Αναλυτική Θεωρία Αριθμών (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 13 Μαρτίου 2022)

1. Έστω $d(n)$ το πλήθος των θετικών διαιρετών του n. Με άλλα λόγια, $d(n) = \sum_{d|n} 1 = (u*u)(n)$. Αποδείξτε ότι

$$\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}$$

και ότι

$$\sum_{k|n} d(k)^3 = \left(\sum_{k|n} d(k)\right)^2.$$

2. Η συνάρτηση J_k του Jordan γενικεύει τη συνάρτηση φ του Euler και ορίζεται από την

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p^k}\right).$$

Αποδείξτε ότι

$$J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)^k \qquad \text{και} \qquad n^k = \sum_{d|n} J_k(d).$$

3. Ορίζουμε $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, το άθροισμα των διαιρετών του n. Αποδείξτε ότι η $\sigma(n)$ είναι πολλαπλασιαστική και βρείτε την Dirichlet αντίστροφή της. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k|n} \sigma(k)\phi\left(\frac{n}{k}\right) = nd(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} k = \frac{n\phi(n)}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. Έστω $n \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $\phi(n) \mid n$. Αποδείξτε ότι $n = 2^a 3^b$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

6. Αν $f(n) > 0$ για κάθε n και $a(n) \in \mathbb{R}$, $a(1) \neq 0$, αποδείξτε ότι

$$g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{a(n/d)} \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad f(n) = \prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)},$$

όπου $b = a^{-1}$ είναι η αντίστροφη Dirichlet της a.

7. Έστω $P(n)$ το γινόμενο των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι από n και σχετικώς πρώτοι προς τον n. Αποδείξτε ότι

$$P(n) = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n}\left(\frac{d!}{d^d}\right)^{\mu(n/d)}.$$

8. (α) Έστω $f \neq 0$ πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$(*) \qquad (f \cdot g)^{-1} = f \cdot g^{-1}$$

για κάθε αριθμητική συνάρτηση g με $g(1) \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι αν η f είναι πολλαπλασιαστική και η $(*)$ ισχύει για την $g = \mu^{-1}$, τότε η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

9. Ορίζουμε $\nu(1) = 0$ και για $n > 1$ ορίζουμε $\nu(n)$ να είναι το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων παραγόντων του n. Αποδείξτε ότι αν $f = \mu * \nu$ τότε $f(n) = 0$ ή $f(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

10. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σταθερά $C(\epsilon) > 0$ τέτοια ώστε

$$d(n) \leqslant C(\epsilon) n^{\epsilon}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, το πλήθος των διαιρετών του n «φράσσεται» από n^{ϵ}.