01/12/2021 Μάθημα 18

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί το π.μ.α.π. με τον αλγόριθμο κλάδου-φράγματος και τη στρατηγική κατά-εύρος-πρώτα

$$z = \max\ 26x_1 + 28x_2 - 2000x_3$$

υπό

$$9x_1 + 13x_2 - 10x_4 \le 6700$$
$$7x_1 + 6x_2 \le 6200$$
$$10x_1 + 4x_2 - 1540x_3 + x_4 \le 7200$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 1650$$
$$-15x_3 + x_4 \le 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \quad x_3 \in \{0,1\}$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1| Δεν πειράζει που το πρόβλημα δεν είναι σε κανονική μορφή.

2| Η x_4 δεν έχει περιορισμό ακεραιότητας, άρα δεν παίρνω περιπτώσεις (στις διαμερίσεις ως προς αυτή)

3| Η $x_3 \in \{0,1\}$, άρα αν πάρω περιπτώσεις ως προς αυτήν, θα γράψω $x_3 = 0$ ή $x_3 = 1$.

Στον κλάδο (υποπρόβλημα) 1 λύνουμε την χαλάρωση γ.π. του αρχικού προβλήματος.
(<u>Όλα ίδια</u> μόνο που $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ φεύγει, $x_3 \in \{0,1\}$ φεύγει, προστίθεται ο περιορισμός $x_3 \le 1$)

Τότε βγαίνει η λύση: 1

X_{LP}	Z_{LP}
$x_1 = 768.5$ $x_2 = 37.7$ $x_3 = 0.46$ $x_4 = 70.6$	20118.5

$x_1 \le 768$ $x_1 \ge 769$

ουσιαστικά, λύνω την χαλάρωση του προβλήματος + περιορισμό $x_1 \ge 769$

① → ② , ③

(*) όχι εφικτή ούτε τρέχουσα γιατί $x_3 \notin \{0,1\}$

② (*)

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=768$	20115.1
$x_2=38$	
$x_3=0.46$	
$x_4=70.6$	

③

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=769$	20117.2
$x_2=37.3$	
$x_3=0.46$	
$x_4=70.6$	

>19032 άρα δεν το κλαδεύω

② $\xrightarrow{x_3=0}$ ④ , ② $\xrightarrow{x_3=1}$ ⑤

$$\underline{x}^o = \begin{pmatrix} 768 \\ 38 \\ 1 \\ 70.6 \end{pmatrix}$$

$z^o = 19032$

④

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=710.6$	19131.9
$x_2=23.4$	
$x_3=0$	
$x_4=0$	

⑤

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=768$	19032
$x_2=38$	
$x_3=1$	
$x_4=70.6$	

κλαδεύω και έχω πια τρέχουσα λύση

⑥

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=769.5$	20116.8
$x_2=37$	
$x_3=0.46$	
$x_4=70.6$	

⑦

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
μη εφικτό	

κενή εφικτή περιοχή

④ $\xrightarrow{x_1 \le 710}$, ④ $\xrightarrow{x_1 \ge 711}$

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=710$	19127
$x_2=23.8$	
$x_3=0$	
$x_4=0$	

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=711$	19116
$x_2=22.5$	
$x_3=0$	
$x_4=0$	

⑥ $\xrightarrow{x_3=0}$, ⑥ $\xrightarrow{x_3=1}$

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
μη εφικτό	

$\underline{x}_{LP}$	z_{LP}
$x_1=825$	19450
$x_2=0$	
$x_3=1$	
$x_4=72.5$	

→ και γίνεται τρέχουσα λύση γιατί $19450 > 19032$ (αν < 19032 δεν το κλαδεύουμε)

Άρα, $\underline{x}^o = \begin{pmatrix} 825 \\ 0 \\ 1 \\ 72.5 \end{pmatrix}$, $z^o = 19450$.

Άρα, κλαδεύουμε και τα άλλα 2 (γιατί άνω φράγματα $< z^o$)

Άρα, κανένας ενεργός. Επομένως: $x^* = \begin{pmatrix} 825 \\ 0 \\ 1 \\ 72.5 \end{pmatrix}$, $z^* = 19450$.

Άσκηση

Έστω το π.α.π.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{υπό} \quad & -3x_1 + 4x_2 \le 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & 2x_1 - x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(i) Να λυθεί γραφικά.

(ii) Να λυθεί με μέθοδο κλάδου-φράγματος όπου σε κάθε στάδιο να λύνονται γραφικά οι χαλαρώσεις γ.π..

Λύση

(i) $\varepsilon_1: -3x_1 + 4x_2 = 4$

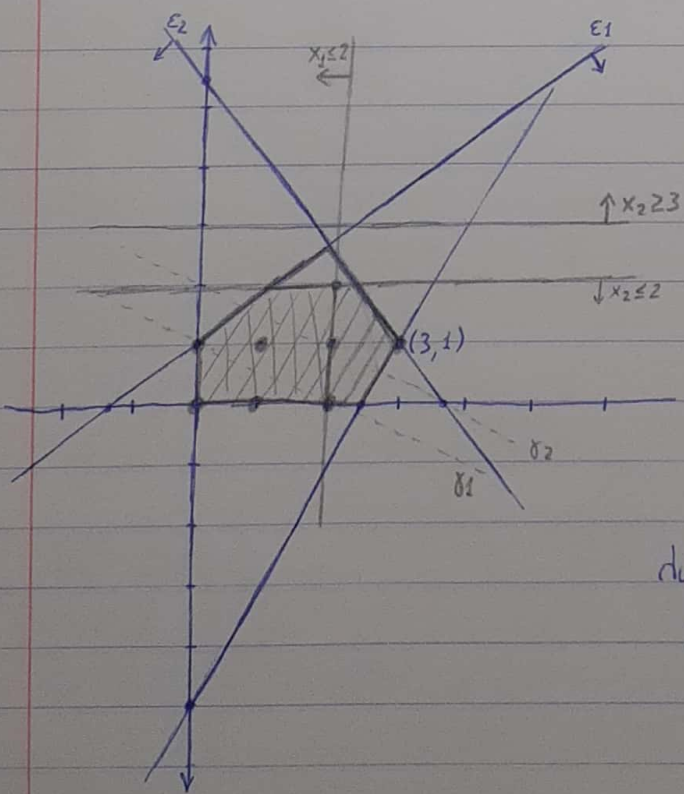
x_1	0	$-\frac{4}{3}$
x_2	1	0

$\varepsilon_2: 3x_1 + 2x_2 = 11$

x_1	0	$\frac{11}{3}$
x_2	$\frac{11}{2}$	0

$\varepsilon_3: 2x_1 - x_2 = 5$

x_1	0	$\frac{5}{2}$
x_2	-5	0



$\gamma_1: x_1 + 2x_2 = 2$

x_1	0	2
x_2	1	0

$\gamma_2: x_1 + 2x_2 = 4$

x_1	0	4
x_2	2	0

Βλέπουμε ότι η βέλτιστη λύση του π.α.π. είναι η $\underline{x}^* = \binom{2}{2}$ και $z^* = 6$.

(ii) Κόμβος 1

Λύνουμε τη χαλάρωση γ.π. του αρχικού προβλήματος.

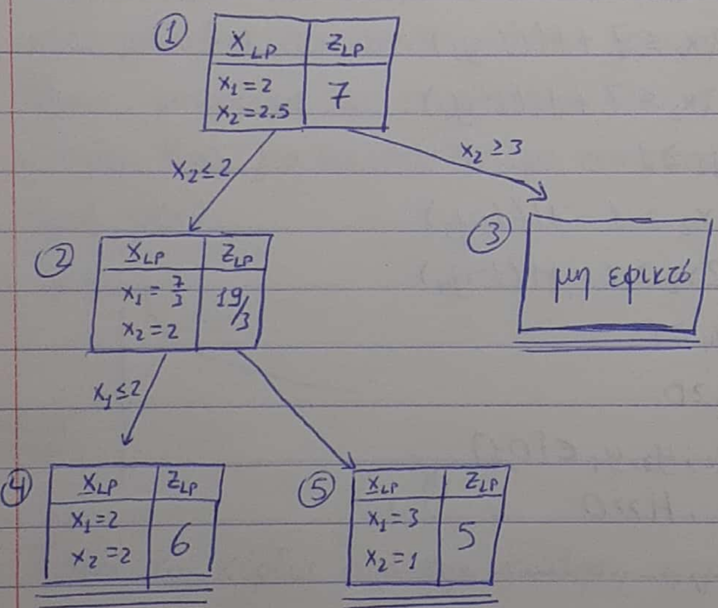
Η βέλτιστη λύση είναι το σημείο τομής ε_1 και ε_2:

$$\left\{\begin{array}{l} -3x_1 + 4x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x_2 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 = 2 \end{array}\right\}$$

Κόμβος 2

Η βέλτιστη λύση είναι το σημείο τομής της ε_2 και της $x_2 = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 11 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{3} \\ x_2 = 2 \end{array}\right\}$$



$\underline{x}^\circ = \binom{2}{2}$

$z^\circ = 6$

βέλτιστη λύση $\underline{x}^* = \binom{2}{2}$

$z^* = 6$

→

Άσκηση

Έστω πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\max \ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{υπό} \quad (3x_1 + 2x_2 \le 7 \ \text{ ή } \ 2x_1 + 3x_2 \le 7)$$

$$\text{και}$$

$$(2x_1 + x_2 \ge 1 \ \text{ ή } \ x_1 + 2x_2 \ge 1)$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Να εκφραστεί η εφικτή περιοχή ως σύζευξη περιορισμών.

Λύση

$$\max \ 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{υπό} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 7 + M(1-y_1)$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 7 + M(1-y_2)$$

$$y_1 + y_2 \ge 1$$

$$2x_1 + x_2 \ge 1 - M(1-y_3)$$

$$x_1 + 2x_2 \ge 1 - M(1-y_4)$$

$$y_3 + y_4 \ge 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0,1\}$$

όπου $M >> 0$

06/12/2021 Μάθημα 19

Μη γραμμικός προγραμματισμός

5.1 Εισαγωγή

Ορισμός Το πρόβλημα

$$\max \ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{υπό} \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i \ , \ i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \ , \ j = 1, 2, \dots, n$$

→

όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$ μη γραμμικές

ονομάζεται <u>πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού</u>.

<u>Παραδείγματα</u>

1) <u>Πρόβλημα παραγωγής</u>

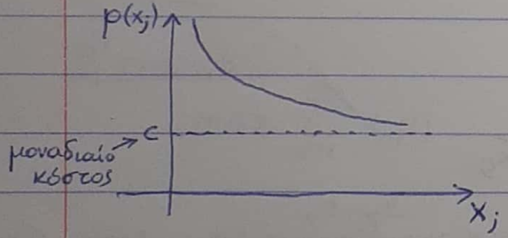
$$\max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n.$$

Μέχρι τώρα, υποθέταμε ότι το μοναδιαίο κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος j είναι p_j = τιμή − κόστος.

Όμως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ζήτηση πέφτει όσο αυξάνεται η τιμή. Άρα, για να πουλήσουμε την ποσότητα x_j θα πρέπει να βάλουμε τιμή $p(x_j)$.



Τώρα, το κέρδος από την πώληση x_j μονάδων προϊόντος j, θα είναι

$$P(x_j) = x_j p(x_j) - x_j \cdot c, \quad j=1,\dots,n.$$

Το συνολικό κέρδος (η αντικειμενική συνάρτηση) θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} P(x_j) \longleftarrow \text{όχι γραμμική}$$

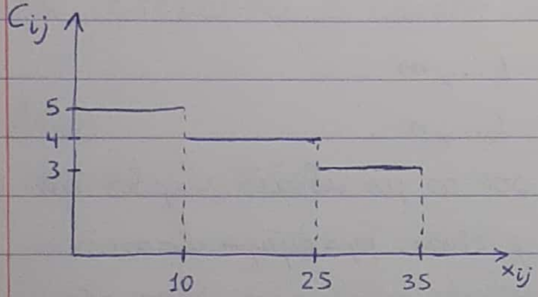
Μπορούμε αντίστοιχα να θεωρήσουμε ότι και το μοναδιαίο κόστος εξαρτάται από το x_j.

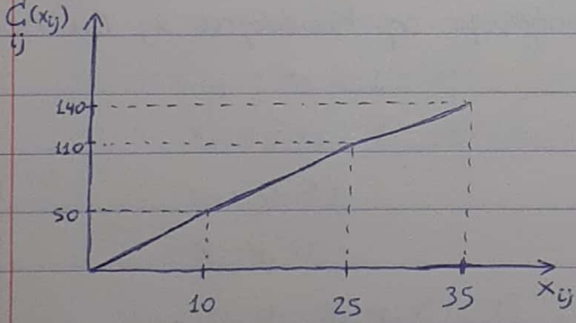
2| Πρόβλημα μεταφοράς

Σε αυτό το πρόβλημα υποθέσαμε ότι το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από την τοποθεσία i στην j είναι c_{ij}, ανεξάρτητο της ποσότητας x_{ij} που θα μεταφερθεί.

Η α.σ. ήταν $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ γραμμική.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η χρέωση ανά μονάδα μειώνεται όσο αυξάνεται η ποσότητα που μεταφέρουμε (volume discounts).





Το συνολικό κόστος μεταφοράς ποσότητας x_{ij} είναι $C_{ij}(x_{ij})$ κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση.

Η αντικειμενική συνάρτηση θα είναι

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}(x_{ij}) \leftarrow \text{όχι γραμμική.}$$

3| Πρόβλημα επενδύσεων

Διαθέσιμο ποσό **B** για να επενδύσουμε σε n μετοχές.

(*) x_j = # μετοχών που θα αγοραστούν από τη μετοχή j, $j=1,\dots,n$.

R_j = απόδοση της μετοχής j, $j=1,\dots,n$ (τυχαία μεταβλητή)

$\mu_j = E[R_j]$ αναμενόμενη απόδοση μετοχής j

$\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ συνδιακύμανση της απόδοσης R_i με την R_j.

Ο επενδυτής θέλει να αυξήσει την αναμενόμενη απόδοση και να

(*) p_j = τιμή μιας μονάδας μετοχής j, $j=1,\dots,n$.

μειώσει το ρίσκο.

συνολική αναμενόμενη απόδοση

$$E\left[\sum_{j=1}^{n} x_j R_j\right] = \sum_{j=1}^{n} x_j E[R_j] = \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j$$

$$Var\left[\sum_{j=1}^{n} x_j R_j\right] = Cov\left(\sum_{j=1}^{n} x_j R_j, \sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j x_i Cov(R_j, R_i) =$$

μοντελοποιεί το ρίσκο

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j x_i \sigma_{ij}.$$

<u>α΄ τρόπος</u>

$$\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j x_i \sigma_{ij}$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j \geq L$ ← το καθορίζει ο επενδυτής (ελάχιστη απόδοση)

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq B$$

$$x_j \geq 0, \ j=1,2,\dots,n$$

<u>β΄ τρόπος</u>

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j$$

υπό $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j x_i \sigma_{ij} \leq V$ ← το καθορίζει ο επενδυτής (μέγιστο ανεκτό ρίσκο)

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq B$$

$$x_j \geq 0, \ j=1,2,\dots,n$$

<u>γ΄ τρόπος</u>

καθορίζεται από τον επενδυτή

$$\max \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - r\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j x_i \sigma_{ij}$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq B$

$$x_j \geq 0, \ j=1,\dots,n$$

μοντέλο Markowitz-Sparpe

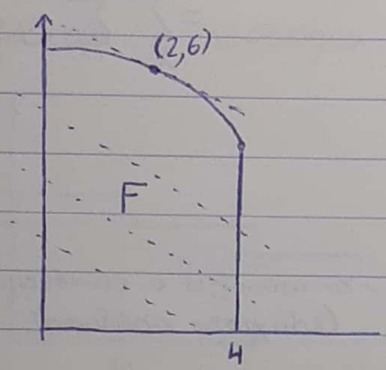
Γραφική Επίλυση

1| max $3x_1+5x_2$

υπό $x_1 \leq 4$

$9x_1^2+5x_2^2 \leq 216$

$x_1, x_2 \geq 0$



Η βέλτιστη λύση δεν πετυχαίνεται σίγουρα σε κορυφή.

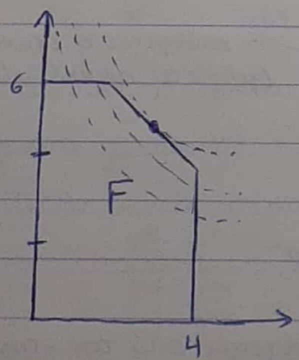
2| max $126x_1-9x_1^2+182x_2-13x_2^2$

υπό $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1+2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$



έχουμε γρ. περιορισμούς $\Rightarrow$ εφικτή περιοχή κυρτό πολύεδρο
Το μέγιστο δεν πετυχαίνεται σε κορυφή

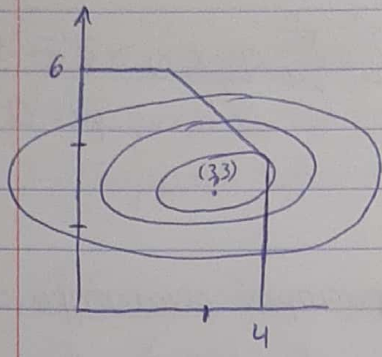
3| max $5x_1-9x_1^2+78x_2-13x_2^2$

υπό $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

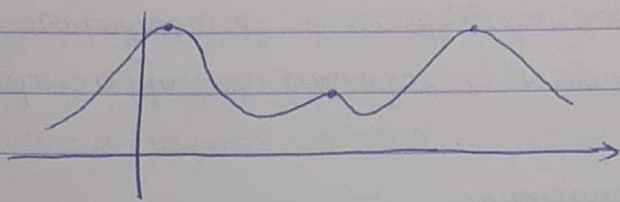
$3x_1+2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$



Το μέγιστο πετυχαίνεται σε εσωτερικό σημείο της F.

4| max $f(x_1)$



το τοπικό μέγιστο δεν είναι και ολικό μέγιστο πάντα

5.2. Ειδικές Περιπτώσεις

1| Προβλήματα χωρίς περιορισμούς

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\text{υπό} \quad x_j \in \mathbb{R}, \ j=1,\dots,n$$

2| Προβλήματα με γραμμικούς περιορισμούς

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\text{υπό} \quad g_i(x_1, \dots, x_n) \le b_i, \ i=1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0, \ j=1,\dots,n$$

όπου $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμικές.

Η εφικτή περιοχή είναι κυρτό πολύεδρο.
Υπάρχουν επεκτάσεις της Simplex που λύνουν το πρόβλημα.

3| Τετραγωνικός Προγραμματισμός

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\text{υπό} \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, \ i=1,2,\dots,m$$
$$x_j \ge 0, \ j=1,\dots,n$$

όπου $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμικές και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τετραγωνική και κοίλη, δηλαδή $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j = \underline{c}' \underline{x} - \frac{1}{2} \underline{x}' Q \underline{x}$

με Q συμμετρικό

(εμφανίζονται x_j^2 και/ή $x_i x_j$).

Προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού είναι σημαντικά διότι:

- Υπάρχουν αλγόριθμοι επίλυσης
- Προκύπτουν φυσικά από διάφορα προβλήματα (π.χ. επενδύσεων)
- Ένας τρόπος επίλυσης προβλημάτων με γρ. περιορισμούς είναι μέσω ακολουθίας προβλημάτων τετραγωνικού προγραμματισμού.

4| Κυρτός προγραμματισμός

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{υπό} \quad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \ i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη και $\underbrace{g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ κυρτές}}_{\Rightarrow F \text{ κυρτό σύνολο}}$.

5| Διαχωρίσιμος προγραμματισμός

Ειδική περίπτωση κυρτού προγραμματισμού.

Οι f, g_i, $i=1, \ldots, m$, είναι διαχωρίσιμες

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

και $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j)$.

Κάθε πρόβλημα διαχωρίσιμου προγραμματισμού μπορεί να προσεγγιστεί από ένα π.γ.π..

6| Προβλήματα μη-κυρτού προγραμματισμού

Όταν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του κυρτού προγραμματισμού, έχουμε μη-κυρτό.

- Η εφικτή περιοχή μπορεί να μην είναι κυρτή
- Το τοπικό μέγιστο μπορεί να μην είναι ολικό μέγιστο.

Ειδικές περιπτώσεις:

↳ Γεωμετρικός προγραμματισμός

↳ Γραμμικός κλασματικός προγραμματισμός.

7) Γεωμετρικός προγραμματισμός

Οι f και g_i έχουν μορφή $\sum_{i=1}^{N} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_{in}}$.

π.χ. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3^5 + 6x_1^3 x_2^2 x_3^4$.

Ίσως να μπορούν να απλοποιηθούν θέτοντας $x_j = e^{y_j}$.