ΕΚΠΑ - Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Απαλοιφή Gauss με Ολική ή Μερική Οδήγηση σε Πίνακες Hadamard

Δεκέμβριος 2021

Ιορδάνης Ιωάννης

Καθηγήτρια: Μαριλένα Μητρούλη

Ορισμοί

Πίνακας Hadamard τάξης n (H_n)

- Τετραγωνικός πίνακας n x n
- Στοιχεία του πίνακα: 1 ή -1.
- $\mathrm{H_n x H_n^T = n \cdot I_n}$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\text{x}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8}
\end{pmatrix}
$$

Ορισμοί

Ισοδύναμος πίνακας Hadamard

Προκύπτει από πίνακα Hadamard με:

- μεταθέσεις γραμμών
- μεταθέσεις στηλών
- πολλαπλασιασμό γραμμών με -1
- πολλαπλασιασμό στηλών με -1
- συνδυασμό των παραπάνω

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

$\sim$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
6	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
8	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1

Κλάσεις ισοδυναμίας

Κατηγορίες των πινάκων Hadamard ίδιας τάξης:

- Σε κάθε κλάση οι πίνακες είναι ισοδύναμοι.
- Κάθε πίνακας μίας κλάσης δεν είναι ισοδύναμος με πίνακα άλλης κλάσης.

Ορισμοί

Κανονικοποιημένος Πίνακας Hadamard

Πίνακας Hadamard όπου η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη περιέχουν στοιχεία μόνο με θετική τιμή 1.

Χρησιμοποιείται συνήθως ως εκπρόσωπος κλάσης ισοδυναμίας.

Κλάση 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
11	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
12	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
13	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
14	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
15	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
16	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1

Κλάση 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
11	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
12	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
13	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
14	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
15	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
16	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1

Ορισμοί

Απαλοιφή Gauss με Ολική (GECP) ή Μερική (GEPP) Οδήγηση

Μεθοδολογία σταδιακής μετατροπής του πίνακα A σε άνω τριγωνικό U.

Σε κάθε στάδιο κ επιλέγεται ο υποπίνακας με άνω αριστερή γωνία το $α_{κκ}$ που προκύπτει αν διαγραφούν οι πρώτες κ-1 γραμμές και οι πρώτες κ-1 στήλες του πίνακα A.

Στην **ολική οδήγηση** ο υποπίνακας μετατρέπεται **με αντιμεταθέσεις γραμμών και στηλών ώστε το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του υποπίνακα** να τοποθετηθεί στη άνω αριστερή γωνία του.

Στην **μερική οδήγηση** ο υποπίνακας μετατρέπεται **με αντιμεταθέσεις γραμμών ώστε το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο της 1ης στήλης του υποπίνακα** να τοποθετηθεί στη άνω αριστερή γωνία του.

Στη συνέχεια, με άλλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, μηδενίζονται τα στοιχεία της 1ης στήλης κάθε υποπίνακα κάτω από το $α_{κκ}$.

Οδηγό στοιχείο

Το στοιχείο που τοποθετείται στην πάνω αριστερή γωνία κάθε υποπίνακα κατά την απαλοιφή Gauss.
Μετά την απαλοιφή, τα οδηγά στοιχεία συμπίπτουν με τα διαγώνια στοιχεία.

Ορισμοί

Δομή οδηγών στοιχείων

Διάταξη των οδηγών στοιχείων (με απόλυτες τιμές), που εμφανίζονται στη μεθοδολογία απαλοιφής Gauss.
Από τον ορισμό τους, είναι τα διαγώνια στοιχεία του άνω τριγωνικού πίνακα U,
που προκύπτει από την απαλοιφή.

Συντελεστής μεγέθυνσης

$g(n, A) = \dfrac{\max_{i,j,k} \left| \alpha_{ij}^{(\kappa)} \right|}{\max_{i,j} \left| \alpha_{ij} \right|}$, $\alpha_{ij}^{(\kappa)}$ η τιμή του στοιχείου α_{ij} του πίνακα A στο στάδιο κ της απαλοιφής Gauss.

Ευστάθεια απαλοιφής Gauss

Η ευστάθεια της απαλοιφής καθορίζεται από την δομή των οδηγών στοιχείων

- Μικρές τιμές του g(n,A) δείχνουν μικρή μεγέθυνση και ευσταθή απαλοιφή.
- Μεγάλες τιμές του g(n,A) οδηγούν σε ασταθή απαλοιφή.
- Η ολική οδήγηση συγκρινόμενη με την μερική δημιουργεί καλύτερη ευστάθεια.
- Γενικά όσο μικρότερες είναι οι τιμές των οδηγών στοιχείων τόσο καλύτερη είναι η ευστάθεια της απαλοιφής.

Στους πίνακες Hadamard ο g(n,H), σε ολική οδήγηση, είναι εξορισμού το μεγαλύτερο οδηγό στοιχείο της δομής
Στην ολική οδήγηση επικρατεί η εικασία g(n,H)=n (έχει αποδειχθεί για n =12 και για n=16)
Στην μερική οδήγηση σε πολλές περιπτώσεις, διαφορετικά οδηγά στοιχεία έχουν τιμές μεγαλύτερες από n.

Δομές σε πίνακες Hadamard με Ολική Οδήγηση

Για n<16 η δομή είναι μοναδική για όλους τους ισοδύναμους πίνακες
Για n≥16 οι ισοδύναμοι πίνακες δεν έχουν αναγκαστικά την ίδια δομή
Οι διαφορετικές δομές για πίνακες Hadamard τάξης 16 με ολική οδήγηση έχει αποδειχθεί ότι είναι 34.

Κώδικας hadpivot

Χρήση του κώδικα hadpivot

- Ο κώδικας αναπτύχθηκε στη Julia για τον πειραματικό εντοπισμό των δομών οδηγών στοιχείων των πινάκων Hadamard.
- Βασίζεται στην εφαρμογή της απαλοιφής Gauss με οδήγηση σε ισοδυνάμους πίνακες των κανονικοποιημένων πινάκων των κλάσεων ισοδυναμίας.

Συνοπτική Περιγραφή του κώδικα hadpivot

Ο κώδικας hadpivot συνοπτικά περιγράφεται στα παρακάτω βήματα:

1. Εισαγωγή δεδομένων τάξης και οδήγησης.
2. Επιλογή τυχαίας κλάσης και παραγωγή ισοδύναμου πίνακα (function equivhad).
3. Εφαρμογή της απαλοιφής Gauss στον ισοδύναμο πίνακα και
   παραγωγή του αντίστοιχου άνω τριγωνικού πίνακα U (function compiv) και της δομής.
4. Προβολή των δεδομένων και αποτελεσμάτων (function printmat).
5. Αποθήκευση της παραγόμενης δομής στον πίνακα Hadpivot.
   Ταυτόχρονα αποθήκευση της κλάσης, στοιχείων ισοδυναμίας και συχνότητας δομών ανά κλάση,
   στους πίνακες Dataclass, Dataequiv και Freqpc αντίστοιχα.

Εφαρμογή κώδικα hadpivot

Εισαγωγή δεδομένων

Δώστε την Τάξη του Πίνακα Hadamard (4, 8, 12, 16, 20):
16

Απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση (p) ή με ολική οδήγηση (c);
c

Εφαρμογή κώδικα hadpivot

Επιλογή κλάσης (Κανονικοποιημένος πίνακας Hadamard κλάσης 3)

Χρησιμοποιήθηκαν οι 4 από τις 5 κλάσεις ισοδυναμίας των πινάκων Hadamard τάξης 16 (η 5η κλάση καλύπτεται από την 4η).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
11	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
12	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1
13	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
14	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
15	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
16	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1

Εφαρμογή κώδικα hadpivot

Διαδικασία Παραγωγής Ισοδύναμου Πίνακα

Κλάση 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
7	9	10	8	12	15	5	16	11	14	4	3	2	1	13	6	(μετάθεση γραμμών)
1	5	8	9	4	14	15	10	13	2	6	16	11	12	3	7	(μετάθεση στηλών)
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	(πολλαπλασιασμός γραμμών με -1)
-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	(πολλαπλασιασμός στηλών με -1)

Ισοδύναμος Πίνακας Hadamard 16x16

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
3	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1
4	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
5	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
6	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
7	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
8	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1
9	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
10	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
11	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
12	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
13	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
14	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
15	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1
16	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1

Εφαρμογή κώδικα hadpivot

Απαλοιφή Gauss με ολική οδήγηση σε Πίνακα Hadamard 16x16 (Άνω Τριγωνικός Πίνακας)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-1.00	1.00	-1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	-1.00	1.00	-1.00	-1.00	1.00	-1.00	1.00	1.00
2	0.00	-2.00	0.00	-2.00	-2.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	-2.00	2.00	-2.00	0.00
3	0.00	0.00	-2.00	2.00	2.00	2.00	0.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	2.00	2.00
4	0.00	0.00	0.00	4.00	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-4.00	4.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	2.00	2.00	2.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	2.00	0.00	-2.00	2.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-4.00	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-4.00	0.00	0.00	-4.00
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.00	-4.00	0.00	-2.00	0.00	2.00	4.00	2.00	2.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.00	0.00	-4.00	0.00	4.00	0.00	4.00	4.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	2.00	2.00	-2.00	-2.00	2.00	-2.00	2.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.00	4.00	0.00	-4.00	0.00	-4.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-4.00	4.00	0.00	0.00	4.00	-4.00
12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.00	4.00	4.00	-4.00	4.00
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.00	-4.00	4.00	-4.00
14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	8.00	0.00	8.00
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-8.00	8.00
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-16.00

Δομή οδηγών στοιχείων Hadamard 16x16

p01	p02	p03	p04	p05	p06	p07	p08	p09	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	8.00	2.00	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00

Εφαρμογή κώδικα hadpivot

Προβολή Δομών οδηγών στοιχείων Hadamard 16x16 (Απαλοιφή Gauss με Ολική Οδήγηση)

Κωδικός	p01	p02	p03	p04	p05	p06	p07	p08	p09	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16
1	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	5.00	3.20	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
2	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
3	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	2.40	4.00	5.33	5.00	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
4	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	3.20	4.00	4.00	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
5	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	8.00	2.00	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
6	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	5.00	3.20	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
7	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	6.00	2.67	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
8	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	3.60	4.00	4.00	4.44	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
9	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	3.20	5.00	3.20	5.00	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
10	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	6.00	2.67	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
11	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	6.00	2.67	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
12	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	2.40	4.00	5.33	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
13	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	2.40	4.00	5.33	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
14	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	3.20	5.00	3.20	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
15	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	6.00	2.67	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
16	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	4.00	4.00	5.00	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
17	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	5.00	3.20	5.00	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
18	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	3.20	4.00	4.00	5.00	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
19	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	3.20	5.00	3.20	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
20	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	2.00	4.00	4.00	8.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
21	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	2.00	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
22	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	4.00	4.50	4.44	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
23	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	4.50	4.00	4.44	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
24	1.00	2.00	2.00	4.00	2.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
25	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	4.00	4.50	4.44	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
26	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	4.00	4.00	5.00	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
27	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	4.00	4.00	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
28	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	3.33	3.20	4.00	4.00	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
29	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	5.00	3.20	5.00	4.80	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
30	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	5.00	3.20	4.00	6.00	5.33	4.00	8.00	8.00	16.00
31	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	2.00	4.00	4.00	4.00	8.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
32	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	5.00	3.20	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
33	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	8.00	4.00	8.00	8.00	16.00
34	1.00	2.00	2.00	4.00	3.00	2.67	2.00	4.00	4.00	4.00	4.00	8.00	8.00	8.00	8.00	16.00