ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
615. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
31 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

- Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με $2 + \frac{1}{2}$ μονάδες.
- Ο μέγιστος βαθμός λαμβάνεται με την συμπλήρωση 10 μονάδων.
- Να λύσετε όσα θέματα θέλετε.
- Εξετάζεστε με ανοικτές τις σημειώσεις.
- Ο συμβολισμός των διατυπώσεων είναι ο ίδιος με αυτόν στις σημειώσεις.
- Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

$\boxed{\text{I.}}$ (εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, Πρόταση 2.3.3) Έστω

i. μια συλλογή $\{x_i\}_{i=1}^{n-1} \subsetneq \mathbb{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων,
ii. $x = (x_i)_{i=1}^{n-1} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ και
iii. $x_0 = (x_{0i})_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω.:

$$x_{0i} = (-1)^{i-1}\det\Bigg(\underbrace{\text{ο } x \text{ χωρίς την } i\text{-οστή γραμμή}}_{\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}}\Bigg).$$

Δείξτε ότι

1. $x_0 \neq 0_n$,
2. $x_0 \in \Big(\mathrm{span}\big(\{x_i\}_{i=1}^{n-1}\big)\Big)^{\perp}$,
3. $\det(x_0 \mid x) > 0$ και
4. $|x_0| = \big(\det(x^{\mathrm{T}} \cdot x)\big)^{\frac{1}{2}}$.

$\boxed{\text{II.}}$ (Σ/Λ) Δείξτε αν είναι σωστά ή βρείτε αντιπαραδείγματα αν είναι λανθασμένα:

1. Αν $f \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, τότε $\nexists$ απομονωμένο σημείο που να $\in \mathrm{supp}(f)$.
2. Αν $f \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ γενικευμένα ολοκληρώσιμη, τότε

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

$\boxed{\text{III.}}$ 1. (ισοδύναμος χαρακτηρισμός του κάθετου χώρου, Πρόταση 5.3.2.4) Έστω

i. $m < n$,
ii. προσανατολσμένη $S \in \mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n)$,
iii. $t \in S$ και
iv. $\big(U_0, F = \{F_i\}_{i=1}^{n-m}\big) \in \coprod_{U\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)} C^\infty(U_0;\mathbb{R}^{n-m})$ τ.ω.:
   α′. $S = F^{-1}(\{0_{n-m}\})$ και
   β′. $\mathfrak{J}F > 0$.

Δείξτε ότι

$$\Big(\mathrm{span}\big(\{\tau_i(t)\}_{i=1}^{m}\big)\Big)^{\perp} = \mathrm{span}\big(\{\nabla F_i\}_{i=i}^{n-m}\big),$$

όπου $\{\tau_i\}_{i=1}^{m}$ η συλλογή των μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσματικών συναρτήσεων της S (που αντιστοιχούν στον δεδομένο προσανατολισμό της S).
Υπόδειξη: Θεωρήστε χάρτη $(U_*, f) \in \coprod_{U\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)} C^\infty(U_*;\mathbb{R}^n)$ του δεδομένου προσανατολισμού της S τ.ω.: $t \in f(U_*)$.

2. Έστω

   i. $n \neq 1$,

   ii. προσανατολσμένη $S \in \mathcal{M}^{\circ}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

   iii. $t \in S$ και

   iv. $(U_0, F) \in \coprod_{U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)} C^\infty(U_0; \mathbb{R})$ τ.ω.:

      α΄. $S = F^{-1}(\{0\})$ και

      β΄. $\mathfrak{J}F > 0$.

   Δείξτε ότι το $\nabla F(t)$ έχει φορά προς το $\left\{ t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, F(t) > 0 \right\}$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε την $F(t + \Diamond \nabla F(t)) \colon [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ τ.ω.: $t + \varepsilon \nabla F(t) \in U_0$.

IV. 1. Έστω

   i. $t_0 \in \mathbb{R}^n$,

   ii. $\rho > 0$ και

   iii. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

   Δείξτε ότι

$$\int_{\mathrm{bd}\overline{B(t_0,\rho)}} f(t) \mathrm{d}\sigma(t) = \frac{1}{\rho} \int_{\overline{B(t_0,\rho)}} \left(\nabla f(t) \cdot (t - t_0) + n f(t) \right) \mathrm{d}t.$$

2. Υπολογίστε την ποσότητα

$$\int_{\overline{B(t_0,\rho)}} |t - t_0|^2 \mathrm{d}t,$$

   χωρίς χρήση του τύπου πολικών συντεταγμένων.

V. Έστω

   i. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \infty)$ και

   ii. $\omega \in D_1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ τ.ω.:

$$\omega \coloneqq (\gamma t_2 - \delta t_1 t_2) \, \mathrm{d}t_1 + (\alpha t_1 - \beta t_1 t_2) \, \mathrm{d}t_2.$$

1. Δείξτε ότι $\omega \notin D_1^E(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.
2. Δείξτε ότι $\frac{1}{t_1 t_2} \omega \in D_1^E\left((0, \infty)^2; \mathbb{R} \right)$.
3. (μοντέλο Lotka-Volterra) Λύστε σε πεπλεγμένη μορφή την διαφορική εξίσωση

$$(\gamma t_2 - \delta t_1 t_2) \, \mathrm{d}t_1 + (\alpha t_1 - \beta t_1 t_2) \, \mathrm{d}t_2 = 0, \ \forall \, (t_1, t_2) \in (0, \infty)^2.$$