

05/06/2025

Μάθημα: 15^ο.

3.5.2 Σκιάσεις τιμές (Shadow Prices)

Έστω π.δ.π σε κανονική μορφή:

$$\begin{aligned} (P) \quad Z_P(A, b, c) &= \max c'x \\ \text{υπό: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Έστω x : η βέλτιστη λύση του (P), όπου x μη-εκφυλισμένη με βασικό πίνακα B και βασικούς δείκτες $B(1), B(2), \dots, B(m)$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } x_B &= B^{-1} \cdot b \geq 0 \text{ και τα ελαττωμένα υόθεν} \\ \bar{c}_j &= c_j - c'_B B^{-1} A_j \leq 0 \quad \forall j. \end{aligned}$$

Θεωρούμε το π.δ.π.:

$$\begin{aligned} (P^A) \quad Z_P(A, b, c) &= Z_P^A = \max c'x \\ \text{υπό: } Ax &= b + \Delta \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{με } B^{-1}(b + \Delta) \geq 0.$$

(*) Θέλουμε να δούμε ποιά είναι η σχέση των $Z_P(A, b, c)$ και $Z_P(A, b + \Delta, c)$.

Θεωρούμε: τη x^A με βασικούς δείκτες $B(1), B(2), \dots, B(m)$,
 $x_B^A = B^{-1}(b + \Delta)$ και $x_j = 0$ για $j \notin \{B(1), B(2), \dots, B(m)\}$

$$\text{Έχουμε: } Ax^A = B \cdot x_B^A = B \cdot B^{-1} \cdot (b + \Delta) = b + \Delta$$

$$\text{Επίσης, } x^A \geq 0$$

Άρα, x^A : β.ε.λ. για το (P^A)

Τα ελαττωμένα μέλη για το x^A στο (P^A) είναι:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j \leq 0, \quad \forall j.$$

Άρα, η λύση x^A είναι βέλτιστη του (P^A)

Τότε, έχουμε:

$$\triangleright Z_P(A, b, c) = c' x = c_B' x_B = c_B' B^{-1} b$$

$$\begin{aligned} \triangleright Z_P(A, b + \Delta, c) &= c' x^A = c_B' x_B^A = c_B' B^{-1} (b + \Delta) \\ &= c_B' B^{-1} b + \underbrace{c_B' B^{-1}}_{w'} \Delta \\ &= Z_P(A, b, c) + w' \Delta \end{aligned}$$

Επομένως, μια μεταβολή των σταθερών όρων κατά Δ , με $B^{-1}(b + \Delta) \geq 0$ συνεπάγεται: μεταβολή της βέλτιστης τιμής της α.β. κατά $w' \Delta$, όπου: w' βέλτιστη λύση του δυϊκού του (P) .

→ Αν $\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, δηλαδή αν μεταβληθεί μόνο ο i -οστός

← **ιστή θέση.**

σταθερός όρος, τότε η μεταβολή στη βέλτιστη τιμή της α.β.

είναι: $w' \Delta = w_i \cdot \delta_i$

Άρα, w_i είναι ο ρυθμός μεταβολής της βέλτιστης τιμής της α.β. αν μεταβληθεί ο i -οστός σταθερός όρος.

Πρόταση: Έστω ότι το πρόβλημα $(P): Z_P(A, b, c)$ δε καυονικη μορφή έχει μη-εφικλομένη βέλτιστη βελ. x , με βαθμικό πίνακα B και βέλτιστο διανύσμα δυϊκών τιμών $w = c_B' B^{-1}$

Τότε, ισχύει $\frac{\partial Z_P}{\partial b_i} = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Πημείωση: } \max 3x_1 + 7x_2 \\ \text{υπό: } 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ \quad \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (w_1, w_2) = (0, 2) \\ w_i (b_i - a_i' x) = 0 \end{array} \right)$$

Σχόλιο: Το θεώρημα συμπληρωματικότητας και η προηγούμενη πρόταση είναι συμβατά

πρακτικά, αν και του περιορισμού i , $\underline{a_i}' x \leq b_i$ (σε κανονική μορφή γίνεται: $\underline{a_i}' x + y_i = b_i$) έχουμε ότι η βέλτιστη λύση του ικανοποιεί βαλ = 0 σύμφωνα αλληλότητα, δηλαδή $\underline{a_i}' x^* < b_i$, τότε $y_i^* > 0$

κ' $w_i^* = 0$ από θ. συμπληρωμ.

Άρα, $\frac{\partial z_p}{\partial b_i} = w_i^* = 0$

→ Η βέλτιστη τιμή της α.β. δεν μεταβάλλεται για μικρές μεταβολές του b_i . Λογικό, γιατί ο περιορισμός δεν είναι ενεργός.

Παράδειγμα: Έστω ότι το (P) είναι το πρόβλημα παραγωγής τότε:

w_i = ρυθμός μεταβολής βέλτιστου κέρδους του παραγωγού, αν μεταβληθεί η διαθέσιμη ποσότητα της i -οστής πρώτης ύλης κατά "μικρή" ποσότητα.

= μονοψιφία τιμή στην οποία είναι διατεθειμένος ο παραγωγός να αγοράσει επιπλέον "μικρές" ποσότητες της πρώτης ύλης i .

Ενότητα: 4. Εισαγωγή στον Αιέριο Προγραμματισμό.

• **Γενικό πρόβλημα:** Πρόβλημα Μειτού Αιέριο Προγραμματισμού (mixed integer programming problem).

Το πρόβλημα αυτό σε κανονική μορφή είναι:

$$\begin{aligned} Z &= \max \quad c'x + h'y \\ \text{υπό: } Ax + Gy &= b \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \\ y &\in \mathbb{R}_+^p \end{aligned}$$

όπου, A πίνακας: $m \times n$, G : πίνακας: $m \times p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^p$

- ▶ Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
 - ▶ Έχει γραμμική α.β. και γραμμικούς περιορισμούς
 - ▶ Έχει m γραμμικούς περιορισμούς, εξισώσεις
 - ▶ Όλες οι μεταβλητές απόφασης παίρνουν τιμές ≥ 0
 - ▶ n από τις $n+p$ μετ. απόφασης παίρνουν μόνο αιέριες τιμές.
- } όπως π.χ.π.
σε κανονική μορφή.

Σημείωση: Ένα πρόβλημα μ.α.π. σε γενική μορφή μπορεί να είναι $\min$ ή $\max$, μπορεί να έχει και ανισώσεις και μπορεί να έχει μεταβλητές απόφασης ≤ 0 ή $\in \mathbb{R}$ ή $\in \mathbb{Z}$.

Μπορούμε να μετατρέψουμε ένα π.μ.α.π. από γενική μορφή σε κανονική μορφή, όπως κάναμε και κα το π.χ.π.

• Ειδικές Περιπτώσεις:

1. Αν $n = 0$, έχω π.χ.π.

2. Αν $p = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} Z &= \max \quad c'x \\ \text{υπό: } Ax &= b \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

πρόβλημα καθαρού αιέριου προγραμματισμού.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ένα πρόβλημα υαθάρου αθέραου προδρ. δε φενιανή μορφή μετατρέπεται πάντα δε πρόβλημα: καθ. αθέρ. προδρ. δε καθιανή μορφή;

π.χ. $\sqrt{2}x_1 + x_2 \leq 5$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Ισοδύναμα: $\sqrt{2}x_1 + x_2 + y_1 = 5$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$
αλλά $y_1 \geq 0$

άρα, πρόβλημα μειτού αθέραου προδραμ.

όμως, $\frac{5}{2}x_1 + 3x_2 \leq 40 \stackrel{?}{\Rightarrow} 5x_1 + 6x_2 \leq 40$

Ισοδύναμα: $5x_1 + 6x_2 + y_1 = 40$, με $x_1, x_2, y_1 \in \mathbb{Z}_+$ ❌

3. Ένα πρόβλημα της μορφής:

$$z = \max c^T x$$

$$\text{υπό: } Ax = b$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ονομάζεται πρόβλημα: 0-1 προδραμιατεύου (binary programming).

Αυτό το πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση του μειτού προδραμιατεύου αθέραου, αφού

$$x_j \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_j \in \mathbb{Z}_+^n \\ x_j \leq 1 \end{cases}$$

4.2. Εφαρμογές Αθέραου προδραμιατεύου.

Πολλά πρόβληματα που είδαμε στην ενότητα 1, μετατρέπεται σε προβλήματα μ.α.π. αν από τη φύση τους οι μεταβλητές απόφασης παίρνουν μόνο αθέραυες τιμές.

Θα εξετάσουμε ωρίω προβλήματα που χρησιμοποιούμε δυοτιμές μεταβλητές απόφασης να να εφράδουμε αποφάσεις τύπου ναι ή όχι.

δηλαδή, $x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν κάνουμε την ενέργεια } j. \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$