ : \ A(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}\,, \ \text{ για κάθε } \phi \in H_0^1(\Omega)\}$$

Για $u \in D(L)$ η παραπάνω f είναι μοναδική και ορίζουμε τότε $Lu = f$.

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού ότι

$$A(u, \phi) = \langle Lu, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \tag{6. 20}$$

για κάθε $u \in D(L)$ και $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Γράφουμε

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

και λέμε ότι ο L ικανοποιεί (ομογενείς) συνοριακές συνθήκες Dirichlet στο $\partial\Omega$.

Παρατήρηση. Η συνοριακή συνθήκη $u|_{\partial\Omega} = 0$ περιέχεται στον ορισμό του τελεστή μέσω του πεδίου ορισμού του.

Από το Θεώρημα 5.5.1 έπεται ότι ο L είναι 1-1 και επί από το $D(L)$ στον $L^2(\Omega)$. ῎ρα ορίζεται ο αντίστροφος τελεστής $L^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ με πεδίο ορισμού τον $L^2(\Omega)$ και πεδίο τιμών το $D(L)$.

Θεώρημα 6.1.1 *Η απεικόνιση $f \mapsto u$, $L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ είναι γραμμική και συνεχής, δηλαδή ο L^{-1} είναι φραγμένος αν θεωρηθεί ως τελεστής από τον $L^2(\Omega)$ στον $H_0^1(\Omega)$. Ειδικότερα, υπάρχει $c > 0$ ώστε*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6. 21}$$

Απόδειξη. Η γραμμικότητα είναι άμεση. Έστω τώρα $f \in L^2(\Omega)$ και $u = L^{-1}f$. Ισχύει

$$A(u,\phi) = \langle f,\phi\rangle\,, \quad \text{για κάθε } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Επιλέγοντας $\phi = u$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq A(u,u) \\ &= \langle f,u\rangle \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\|f\|_2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

και άρα $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\lambda^{-1}\|f\|_{L^2(\Omega)}$. □

Θεώρημα 6.1.2 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Ο τελεστής $L^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη. Έστω $f,g \in L^2(\Omega)$. Τότε

$$\begin{aligned} \langle f, L^{-1}g\rangle &= \langle LL^{-1}f, L^{-1}g\rangle \\ &= A(L^{-1}f, L^{-1}g) \\ &= \overline{A(L^{-1}g, L^{-1}f)} \\ &= \overline{\langle g, L^{-1}f\rangle} \\ &= \langle L^{-1}f, g\rangle. \end{aligned}$$

'ρα ο L^{-1} είναι αυτοσυζυγής.

Για να αποδείξουμε τη συμπάγεια του L^{-1}, θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία $(f_k) \subset L^2(\Omega)$. Έστω $u_k = L^{-1}f_k$. Έπεται από την (6. 21) ότι η ακολουθία (u_k) είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$. Από το Θεώρημα 5.4.3 έχουμε τότε ότι η (u_k) έχει υπακολουθία (u_{n_k}) συγκλίνουσα στον $L^2(\Omega)$. 'ρα L^{-1} συμπαγής. □

Θεώρημα 6.1.3 (φασματικό θεώρημα) *Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{\phi_n\}$ του $L^2(\Omega)$ η οποία αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του L.*

Απόδειξη. Ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.4: εφαρμόζουμε το Φασματικό Θεώρημα 3.3.7 στον L^{-1} και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι L και L^{-1} έχουν τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις με αντίστροφες ιδιοτιμές: $L\phi_n = \lambda_n\phi_n$ αν και μόνο αν $L^{-1}\phi_n = \lambda_n^{-1}\phi_n$. □

Τέλος, έχουμε τις ακόλουθες επιπλέον ιδιότητες του L:

Πρόταση 6.1.4 *Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Οι ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$ του L είναι θετικές, έχουν πεπερασμένη πολλαπλότητα και $\lim \lambda_n = +\infty$.*

(ii) *Το πεδίο ορισμού $D(L)$ είναι γνήσιος πυκνός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$.*

Απόδειξη. (i) Η θετικότητα των ιδιοτιμών έπεται από την ελλειπτικότητα:

$$0 < A(\phi_n, \phi_n) = \langle L\phi_n, \phi_n \rangle = \lambda_n \; .$$

Το ότι η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι πεπερασμένη έπεται από την Πρόταση 3.1.6.

(ii) Ο $D(L)$ περιέχεται γνήσια στον $L^2(\Omega)$ αφού $D(L) \subset H_0^1(\Omega)$, και είναι πυκνός στον $L^2(\Omega)$ αφού περιέχει μια ορθοκανονική βάση. □

Πρόταση Ίσχύει

$$D(L) = \{u \in L^2(\Omega) \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle u, \phi_n \rangle|^2 < +\infty\}$$

και για κάθε $u \in D(L)$,

$$Lu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, \phi_n \rangle \phi_n \; . \qquad (6.\ 22)$$

Απόδειξη. Έστω $u \in D(L)$ και $f = Lu$. Έχουμε τότε $f = \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ και άρα

$$u = L^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \; .$$

Συνεπώς $\langle u, \phi_n \rangle = \lambda_n^{-1} \langle f, \phi_n \rangle$ και άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle u, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle f, \phi_n \rangle|^2 < +\infty \; .$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle u, \phi_n \rangle|^2 < +\infty$. Ορίζεται τότε συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$ ως

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, \phi_n \rangle \phi_n \; .$$

Έπεται τότε ότι $L^{-1} f = u$, άρα $u \in \mathrm{Ran}(L^{-1}) = D(L)$.

Η (6. 22) έπεται άμεσα από τα παραπάνω. □

Εφαρμογή: το παραβολικό πρόβλημα

Σκοπός είναι να εφαρμόσουμε το φασματικό θεώρημα που αποδείχθηκε παραπάνω στη μελέτη του παραβολικού προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}, & t > 0\ ,\ x \in \Omega \\ u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega\,, \\ u(0,x) = v(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{6. 23}$$

όπου $v \in L^2(\Omega)$.

Θα ερμηνεύσουμε το πρόβλημα (6. 23) ως ένα πρόβλημα Cauchy στον $L^2(\Omega)$. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την άγνωστη συνάρτηση $u(t,x)$, $t > 0$, $x \in \Omega$, ως μία συνάρτηση $u(t)$, $t > 0$, με τιμές στον $L^2(\Omega)$. Γράφουμε τότε το (6. 23) ως

$$\begin{cases} u_t = -Lu, & t > 0\,, \\ u(0) = v\,. \end{cases} \tag{6. 24}$$

Ορισμός. Μία συνάρτηση $u : \mathbb{R}_+ \to L^2(\Omega)$ είναι λύση του προβλήματος (6. 24) αν

(i) Ισχύει $u(t) \in D(L)$ για κάθε $t > 0$

(ii) Η u είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t > 0$

(iii) $u'(t) = -Lu(t)$, για κάθε $t > 0$

(iv) $u(t) \to v$ καθώς $t \to 0+$.

Θεώρημα 6.1.5 *Για κάθε $v \in L^2(\Omega)$ το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών (6. 24) έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από τη σχέση*

$$u(t) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \langle v, \phi_n \rangle \phi_n\ , \quad t > 0.$$

Απόδειξη. Το ότι $u(t) \in \mathrm{Dom}(L)$ για κάθε $t > 0$ έπεται από την Πρόταση 6.1 σε συνδυασμό και με το ότι η συνάρτηση $x^2 e^{-2x}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^+$. Για να αποδείξουμε τα (ii), (iii) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t > 0$,

$$\frac{u(t+\delta) - u(t)}{\delta} \longrightarrow -Lu(t)\ , \quad \text{καθώς } \delta \to 0\,,$$

όπου το όριο είναι όριο στον $L^2(\Omega)$. Έστω λοιπόν $t > 0$ και έστω επίσης δ με $|\delta| < t/2$. Τότε

$$\left\| \frac{u(t+\delta) - u(t)}{\delta} + Lu(t) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} \left| \frac{1}{\delta}(e^{-\lambda_n \delta} - 1) + \lambda_n \right|^2 |\langle v, \phi_n \rangle|^2.$$

Για να εκτιμήσουμε τη σειρά αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \le 2|x|\ , \quad x \in (-1/2, 1/2)\,. \tag{6. 25}$$

Από την (6. 25) έπεται ότι

$$\left|\frac{e^{-\lambda_n\delta}-1}{\delta}+\lambda_n\right| \le \lambda_n^2|\delta| \text{ όταν } \lambda_n < \tfrac{1}{2|\delta|}.$$

Γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} = \sum' + \sum''$, όπου $\sum'$ περιέχει το n για τα οποία $\lambda_n < 1/(2|\delta|)$ και $\sum''$ περιέχει αυτά για τα οποία $\lambda_n \ge 1/(2|\delta|)$.

Έστω $\epsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η συνάρτηση x^4e^{-2x} είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^+$ έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\sum{}' e^{-2\lambda_n t}\left|\frac{e^{-\lambda_n\delta}-1}{\delta}+\lambda_n\right|^2|\langle v,\phi_n\rangle|^2 &\le \delta^2\sum{}' \lambda_n^4 e^{-2\lambda_n t}|\langle v,\phi_n\rangle|^2\\
&\le \frac{c\delta^2}{t^4}\|v\|_2^2\\
&< \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

αρκεί το $|\delta|$ να είναι αρκετά μικρό.

Επίσης

$$\begin{aligned}
&\sum{}'' e^{-2\lambda_n t}\left|\frac{e^{-\lambda_n\delta}-1}{\delta}+\lambda_n\right|^2|\langle v,\phi_n\rangle|^2\\
&\le 2\sum{}'' e^{-2\lambda_n t}\Big(\frac{e^{-2\lambda_n\delta}}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2}+\lambda_n^2\Big)|\langle v,\phi_n\rangle|^2\\
&\le 2\sum{}'' e^{-2\lambda_n t}\Big(4\lambda_n^2 e^{2\lambda_n|\delta|}+5\lambda_n^2\Big)|\langle v,\phi_n\rangle|^2\\
&\le 8\sum{}'' \lambda_n^2 e^{-\lambda_n t}|\langle v,\phi_n\rangle|^2 + 10\sum{}'' \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}|\langle v,\phi_n\rangle|^2
\end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίες σειρές συγκλίνουν, άρα το άθροισμα $\sum''$ μπορεί να γίνει μικρότερο από $\epsilon/2$ αν το $|\delta|$ είναι αρκετά μικρό (το $\sum''$ είναι η ` ουρά ´ μιας συγκλίνουσας σειράς). Άρα αποδείχθηκαν τα (ii) και (iii). Η απόδειξη του (iv) είναι ευκολότερη και παραλείπεται.

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης. Για κάθε $t > 0$ ας ορίσουμε τον τελεστή

$$T_t w = \sum_n e^{-\lambda_n t}\langle w,\phi_n\rangle\phi_n\,. \tag{6. 26}$$

Άρα λοιπόν η λύση του προβλήματος (6. 24) που έχουμε ορίσει είναι η $u(t) = T_t v$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία δεύτερη λύση $\hat{u}(t)$. Θεωρούμε $t > 0$ σταθερό και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$w(s) = T_{t-s}\hat{u}(s)\,,\quad 0 < s < t.$$

Τότε

$$w'(s) = -LT_{t-s}\hat{u}(s) + T_{t-s}L\hat{u}(s) = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι οι T_t και L μετατίθενται. Άρα η $w(s)$ είναι σταθερή στο $(0, t)$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι

$$\lim_{s\to 0+} w(s) = T_t v \quad , \qquad \lim_{s\to t-} w(s) = \hat{u}(t).$$

Άρα $\hat{u}(t) = T_t v = u(t)$. □

Παρατήρηση. Η οικογένεια τελεστών T_t, $t > 0$, που ορίστηκε από τη (6. 26) τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad T_{t+s} = T_t T_s\,, \qquad \text{για κάθε } t, s > 0 \\ &\text{(ii)} \quad T_t v \to v\,, \ \text{καθώς } t \to 0+\,, \ \text{για κάθε } v \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Μια οικογένεια φραγμενων τελεστών που έχει τις δύο αυτές ιδιότητες ονομάζεται *μονοπαραμετρική ημιομάδα τελεστών.*

Άσκηση. Να δειχθεί ότι για την ημιομάδα τελεστών (6. 26) δεν ισχύει η κατά νόρμα σύγκλιση $T_t \to I$ καθώς $t \to 0+$.

Παράρτημα.

Α. Ο χώρος $L^2(\Omega)$

1. Στοιχεία γενικής Θεωρίας Μέτρου

Ορισμός 0.1.1 *Έστω X ένα μη-κενό σύνολο. Ονομάζουμε $\sigma-$άλγεβρα στο X ένα σύνολο $\mathcal{A}$ το οποίο αποτελείται από υποσύνολα του X και για το οποίο ισχύουν τα εξής:*

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{A}$.

(iii) *Αν* $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, *τότε* $\bigcup_n E_n \in \mathcal{A}$.

Ονομάζουμε χώρο μέτρου μία τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ όπου $\mathcal{A}$ είναι μία $\sigma-$άλγεβρα στον X και $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ είναι μία απεικόνιση (το *μέτρο*) τέτοια ώστε για κάθε αριθμήσιμη συλλογή $\{E_n\}$ ξένων ανά δύο στοιχείων του $\mathcal{A}$ να ισχύει

$$\mu(\bigcup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n).$$

Τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ ονομάζονται *μετρήσιμα* σύνολα. Μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται μετρήσιμη αν το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο για κάθε ανοικτό $U \subset \mathbb{C}$. Τέλος, λέμε ότι μία ιδιότητα ισχύει *σχεδόν παντού σ.π.* αν το σύνολο των $x \in X$ για τα οποία η ιδιότητα δεν ισχύει είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν.

Πρόταση 0.1.2 *Αν οι f και g είναι μετρήσιμες, τότε και οι συναρτήσεις $f + g, fg$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.*

Το ολοκλήρωμα.

Σε κάθε χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, d\mu)$ μπορούμε να ορίσουμε μία κατάλληλη έννοια ολοκληρώματος, το οποίο συμβολίζουμε με $\int_X f\ d\mu$. Ο ορισμός δίνεται σε διαδοχικά βήματα:

1. Το ολοκλήρωμα μιας απλής συνάρτησης (δηλαδή μίας συνάρτησης η οποία είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων) είναι

$$\int_X (\sum_{i=1}^{r} a_i \chi_{E_i}) d\mu = \sum_{i=1}^{r} a_i \mu(E_i).$$

2. Αν η f είναι μη-αρνητική, τότε ορίζουμε

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int p d\mu \ : \ p \text{ απλή }, \ p(x) \leq f(x),\ x \in X\}.$$

(Αυτό μπορεί να είναι ίσο με $+\infty$.)

Μία μετρήσιμη μιγαδική συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\int_X |f| d\mu < \infty$ λέγεται *ολοκληρώσιμη*.

3. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη με πραγματικές τιμές τότε ορίζουμε

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu,$$

όπου $f_+ = \max\{f, 0\}$ και $f_- = \max\{-f, 0\}$ είναι αντίστοιχα το θετικό και αρνητικό μέρος της f.

4. Αν η είναι ολοκληρώσιμη με μιγαδικές τιμές τότε ορίζουμε f

$$\int_X f d\mu = \int_X (\mathrm{Re}\, f) d\mu + i \int_X (\mathrm{Im}\, f) d\mu.$$

Πρόταση 0.1.3 *Έστω f μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στο X. Ισχύει $\int_X f d\mu = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ σ.π. .*

Ο χώρος $L^2(X, \mu)$.

Δοθέντος ενός χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ορίζεται ο γραμμικός χώρος

$$\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \text{ μετρήσιμη } : \int_X |\, f \,|^2 \, d\mu < \infty\}.$$

Συχνά γράφουμε απλώς $\mathcal{L}^2(X)$ όταν τα $\mathcal{A}$ και μ εννοούνται. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η απεικόνιση

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu, \qquad f, g \in \mathcal{L}^2(X),$$

ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου, όχι όμως την (iii) αφού σύμφωνα με την Πρόταση 0.1.3 η σχέση $\langle f, f \rangle = 0$ συνεπάγεται μόνο $f(x) = 0$ σχεδόν παντού και όχι $f = 0$.

Αυτό αντιμετωπίζεται ως εξής: ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $\mathcal{L}^2(X)$ θέτοντας

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \;\; \sigma.\pi. \tag{0. 27}$$

Έστω τώρα $L^2(X) = \mathcal{L}^2(X)/\sim$ το αντίστοιχο σύνολο-πηλίκο. Το $L^2(X)$ γίνεται γραμμικός χώρος κατά φυσιολογικό τρόπο, και ορίζουμε

$$\langle [f], [f] \rangle = \langle f, f \rangle, \qquad f \in \mathcal{L}^2(X).$$

Αποδεικνύεται ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι καλά ορισμένο και είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $L^2(X)$.

Θεώρημα 0.1.4 *Ο $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος Hilbert.*

Παράδειγμα 0.1.5 Έστω $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$) και έστω $\mu(E)$ ο πληθάριθμος του $E \subset \mathbb{N}$. Η τριάδα $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ είναι τότε χώρος μέτρου και μπορεί να δει κανείς ότι ο $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ συμπίπτει με το χώρο l^2.

2. Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 0.1.6 *Υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ στο $\mathbb{R}^n$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *το $\mathcal{M}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *$\mu(B) = |B|$ (ο συνήθης όγκος) για κάθε ανοικτή μπάλα $B \subset \mathbb{R}^n$*

(iii) *το μ είναι* πλήρες, *δηλαδή αν $A \in \mathcal{M}$ και $\mu(A) = 0$ τότε $B \in \mathcal{M}$ για κάθε $B \subset A$.*

Το παραπάνω μέτρο ονομάζεται μέτρο *Lebesgue* στον $\mathbb{R}^n$ και οι συναρτήσεις που ανήκουν στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ ονομάζονται Lebesgue-μετρήσιμες ή απλώς μετρήσιμες. Το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο Lebesgue ονομάζεται ολοκλήρωμα Lebesgue και θα το συμβολίζουμε με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

Ορισμός 0.1.7 *Ο χώρος $L^2(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται ως ο $L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$.*

Ανάλογα ορίζεται και ο χώρος $L^2(\Omega)$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις. (1) Στην πράξη θεωρούμε τα στοιχεία του $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ή του $L^2(\Omega)$) ως συναρτήσεις παρά ως κλάσεις συναρτήσεων. Έχουμε όμως πάντα στο νου μας ότι συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού είναι αντιμετωπίζονται ως ίσες. Για παράδειγμα, μη συνάρτηση που μηδενίζεται παντού εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Στο πλαίσιο αυτό, όταν λέμε ότι μία συνάρτηση $u \in L^2(\Omega)$ είναι συνεχής (ή $C^k(\Omega)$ ή $C^k(\overline{\Omega})$ κλπ) εννούμε ότι υπάρχει κάποιος αντιπρόσωπος στην κλάση $[u]$ ο οποίος είναι συνεχής (ή $C^k(\Omega)$ ή $C^k(\overline{\Omega})$ κλπ).

(2) Η μετρησιμότητα δεν είναι κάτι που θα μας απασχολεί· οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην πράξη, τουλάχιστον στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, θα είναι πάντα μετρήσιμες. Μάλιστα δεν είναι απλό να κατασκευάσει κανείς μια μη-μετρήσιμη συνάρτηση. Άρα η μόνη συνθήκη που χρειάζεται να ελέγξουμε προκειμένου να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι στον L^2 είναι η συνθήκη $\int |f|^2 dx < \infty$. Και για να αποδείξουμε κάτι τέτοιο θα χρησιμοποιούμε τις συνήθεις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων καθώς και τις μεθόδους υπολογισμού τους.

Θεώρημα 0.1.8 *Κάθε συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.*

Ορισμός 0.1.9 *Ορίζουμε*
$$L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu).$$

Παρατήρηση 0.1.10 (1) Σύμφωνα με λοιπόν με τον ορισμό, τα στοιχεία του $L^2(\mathbb{R})$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων και όχι συναρτήσεις. Στην πράξη ωστόσο τα στοιχεία τα αντιμετωπίζουμε ως συναρτήσεις. Θα πρέπει όμως να θυμόμαστε ότι αν μία τέτοια 'συνάρτηση' τροποποιηθεί σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου τότε η 'συνάρτηση' παραμένει η ίδια (αφού έχουμε ισότητα σχεδόν παντού). Με άλλα λόγια, μπορούμε να θεωρήσουμε τα στοιχεία των χώρων $L^2(\mathbb{R})$ ως συναρτήσεις οι οποίες είναι ορισμένες σχεδόν παντού.
(2) Στην πράξη (π.χ. ασκήσεις) δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για το αν μία συνάρτηση είναι μετρήσιμη, καθώς όλες σχεδόν οι συναρτήσεις που συνήθως εμφανίζονται είναι μετρήσιμες. Μάλιστα δεν είναι εύκολο να ορίσει κανείς συναρτήσεις που δεν είναι μετρήσιμες.

B. Απόδειξη της Πρότασης 5.1.1

(i) Ουσιαστικά πρέπει να δείξουμε ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε κάτω από το συμβολο της ολοκλήρωσης. Θα δείξουμε αρχικά ότι
$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_k}(x) = \int_{|y-x|<\epsilon} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)u(y)dy, \quad x \in \Omega_\epsilon. \tag{0. 28}$$

Έστω $x \in \Omega_\epsilon$ και δ αρκετά μικρό ώστε $B(x, |\delta|) \subset \Omega_\epsilon$. Ορίζουμε
$$A(\delta) := \frac{1}{\delta}\Big(u_\epsilon(x+\delta e_k) - u_\epsilon(x) - \delta \int_{|y-x|<\epsilon} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)u(y)dy\Big)$$
και αρκεί να δείξουμε ότι $A(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0$.
Έχουμε λοιπόν
$$A(\delta) = \frac{1}{\delta}\int_{|y-x|<\epsilon}\Big[\rho_\epsilon(x+\delta e_k - y) - \rho_\epsilon(x-y) - \delta\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)\Big]u(y)dy\ .$$

Όμως, από τον τύπο του Taylor έχουμε για κάθε $y \in B(x, \epsilon)$,
$$\rho_\epsilon(x+\delta e_k - y) = \rho_\epsilon(x-y) + \delta\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y) + \frac{1}{2}\delta^2 \mathrm{Hess}\rho_\epsilon(\xi_y)e_k \cdot e_k\ ,$$
για κάποιο σημείο $\xi_y \in [x-y, x-y+\delta e_k]$. Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|\mathrm{Hess}\rho_\epsilon\| \le M$. Έχουμε τότε
$$\Big|\rho_\epsilon(x+\delta e_k - y) - \rho_\epsilon(x-y) - \delta\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)\Big| \le \frac{M\delta^2}{2}.$$
Άρα
$$A(\delta) \le \frac{1}{\delta}\frac{M\delta^2}{2}\int_{|y-x|<\epsilon}|u(y)|dy\ \longrightarrow 0\ ,$$

καθώς $\delta \to 0$, και το ζητούμενο έπεται.

Παρόμοια αποδεικνύεται η ύπαρξη παραγώγων κάθε τάξης: ισχύει γενικά

$$(D^\alpha u_\epsilon)(x) = \int_{|y-x|<\epsilon} (D^\alpha \rho_\epsilon)(x-y)\, u(y) dy \tag{0. 29}$$

για κάθε πολυδείκτη $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Αρα λοιπόν $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

(ii) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες μας δίνει

$$\int_{|y-x|<\epsilon} (D^\alpha \rho_\epsilon)(x-y)\, u(y) dy = \int_{|y-x|<\epsilon} \rho_\epsilon(x-y)\, (D^\alpha u)(y) dy = (D^\alpha u)_\epsilon(x),$$

οπότε τα ζητούμενο έπεται από την (0. 29).

(iii) Έστω $U \subset\subset \Omega$. Έστω $\eta = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(U, \partial\Omega)$ και $\epsilon < \eta$. Για $x \in U$ έχουμε τότε

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{B(\epsilon)} \rho_\epsilon(y) \Big| u(x-y) - u(x) \Big| dy \\ &\leq \sup_{x \in U} \sup_{y \in B(\epsilon)} \Big| u(x-y) - u(x) \Big| \\ &\leq \sup_{x, x' \in U^\eta, |x-x'|<\epsilon} \Big| u(x') - u(x) \Big| \\ &\to 0, \end{aligned}$$

λόγω και της ομοιόμορφης συνέχειας της u στο σύνολο U^η.

(iv) Έπεται από τις (ii) και (iii)

(v)

Έστω $u \in L^p(\Omega)$ και $\delta > 0$. Είναι γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση ότι υπάρχει συνάρτηση $v \in C_c(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\|u - v\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\delta}{3}.$$

Έστω $K = \mathrm{supp}(v)$

Για τη συνάρτηση v θεωρούμε τις αντίστοιχες ομαλοποιημένες συναρτήσεις v_ϵ. Τότε, από το (iii),

$$v_\epsilon \to v, \text{ ομοιόμορφα στο } K^\eta,$$

για κάθε $\eta < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(v), \partial\Omega)$ (αφού για αυτά τα η το K^η είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω).

Συνεπώς για $\epsilon < \eta < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(v), \partial\Omega)$, επειδή οι v, v_ϵ μηδενίζονται εκτός του K^η,

$$\|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} = \|v_\epsilon - v\|_{L^p(K^\eta)} \leq \|v_\epsilon - v\|_{L^\infty(K^\eta)} |K^\eta|^{1/p}$$

και άρα

$$\|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} < \frac{\delta}{3},$$

αν το ϵ είναι αρκετά μικρό.

Συνεπώς για αρκετά μικρά $\epsilon > 0$, χρησιμοποιώντας και την (5. 10) έχουμε

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} &\leq \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} + \|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} + \|v - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \\ &\leq 2\|v - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} + \|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

και άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο. $\square$

Βιβλιογραφία

Τα παρακάτω είναι κάποια βιβλία από τα οποία μπορεί κανείς να μελετήσει την θεωρία τελεστών σε χώρους Hilbert.

1. Hislop P.D. και Sigal I.M. Introduction to spectral theory. Springer 1996.

2. Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications. J. Wiley & Sons 1989.

3. Reed M. και Simon B. Methods of modern mathematical physics, I. Functional Analysis. Academic Press 1980.

4. Young N. An introduction to Hilbert space. Cambridge University Press 1988.