Διαλεξη 10

Παραδειγμα μη Γραμμικο

$$\varepsilon y'' + 2y' + e^{y} = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0$$

Το Θ3.1 δεν εφαρμοζεται αλλα προιδεαζει για ορ. στρωμα στο $x=0$ $\;(p(x)=2)$

A Εξωτερικη Προσεγγιση (μηδενικος ορος)

$$2y_0' + e^{y_0} = 0 \quad , \quad y_0(1) = 0$$

$$2\frac{dy_0}{dx} = -e^{y_0} \iff e^{-y_0}\,dy_0 = -2dx$$

$$y_0(x) = \ln\frac{2}{1+x}.$$

B. Εσωτερικη Προσεγγιση $x=0$ (μηδενικος ορος)

$$y = \frac{x}{\varepsilon^{\alpha}} \quad , \quad \varepsilon^{1-2\alpha}\ddot{Y} + 2\varepsilon^{-\alpha}\dot{Y} + e^{Y} = 0 \quad , \quad Y(0) =$$

$$1-2\alpha = -\alpha \implies \alpha = -1$$

$$\ddot{Y} + 2\dot{Y} + \varepsilon Y = 0$$

$$\ddot{Y}_0 + 2\dot{Y}_0 = 0 \quad , \quad Y_0(0) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Y_0(\eta) = A_0 + B_0 e^{-2\eta} \\ 0 = Y_0(0) = A_0 + B_0 \end{array}\right] \implies B_0 = -A_0$$

$$Y_0(\eta) = A_0\left[1 - e^{-2\eta}\right]$$

Γ. Συναρμογή

$$\lim_{x\to 0} y_0(x) = \lim_{\eta\to\infty} Y_0(\eta)$$

$$\Rightarrow \quad A_0 = \ln 2. \qquad \Rightarrow \quad Y_0(\eta) = \ln 2\left[1-e^{-\right.$$

Δ. Ομοιομ. Προσέγγιση Μηδενικής Τάξης

$$y_{o\mu}(x) = y_{\varepsilon\xi}(x) + Y_{\varepsilon\sigma}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \text{Κοινό Όριο}$$

$$= \ln\frac{2}{1+x} + \ln 2\left[1-e^{-2\frac{x}{\varepsilon}}\right] - \ln$$

$$= \ln\frac{2}{1+x} - e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}\ln 2.$$

Άσκηση Διάλεξης 10

Θεωρήστε το $\varepsilon y'' + x^{\alpha} y' + y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$

Για ποιες τιμές του α $\exists$ ορ. στρώμα στο $x=0$, και τι

Παράδειγμα 3ης τάξης

$$\varepsilon y''' - y' + xy = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = y(1) = 1$$

Ιδιαιτερότητα: Ορ. Στρ. και στα δύο άκρα!

Εξωτερική Προσέγγιση (μηδενικής τάξης)

$$-y_0' + xy_0 = 0 \implies y_0(x) = a e^{x^2/2}$$

Εσωτερική Προσέγγιση στο $x=0$ (μηδενικής τάξης)

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^{\alpha}} \quad , \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{3\alpha}} \dddot{Y} - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \dot{Y} + \varepsilon^{\alpha}\eta Y = 0$$

$$\varepsilon^{1-3\alpha} \dddot{Y} - \varepsilon^{-\alpha} \dot{Y} = -\varepsilon^{\alpha}\eta Y$$

$$1 - 3\alpha = -\alpha \implies \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\dddot{Y}_0 - \dot{Y}_0 = 0 \implies Y_0(\eta) = A_0 e^{\eta} + B_0 e^{-\eta} + C_0$$

$$Y_0(0) = 1 \, , \quad \dot{Y}_0(0) = \varepsilon^{1/2} = 1 \quad !$$

Πρόβλημα: Υποθέσαμε $Y(\eta) = Y_0(\eta) + \varepsilon Y_1(\eta) + \dots$

Τροποποιούμε: $Y(\eta) = Y_0(\eta) + \varepsilon^{1/2} Y_1 + \dots$

Έχουμε

$$Y(\eta) = Y_0(\eta) + \varepsilon^{1/2} Y_{1/2}(\eta) + \dots$$

$$Y_{1/2}(\eta) = A_{1/2} e^{\eta} + B_{1/2} e^{-\eta} + C_{1/2}$$

$Y_0(0) = 1$, $A_0 + B_0 + C_0 = 1$

$Y_0'(0) = 0$, $A_0 - B_0 = 0$

$Y_{1/2}(0) = 0$ $A_{1/2} + B_{1/2} + C_{1/2} = 0$

$Y_{1/2}'(0) = 1$ $A_{1/2} - B_{1/2} = 1$

$A_0 = A_{1/2} = 0$ (για να είναι φραγμένη)

$\therefore$

$$Y_{εσ}(\eta) = 1 + \sqrt{\varepsilon}\,(1 - e^{-\eta})$$

Γ. Συναρμογή

$\lim_{x \to 0} y_0(x) = a$, $\lim_{\eta \to \infty} Y_{εσ}(\eta) = 1 + \sqrt{\varepsilon}$!

Πρόβλημα : Υποθέσαμε $y_{εξ}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$

Τροποποιούμε : $y_{εξ}(x) = y_0(x) + \varepsilon^{1/2} y_{1/2}(x) + \dots$

$\Rightarrow$ $y_{1/2}(x) = a_{1/2}\, e^{x^2/2}$

$\therefore$ $y_{εξ}(x) = a_0 + a_0 \left(\frac{x^2}{2}\right) + a_{1/2}\, \varepsilon^{1/2}$

$a_0 = 1$, $a_{1/2} = 1$

$$y_{exz}(x) = e^{x^2/3}\left[1 + e^{1/2}\right].$$