Ασκηση Διάλεξη 12

Ν.δ.ο. $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(x) = \delta(x)$, $x \in [0,1]$

Λύση

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 y_\varepsilon(x)\, dx = 1$

και στη συνέχεια ότι $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int y_\varepsilon(x) \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 y_\varepsilon(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \left(e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2}{\varepsilon}} e^{\frac{x}{\varepsilon}} \right) dx$$

Θέτουμε $\boxed{u = \frac{x}{\varepsilon}}$, άρα $\boxed{du = \frac{1}{\varepsilon} dx}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \left(e^{-u} - e^{-\frac{2}{\varepsilon}} e^{u} \right) du =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \left[-e^{-u} - e^{-\frac{2}{\varepsilon}} e^{u} \right]_0^{\frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \left(-e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2}{\varepsilon}} e^{\frac{1}{\varepsilon}} + 1 + e^{-\frac{2}{\varepsilon}} \right) =$$

$$= \frac{1}{1-0} (0 - 0 + 1 + 0) = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 y_\varepsilon(x) \varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 y_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 y_\varepsilon(x)\,dx \cdot \varphi(0) \right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 y_\varepsilon(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right) dx \right| =$$

$$\overset{\delta}{\text{μικρό}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\delta y_\varepsilon(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right) dx + \int_\delta^1 y_\varepsilon(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right) dx \right) \right|$$

Το $\int_\delta^1 y_\varepsilon(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)$ τείνει στο μηδέν καθώς

το $y_\varepsilon(x)$ συνεισφέρει μόνο για x κοντά στο μηδέν, άρα αυτή η ποσότητα του ολοκληρώματος είναι αμελητέα.

$$\text{Άρα} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\delta y_\varepsilon(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right) dx \right|$$

Γνωρίζουμε ότι η φ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα για δεδομένο σ αρκετά μικρό και κοντά στο μηδέν

$\exists \delta > 0 \quad |x-0| < \delta$ τότε

$|\varphi(x)-\varphi(0)| < \sigma$

$$\le \lim \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\delta \left| y_\varepsilon(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)\right| dx = \lim \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\delta |y_\varepsilon(x)|\,|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\delta |y_\varepsilon(x)| \cdot \sigma\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_0^\delta |y_\varepsilon(x)|\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_0^\delta \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \left(e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2}{\varepsilon}} e^{\frac{x}{\varepsilon}} \right) dx =$$

$u=\frac{z}{\varepsilon}$, $du=\frac{1}{\varepsilon}dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}\left[-e^{-u}-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}e^{u}\right]_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\cdot\varepsilon =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}\left(-e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}e^{\frac{\delta}{\varepsilon}}+1+e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma}{1-e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}\left(-e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}-e^{\frac{\delta-2}{\varepsilon}}+1+e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)=$$

δ μικρό

$$= \frac{\sigma}{1}(0-0+1+0)=\sigma$$, ορίζεται μικρό όπως το (και κοντά στο 0)

ορίσαμε άρα $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int y_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0)$ □

Άσκηση 5.8 σελ 100 Logan

Τη σχέση (12) για την WKB με ταλαντώσεις.

Λύση

$$\varepsilon^2 y''+k^2(x)y=0 \quad , \quad k(x)>0. \qquad (1)$$

Στην εξίσωση θέτουμε $y(x)=e^{\frac{iu(x)}{\varepsilon}}$

Άρα εφαρμόζοντας το στην (1) θα παίρνουμε:

$$i\varepsilon u''(x)-(u'(x))^2+k^2(x)=0$$

Θέτουμε $u'=v$, άρα

$$i\varepsilon v'(x)-v^2(x)+k^2(x)=0$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα ανάπτυγμα κανονικών διαταραχών της μορφής:

$v(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots$

Άρα $i\varepsilon(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots)' - (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots)^2 + k^2(x) = 0$

$i\varepsilon v_0' + i\varepsilon^2 v_1' + i\varepsilon^3 v_2' + \dots - (v_0 + \varepsilon v_1 + \dots)^2 + k^2(x) = 0$

$\varepsilon^0: \quad -v_0^2 + k^2(x) = 0 \Rightarrow \quad v_0(x) = \pm k(x)$

$\varepsilon^1: \quad i v_0' \quad - v_0^2 \quad - 2v_0 v_1 + k^2(x) = 0 \Rightarrow$

$ik'(x) \quad \cancel{-k^2(x)} \quad 2k(x)v_1 + \cancel{k^2(x)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow i\, k'(x) \quad -2k(x)v_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 = \dfrac{ik'}{2k}$

Άρα $v = \pm k(x) - \varepsilon \dfrac{k'}{2k} + O(\varepsilon^2)$

$u(x) = C \pm \int k(x)\,dx - \dfrac{\varepsilon}{2} \ln(k(x)) + O(\varepsilon^2)$

$y = e^{\frac{iu(x)}{\varepsilon}} = \dfrac{C}{\sqrt{k(x)}} \, e^{\pm\frac{i}{\varepsilon}\int k(x)\,dx}$

2 Γραμμικά Ανεξάρτητες λύσεις

$y_{WKB} = \dfrac{1}{\sqrt{k(x)}} \left[C_1 \exp\left(\dfrac{i}{\varepsilon} \int k(x)\,dx \right) + C_2 \exp\left(\dfrac{-i}{\varepsilon} \int k(x)\,dx \right) \right]$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο Euler, άρα

$y_{WKB}(x) = \dfrac{C_1}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\dfrac{1}{\varepsilon} \int k(x)\,dx \right) + \dfrac{C_2}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\dfrac{-1}{\varepsilon} \int k(x)\,dx \right)$

$\square$

Άσκηση 5.9 σελ 100 Logan

α) Δείξτε ότι σε ένα κλασικό σύστημα (4) η ενέργεια διατηρείται: $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = \text{σταθερά} \equiv E$

Λύση

(4) $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) = -V'(x) \Rightarrow$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dt}\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = 0 \Rightarrow \boxed{m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dt} = 0}$$

Όμως $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)\right) =$

$$= m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dt} = 0$$

Άρα $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = \text{σταθερά} \equiv E$

β) Δείξτε ότι $p = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E-V(x)}$ όπου $p = m\dfrac{dx}{dt}$

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E \Rightarrow$$

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2V(x) = 2E \Rightarrow p^2 = 2m\left(E - V(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E-V(x)}$$