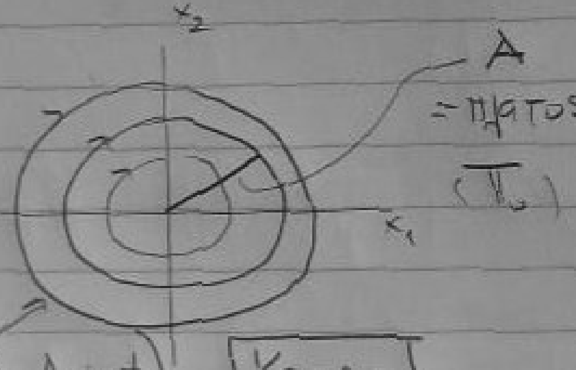
Λυμένη 2

1. Εφαρμογή Θ.Π.Σ. – Διαταραχή Χαμιλτωνιανών Συστημ. (Ομαλή)

$$(\Pi_\varepsilon)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon f_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon f_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

f_1, f_2 αυθαίρετες μη Χαμιλτωνιανή Διατ.

$$(\Pi_0)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

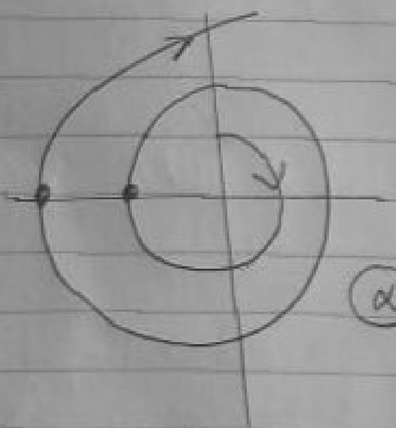


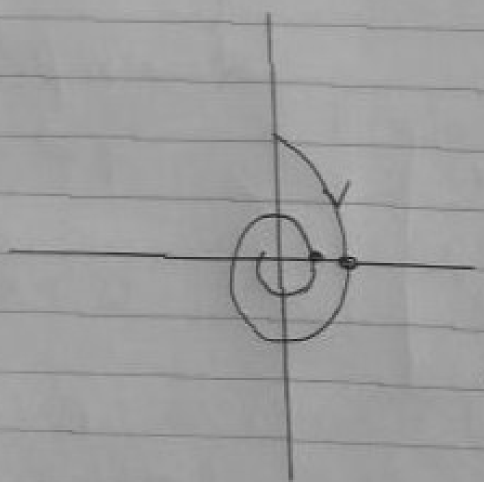
$(A\cos t, -A\sin t)$ $\boxed{\text{Κέντρο}}$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{x_2^2}{2}}_{E_K} + \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{E_\Delta}\Big] = 0$$

Διατήρηση Μηχ. Ενέργειας $E(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

Καταστροφή εν γένει (Π_ε) επιπέδου φάσης





Σχ1

(Π_ε) ; ;

|| Μελέτη Μεταβολής Μηχανικής Ενέργειας Κατά Μήκος Λύσεων του Μη συντηρητικού συστήματος (Π_ε) ||

$E(x_1,x_2) = (\text{Απόσταση})^2$ (Γεωμετρική Ερμηνεία)

$$\frac{d}{dt} E(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = x_1^\varepsilon \dot{x}_1^\varepsilon + x_2^\varepsilon \dot{x}_2^\varepsilon$$

$$= x_1^\varepsilon \left(x_2^\varepsilon + \varepsilon f_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)\right) + x_2^\varepsilon\left(-x_1^\varepsilon + \varepsilon f_2(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)\right)$$

$$= \varepsilon \left[x_1^\varepsilon f_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) + x_2^\varepsilon f_2(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)\right] =: \varepsilon \dot{E}(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)$$

$\dot{E}(x_1, x_2)$ Συμβολισμος (βλ Διαρουνιου)

Εστω T_ε ο χρονος μεταξυ δυο διαδοχικων τομων: $x_2(0;\varepsilon) = x_2(T_\varepsilon;\varepsilon) = 0$

Τοτε η μεταβολη της $E(x_1, x_2)$ δινεται απο

$$\int_0^{T_\varepsilon} \frac{d}{dt} E(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)\, dt = \int_0^{T_\varepsilon} \varepsilon \dot{E}(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon)\, dt =: \Delta E$$

Σχ 1 (α) $\Delta E > 0$

(β) $\Delta E < 0$

$(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t))$ η' $(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon))$

Εστω $(x_1(t;\varepsilon), x_2(t;\varepsilon))$ λυση του (Π_ε), και εστω $(x_1(t;\varepsilon), x_2(t;\varepsilon)) \longrightarrow (x_1(t;0), x_2(t;0))$ (*)

Συνεχης Εξαρτηση $\Longrightarrow$ συγκλιση (*) Ομοιομορφη σε Συμπαγεις Χρονους, $T_\varepsilon \longrightarrow 2\pi$

$$(x_1(t;0), x_2(t;0)) = (A\cos t, -A\sin t)$$

Λήμμα 1.2

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(A\cos t, -A\sin t)\,dt + o(\varepsilon)$$

Συμβολισμός

$o(\varepsilon)$ = Παράσταση που εξαρτάται από t, και ε με την ιδιότητα ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Απόδειξη

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{T_\varepsilon} \dot{E}\left(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t)\right) dt$$

$$= \varepsilon \int_0^{T_\varepsilon} \dot{E}\left(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)\right) dt$$

$$= \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}\left(x_1(t,0), x_2(t,0)\right) dt$$

$$+ \varepsilon \left(\int_0^{T_\varepsilon} \dot{E}\left(x_1(t,0), x_2(t,0)\right) dt - \int_0^{2\pi} \dot{E}\left(x_1(t,0), x_2(t,0)\right) dt \right)$$

$$+ \varepsilon \left(\int_0^{T_\varepsilon} \left[\dot{E}\left(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)\right) - \dot{E}\left(x_1(t,0), x_2(t,0)\right) \right] dt \right)$$

$$= \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}\left(x_1(t,0), x_2(t,0)\right) dt$$

$$+ \varepsilon\, I(\varepsilon)$$

$$+ \varepsilon\, II(\varepsilon)$$

$$|I(\varepsilon)| \leq \left| \int_{T_\varepsilon}^{2\pi} \left| \dot{E}(x_1(t,0), x_2(t,0)) \right| dt \right| \leq C \, |2\pi - T_\varepsilon| \to 0$$

$$C = \max \left| \dot{E}(x_1(t,0), x_2(t,0)) \right|$$

$$|II(\varepsilon)| \leq T_\varepsilon \max_{0 \leq t \leq T_\varepsilon} \left| \dot{E}(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)) - \dot{E}(x_1(t,0), x_2(t,0)) \right|$$

$$\longrightarrow 0 \qquad , \varepsilon \to 0$$

$$\therefore \quad \Delta E = \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1(t,0), x_2(t,0)) dt + \varepsilon \left[I(\varepsilon) + II(\varepsilon) \right]$$

$$= \quad \text{——}\,''\,\text{——} \qquad + o(\varepsilon).$$

$\square$

Θέτουμε

$$F(A) = \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1(t,0), x_2(t,0)) dt$$

$$\therefore \qquad = \int_0^{2\pi} \dot{E}(A\cos t, -A\sin t) dt$$

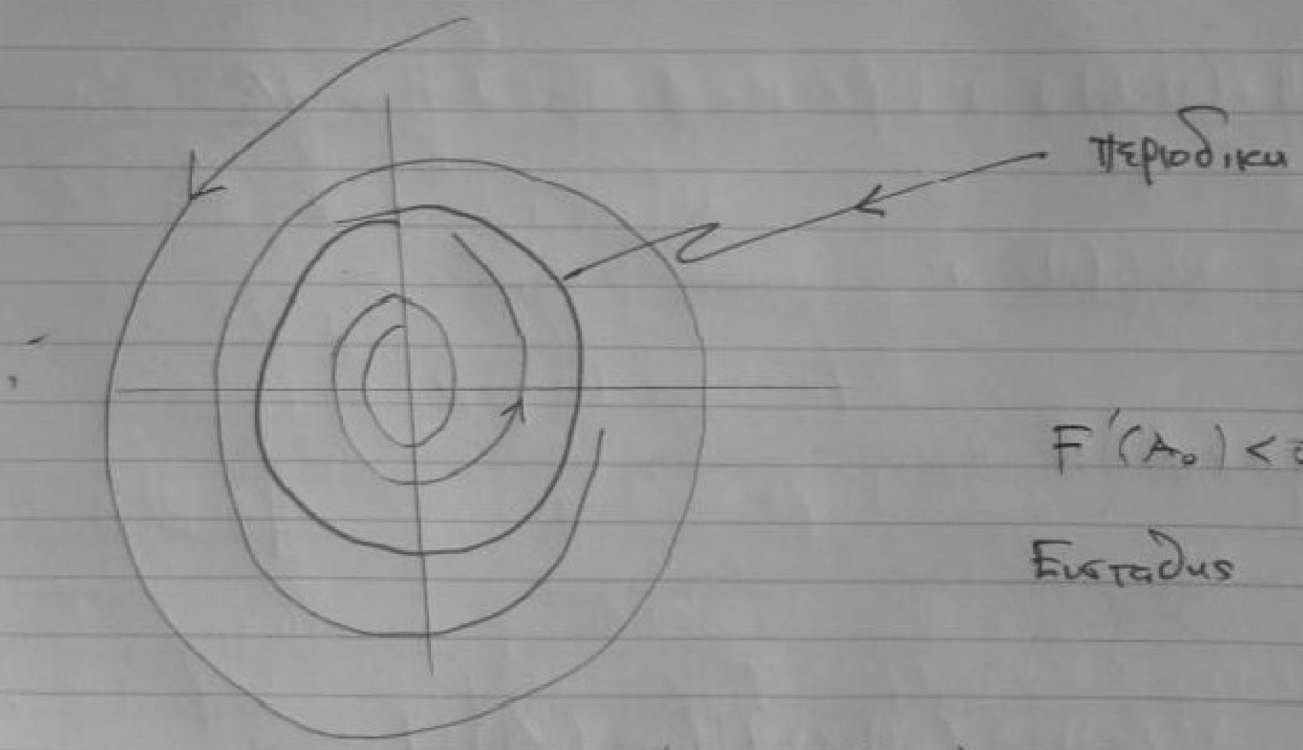
$$\boxed{\Delta E = \varepsilon F(A) + o(\varepsilon) = \varepsilon \left[F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right].}$$

Θεώρημα 1.3

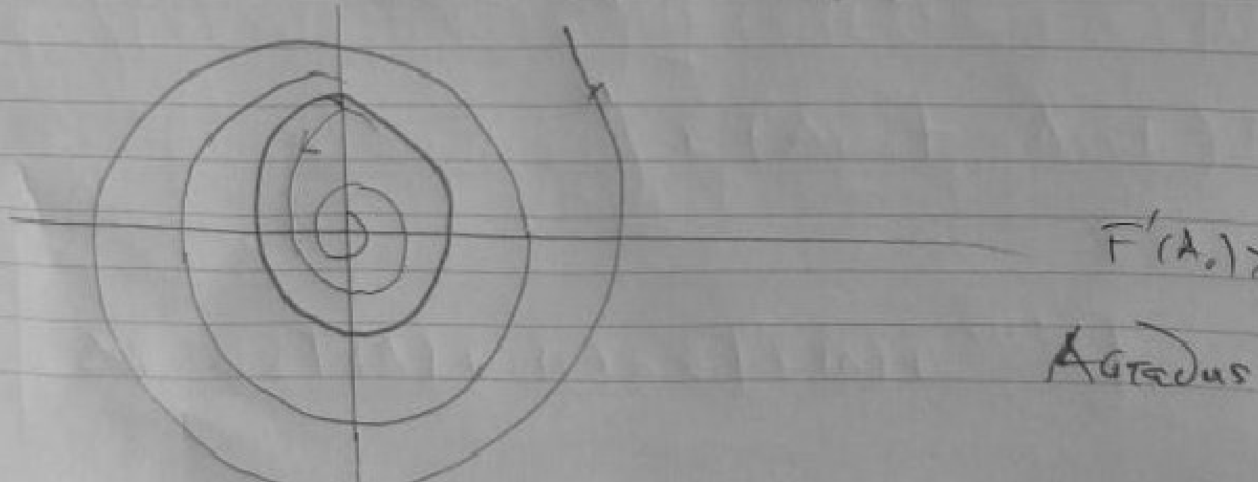
Έστω F έχει απλή ρίζα A_0:

$$F(A_0)=0 \quad , \quad F'(A_0)\neq 0$$

Τότε $\exists$ περιοδική λύση πλάτους $A_0+O(\varepsilon)$ για $\varepsilon \ll 1$.



Επίπεδο Φάσης (Π_ε)



Αποδειξη

$$Q(\varepsilon, A) := F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Q ειναι C^1

$$Q(0, A_0) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A}(0, A_0) = F'(A_0) \neq 0$$

$$\Theta\Pi\Sigma \Longrightarrow \exists\ A = A(\varepsilon),\ A(0) = A_0$$

$$Q(\varepsilon, A(\varepsilon)) = 0, \qquad |\varepsilon| < |\varepsilon_0|$$

ΔΕ $= 0 \iff$ Τροχια κλειστη

$\iff$ Λυση Περιοδικα.

$\square$