Θεώρημα Αντίστροφης και Πεπλεγμένης Συνάρτησης Γεωμετρικής Ανάλυσης

Λεόντε Πέτρος

3 Ιανουαρίου 2023

Θα αποδείξω το θεώρημα αντίστροφης. Ωστόσο, πριν την απόδειξη του θεωρήματος, θα δείξω το εξής:

Έστω ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^n$ C^1 συνάρτηση, δηλαδή διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο τέτοια ώστε η f να είναι 1-1 και ο πίνακας $Jacobi$ της f να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $Jf > 0$, τότε έχουμε πως το $f(A)$ είναι ανοιχτό σύνολο και πως η αντίστροφη της f είναι επίσης C^1 συνάρτηση.

Για την απόδειξη του θεωρήματος, θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

Έστω ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση C^1, τότε αν ο $Df(a)$ είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει c θετικό ώστε $|f(x_0) - f(x_1)| \geq c|x_0 - x_1|$ για κάθε x_0, x_1 στην μπάλα $B(a, t)$, όπου $t > 0$ επιλεγμένο κατάλληλα.

Απόδειξη: Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = Df(a)x - f(x)$. Τότε, παίρνουμε πως $Dg(x) = Df(a) - Df(x)$. Πριν, συνεχίσω, πρέπει να αναφέρω ότι το $|.|$ είναι η max νόρμα. Επίσης, έχουμε πως $|x_0 - x_1| = |(Df(a))^{-1}(Df(a)x_0 - Df(a)x_1)|$ και κάνοντας τριγωνική ανισότητα σε κάθε συντεταγμένη f_i έχουμε $|x_0 - x_1| \leq n|(Df(a))^{-1}||Df(a)x_0 - Df(a)x_1|$. Επιπλέον, επιλέγουμε το t έτσι ώστε $|Dg(x)| \leq M$. Τότε έχουμε από θεώρημα μέσης τιμής πως υπάρχει $q \in \mathbb{R}^n$ $|g(x_0) - g(x_1)| = |Dg(q)(x_0 - x_1)| \leq nM|x_0 - x_1|$. Επιπλέον, αφού φράξαμε την $|Dg(x)|$ από το M, έχουμε πως $nM|x_0 - x_1| \geq |g(x_0) - g(x_1)| = |f(x_0) - Df(a)x_0 - f(x_1) + Df(a)x_1| \geq |Df(a)x_1 - Df(a)x_0| - |f(x_1) - f(x_0)| \geq \frac{1}{n|(Df(a)^{-1}|}|x_0 - x_1| - |f(x_0) - f(x_1)| \Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| \geq ((\frac{1}{n|(Df(a)^{-1}|}) - nM)|x_0 - x_1|$, οπότε, επιλέγοντας το M κατάλληλα ώστε η παρένθεση να είναι θετική, έχουμε το ζητούμενο.

Απόδειξη: Αρχικά, για την συνέχεια της αντιστρόφου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του λήμματος ως εξής:
$|f(x_1) - f(x_0)| \geq c|x_1 - x_0| \Leftrightarrow |f^{-1}(f(x_1)) - f^{-1}(f(x_0))| \leq c'|f(x_1) - f(x_0)|$ και επομένως η f^{-1} είναι τοπικά $Lipschitz$ συνεχής και άρα συνεχής. Επίσης, λόγω διαφορισιμότητας, έχουμε πως για κάθε $x_a \in A$, $f(x_a) = f(x) + Df(x)(x_a - x) + o(x_a - x)$, όπου $lim_{x \to x_a} \frac{|o(x_a - x)|}{|x_a - x|} = 0$. Σε αυτό το σημείο, προς ευκολία γραφής, θα θέσω $E = Df(x)$. Από την σχέση αυτή, έχουμε πως $E^{-1}(f(x_a) - f(x)) = x_a - x + E^{-1}(o(x_a - x)) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_a)) = f^{-1}(f(x)) + E^{-1}(f(x_a) - f(x)) - E^{-1}(o(f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x))))$. Οπότε, για να δείξουμε πως η f^{-1} είναι διαφορίσιμη, αρκεί να δείξουμε πως $lim_{x \to x_a} \frac{E^{-1}(o(f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x))))}{|f(x_a) - f(x)|} = 0$.

Εδώ, θα κάνουμε μια μικρή παρένθεση για να αποδείξουμε πως για έναν γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε $|T(h)| \leq M|h|, \quad h \in \mathbb{R}^n$. Πράγματι, έστω $|x| = 1$ και η συνήθης βάση $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ με $x = a_1e_1 + ... + a_ne_n, \quad |a_i| \leq 1$. $|T(x)| = |T(a_1e_1 + ... + a_ne_n)| \leq |a_1||T(e_1)| + ... + |a_n||T(e_n)| \leq |T(e_1)| + ... + |T(e_n)| = M$. Οπότε, $|T(\frac{h}{|h|})| \leq M \Rightarrow |\frac{1}{|h|}T(h)| \leq M \Rightarrow |T(h)| \leq M|h|$.

Αποδεικνύοντας το παραπάνω, μπορούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα του να δείξουμε πως
$lim_{x \to x_a} \frac{(E^{-1})(o(f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x))))}{|f(x_a) - f(x)|} = 0$, στο να δείξουμε πως
$lim_{x \to x_a} \frac{o(f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x)))}{|f(x_a) - f(x)|} = 0$, για το οποίο έχουμε πως
$lim_{x \to x_a} \frac{o(f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x)))}{|f(x_a) - f(x)|} = lim_{x \to x_a} \frac{o(f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x)))}{|f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x))|} \frac{|f^{-1}(f(x_a)) - f^{-1}(f(x))|}{|f(x_a) - f(x)|}$, το οποίο μας κάνει 0, μιας και ο πρώτος παράγοντας, από υπόθεση, μιας και είναι το $lim_{x \to x_a} \frac{|o(x_a - x)|}{|x_a - x|} = 0$, κάνει μηδέν και ο δεύτερος παράγοντας είναι φραγμένος αφού δείξαμε $Lipschitz$ συνέχεια. Αποδείξαμε, λοιπόν, πως η f^{-1} είναι διαφορίσιμη και μάλιστα δείξαμε ποιό είναι το διαφορικό της, $Df^{-1}(x) = E^{-1} = (Df(x))^{-1}$. Τώρα, για την συνέχεια του Dg έχουμε πως $Dg = I \circ Df$, όπου I παίρνει έναν πίνακα και τον πάει στον αντίστροφό του και είναι μία C^∞ συνάρτηση, καθώς γνωρίζουμε πως $Dg(x) = [Df(x)]^{-1}$ λόγω διαφορισιμότητας. Αφού, λοιπόν, η f είναι C^1, η Df είναι συνεχής και επομένως και η Dg. Οπότε, το μόνο που μένει είναι να δείξω πως το $f(A)$ είναι ανοιχτό.

Αφού δείξαμε πως η f^{-1} είναι συνεχής, γνωρίζουμε πως για ανοιχτό σύνολο $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ $(f^{-1})^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτό, δηλαδή $f(Y)$ είναι ανοιχτό και επομένως $f(A)$ είναι ανοιχτό.

Έχοντας δείξει τα προηγούμενα, είμαστε σε θέση να δείξουμε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης το οποίο είναι το εξής:

Έστω ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και C^1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^n$. Αν ο $Df(x)$ είναι αντιστρέψιμος σε σημείο a του A, υπάρχει ανοιχτό Q που περιέχει το a τέτοιο ώστε $f|_Q$ είναι 1-1, $f(Q)$ είναι ανοιχτό και η αντίστροφη απεικόνιση $f|_Q$ είναι C^1.

Απόδειξη:
Από το λήμμα, έχουμε πως για κάθε $a \in A$, υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq A$ που περιέχει το a τέτοιο ώστε $|f(x_0) - f(x_1)| \geq c|x_0 - x_1|\ \ \forall x_0, x_1 \in U$, που μας δίνει άμεσα πως η f είναι 1-1 στο σύνολο αυτό. Επίσης, γνωρίζοντας πως η διακρίνουσα $detDf(x)$ είναι συνεχής ως προς x και πως $detDf(a) \neq 0$, υπάρχει ανοιχτό $V \subseteq A$ που περιέχει το a ώστε $detDf(x) \neq 0,\ \ \forall x \in V$. Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε την τομή των δύο συνόλων, μη κενή και ανοιχτό σύνολο Q, έχουμε πως στο Q η f είναι 1-1, $Df(a)$ είναι αντιστρέψιμος οπότε αναγόμαστε σε αυτό που αποδείξαμε αρχικά και παίρνουμε, τελικά, το θεώρημα.

Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης:

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^{k+n}$ και $f : A \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση C^1, την οποία θα την γράφουμε ως $f(x, y)$ με $x \in \mathbb{R}^k$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι υπάρχει $(a, b) \in \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^n$ ώστε $det\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Τότε υπάρχουν $U_1 \in \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε να υπάρχει μοναδική C^1 συνάρτηση $g : U_1 \to \mathbb{R}^n$ για την οποία ισχύει $g(a) = b$ και $f(x, g(x)) = f(a, b)$.

Απόδειξη:
Ορίζω συνάρτηση $w : A \to \mathbb{R}^{k+n}$ ως $w(x, y) = (x, f(x, y))$. Παρατηρούμε πως $Df = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$ που σημαίνει πως $detDf = det\frac{\partial f}{\partial y}$ που σημαίνει πως ο $Df(a, b)$ είναι αντιστρέψιμος. Εδώ, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε πως $f(a, b) = 0$ και δεν δημιουργείται πρόβλημα στην γενικότητα καθώς για κάθε σημείο $(a, b),\ \ f(a, b) = c \Rightarrow f'(a, b) = f(a, b) - c = 0$.
Οπότε $w(a, b) = (a, 0)$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έχουμε πως υπάρχουν ανοιχτά $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ και $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $w(U_1, U_2) = W$, όπου το W είναι ανοιχτό σύνολο και περιέχει το $(a, 0)$, w 1-1 και πως η αντίστροφη απεικόνιση $h : W \to U_1 \oplus U_2$ είναι C^1.
Άμα, λοιπόν, δράσουμε στην σχέση $w(x, y) = (x, f(x, y))$ με την h έχουμε $(x, y) = h(x, f(x, y))$ πράγμα που μας δίνει την δυνατότητα να γράψουμε την h ως $h(x, y) = (x, p(x, y))$ όπου η p είναι C^1 από το W στον $\mathbb{R}^n$. Αν $x \in U_1$ έχουμε $(x, 0) \in W$ και $h(x, 0) = (x, p(x, 0)) \Rightarrow (x, 0) = w(x, p(x, 0)) = (x, f(x, p(x, 0))) \Rightarrow f(x, p(x, 0)) = 0$.
Οπότε, θεωρώντας $g(x) = p(x, 0)$ εξασφαλίσαμε την ζητούμενη ύπαρξε.
Οπότε μένει να εξασφαλίσουμε την μοναδικότητα. Έστω $g_0 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση που ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε $g_0 = g$ στο a. Για κάθε $x \in U_1$ έχουμε από τα παραπάνω πως $w(x, g_0(x)) = (x, 0) \Rightarrow (x, g_0(x)) = h(x, 0) = (x, h(x, 0)) = (x, g(x))$, οπότε έχουμε και την μοναδικότητα και αποδείξαμε το θεώρημα.

Μία παρατήρηση είναι πως η επιλογή των συντεταγμένων δεν ήταν ουσιώδης, απλά έγινε για λόγους ευκολίας στην γραφή, το θεώρημα ισχύει για όποια επιλογή συντεταγμένων επιλέξουμε για τα x και y.

Τώρα, λοιπόν, αφού αποδείξαμε το θεώρημα, θα παραθέσω δύο παραδείγματα στα οποία χρησιμεύει.

Πρώτο παράδειγμα:
Έχω την εξίσωση $y^5 + y^3 + y + x = 0$. Δεν γνωρίζουμε συγκεκριμένο τύπο που να λύνει τέτοιες εξισώσεις, όταν το πολυώνυμο είναι βαθμού μεγαλύτερου του 4. Ωστόσο, αφού $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, από το θεώρημα παίρνουμε πως υπάρχει μοναδική $g_{(a,b)}$ ώστε $f(x, g(x)) = 0$, πράγμα που μπορεί κάποιος εύκολα να δει κάνοντας τα εξής. Αρχικά, θεωρούμε την $f(x, y) = y^5 + y^3 + y + x$. Θεωρώντας την f ως πολυώνυμο του y, $f(y)$, έχουμε πως είναι περιττού βαθμού και επομένως έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση, εδώ θεωρούμε το x σταθερά. Η $f'(y) = 5y^4 + 3y^2 + 1 > 0\ \ \forall y \in \mathbb{R}$, πράγμα που σημαίνει πως έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα. Δηλαδή, για κάθε x που εισάγουμε ως σταθερά, υπάρχει μοναδική ρίζα της f που θα την ονομάσουμε $g(x)$, ώστε $f(x, g(x)) = 0$, δηλαδή το αποτέλεσμα που είχαμε πάρει αμέσως από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Δεύτερο παράδειγμα:

Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f(x, y) = x^2+y^2-5$. Τότε $f(1, 2) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Τότε το θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη C^1 συνάρτησης ορισμένη κοντά στο (1,2) ώστε $y = g(x)$ και στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να την βρούμε, είναι η $y = g(x) = (5-x^2)^{1/2}$. Εδώ αξίζει να επισημάνουμε την σημασίας του να ζητάμε η g να είναι συνεχής για να μιλάμε για μοναδικότητα, μιας και στο παράδειγμά μας υπάρχει μη συνεχής συνάρτηση που επίσης θα μας έκανε την δουλειά και είναι η $h(x) = (5-x^2)^{1/2}, \ \ x \geq 1$ και $h(x) = -(5-x^2)^{1/2}, \ \ x < 1$.

Στην συνέχεια, θα βρούμε έναν τύπο για την παράγωγο της g. Έχουμε δείξει πως $f(x, g(x)) = 0$ στο U_1. Από κανόνα αλυσίδας έχουμε πως $\frac{df}{dx} = \frac{d(f|_{U_1})}{dx} + \frac{d(f|_{U_2})}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dg}{dx} = 0 \Leftrightarrow$

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$