Διάλεξη 6 — Μέθοδος Ασυμπτωτικών Αναπτυγμάτων

Μέρος I — Η ομαλή περίπτωση

(Ασκήσεις 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 για την ερχόμενη φορά)

Παρ

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1+\varepsilon(e^{-t}-1)} \qquad (\text{Bernoulli})$$

Φιξάροντας t, ανάπτυγμα Taylor ως προς ε:

$$f_t(\varepsilon) = \frac{e^{-t}}{1+\varepsilon(e^{-t}-1)} = f_t(0) + f_t'(0)\varepsilon + \frac{1}{2} f_t''(0)\varepsilon^2 + \dots$$

$$= e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}) + \dots$$

$$\Big(= e^{-t} + e^{-t}(1-e^{-t})\varepsilon + e^{-t}(1-e^{-t})^2\varepsilon^2 + \dots + e^{-t}(1-e^{-t})^k\varepsilon^k + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}[\varepsilon(1-e^{-t})]^k = \frac{1}{1-\varepsilon(1-e^{-t})} \Big)$$

Σειρά συγκλίνει !

Αναζητούμε λύση της (1) της μορφής

$$(2)\quad y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots$$

Τα $y_0(t), y_1(t), \ldots$ θα προσδιοριστούν.

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0(t) + \varepsilon \dot{y}_1(t) + \ldots$$

$$-y(t) + \varepsilon y^2(t) = -\left(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots\right) + \varepsilon\left(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots\right)^2$$

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon^0}: & \dot{y}_0 = -y_0 \iff \dot{y}_0 + y_0 = 0 \\ \underline{\varepsilon^1}: & \dot{y}_1 = -y_1 + y_0^2 \iff \dot{y}_1 + y_1 = y_0^2 \\ \underline{\varepsilon^2}: & \dot{y}_2 = -y_2 + 2y_0 y_1 \iff \dot{y}_2 + y_2 = 2y_0 y_1 \\ & \vdots \end{cases}$$

<u>Δομή</u>

γνωστή ποσότητα από $(k-1)$ βήμα.

$$L y_k = \boxed{} \quad , \quad L = \frac{d}{dt} + I$$

γραμμικός

<u>Αρχική Συνθήκη</u>

$$1 = y(0) = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) +$$

$$(4) \quad y_0(0) = 1, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Έχουμε $(3)+(4)$:

$$y_0(t) = e^{-t}, \quad y_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad y_2(t) = e^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-5t}$$

?

Παρατήρηση

Κόβοντας αυθαίρετα την σειρά $\sqrt{\text{κ όρους}}$ παίρνουμε, ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ως προ
προσέγγιση «$O(\varepsilon^{\kappa+1})$».

Π.χ.

(5) $$\begin{cases} y_{\pi\rho o\sigma}(t) = e^{-t} + \varepsilon\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \\ \left| y_{\alpha\kappa\rho\iota\beta\omega\varsigma}(t) - y_{\pi\rho o\sigma}(t) \right| < C\varepsilon^2, \quad \text{ομοιόμορφα για } t > \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ασ 3.3}}$

Μέρος II - Ιδιόμορφη Περίπτωση

Παρ (Duffing)

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \\ u(0) = 1 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

Ασ. Ανάπτυγμα

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots$$

$$\left(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots\right)^{\cdot\cdot} + \left(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots\right) + \varepsilon\left(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots\right)^3 = 0$$

ε^0 : $\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad \dot{u}_0(0) = 0$

ε : $\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3, \quad u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0$

ε^2 : $\ddot{u}_2 + u_2 = -3u_0^2 u_1, \quad u_2(0) = \dot{u}_2(0) = 0$

$\vdots$

Έχουμε:

$$\cos^3 t = \frac{1}{4}(\cos 3t + \underbrace{3\cos t}_{\text{ομογενής}})$$

$$u_0(t) = \cos t$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\cos^3 t \Rightarrow u_1(t) = \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8} t \cos t$$

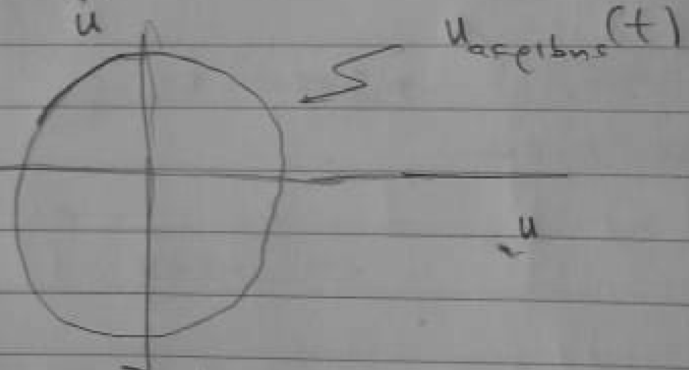
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ! $t\cos t$ όρος

$$u_{προσ}(t) = \cos t + \varepsilon\left(\frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) - \frac{3}{8} t \cos t\right).$$

6) $|u_{ακριβής}(t) - u_{προσ}(t)| \overset{?}{<} C\varepsilon^2$, ομοιόμορφα t

ΑΔΥΝΑΤΟΝ! $|u_{ακριβής}(t)| < C$??

(από Ενέργεια Χαμιλτονιανή)



$|u_{προσ}(t)| \to +\infty$ όπως $t \to +\infty$.

ΕΠΙΣΗΣ $u_{προσ}(t)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ.

Ανεπαρκής προσέγγιση!

38

Μέθοδος Πολλαπλών Κλιμάκων Poincare – Linstedt

$t = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)\tau$, $\omega_1, \omega_2, \dots$ επιλέγουν.

$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$

$\frac{d}{d\tau} = '$

$\frac{d}{dt} = \dot{}$

$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{du}{d\tau}\frac{1}{1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\dots}$

$\cos^3\tau = \frac{1}{4}(\cos 3\tau + 3\cos\tau)$

$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{du}{d\tau}\frac{1}{1+\varepsilon\omega_1+\dots}\right)\frac{d\tau}{dt}$

$= \frac{d^2u}{d\tau^2}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\omega_1+\dots}\right)^2$

$\rightarrow (1+2\varepsilon\omega_1+\dots)\left[u_0+\varepsilon u_1+\dots + \varepsilon(u_0+\varepsilon u_1+\dots)^3\right]$

$\therefore$

(4) $u'' + (1+\varepsilon\omega_1+\dots)^2\left[u+\varepsilon u^3\right] = 0$

$u(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \dots$

$\varepsilon^0: u_0'' + u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad u_0'(0) = 0 \Rightarrow u_0 = \cos\tau$

$\varepsilon^1: u_1'' + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 u_0 = -\cos^3\tau - 2\omega_1\cos\tau$

$u_1(0) = u_1'(0) = 0$

$= -\frac{\cos 3\tau}{4} - \frac{3}{4}\cos\tau - 2\omega_1\cos\tau$

$\vdots$

$= -\cos\tau\left(\frac{3}{4} + 2\omega_1\right) - \frac{\cos 3\tau}{4}$

ΑΠΟΦΥΓΟΥΜΕ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ !

(Μη φραγμενη λυση)

(8) $$2\omega_1 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \omega_1 = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow u_1(\tau) = \frac{1}{32}\left(\cos 3\tau - \cos\tau\right)$$

ε - προσεγγιση $u_{\pi\rho}(\tau)$:

$$u_{\pi\rho o\sigma}(\tau) = \cos\tau + \frac{\varepsilon}{32}\left(\cos 3\tau - \cos\tau\right)$$

$$= \cos\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right) + \frac{\varepsilon}{32}\left(\cos 3\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right) - \cos\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon t\right)\right)$$

$$\tau = \left(1 + \varepsilon\omega_1 + \dots\right)^{-1} t \simeq \left(1 - \varepsilon\omega_1\right)t = \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t$$

Προσεγγιση Περιοδικη!

2 κλιμακες Χρονου ! $(t, \varepsilon t)$

Ισχυει

$$|u_{\alpha\kappa\rho\iota\beta\eta\varsigma}(t) - u_{\pi\rho o\sigma}(t)| < C\varepsilon^2$$

Ομοιομορφα στον Χρονο !