Διάλεξη 3

2. Van der Pol ταλαντωτής

(1) $$\ddot{x} = -x + \varepsilon \dot{x}\,(1-x^2)$$

Μορφή συστήματος: $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2 (1-x_1^2) \end{cases}$$

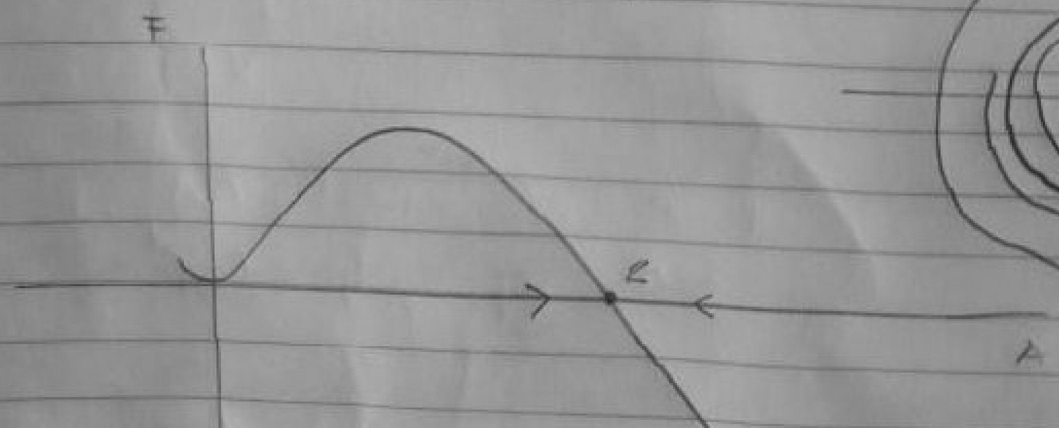
$f_1(x_1,x_2) = 0$

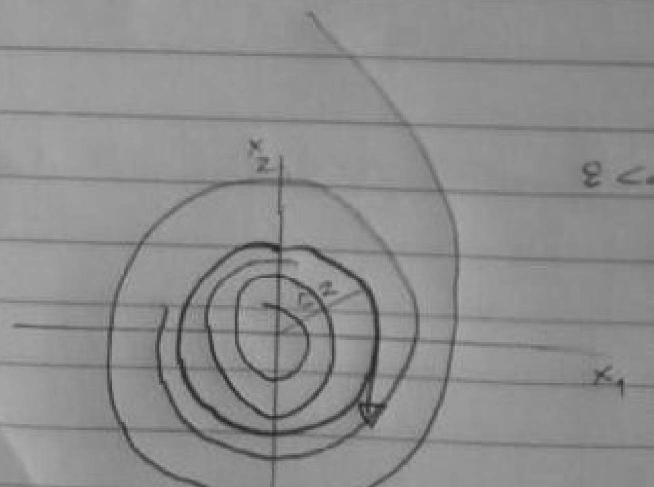
$f_2(x_1,x_2) = x_2(1-x_1^2)$

$$\dot{E}(x_1,x_2) = x_1 f_1(x_1,x_2) + x_2 f_2(x_1,\ldots$$
$$= x_2^2(1-x_1^2)$$

(2) $$F(A) = \int_0^{2\pi} \dot{E}(A\cos t, -A\sin t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (A^2 \sin^2 t)(1-A^2\cos^2 t)\,dt$$
$$= \pi\left(A^2 - \frac{A^4}{4}\right)$$

$\varepsilon <$





Ασκήσεις 1.4, 1.5, 1.6.

Το Πολύγωνο Του Νεύτωνα (Αλγεβρική Γεωμετρία)

Τι κάνουμε αν το Θ.Π.Σ. δεν εφαρμόζεται;

Παραδείγματα

1) $$F(x,y) = y^2 + a_0^{(1)} x + a_0^{(2)} x^2 = 0 \quad , a_0^{(1)} \neq 0, \; a_0^{(2)} \neq 0$$

Βρείτε όλες τις λύσεις $y = y(x)$ σε περιοχή του $(0,0)$

$$F(0,0) = 0 \quad , \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y \quad , \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$

2) $$F(x,y) = y^3 + a_2^{(1)} x y^2 + a_1^{(3)} x^3 y + a_0^{(4)} x^4 = 0 \quad a_0^{(4)} \neq 0$$

Βρείτε όλες τις λύσεις σε περιοχή του $(0,0)$.

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$

Η Μέθοδος των Κλιμάκων

1) Πρώτα μιγαδοποιούμε το πρόβλημα:

1') $$w^2 + a_0^{(1)} z + a_0^{(2)} z^2 = 0 \quad , w, z \in \mathbb{C}$$

Για $|z| << 1$ η 1') είναι κατα στην

$$w^2 + a_0^{(1)} z = 0 \longrightarrow w = \pm\left(-a_0^{(1)} z\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\left(-a_0^{(1)}\right)^{1/2} z^{1/2}$$

Κινητρο για λυση της 1') στην μορφη

$$W = v(z)\, z^{1/2}$$

$$v^2(z)\, z + a_0^{(1)} z + a_0^{(2)} z^2 = 0$$

$$v^2(z) + a_0^{(1)} + a_0^{(2)} z = 0$$

$$v_{\pm}(z) = \pm \left(a_0^{(1)} + a_0^{(2)} z \right)^{1/2}$$

$$\therefore \quad \boxed{w_{\pm}(z) = v_{\pm}(z)\, z^{1/2}}$$

Παρατηρηση: • Δεν εχαμε Μοναδικοτητα
• Οι λυσεις δεν ειναι διαφορισιμες συναρτησεις του z στο $z=0$.

Κλιμακα: $z^{1/2}$. Ως προς $z^{1/2}$ οι λυσεις ειναι ομαλες (αναλυτικες!) συναρτησεις.

2') $$w^3 + a_2^{(1)} z w^2 + a_1^{(3)} z^3 w + a_0^{(4)} z^4 = 0$$

Συμβολισμος - δεικτες

$$F(z, w) = w^k + a_{k-1}(z) w^{k-1} + \dots + a_0(z)$$

$$a_j(z), \quad j = 0, \dots, k-1$$

στην 2′):

$a_2(z) = a_2^{(1)} z^1 = a_2^{(1)} z$, $a_1(z) = a_1^{(3)} z^3$,

$a_0(z) = a_0^{(4)} z^4$

Επίλυση της 2′)

Αναζητηση λυσεων μορφης

$$w = v(z) z^{\alpha}$$

Αντικατασταση:

$$z^{3\alpha} v(z)^3 + a_2^{(1)} z\, z^{2\alpha} (v(z))^2 + a_1^{(3)} z^3 z^{\alpha} v(z) + a_0^{(4)} z^4 = 0$$

$$z^{3\alpha} v^3 + a_2^{(1)} z^{1+2\alpha} v^2 + a_1^{(3)} z^{3+\alpha} v + a_0^{(4)} z^4 = 0$$

Μεθοδος εξισορροπησης - Ταιριαστω 2 οροι ομογενοποιω

Ολες οι δυνατοτητες:

(I)	(II)	(III)
$3\alpha = 1+2\alpha$	$2\alpha+1 = 3+\alpha$	$3+\alpha = 4$
$3\alpha = 3+\alpha$	$2\alpha+1 = 4$	
$3\alpha = 4$		

$\boxed{I1} \Rightarrow \alpha = 1$

$$z^3 v^3 + a_2^{(1)} z^3 v^2 + a_1^{(3)} z^4 v + a_0^{(4)} z^4$$

$$G(z,v) := v^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} z v + a_0^{(4)} z = 0$$