## Διάλεξη 4

### Άσκηση 3.20

$$\varepsilon y'' - x^2 y' - y = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 1$$

Βρείτε την ομοιόμορφη προσέγγιση 2 τάξης.

**Παρατήρηση**

Δεν εμπίπτει στο Θ 3.1 του Logan:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 , & 0 < x < 1 \\ y(0) = a, \quad y(1) = b \end{cases}$$

Υπόθεση: p, q συνεχείς στο $[0,1]$, $p(x) > 0$ στο [0

Ορ. Στρώμα στο $x = 0$,

$$y_{εξ}(x) = b e^{\int_x^1 q(s)/p(s)\, ds}$$

$$Y_{εσ}(\eta) = C_1 + (a - C_1) e^{-p(0)\eta} \quad , \quad \eta = \frac{x}{\varepsilon}$$

Συναρμογή: $C_1 = b e^{\int_0^1 q(s)/p(s)\, ds}$

Αν $p(x) < 0$ στο $[0,1]$ τότε το Ορ. Στρώμα στο

Φυσική Εξήγηση (Ο ρόλος της πίεσης στην δημιουργία Ο

Θεωρούμε το x σαν χρόνο, t

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t) y = 0 \qquad 0 \le t \le 1$$

$\varepsilon y'' = -py' - qy$ $\qquad F = ma$

Εστω $y' > 0$. Τοτε $p > 0$ σημαινει αναχεση - αποσβεσ
(τριβη). Η μαζα $\varepsilon > 0$ μικρη

∴ Η Αποσβεση θα καθορισει την κινηση στο μελλον, ο ορος $\varepsilon y''$ θα ειναι αμελητεος στο μελλον, συνεπως το οριακο στρωμα θα ειναι στο παρελθον.

Αντιθετως αν $p < 0$, που σημαινει απορροφηση ενεργειας απ το συστημα, αρα επιταχυνση της κινησης, και συνεπως αυξανομενη σημασια του ορου $\varepsilon y''$ στο μελλον, αμελητεος στο παρελθον, αρα το οριακο στρωμα θα ειναι στο μελλον.

$p$ πιεση λογω Navier-Stokes (αναλογια).

□

Λυση της 3.20

Αναμεναμε απο Θ 3.1 οτι στο $x = 1$ Ορ. Στ.
Εκπληξη: Και στο $x = 0$ ! (2 Στρωματα).

$x = 0$

Εστω $\nexists$ Ορ. Στρ. (δηλαδη $\varepsilon y'' \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, $|y'(0)| < \infty$

$\overset{\varepsilon = 0}{\Longrightarrow} \quad -x^4 y' - y = 0 \quad , \quad y(0) = 1$

$\Longrightarrow \quad y' = -\dfrac{y}{x^4} \sim -\dfrac{1}{x^4}$ ⊗.

Λημμα : $0 \le y(x) \le 1$.

Αποδειξη

Εστω $\max\limits_{[0,1]} y(x) = y(x_M) > 1$

$\Rightarrow$

$x_M \in (0,1)$

$0 = \varepsilon y''(x_M) - y(x_M) \Rightarrow y''(x_M) > 0$ $\not\!\!\!\emptyset$

Εστω $\min\limits_{[0,1]} y(x) = y(x_m) < 0$

$\Rightarrow$

$x_m \in (0,1)$

$0 = \varepsilon y''(x_m) - y(x_m) \Rightarrow y''(x_m) < 0$ $\not\!\!\!\emptyset$

$\square$

A. Εξωτερικο Αναπτυγμα

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ $-x^4 y_0' - y_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = C_0 e^{\frac{1}{3x^3}}$

Λημμα $\Rightarrow$ $C_0 = 0$

B. Εσωτερικο Αναπτυγμα στο $x = 1$

$p(x) = -x^4 \approx -1 \Rightarrow$ οπως στον Logan $\quad \eta = \frac{1-x}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} \ddot{Y} + (1-\varepsilon\eta)^4 \frac{1}{\varepsilon} \dot{Y} - Y = 0$

$$\ddot{Y} + \dot{Y}(1-\varepsilon\eta)^4 - \varepsilon Y = 0$$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow \ddot{Y} + \dot{Y} = 0 \Rightarrow Y(\eta) = A_0 + B_0 e^{-\eta}$

$Y(0) = 1 \Leftrightarrow A_0 + B_0 = 1$

Γ. Συναρμογη στο $x=1$

$$\lim_{\eta \to \infty} Y(\eta) = 0 \quad (= y_0)$$

$\Rightarrow A_0 = 0 \quad , B_0 = 1$

Δ. Εσωτερικο Αναπτυγμα στο $x=0$

Κλιμακα

$\eta = \frac{x}{\delta} \quad , \quad Y(0) = 1$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\ddot{Y} - \delta^3\eta^4\dot{Y} - Y = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \delta^3 \quad , \frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim 1 \quad , \quad \delta^3 \sim 1$$

(α) $\delta^3(\ddot{Y} - \eta^4\dot{Y}) - Y = 0 \Rightarrow Y = 0$, μη αποδεκτη

(γ) $\varepsilon\ddot{Y} - \eta^4\dot{Y} - Y = 0$, συμπιπτει με εξωτερικη.
μη αποδεκτη

(β) Η Μονη Επιλογη.

$\varepsilon \sim \delta^2$

$$\ddot{Y} - \varepsilon^{3/2}\eta^4 \dot{Y} - Y = 0 \quad , \quad Y(0) = 1$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{Y} - Y = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y(\eta) = D_0 e^{\eta} + E_0 e^{-\eta} \quad , \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

ημμα

$\Rightarrow \quad D_0 = 0$

$\Rightarrow \quad E_0 = 1$

## Συναρμογη

$$\lim_{\eta \to \infty} Y(\eta) = 0 \quad ✓$$

## Ομοιομορφη Προσεγγιση

$$y_{op}(x) = e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{1-x}{\varepsilon}}$$