Λύση: Αρχικά θέτουμε $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ οπότε

$$\theta'' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}.$$

Ως προς ω η (1.53) γράφεται

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} + p\omega^2 + q\sin\theta = 0,$$

ισοδύναμα

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\omega^2\right) + p\omega^2 + q\sin\theta = 0.$$

Θέτοντας $y = \frac{1}{2}(\theta')^2 = \frac{1}{2}\omega^2$ παίρνουμε

$$\frac{dy}{d\theta} + 2py = -2q\sin\theta,$$

η οποία είναι πρώτης τάξης ως προς y.

Παράδειγμα 1.26 (Αλυσοειδές) Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{y\,(1+(y')^2)^{1/2}}, \tag{1.54}$$

για $y = y(x) > 0$, με αρχικές συνθήκες $y(0) = a > 0$, $y'(0) = 0$. Απλοποιώντας την (1.54) οδηγούμαστε στην

$$y'' = \frac{1+(y')^2}{y}.$$

Θέτοντας $V = y'$, $V = V(y)$, και ακολουθώντας τη διαδικασία που οδήγησε στην (1.47) παίρνουμε, σε περιοχή όπου $y' \neq 0$,

$$\frac{V\,dV}{1+V^2} = \frac{dy}{y},$$

απ' όπου ολοκληρώνοντας (υπενθυμίζουμε ότι $y > 0$)

$$\frac{1}{2}\ln(1+V^2) = \ln y + \ln k,$$

δηλαδή

$$(1+V^2)^{\frac{1}{2}} = ky \quad \Leftrightarrow \quad V^2 = k^2y^2 - 1\ ,$$

όπου k η σταθερά ολοκλήρωσης. Τώρα επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, και υποθέτοντας ότι $y' > 0$, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{k^2y^2-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{k\,dy}{\sqrt{k^2y^2-1}} = k\,dx,$$

απ' όπου με μία ακόμη ολοκλήρωση

$$\ln\left(ky + \sqrt{k^2y^2 - 1}\right) = kx + c,$$

ή ισοδύναμα

$$y(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx + c),$$

όπου k, c σταθερές. Τέλος θα χάνουμε χρήση των αρχικών συνθηκών για να προσδιορίσουμε τις σταθερές:

$$y'(x) = \sinh(kx + c),$$

οπότε έχουμε

$$0 = y'(0) = \sinh(c) \quad \Rightarrow \quad c = 0\,,$$

και

$$a = y(0) = \frac{1}{k},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

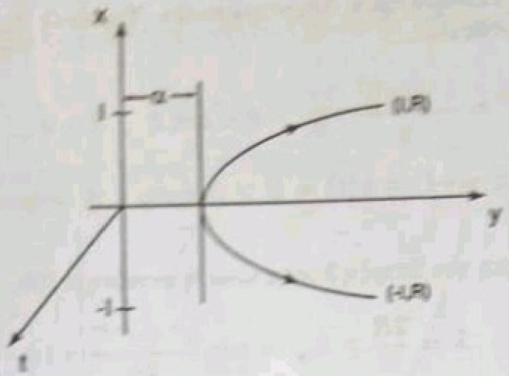
$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

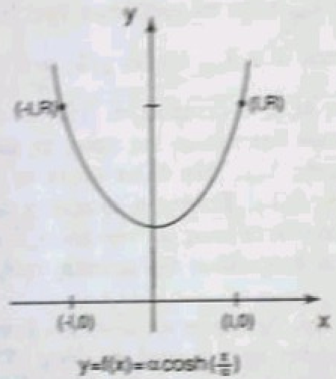
Η συνάρτηση $y(x)$ έχει σπουδαίες ιδιότητες. Θεωρούμε το γράφημα της y στο διάστημα $[-\ell, \ell]$. Έστω $y(-\ell) = y(\ell) = R$ (Σχήμα 1.5). Το γράφημα της $y(x)$ περιγράφει με ακρίβεια το σχήμα εύκαμπτης αλυσίδας υπό την επήρεια της βαρύτητας, που είναι στερεωμένη στα σημεία $(-\ell, R), (\ell, R)$ επί του κάθετου $x - y$ επιπέδου. Ακόμη τ… εντυπωσιακή είναι η εξής γεωμετρική ιδιότητα του αλυσοειδούς: η επιφάνεια εκ περιστροφής ως προς τον άξονα των x συμβαίνει να είναι η **ελάχιστη επιφάνεια** που συνδέει τους δύο δακτυλίους ακτίνας R (βλ. Σχήμα 1.6 και σχόλια στο Παράδειγμα 1.27). Δηλαδή έχει το μικρότερο εμβαδόν μεταξύ όλων των επιφανειών (όχι μόνο τω-ν εκ περιστροφής) που συνδέουν τους δύο δακτυλίους. Για παράδειγμα η αλυσοειδής επιφάνεια έχει λιγότερο εμβαδό από τον αντίστοιχο κύλινδρο. Στην εφαρμογή αυτή βλέπουμε τη σχέση μεταξύ της βαρύτητας (δυναμική ενέργεια) και της γεωμετρίας (εμβαδόν επιφάνειας) που θυμίζει το πνεύμα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

Παρατήρηση 1.3 Η γραφή της (1.54) ίσως φαίνεται παράξενη στον αναγνώστη. Παρατηρούμε όμως ότι το αριστερό μέλος είναι ίσο με την καμπυλότητα της $y(x)$ που δείχνει καθαρά τη γεωμετρική προέλευση της εξίσωσης. Η προέλευση της εξίσωσης από τη μηχανική φαίνεται από το γεγονός ότι η (1.54), ή καλύτερα η απλοποίησή της, είναι η *Euler* − *Lagrange* εξίσωση του μεταβολικού προβλήματος

$$Min \int pgy(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx,$$

δηλαδή της ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας της αλυσίδας.





Σχήμα 1.5: Επάνω: Περιστροφή ως προς τον άξονα x παράγει το αλυσοειδές. Κάτω: Αλυσίδα $y = f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ στερεωμένη στα σημεία $(\pm\ell, R)$ του κάθετου x, y-επιπέδου.

Σχήμα 1.6: Η επιφάνεια του αλυσοειδούς.

με την εξίσωση του αλυσοειδούς

$$y'' = \frac{1 + (y')^2}{y} \quad , \quad -\ell < x < \ell \ , \ \ell > 0 \, ,$$

με συνοριακές συνθήκες $y(-\ell) = y(\ell) = R > 0$, όπου ℓ, R δοσμένες θετικές πα-
τροι. Να δειχθεί ότι:

(α) Αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη λύσης είναι η ανισότητα (βλ. Σχήμα 1.7)

$$\lambda := \frac{2R}{2\ell} \geq \lambda_{\kappa\rho} := \min_{x>0} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} \simeq 1.5.$$

(β) Στην περίπτωση που $\lambda > \lambda_{\kappa\rho}$ τότε το πρόβλημα έχει δύο λύσεις.

(γ) Στην χρίσιμη περίπτωση που $\lambda = \lambda_{\kappa\rho}$ ισχύει $y(0) > 0$ (ακτίνα του «λαιμού»

Από τα (α) και (β) εξάγεται το εξής συμπέρασμα: για να υπάρχει τέτοια επιφά-
πρέπει ο λόγος της διαμέτρου των δακτυλίων ως προς τη μεταξύ τους απόσταση
είναι μεγαλύτερος ή ίσος της τιμής $\lambda_{\kappa\rho}$. Με άλλα λόγια οι δακτύλιοι δε μπορού-
είναι πολύ μακριά ο ένας από τον άλλο. Επίσης ο «λαιμός» του χρίσιμου αλυσοει-
($\lambda = \lambda_{\kappa\rho}$) δεν είναι μηδενικός, αντίθετα ίσως με την κοινή διαίσθηση. Δηλαδή κα-
πλησιάζει η απόσταση μεταξύ των δακτυλίων την χρίσιμη τιμή, το εύρος στο λαι-
τείνει στο μηδέν.

Από τα δύο αλυσοειδή, αυτό που βρίσκεται «από κάτω» δεν ελαχιστοποιεί την
πλευρη επιφάνεια και λόγω αυτού δεν έχει φυσική σημασία. Υπάρχει μία ενδια-
αναλογία με το πρόβλημα της ελάχιστης απόστασης μεταξύ δύο σημείων P και Q
επιφάνεια της σφαίρας. Εκεί η λύση κατασκευάζεται γεωμετρικά από το μέγιστο κύ-
που περνάει από τα σημεία P και Q. Το μικρό τόξο PQ αντιστοιχεί στο αλυσοειδές
ελαχιστοποιεί, ενώ το μεγάλο τόξο QP (που μεγιστοποιεί την απόσταση) αντι-
στο άλλο αλυσοειδές.

Αυτό το μαθηματικό αποτέλεσμα περιγράφει με εντυπωσιακή ακρίβεια το σχή-
της μεμβράνης από σαπουνόνερο μεταξύ δύο δακτυλίων, καθώς και τον χρίσιμο
διαμέτρου προς απόσταση έτσι ώστε η δημιουργία της μεμβράνης να είναι δυνατή

Λύση: Όπως και στο Παράδειγμα 1.26 η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx + c),$$

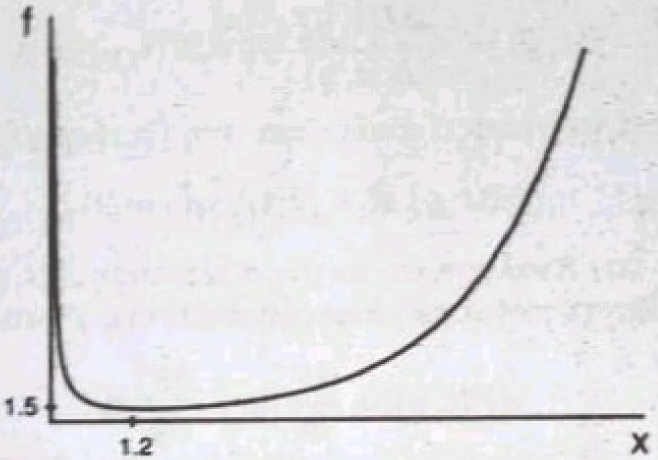
όπου k, c σταθερές. Πρώτα δείχνουμε ότι η συνθήκη $y(\ell) = y(-\ell) > 0$ δίνει $c =$
Πράγματι από την $\cosh(k\ell + c) = \cosh(-k\ell + c)$ προκύπτει εύκολα ότι $e^c =$
και συνεπώς $c = 0$. Εφ' όσον η $y(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx)$ είναι άρτια συνάρτηση αρκεί
ικανοποιήσουμε την $y(\ell) = R$, δηλαδή

$$\frac{1}{k}\cosh(k\ell) = R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2k}\left(e^{k\ell} + e^{-k\ell}\right) = R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{k\ell} + e^{-k\ell}}{2k\ell} = \frac{2R}{2\ell},$$

όπου k είναι η άγνωστη ποσότητα, και R, ℓ οι δοσμένες παράμετροι. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2x},$$

που έχει γράφημα όπως στο Σχήμα 1.7. Πράγματι



Σχήμα 1.7: Γράφημα της $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

και συνεπώς η ελάχιστη τιμή $\lambda_{\kappa\rho}$ της f λαμβάνεται για πεπερασμένο $x = \overline{x}$:

$$\lambda_{\kappa\rho} := \min_{x>0} f(x) = f(\overline{x}),$$

όπου

$$f'(\overline{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{\overline{x}} + e^{-\overline{x}}}{e^{\overline{x}} - e^{-\overline{x}}} = \overline{x}.$$

Με τη βοήθεια υπολογιστή βρίσκουμε ότι $\overline{x} \simeq 1.2$ και $f(\overline{x}) \simeq 1.5$. Έπεται ότι η εξίσωση ως προς k

$$\frac{e^{k\ell} + e^{-k\ell}}{2k\ell} = \frac{2R}{2\ell},$$

έχει λύση αν και μόνο αν

$$\frac{2R}{2\ell} \geq \lambda_{\kappa\rho}.$$

Από το γράφημα της f βλέπουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του k για $\lambda > \lambda_{\kappa\rho}$. Για $\frac{2R}{2\ell} = \lambda_{\kappa\rho}$ έχουμε μοναδική λύση $k = k_{\kappa\rho} > 0$ με αντίστοιχο εύρος «λαιμού»

$$y(0) = \frac{1}{k_{\kappa\rho}} > 0.$$

Τέλος για $\lambda < \lambda_{\kappa\rho}$ η εξίσωση δεν έχει λύση.