Αρμονική Ανάλυση (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 1 Ιουνίου 2022)

1. Έστω $0 < \alpha \leqslant \pi$ και $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)$.

(α) Αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{\alpha}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ ισχύει

$$\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(k\alpha)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\alpha)}{k^2}.$$

2. Δίνονται $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ikx}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} \geq \sqrt{n}.$$

3. Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρική σειρά και $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f \in C(\mathbb{T})$ και υπακολουθία $\{s_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\|f - s_{k_n}\|_\infty \to 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική φραγμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Ισχύει πάντα ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$; Ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$;

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $a > \frac{1}{2}$ ισχύει $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k^a} < \infty$.

5. (α) Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.

6. (α) Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f, x)s_n(g, x)e^{-ikx} dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

7. Έστω $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} < \cdots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με
$$f_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} e^{is_n x}.$$
(α) Αποδείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{k^2}(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$
(β) Αποδείξτε ότι: αν $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$ τότε
$$\left| f_m(x) - \frac{k^2}{m} f_{k^2}(x) \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}.$$
(γ) Αποδείξτε ότι $f_m(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

8. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in (0, 2\pi)$,
$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ για $x \in [0, 2\pi)$. Έστω x_n ο μικρότερος θετικός αριθμός στον οποίο η $s_n(f, x)$ έχει τοπικό μέγιστο. Αποδείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη 2π-περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι αύξουσα και μη αρνητική στο $[-\pi, \pi)$. Αποδείξτε ότ υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_k(f)| \leqslant \frac{M}{k}$ και $|b_k(f)| \leqslant \frac{M}{k}$ για κάθε $k \geqslant 1$.

10. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$
αποδείξτε ότι $s_n(f, x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική ολοκληρώσιμη συνάρτηση, με σειρά Fourier
$$S(f, x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))$$
για κάποια ακολουθία $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ φυσικών αριθμών που ικανοποιούν την $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \gamma$ για κάποιον $\gamma > 1$ και κάθε $k \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι $s_n(f, x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.