

Καραφύλης Ευαγγέλιος Α.Μ. 201301

$$\underline{3.17} \quad \varepsilon y'' + \frac{1}{t} y' + y = 0 \quad t > 0 \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

Εξωτερικό Αναπτύγμα $\varepsilon = 0$

$$\frac{1}{t} y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} = -y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -t dt$$

$$\Leftrightarrow \ln y = -\frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y = c e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \quad \text{Άρα} \quad y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$y'(t) = -t e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow y'(0) = 0$$

Δικανοποιεί και τις δύο συνοριακές συνθήκες.

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad y'(t) = -t e^{-\frac{t^2}{2}} \quad y''(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} = (t^2 - 1) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\varepsilon y'' + \frac{1}{t} y' + y = \varepsilon (t^2 - 1) e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{t} (-t e^{-\frac{t^2}{2}}) + e^{-\frac{t^2}{2}} = \varepsilon (t^2 - 1) e^{-\frac{t^2}{2}} = O(\varepsilon).$$

Άρα το εξωτερικό ανάπτυγμα δίνει μια ομοιόμορφη προσέγγιση και το πρόβλημα δεν έχει οριακό ερώμα.

Εσωτερικό Ανάπτυγμα $\varepsilon y'' + \frac{1}{t} y' + y = 0$

$$t = \frac{n}{\delta} \Rightarrow n = t\delta \quad \text{Άρα} \quad \frac{\varepsilon}{\delta^2} \ddot{y} + \frac{1}{t} \frac{1}{\delta} \dot{y} + y = 0$$

$$\text{Έστω} \quad \frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \frac{1}{\delta} \Rightarrow \varepsilon = \delta \quad \text{Άρα} \quad \frac{1}{\varepsilon} \ddot{y} + \frac{1}{n} \frac{1}{\varepsilon} \dot{y} + y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + \varepsilon y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = c$$

$$\text{Αφού} \quad \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \Rightarrow y = k.$$

$$\text{Αφού} \quad y(0) = 1 \Rightarrow y = 1. \quad \text{Μη αποδεκτή.}$$

$$\text{Έστω} \quad \frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim 1 \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}. \quad \text{Άρα} \quad \ddot{y} + \frac{\varepsilon}{n} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \dot{y} + y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{n} \dot{y} + y = 0 \quad \varepsilon = 0 \Rightarrow \ddot{y} + y = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i \quad \text{Άρα} \quad y(n) = c_1 \cos n + c_2 \sin n$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \quad \text{Άρα} \quad y(n) = \cos n + c_2 \sin n$$

$$y'(n) = -\sin n + c_2 \cos n \quad y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Άρα} \quad y(n) = \cos n \Rightarrow y(t) = \cos \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t^2/2} = 1 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(t) \quad \text{δεν υπάρχει}$$

$$\text{Έστω} \quad \frac{1}{\delta} \sim 1 \Rightarrow \delta = 1 \quad \text{Άρα} \quad \varepsilon \ddot{y} + \frac{1}{n} \dot{y} + y = 0$$

Μη αποδεκτό
Το πρόβλημα
είναι ίδιο
με το αρχικό.

Καμία αλλαγή κλίμακας δεν δουλεύει.