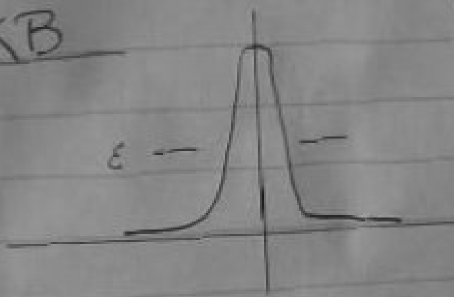
Wentzel, Kramers, Brillouin
Θεωρια

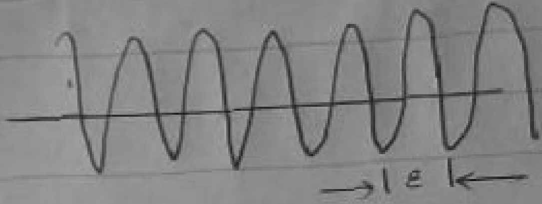
Διαλεξη 12 Μεθοδος WKB



I) Φαινομενα Συγκεντρωσης:

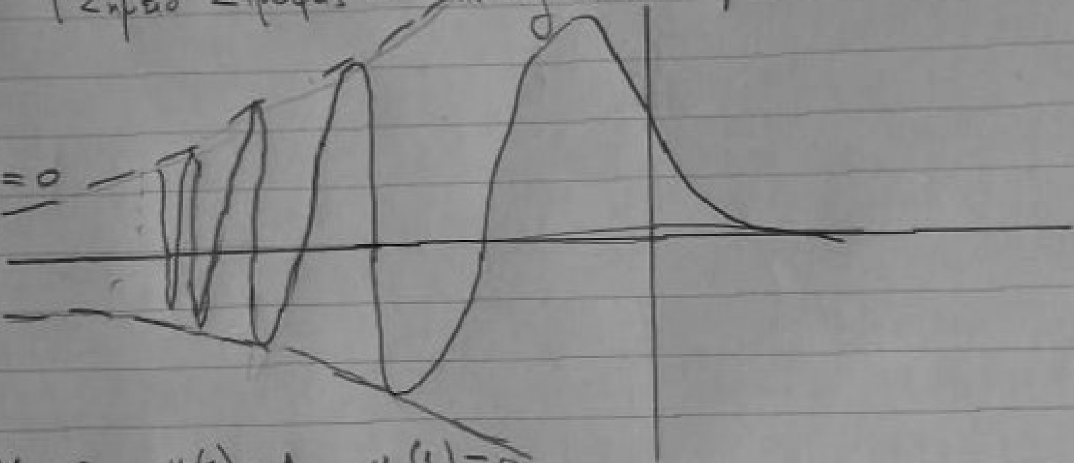
$$\varepsilon^2 y'' - y = 0$$

II) Φαινομενα Ταλαντωσης:



$$\varepsilon^2 y'' + y = 0$$

III) Μειγμα (Σημειο Στροφης – Turning Point):



$$\varepsilon^2 y'' - xy = 0$$

(Airy)

I)

$$\varepsilon^2 y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

$$y_\varepsilon(x) = A\sinh(x) + B\cosh(x), \quad 1 = y_\varepsilon(0) = B, \quad 0 = y(1) = A\sinh(1) + \cosh(1)$$

$$\therefore \quad y_\varepsilon(x) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}\left[e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2-x}{\varepsilon}}\right]$$

(εξωτερικο αν $y_{εξ} \equiv 0$)
(Ορ. Στρωμα $x=0$.)

Ασκηση

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(x) = \delta(x)$$

$$\left(\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}) \right)$$

II)

$$\varepsilon^2 y'' + y = 0 \ , \quad y(0)=1 \ , \quad y(1)=0$$

[ιδιοτιμές]

$\exists$ λύση $\varepsilon \neq \frac{1}{n\pi}$

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\sin\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)}{\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

2.11 <u>Μετασχηματισμός Liouville</u>

<u>Μελέτη</u>

(1) $\quad \varepsilon^2 y'' = Q(x)\, y \quad , \quad Q(x) \neq 0$

(2) $\quad y(x) = e^{\frac{S(x)}{\delta}} \quad , \quad \delta$ εξίμακα – υπο προσδιορισμό.

<u>Αναπτυγμα</u>

$$y(x) = \exp\left[\frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n S_n(x)\right] = \exp\left[\frac{1}{\delta}\left(S_0(x) + \delta S_1(x) + \dots\right)\right]$$

$$y'(x) = \exp\left[\frac{1}{\delta}\sum \delta^n S_n\right]\left(\frac{1}{\delta}\sum \delta^n S_n'\right)$$

$$y''(x) = \exp\left[\frac{1}{\delta}\sum\delta^n S_n\right]\left(\frac{1}{\delta}\sum\delta^n S_n'\right)^2 + \exp\left[\frac{1}{\delta}\sum\delta^n S_n\right]\left(\frac{1}{\delta}\sum\delta^n S_n''\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\delta^2}\left(\sum\delta^n S_n'\right)^2 + \frac{1}{\delta}\sum\delta^n S_n''\right]\exp\left(\frac{1}{\delta}\sum\delta^n S_n\right)$$

Αντικατασταση

$$)\quad \varepsilon^2\left\{\frac{1}{\delta^2}\left[(S_0')+\delta(S_1')+\dots\right]^2+\frac{1}{\delta}\left[S_0''+\delta S_1''+\dots\right]\right\} = Q(x)$$

$$4)\quad \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}(S_0')^2+\frac{2\varepsilon^2}{\delta}S_0'S_1'+\frac{\varepsilon^2}{\delta}S_0''+\dots = Q(x)$$

1^o μελος: $\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}$ μεγαλυτερης ταξης ορος −

2^o μελος: $O(1)$

$\therefore \quad \boxed{\varepsilon=\delta}$

Ιεραρχια

"Χαρακτηριστικη εξισωση"

$2^{ας}$ ταξης

$$(5)\quad \begin{cases} (S_0')^2 = Q & \text{— Εξισωση εικονας} \\ 2S_0'S_1'+S_0''=0 & \text{— Εξισωση Μεταφορας} \\ \vdots \end{cases}$$

$$(5)_{(i)} \Rightarrow \quad S_0(x) = \pm\int_a^x \sqrt{Q(t)}\,dt \qquad (6)$$

$$(5)_{(ii)} \Rightarrow \quad S_1' = -\frac{1}{2}\frac{S_0''}{S_0'} \qquad (7)$$

(7) $\Rightarrow$

$$S_1 = -\frac{1}{2} \ln S_0' \overset{(5)}{=} -\frac{1}{2} \ln\sqrt{Q(x)} = \ln |Q(x)|^{-\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ Γενικη Λυση λαμβανοντας υπ' οψη τις δ°, δ εχουμε

$$y_{WKB}(x) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} S_0(x) + S_1(x)\right] = e^{S_1(x)} e^{\frac{S_0(x)}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{y_{WKB}(x) = c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_a^x \sqrt{Q(t)}\, dt\right] + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_b^x \sqrt{Q(t)}\, dt\right]}$$

Παρατηρηση

Χειριζομαστε την εξισωση (1) σαν να ηταν σταθερων συντελεστων, μεσω της Χαρακτηριστικης εξισωσης!

3. Εφαρμογες

a) $\varepsilon^2 y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

$Q(x) = -1$, $S_0(x) = \pm ix$, $S_1(x) \equiv 0$ $\Rightarrow$

$$\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad S_1 = -\frac{1}{2}\ln S_0' \overset{(5)}{=} -\frac{1}{2}\ln\sqrt{Q(x)} = \ln |Q(x)|^{-\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ Γενική Λύση λαμβάνοντας υπ' όψη τις δ°, δ' εχουμ.

$$y_{WKB}(x) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} S_0(x) + S_1(x)\right] = e^{S_1(x)} \cdot e^{\frac{S_0(x)}{\varepsilon}}$$

$$\text{(8)} \quad \boxed{\begin{aligned} y_{WKB}(x) &= c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_a^x \sqrt{Q(t)}\, dt\right] \\ &+ c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^x \sqrt{Q(t)}\, dt\right] \end{aligned}}$$

Παρατήρηση

Χειριζόμαστε την εξίσωση (1) σαν να ήταν σταθερών συντελεστών, μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης !

3. Εφαρμογές

a) $\varepsilon^2 y'' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 , \quad y(1) = 1$

$Q(x) = -1 , \quad S_0(x) = \pm ix \quad , \quad S_1(x) = 0 \quad \Longrightarrow$

$$y_{WKB}(x) = c_1 \sin\frac{x}{\varepsilon} + c_2 \cos\frac{x}{\varepsilon}$$ (ακριβής λύση !)

Εν όψει της Παρατηρησης δεν ειναι και τοσο εκπληξη !

b) $\varepsilon y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \quad , \quad y(0) = A \, , \; y(1) = B$

<u>Υποθεση</u> $a(x) > 0$ στο $[0,1]$

$\delta = \varepsilon$

$$y = e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1}$$

$$y' = e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right)$$

$$y'' = e^{\frac{S_0}{\varepsilon} + S_1} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} S_0'' + S_1'' \right]$$

Αντικατασταση

$$0 = \Big[\quad \Big[1 \cdot S_0'' + \frac{1}{\varepsilon} S_0'^2 + 2 \, S_0' S_1' + \varepsilon S_1'^2 + \varepsilon S_1'' \Big] \Big]$$

$$+ a \left[\frac{1}{\varepsilon} S_0' + S_1' \right]$$

$+ b$

$\varepsilon^{-1} : (S_0')^2 + a S_0' = 0 \quad \Rightarrow \quad S_0' = -a \quad , \quad S_0' = 0$

$\varepsilon^{0} : \quad S_0'' + 2 S_0' S_1' + a S_1' + b = 0$

$\overset{S_0'=0}{\Rightarrow} \; a S_1' + b = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = - \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} \, d\xi$

$$y_1(x) = c_1 \exp\left[-\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi\right]$$ (εξωτερικη

επιλογη $S_0' = -a$, $S_0'' = -a'$

$\Rightarrow a S_1' + a' = b$

$\Rightarrow S_1 = -\ln a + \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi$

$\therefore$

$$y_2(x) = c_2 \frac{1}{a(x)} \exp\left[\int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)\, d\xi\right]$$

Διορθώσεις στο Παράδειγμα 3ης τάξης, σ 48

(1) $\varepsilon y''' - y' + xy = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = y(1) = 1$.

Θα δείξουμε ότι η κλασική προσέγγιση που σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα παρέχει μια ομοιόμορφη προσέγγιση $O(\varepsilon)$ τάξης, καταρρέει σε αυτή την περίπτωση, και χρειάζεται μη συμβατική τροποποίηση

A. Εξωτερική Προσέγγιση

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$$

$\underline{\varepsilon^0}$

(2) $$-y_0' + x y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = a_0 e^{x^2/2}$$

B. Εσωτερική Προσέγγιση στο $x=0$

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \quad , \quad \dot{Y}(\eta) =: \frac{dY}{d\eta}$$

Η (1) σε η-μεταβλητές παίρνει την μορφή:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{3\alpha}} \dddot{Y} - \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \dot{Y} + \varepsilon^\alpha \eta Y = 0$$

(3) $$\varepsilon^{1-3\alpha} \dddot{Y} - \varepsilon^{-\alpha} \dot{Y} = -\varepsilon^\alpha \eta Y$$

Εξισορρόπηση:

$$1 - 3\alpha = -\alpha \;\Downarrow\; \alpha = \tfrac{1}{2} \quad , \quad 1 - 3\alpha = \alpha \;\Downarrow\; \alpha = \tfrac{1}{4} \quad , \quad -\alpha = \alpha \;\Downarrow\; \alpha = 0$$