25/10/2021 Μάθημα 8

Αλγόριθμος Simplex

Υποθέτουμε ότι όλες οι ΒΕΛ είναι μη-εκφυλισμένες

Βήμα 1ο: (Εύρεση ΒΕΛ)

Βρίσκουμε ΒΕΛ $\underline{x}$ με αντίστοιχο βασικό πίνακα B, σύνολο δεικτών βασικών μεταβλητών $I_B = \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$ και σύνολο δεικτών μη-βασικών μεταβλητών $I_N = \{1, \dots, n\} \setminus I_B$. Ισχύει ότι:

$\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b}$, $\underline{x}_N = \underline{0}$. Επίσης $\underline{c}_B = (c_{B(1)}, c_{B(2)}, \dots, c_{B(m)})'$.

SOS

Βήμα 2ο: (Έλεγχοι βελτιστότητας)

Για κάθε $j \in I_N$, υπολογίζουμε τα $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} A_j$.

Αν $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j \in I_N$ η ΒΕΛ $\underline{x}$ είναι βέλτιστη.

Διαφορετικά, επιλέγω κάποιο $j \in I_N$ με $\bar{c}_j > 0$ (δηλαδή επιλέγω ποια βασική κατεύθυνση θα ακολουθήσω)

Βήμα 3ο: (Βελτίωση)

Υπολογίζω το $\underline{d}(j; B) = \begin{pmatrix} -B^{-1} A_j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \leftarrow \text{αντιστοιχεί στις βασικές μεταβλητές της } x \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow j\text{-θέση} \end{array}$

Αν όλα τα στοιχεία του $\underline{d}(j; B)$ είναι μη-αρνητικά, το π.ε.π. είναι μη-φραγμένο. Διαφορετικά, $\exists$ αρνητικό στοιχείο στο $\underline{d}(j; B)$ οπότε υπολογίζω το $\theta_{min} = \min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1, \dots, m, \ d_{B(i)} < 0\right\}$.

Τότε, πάω στην επόμενη ΒΕΛ: $\underline{x}^{new} = \underline{x} + \theta_{min} \underline{d}(j; B)$.

Επιστρέφουμε στο βήμα 1 με $\underline{x} \longleftarrow \underline{x}^{new}$

Παρατηρήσεις:

1) Στο βήμα 2, αν υπάρχουν πολλά $j \in I_N$ με $\bar{c}_j > 0$, επιλέγουμε ένα στην τύχη. Συνήθως οι αλγόριθμοι επιλέγουν αυτό με το μεγαλύτερο $\bar{c}_j$.

(Αλλιώς π.χ. 2 στήλες B(i) θα γίνουν 0)

2) Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι έχουμε μη-εκφυλισμένη ΒΕΛ, το θ_{min} θα πετυχαίνεται σε έναν δείκτη $B(i)$. Αλλιώς θα πηγαίναμε σε εκφυλισμένη λύση.

3) Έστω ότι $\underline{x}$ εκφυλισμένη ΒΕΛ. Τότε $x_{B(i)} = 0$ για κάποιο $B(i) \in I_B$. Αν αυτή δεν είναι βέλτιστη $\exists j \in I_N$ με $\bar{c}_j > 0$. Αν το $\underline{d}(j;B)$ έχει αρνητικά στοιχεία και συγκεκριμένα αν $d_{B(i)} < 0$, τότε

$$\theta_{min} = min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1, \dots, m,\ d_{B(i)} < 0\right\} = 0$$ (Δεν βελτιώνεται η τιμή της α.σ.)

Η νέα βασική εφικτή λύση θα είναι ίδια με την προηγούμενη παρόλο που ο βασικός πίνακας θα έχει αλλάξει.

Έτσι γίνεται μια επανάληψη της Simplex χωρίς να έχω θετική βελτίωση στην τιμή της α.σ. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε κυκλικότητα. Υπάρχουν, όμως, αλγόριθμοι που αποφεύγουν την κυκλικότητα (π.χ. μέθοδος διαταραχής)

(Υπάρχουν και αλγόριθμοι για την εύρεση της αρχικής ΒΕΛ)

Παράδειγμα: Θεωρήστε το π.γ.π.:

$$\max(2x_1 + x_2)$$
$$\text{υπό} \quad x_1 - x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(α) Να το φέρετε σε κανονική μορφή.

(β) Να βρούμε την F.

(γ) Να εφαρμόσετε τη μέθοδο Simplex.

→

Λύση:

(α) $\max(2x_1+x_2+0x_3+0x_4)$

υπό $\quad x_1-x_2+x_3=4$

$\quad\quad x_1+x_2+x_4=8$

$\quad\quad x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$

και $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\underline{c}=(2\ 1\ 0\ 0)'$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

(β) Εύρεση W°

$W^\circ=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^4:\ A\underline{x}=\underline{0}\}$

$$\begin{Bmatrix}x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_4=0\end{Bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_3=-x_1+x_2\\ x_4=-x_1-x_2\end{cases}$$

Άρα $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\-t_1+t_2\\-t_1-t_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}t_2$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$

σειρές

γρ. ανεξ. γραμμές

Ο W° είναι γρ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2 $(=n-m)$ που παράγεται από τα $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

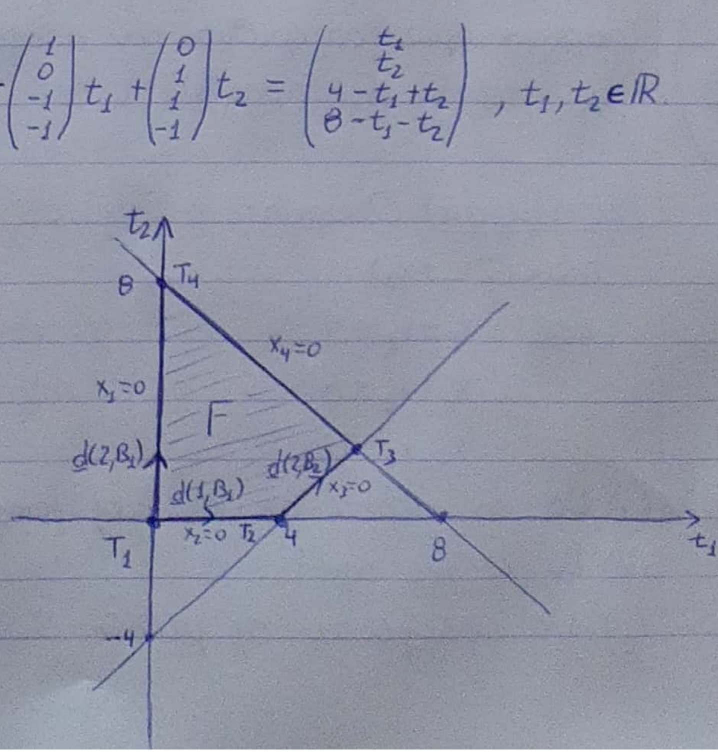
Εύρεση F°

$F^\circ=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^4:\ A\underline{x}=\underline{b}\}$, $F^\circ=\underline{x}^\circ+W^\circ$ π.χ. $\underline{x}^\circ=(0\ 0\ 4\ 8)'$.

Άρα $F^\circ=\begin{pmatrix}0\\0\\4\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}t_2=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\4-t_1+t_2\\8-t_1-t_2\end{pmatrix}$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

Εύρεση F

$F=F^\circ\cap\mathbb{R}_4^+$



Θα βρω τις κορυφές σαν σημεία του $\mathbb{R}^4$.

Άρα, $T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $T_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(γ) <u>1η Επανάληψη</u>

<u>Β1</u> $B_1 = (A_3 \; A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και

$\underline{x}_{B_1} = B_1^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ (το βασικό τμήμα).

Άρα $\underline{x}^{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ (είναι και εφικτή ✓).

Ξεκινάμε δηλαδή από την T_1. $\underline{c}_{B_1} = (0 \; 0)'$

<u>Β2</u> $\forall j \in I_{N_1} = \{1, 2\}$ υπολογίζω τα $\bar{c}_j$.

$\bar{c}_1 = c_1 - \underline{c}'_{B_1} \cdot (B_1)^{-1} \cdot A_1 = 2 - (0 \; 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= 2 - (0 \; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$

(Μπορώ να σταματήσω εδώ, χωρίς $\bar{c}_2$)

$\bar{c}_2 = c_2 - \underline{c}'_{B_1} (B_1)^{-1} A_2 = 1 - (0 \; 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$

(Από δω κοιτάω το $-B^{-1}A_j$ και αν έχει μόνο θετικά και $\bar{c}_j$ θετικό $\Rightarrow$ μη φραγμένο)

Επιλέγω να κινηθώ στη βασική κατεύθυνση 1.

<u>Β3</u> Υπολογίζω το $\underline{d}(1, B_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Το $\underline{d}(1, B_1)$ έχει αρνητικά άρα υπολογίζω το θ_{min}:

$\theta_{min} = \min\left\{-\frac{4}{-1}, -\frac{8}{-1}\right\} = 4$ πετυχαίνεται στην 3η θέση.

Άρα, η x_3 βγαίνει από τη βάση.

Άρα, η x_1 θα μπει στη βάση.

$$\underline{x}^{new} = \underline{x} + \theta_{min} \cdot \underline{d}(1, B_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2η επανάληψη:

B1| $\underline{x}^{B_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B_2 = (A_1, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{x}_{B_2} = (B_2)^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{c}_{B_2} = (2 \ 0)'$.

B2| Έλεγχοι βελτιστότητας

$\bar{c}_2 = c_2 - \underline{c}'_{B_2} (B_2)^{-1} A_2 = 1 - (2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (2 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$

$\bar{c}_3 = c_3 - \underline{c}'_{B_2} (B_2)^{-1} A_3 = 0 - (2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - (2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0$

Άρα, η ΒΕΛ <u>δεν</u> είναι βέλτιστη, επιλέγω $j=2$.

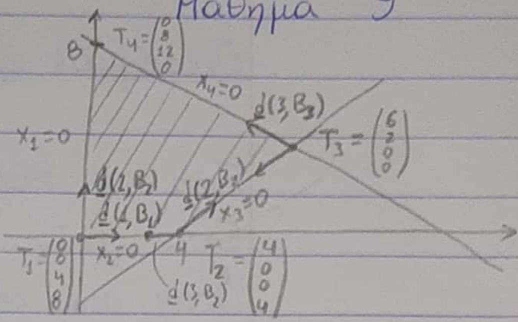
(Τα υπόλοιπα άσκηση)

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\underline{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

$\underline{c}=(2,1,0,0)'$

27/10/2021 Μάθημα 9



Παράδειγμα (συνέχεια)

2η επανάληψη

B1. Έχουμε $B_2=(A_1,A_4)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $(B_2)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\underline{c}_{B_2}=(2\ \ 0)'$

B2. $\bar{c}_2=c_2-\underline{c}'_{B_2}(B_2)^{-1}A_2=1-(2\ \ 0)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=3>0$ Η ΒΕΛ δεν είναι βέλτιστη.

$\bar{c}_3=c_3-\underline{c}'_{B_2}(B_2)^{-1}A_3=0-(2\ \ 0)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-2<0$

B3. $\underline{d}(2;B_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\boxed{-2}\end{pmatrix}$ ← θέση 2

$-(B_2)^{-1}A_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\theta_{min}=\min\left\{-\dfrac{x_{B_2(i)}}{d_{B_2(i)}} : i=1,\dots,m,\ d_{B(i)}<0\right\}=-\dfrac{4}{-2}=2$ ← πετυχαίνεται στην θέση x_4, άρα η x_4 θα βγει από τη βάση

Η νέα ΒΕΛ είναι $\underline{x}^{new}=\underline{x}^{B_2}+\theta_{min}\underline{d}(2,B_2)=$

$=\begin{pmatrix}4\\0\\0\\4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ αντιστοιχεί στην T_3.

3η επανάληψη

B1| $B_3=(A_1\ \ A_2)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $(B_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

$\underline{x}^{B_3}=\begin{pmatrix}6\\2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{c}_{B_3}=(2\ \ 1)'$

B2| $\bar{c}_3=c_3-\underline{c}'_{B_3}(B_3)^{-1}A_3=0-(2\ \ 1)\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0-(2\ \ 1)\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}<0$

$\bar{c}_4=c_4-\underline{c}'_{B_3}(B_3)^{-1}A_4=0-(2\ \ 1)\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0-(2\ \ 1)\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}=-\frac{3}{2}<0$

Άρα, $\underline{x}^*=\begin{pmatrix}6\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ και $f(\underline{x}^*)=\underline{c}'\underline{x}^*=14$.

Οικονομικές ερμηνείες για τα $\bar{c}_j$, $j \in I_N$ όταν έχουμε βέλτιστη λύση

$\bar{c}_j = \underline{c}' \underline{d}(j;B)$
$= c_j - \underline{c}_B' B^{-1} A_j$

Έστω $\underline{x}$ ΒΕΛ με αντίστοιχο βασικό πίνακα B.
Έστω $j \in I_N$ και $\bar{c}_j$ το αντίστοιχο ελαττωμένο κόστος.
Όταν από την $\underline{x}$ κινούμαι προς τη βασική κατεύθυνση $-j$ περνάω από τα $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$ με

$$x_j(\theta) = \overset{0}{\cancel{x_j}} + \theta \cdot 1 = \theta .$$

Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης γίνονται

$$f(\underline{x}(\theta)) = \underline{c}' \underline{x}(\theta) = \underline{c}'(\underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)) = \underline{c}' \underline{x} + \theta \underline{c}' \underline{d}(j;B) = f(\underline{x}) + \theta \bar{c}_j .$$

Άρα, το $\bar{c}_j$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η αύξηση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν απαιτήσω η τιμή της μη βασικής μεταβλητής x_j να αυξηθεί κατά μία μονάδα και οι άλλες μη βασικές μεταβλητές να μείνουν 0.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το πρόβλημα οργάνωσης παραγωγής μιας περιόδου.
Εταιρεία που παράγει n προϊόντα $(j = 1, 2, \dots, n)$.
Για την παραγωγή των προϊόντων χρειάζεται m πρώτες ύλες $(i = 1, \dots, m)$.
Για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος j χρειάζονται a_{ij} μονάδες από την πρώτη ύλη i.
Υπάρχουν b_i μονάδες διαθέσιμες από την πρώτη ύλη i.
Το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος j είναι c_j.
Θέλουμε να κάνουμε προγραμματισμό παραγωγής ώστε να μεγ. το συνολικό κέρδος.

(α) Μοντελοποίηση:

x_j : ποσότητα που θα παραχθεί από το προϊόν j, $j = 1, \dots, n$

$\longrightarrow$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ , \ i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \ , \ j=1,\dots,n$$

(β) Κανονική μορφή:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \ , \ i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \ , \ j=1,\dots,n$$
$$y_i \ge 0 \ , \ i=1,\dots,m$$

(γ) Ερμηνεία για ελαττωμένα κόστη:

Έστω (x^*, y^*) βέλτιστη λύση.
Έστω x_j είναι μη βασική. Το $\bar{c}_{x_j} \le 0$ είναι η μείωση του κέρδους αν απαιτήσουμε να παράξουμε θετική ποσότητα προϊόντος j ανά μονάδα προϊόντος j που θα φτιάξουμε.
Έστω y_i είναι μη βασική. Τότε $y_i^* = 0$, άρα ο i-οστός περιορισμός κάτω από τη βέλτιστη λύση θα είναι $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* + \overset{0}{y_i^*} = b_i$.
Οπότε y_i μη βασική $\Rightarrow$ καταναλώνεται όλη η διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
Το $\bar{c}_{y_i}$ είναι ~~αρνητ~~ η μείωση του κέρδους όταν απαιτήσω να μην χρησιμοποιηθεί όλη η ποσότητα 1ης ύλης i ανά μονάδα ~~1ης ύλης~~ 1ης ύλης i που θα παραμείνει αχρησιμοποίητη.

δεν δουλεύουν απαραίτητα στο ίδιο προϊόν

Δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία δουλεύουν πάνω στο προϊόν i.

Παράδειγμα 2:

Μία εταιρία παράγει n προϊόντα $j=1,\dots,n$.

Υπάρχει μία γραμμή παραγωγής και μία γραμμή ελέγχου και δουλεύουν σε ένα προϊόν τη φορά.

Σε μία ώρα παράγονται p_j προϊόντα τύπου j, $j=1,\dots,n$.

Σε μία ώρα ελέγχονται c_j προϊόντα τύπου j, $j=1,\dots,n$.

Τα προϊόντα χρησιμοποιούν μια πρώτη ύλη.

Για την παραγωγή μίας μονάδας τύπου j χρειαζόμαστε a_j μονάδες 1ης ύλης.

Η εταιρία έχει διαθέσιμες B μονάδες πρώτης ύλης, η γραμμή παραγωγής μπορεί να δουλέψει P ώρες και η γραμμή ελέγχου μπορεί να δουλέψει C ώρες τη βδομάδα.

Μια μονάδα προϊόντος j αποφέρει κέρδος k_j στην εταιρία.

Θέλουμε να προγραμματίσουμε την εβδομαδιαία παραγωγή ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

(α) x_j: μονάδες προϊόντος j που θα παραχθούν

$$\max \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} x_j \le P$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j} x_j \le C$$

$$x_j \ge 0 \, , \; j=1,\dots,n$$

(β) κανονική μορφή:

$$\max \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$$

$$\text{υπό} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + y_1 = B$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} x_j + y_2 = P$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j} x_j + y_3 = C$$

$$x_j \geq 0, \ j=1,\dots,n$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Αν x_j μη βασική ($x_j^* = 0$, δεν παράγεται προϊόν j).
Το $\bar{c}_{x_j} \leq 0$ είναι η μείωση του κέρδους από την απαίτηση η x_j να πάρει θετικές τιμές δηλαδή να φτιάξω προϊόν j ανά μονάδα προϊόντος j που θα παραχθεί.
Αν y_1 μη βασική ($y_1^* = 0$, καταναλώνεται όλη η διαθέσιμη 1η ύλη).
Το $\bar{c}_{y_1} \leq 0$ είναι η μείωση του κέρδους από την απαίτηση να μην καταναλωθεί όλη η διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης ανά μονάδα 1ης ύλης που θα παραμένει αχρησιμοποίητη.
Αν y_2 μη βασική ($y_2^* = 0$).
Το $\bar{c}_{y_2} \leq 0$ είναι η μείωση του κέρδους αν απαιτήσουμε να μη δουλέψει η μηχανή παρ. όλες τις διαθέσιμες ώρες ανά ώρα που θα παραμένει ανενεργή.