

Αναλυτική Θεωρία Αριθμών – 20 Ιανουαρίου 2026

1. (α) (1.5 μ.) Ορίζουμε $d(n)$ = το πλήθος των θετικών διαιρετών του $n \in \mathbb{N}$ και $\sigma(n)$ = το άθροισμα των θετικών διαιρετών του $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k|n} \mu(k) d\left(\frac{n}{k}\right) = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{k|n} \mu(k) \sigma\left(\frac{n}{k}\right) = n,$$

όπου μ η συνάρτηση Möbius.

(β) (1.5 μ.) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(n) \leq n(1 + \ln(n)).$$

2. (α) (1.5 μ.) Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης Euler–Maclaurin αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geq 2$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\ln(n)}{n} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

όπου A είναι σταθερά.

(β) (1.5 μ.) (i) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$.

(ii) Αν $x \geq 2$, αποδείξτε ότι $\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^2 = \frac{x^2}{\zeta(2)} + O(x \ln x)$.

3. (α) (1.5 μ.) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geq 2$ ισχύει ότι

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \ln x + O(x),$$

όπου $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ και $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & , \text{ αν } n = p^m \text{ για κάποιον πρώτο } p \text{ και κάποιον } m \geq 1 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$.

(β) (1.5 μ.) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geq 2$,

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ πρώτος}}} \frac{\ln p}{p-1} = \ln x + O(1).$$

4. (α) (1.5 μ.) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s \in \mathbb{C}}} \frac{(1-s)\zeta'(s)}{\zeta(s)} = 1.$$

(β) (1.5 μ.) Αποδείξτε ότι για κάθε $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ με $\sigma > 1$ ισχύει ότι

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx,$$

όπου ζ η συνάρτηση του Riemann.

Καλή Επιτυχία!