ΚΑΤ' ΟΙΚΟΝ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ Ι

ΜΕΡΟΣ Ι (Μερη Ι, ΙΙ, ΙΙΙ).

1) α) Θεωρουμε την

$$y^6 - 5xy^5 + x^3y^4 - 7x^2y^2 + 6x^3 + x^4 = 0.$$

Βρειτε τους πρωτευοντες ορους ολων των πραγματικων ριζων σε περιοχη της (0,0) στο x-y επιπεδο.

β) Θεωρηστε το πολυωνυμο $6^{ου}$ βαθμου που προκυπτει αθροιζοντας μονο τους ορους επι της κυρτης γραμμης. Βρειτε τις ριζες ακριβως.

#

2) Θεωρουμε το Π.Σ.Τ.

$$\varepsilon y'' - x^{\alpha} y' - y = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 1$$

για ολες τις τιμες $\alpha \geq 0$. Βρειτε την ομοιομορφη προσεγγιση ε-ταξης. Εξεταστε την υπαρξη οριακων στρωματων, το παχος της κ.λ.π. Οργανωστε την απαντηση σας αναλογα με τις περιπτωσεις $\alpha = 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$.

#

3) α) Θεωρηστε την

$$\frac{d^2u_0}{d\theta^2} + u_0 = a, \qquad a \text{ σταθερα} > 0$$

Δειξτε οτι η $r = \dfrac{\lambda}{a + A\sin\theta}$, $(A > 0)$, $u_0 = \dfrac{1}{r}$, ειναι 2π-περιοδικη λυση. Τι παριστανει η $r = r(\theta)$ στο x-y επιπεδο;

) Θεωραμε την

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = a(1+\varepsilon u^2), \quad 0<\varepsilon \ll 1$$

Πρωτα μεσω της μεθοδου κανονικων ασυμπτωτικων αναπτυγματων αναζητωμε 2π-περιοδικη λυση,

$$u(\theta) = u_0(\theta) + \varepsilon u_1(\theta) + \dots$$

Δειξτε οτι αυτη η μεθοδος δεν οδηγει σε 2π-περιοδικη διορθωση ε-ταξης (υπολογιστε την $u_1(\theta)$).

γ) Κανοντας χρηση της Poincaré-Lindestdt:

$X = \omega\theta$, $\omega = 1+\varepsilon\omega_1$, βρειτε την 2π-περιοδικη διορθωση ε-ταξης και δειξτε οτι η μεταβολη της περιοδου της $u_0(\theta)$ δινεται απο την σχεση

$$\Delta T = 2\pi a^2 \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

#

4) Θεωραμε το συστημα

$$\dot{x} = x(k - ay + \varepsilon f(x,y)), \quad a, k, l, b > 0$$
$$\dot{y} = y(-l + bx + \varepsilon g(x,y))$$

Δειξτε οτι το συστημα για $|\varepsilon| \ll 1$ εχει ενα σημειο ισορροπιας $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$, με $x(0) = \frac{l}{b}$, $y(0) = \frac{k}{a}$.

#