<u>Διάλεξη 17</u>

$$J(f)=\int_a^b L(x,f(x),f'(x))dx \quad , L(x,y,z)$$

<u>Διευκρινήσεις</u>

Για λόγους απλότητας ακολουθούμε τον Lagrange και επιλέγουμε το Πεδίο Ορισμού της J

$$A=\{ f\in \underline{\underline{C^2[a,b]}},\ f(a)=y_1 ,\ f(b)=y_2 \}$$

<u>Επίσης</u> $L(x,y,z)$, $L(\cdot,\cdot,\cdot)\in C^2([a,b]\times \mathbb{R}^2)$

$h\in C_0^2[a,b]$, δηλαδή $h\in C^2[a,b]$, $h(a)=h(b)=0$.

(*) Έστω $y(\cdot)\in A$ που επιτυγχάνει $\underset{A}{\operatorname{Min}} J$

$g(\varepsilon)=J(y(\cdot)+\varepsilon h(\cdot))$

Έχουμε $y(\cdot)+\varepsilon h(\cdot)\in A$

- $\varepsilon\to g(\varepsilon)$, $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ είναι C^1 συνάρτηση, και g έχει μέγιστο στο $\varepsilon=0$

$$\Big(\frac{d}{d\varepsilon}g(\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b L(x,y(x)+\varepsilon h(x),y'(x)+\varepsilon h'(x))dx$$

$$=\int_a^b L_y(x,y(x)+\varepsilon h(x),y'(x)+\varepsilon h'(x))h(x)+L_z(x,y(x)+\varepsilon h(x),y'(x)+\varepsilon h'(x))h'(x)$$

$$g(0)=J(y(\cdot))\overset{(*)}{\geq} J(y(\cdot)+\varepsilon h(\cdot)) \Big)$$

Ισοδύναμα

(1)
$$g'(0)=0$$

$\iff$

(2) $$\int_a^b [L_y(x,y,y')h + L_z(x,y,y')h']\,dx = 0 \iff$$

$$\int_a^b [L_y(x,y,y')h + \frac{d}{dx}[L_z(x,y,y')h] - \frac{d}{dx}[L_z(x,y,y')]h$$

$$= \int_a^b [L_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}[L_z(x,y,y')]]h\,dx.$$

$$\left(\int_a^b \frac{d}{dx}[L_z(\,)h]\,dx = L_z(\,)\cancel{h(b)}^{0} - L_z(\,)\cancel{h(a)}^{0} = 0\right)$$

<u>Θεμελιώδες Λήμμα του Λογισμού των Μεταβολών</u>

Έστω $f\in C[a,b]$ και

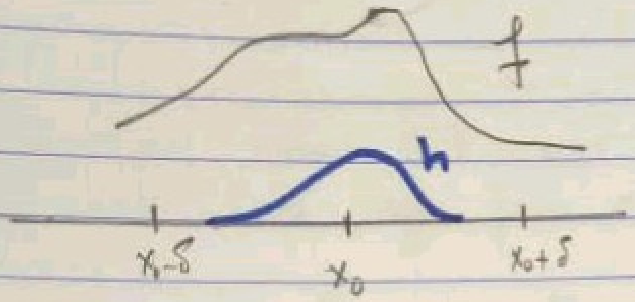
(3) $$\int_a^b f(x)h(x)\,dx=0 \quad \forall h\in C_0^2[a,b]$$

Τότε
$$f\equiv 0$$

<u>Απόδειξη</u>

Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω $f\not\equiv 0$. Τότε $\exists\, x_0\in(a,b)$ τ.ω. $f(x_0)\neq 0$. Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $f(x_0)>0$ (αν $f(x_0)<0$ τότε θεωρούμε την $-f(x)$).

Από συνέχεια $\exists\, \delta>0$ τ.ω. $f>0$ για $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$



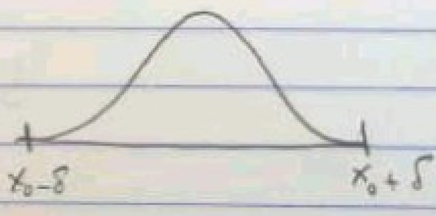
Αρκεί να επιλέξουμε μια $h>0$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, και $h=0$ στο $[a,b]\setminus(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

<u>Άτοπο</u>

$$0=\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,h(x)\,dx>0.$$

<u>Παράδειγμα h</u>

$$h(x)=\begin{cases}(x-x_1)^3(x-x_2)^3, & x_1=x_0-\delta,\ x_2=x_0+\delta\\ 0, & x\notin[x_0-\delta, x_0+\delta]\end{cases}$$



<u>Πόρισμα</u>

$$(EL)\quad L_y(x,y(x),y'(x))-\frac{d}{dx}\left[L_z(x,y(x),y'(x))\right]=0$$

<u>Απόδειξη</u>

(2) + Θεμελιώδες Λήμμα.

□

Σημείωση

Δεν χρησιμοποιήσαμε στην (1) ότι $\varepsilon \to g(\varepsilon)$ έχει ελάχιστο στο $\varepsilon = 0$, αλλά μόνο ότι έχει <u>ακρότατο</u> (π.χ. και μέγιστο θα έδινε την ίδια συνθήκη).

Σημείωση

Η (EL) είναι εξ. $2^{ας}$ τάξης ως προς $y(x)$.

Παραδείγματα

1) Βρείτε τα ακρότατα του

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 3y + 2x)\,dx \quad , y(0) = 0 \quad , y(1) = 1$$

$$L(x,y,z) = z^2 + 3y + 2x$$

$$L_y = 3, \qquad L_z = 2z$$

$$(EL) \qquad 3 - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \iff 3 = 2y''$$

$$y = \frac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$
$$y(1) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}.$$

2) Βρείτε τα ακρότατα του συναρτησιακού του μήκους

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad ,$$

$$A = \{ y(\cdot) \in C^2[a,b],\ y(a) = y_1,\ y(b) = y_2 \}$$

$$L(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$$

$$L_y = 0, \quad L_z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\Rightarrow \quad y' = K$$

$$\Rightarrow \quad y = Kx + M$$

K, M μέσω Σ.Σ.

□

<u>Ειδικές Μορφές Lagrangian $L(x,y,z)$</u>

1) $L = L(x,y) \Rightarrow$ (EL) $L_y(x,y) = 0$
Αλγεβρική! (Ανεξάρτητη του y' !)

2) $L = L(x,y') \Rightarrow$ (EL) $L_z(x,y') =$ σταθερά
(1^o ολοκλήρωμα) (Ανεξάρτητη του y !)

3) $L = L(y,y') \Rightarrow$

(*) $L(y,y') - y' L_z(y,y') =$ σταθερά
(1^o ολοκλήρωμα) (Ανεξάρτητη του x !)

Απόδειξη (*)

$$\frac{d}{dx}\left[L(y,y') - y' L_z(y,y')\right]$$

$$= L_y y' + \cancel{L_z y''} - \cancel{y'' L_z} - y' \frac{d}{dx}\left[L_z(y,y')\right]$$

$$= y' \Big\{ \underbrace{L_y - \frac{d}{dx}\left[L_z(y,y')\right]}_{(EL)} \Big\}$$

$$= 0 \quad .$$

□

Παράδειγμα (Βραχυστόχρονος).

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g\,(y_1 - y(x))}}\, dx \quad , \quad \begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \\ y_1 > y_2 \end{array}$$

Ανεξάρτητο του x $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y_1 - y}} - (y')^2 \frac{(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{y_1 - y}} = C$$