Αναλυτική Θεωρία Αριθμών (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 29 Απριλίου 2022)

1. Ορίζουμε $P(x) = \prod_{p\leqslant x} p$. Αποδείξτε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την

$$\lim_{x\to\infty} P(x)^{1/x} = e.$$

2. Έστω $a(n)$ φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_p a(p)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(n)}{\ln n}$ συγκλίνει.

3. Για $x \geqslant 2$ ορίζουμε

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} - \frac{2}{\ln 2}.$$

Πιο γενικά, αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + n!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} + C_n,$$

όπου C_n είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από το x.

(β) Για $x \geqslant 2$ αποδείξτε ότι

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = O\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right).$$

4. Έστω $S(x)$ και $T(x)$ πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$T(x) = \sum_{n\leqslant x} S\left(\frac{x}{n}\right)$$

για κάθε $x \geqslant 1$. Αν $S(x) = O(x)$ και c είναι μια θετική σταθερά, αποδείξτε ότι η σχέση

$$S(x) \sim cx \;\text{ καθώς το } x \to \infty$$

συνεπάγεται την

$$T(x) \sim cx\ln x \;\text{ καθώς το } x \to \infty.$$

5. Έστω $f(n)$ αριθμητική συνάρτηση και $S(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$. Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x} = \ell,$$

τότε

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n} = \ell \ln x + o(\ln x).$$

[*Σημείωση.* $g(x) = o(\ln x)$ σημαίνει $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\ln x} = 0$.]

6. Αποδείξτε ότι αν οι p, q είναι πρώτοι, τότε

$$\sum_{pq \leqslant x} \frac{1}{pq} = (\ln \ln x)^2 + O(\ln \ln x).$$

7. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n. Πιο συγκεκριμένα,

$$\omega(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } n = 1 \\ k & , \text{ αν } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \omega(n) = x \ln \ln x + O(x).$$

8. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geqslant 2$,

$$\sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \ln x + O(x).$$

9. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geqslant 1$,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\theta(n)}{n^2} = \ln x + O(1).$$

10. (α) Έστω f, f_0, g αριθμητικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f = f_0 * g$. Αν $F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)$ και $F_0(x) = \sum_{n \leqslant x} f_0(n)$, αποδείξτε ότι

$$F(x) = \sum_{d \leqslant x} g(d) F_0(x/d).$$

(β) Γράφοντας $\mu^2 = u * (\mu^2 * \mu)$ και χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$

Με την υπόθεση ότι ισχύει το θεώρημα των πρώτων αριθμών, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + o(\sqrt{x}).$$