Αναλυτική Θεωρία Αριθμών (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 3 Απριλίου 2022)

1. Αν $x \geqslant 2$ και $\alpha > 1$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{d(n)}{n^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha} \ln x}{1-\alpha} + \zeta(\alpha)^2 + O(x^{1-\alpha}).$$

2. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n. Πιο συγκεκριμένα,

$$\omega(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } n = 1 \\ k & , \text{ αν } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geqslant 3$,

$$\sum_{n \leqslant x} 2^{\omega(n)} = \frac{6}{\pi^2} x \ln x + O(x).$$

3. Αν $x \geqslant 2$ αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\phi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \ln x + \frac{\gamma}{\zeta(2)} - A + O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler και

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \ln n}{n^2}.$$

4. Έστω n τυχών θετικός ακέραιος και

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d.$$

Υποθέτουμε γνωστή την

$$\zeta(2) = \pi^2/6.$$

(α) Αποδείξτε ότι αν $n \geqslant 2$ τότε

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < \frac{\pi^2}{6} \frac{\sigma(n)}{n}.$$

(β) Έστω $x \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{n}{\varphi(n)} = O(x).$$

5. Αν $x \geqslant 2$ αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\phi(n)} = O(\ln x).$$

6. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,k)=1}} n = \frac{\phi(k)}{2k} x^2 + O(d(k)x),$$

όπου $d(k)$ είναι το πλήθος των θετικών διαιρετών του k.

7. Έστω $k \geqslant 2$. Ορίζουμε $q_k(n) = 1$ αν ο n δεν διαιρείται με k-οστή δύναμη πρώτου και $q_k(n) = 0$ αλλιώς. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} q_k(n) = c_k x + O(x^{1/k}),$$

όπου

$$c_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^k}.$$

8. Ορίζουμε $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \leqslant x} M\left(\frac{x}{n}\right) = 1.$$

9. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \geqslant 2$,

$$\sum_{p \leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p = x \ln x + O(x).$$

10. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$M(x) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} a_n \qquad \text{και} \qquad L(x) = \frac{1}{\ln x} \sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n}.$$

(α) Αν υπάρχει το $\lim_{x \to \infty} M(x) = \ell$, αποδείξτε ότι υπάρχει και το $\lim_{x \to \infty} L(x)$ και είναι επίσης ίσο με ℓ.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $a_n \in [0, 1]$ για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \to \infty} L(x)$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x \to \infty} M(x)$.